

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ И ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ В ГАЗЛИФТНЫХ СКВАЖИНАХ*

Ф. А. Алиев, Н. А. Исмаилов

*Ин-т прикл. математики, Бакин. гос. ун-т.
Азербайджан, AZ1148, Баку, ул. З. Халилова, 23*

We consider a time-averaged gas-lifting process. It is assumed that the gas-liquid mixture formed in the mixing zone at the border of the annual space and the layer is transmitted to the lift via an impulsive system. Due to the fact that the gas-liquid mixture, which is directed from mixture zone to exit of the well, is not fully transmitted, we assume that the volumes of the gas-liquid mixture are the same at the entrance and the exit of the lift, i.e., we impose a periodicity condition, as to obtain a maximum debit production. We give an algorithm for solving this problem. It is based on a method of finding extremums with a use of computational quasilinearization and Euler procedures realized in the MATLAB package. The results are illustrated with a particular example that shows that this approach leads to a significant increase in the debit of the well.

Розглядається усереднений за часом процес газліфта. Припускається, що газорідинна суміш, яка з'являється в зоні змішування на межі кільцевого простору і пласта, передається у підйомник через імпульсні системи. Оскільки газорідинна суміш, спрямована від зони змішування до виходу свердловини, передається не повністю, для отримання максимального дебіту з мінімальним початковим об'ємом газу припускається, що на початку і в кінці підйомника об'єми газорідинної суміші однакові (тобто вимагається виконання умови періодичності). Наведено алгоритм розв'язання цієї задачі на основі методу знаходження екстремумів, що базується на обчислювальних процедурах квазілінеаризації і Ейлера, та його реалізацію на пакеті прикладних програм MATLAB. Результати проілюстровано на прикладі, який показує, що цей підхід приводить до значного збільшення дебіту свердловини.

1. Введение. Как известно [1], задача для определения оптимального режима в процессе газлифта выполняется с помощью усреднения уравнения движения газожидкостной смеси по времени t или по глубине скважин x . Далее, для первого случая, составляя соответствующий функционал, состоящий из суммы квадратов дебита с отрицательными, а управления с положительными весовыми коэффициентами, рассматривается задача нахождения седловых точек [2, 3] для определения оптимальных режимов газлифтного процесса [4, 5]. Это и является упрощенной математической моделью увеличения добычи нефти в газлифтных скважинах.

Поскольку обычно дебит скважины теряется [6] в пределах 55–57% в подъемнике, возникает вопрос: нельзя ли в математической модели процесса при описании функционала квадрат дебита заменить на квадрат объема газожидкостной смеси (ГЖС) в начале подъемника, затем прибавить к начальным данным условие периодичности, определяющее объем ГЖС в начале и в конце подъемника?

Это, в свою очередь, является эквивалентом задачи подъема ГЖС из пласта на выход

* Поддержана совместным грантом НАНА и ГНКАР № 17, 2013–2015 г.

скважины с минимальной потерей по подъемнику. Такой подход делает актуальным создание периодической математической модели газлифтных скважин. Тогда с помощью уменьшения абсолютного значения соответствующего весового коэффициента в функционале можно добиться увеличения дебита, который при условии периодичности¹ обеспечивает максимальный объем дебита, совпадающий с объемом ГЖС в начале подъемника, т. е. потери в подъемнике уменьшаются до минимума.

Таким образом, в настоящей работе рассматривается периодическая экстремальная задача управления газлифтным процессом [1], усредненного по времени, где уравнение движения нелинейное и предложенные алгоритмы из [7, 8] неприменимы для ее решения. Поэтому здесь предлагается новый алгоритм на базе метода квазилинеаризации [9]. Далее, результаты иллюстрируются числовым примером, где показывается, что такая постановка позволяет увеличить дебиты, а также уменьшить потери ГЖС в подъемнике.

2. Постановка задачи. Известно, что неустановившееся движение газа в кольцевом пространстве и ГЖС в вертикальных трубах, т. е. в подъемнике газлифтной скважины с постоянным поперечным сечением, описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1, 10]:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho\omega_c)}{\partial t} + 2a\rho\omega_c, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial(\rho\omega_c)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2l,$$

где $P = P(x, t)$, $\omega_c = \omega_c(x, t)$ — соответственно избыточное давление над ее стационарным значением и усредненная по сечению скорость движения смеси, t , x — соответственно время и эйлерова координата, c — скорость звука в газе и ГЖС, ρ — плотность газа, нефти и ГЖС в зависимости от координаты. В подъемнике ρ определяется выражением $\rho = \alpha_1\rho_l + \alpha_2\rho_g + \alpha_3\rho_s$, в котором число слагаемых равно количеству компонентов в смеси, а α_1 , α_2 , α_3 и ρ_l , ρ_g , ρ_s — соответственно насыщенности и плотности жидкой, газовой и твердой фаз, $2a = \frac{g}{\omega_c} + \frac{\lambda_c\omega_c}{2D}$, g и λ_c — ускорение свободного падения и гидравлическое сопротивление, D — внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства. Рассмотрим движение ГЖС в вертикальных трубах постоянного поперечного сечения (см. рис. 1). $Q = \rho\omega_c F$ — массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, F — площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб, постоянная по осям.

Целью настоящей статьи является исследование газлифтного процесса за фронтом $\omega_c t$. Если решение системы уравнений (1) искать в виде²

¹ Нахождение компрессоров, зависящих от параметров скважин и обеспечивающих нужный режим, является сложной задачей. При этом условие периодичности можно заменить другими соотношениями, т. е. дебит будет требуемой частью ГЖС в начале подъемника.

² Отметим, что скорость ω_c является медленноменяющейся функцией координаты x . В настоящей работе она принимается как постоянная. Учет непостоянства ω_c принесет незначительные добавки к основным результатам.

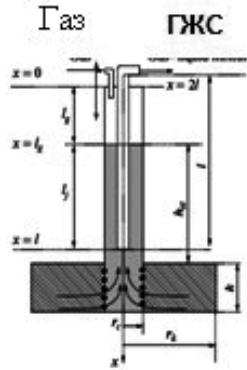


Рис. 1

$$Q = Q(\omega_c t - x), \quad P = P(\omega_c t - x), \quad (2)$$

то получим обыкновенное дифференциальное уравнение³

$$\dot{Q} = \frac{2a\rho FQ^2}{c^2\rho^2 F^2 - Q^2}, \quad S > 0, \quad Q(0) = u, \quad (3)$$

$$\dot{P} = -\frac{2ac^2\rho^2 FQ}{c^2\rho^2 F^2 - Q^2}, \quad P(0) = p_0, \quad (3')$$

где производные принимаются относительно $s = \omega_c t - x$; $c \gg \omega_c$ и все величины считаются постоянными. Поскольку первое уравнение системы (3) не зависит от решения второго уравнения, ее можно решать отдельно методом разделения переменных. Отметим, что u, p_0 из (3), (3') — начальные данные, которые играют роль управляющего воздействия. Поскольку уравнение (3) полностью не зависит от уравнения (3'), далее будем исследовать уравнение (3). Отметим, что в правой части уравнения (3) нет управляющего воздействия и оно входит в начальное условие. Поэтому далее соответствующую задачу на основе (3) назовем задачей с граничным управлением.

Как известно [1, 4, 5], сверху подаваемый газ в зоне смешивания (или на башмаке скважины) превращает поступаемые флюиды из пласта в газожидкостную смесь, которая передается в подъемник, что является сложной задачей [11, 12], требующей идентификации соответствующих параметров пласта. Поэтому для простоты здесь предполагается, что переход от конца кольцевой трубы через пласт к началу подъемника ($x = l$) выполняется с разностным уравнением [2, 6]⁴

³ На самом деле в интервалах $(0, l)$ и $(l, 2l)$ дифференциальные уравнения (3), (3') разные, т. е. в первом интервале уравнения (3), (3') соответственно описывают движение на кольцевом пространстве $(0, l)$ и в $(l, 2l)$ в подъемнике. Таким образом, параметры a, ρ, F, c принимают разные значения в этих интервалах.

⁴ Математические задачи, описываемые в многомерном случае более общими видами уравнений (1), (4), исследовались в [13].

$$Q(l+0) = \gamma Q(l-0) + \gamma_1(Q(l-0))\bar{Q}, \gamma_1, \quad (Q(l-0)) = -\delta_3(Q(l-0) - \delta_2)^2 + \delta_1^5, \quad (4)$$

где постоянные γ и $\gamma_1(Q(l-0))$ (т. е. действительные числа δ_1 , δ_2 и δ_3) выбираются из (4) для обеспечения достаточно большой ГЖС в начале подъемника, \bar{Q} — средний объем флюидов в пласте. Несмотря на то, что во втором интервале $(l, 2l)$ явно не содержится управление u , здесь наличие управления можно обеспечить через импульсную систему (4). С другой стороны, такое предположение можно считать возможным из-за малой размерности диаметра обеих труб [1, 2, 4, 5, 7].

Обычно в газлифтном процессе [4, 5] требуется минимальная подача объема газа $Q(0)$ из (3) и нахождение максимального дебита $Q(2l)$. Поэтому далее соответствующая задача оптимизации ставится только для уравнения (3): найти максимальный дебит $Q(2l)$. Эти условия требуют только нахождения седловой точки функционала

$$J = \frac{1}{2} \alpha Q^2(2l) + \beta u^2 \quad (5)$$

при условии (3), где $\alpha < 0$ и $\beta > 0$ — весовые коэффициенты. В такой постановке (3)–(5) возможно уменьшением $|\alpha|$ повысить $Q(2l)$ [14], а повышением числа β можно уменьшить подаваемый газ $u = Q(0)$. Тогда при выборе условия периодичности⁶

$$Q(l+0) = Q(2l) \quad (6)$$

из (5) получим функционал

$$J = \frac{1}{2} \bar{\alpha} Q^2(l+0) + \beta u^2, \quad (7)$$

т. е. с помощью выбора $|\alpha|$ можно для пласта взять максимальный $Q(l+0)$, где уравнение (6) уже обеспечивает максимальный дебит $Q(2l)$.

Таким образом, задача состоит в нахождении $u = Q(0)$ из (3) такого, чтобы при ограничениях (4), (6) функционал (7) принимал оптимальное значение, т. е. найти такую пару (u, Q) , которая для задачи (3), (4), (6), (7) стала бы седловой парой.

Задачу (3), (4), (6), (7) можно решать с помощью составления соответствующего расширенного функционала.

Действительно, как в [14, 15], запишем дифференциальное уравнение Эйлера–Лагранжа для экстремальных задач (3), (4), (6), (7)

$$\dot{\lambda} = -\frac{4c^2 a \rho^3 F^2 Q}{(Q^2 - c^2 \rho^2 F)^2} \lambda \quad (8)$$

⁵ Выбор $\gamma_1(Q(l-0))$ из (2) в квадратичной форме не случаен. Это связано с тем, что дебит увеличивается до оптимального значения (при увеличении газа) и после этого уменьшается до нуля [5].

⁶ Условие (6) обеспечивает без потери дебит в подъемнике. Если в реальности условие (6) не возможно обеспечить, то его можно заменить на $Q(2l) = \chi Q(l+0)$, где $0 < \chi < 1$.

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha Q(l+0) + \left(\frac{\beta}{4l} - 1\right) \lambda(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda(2l) &= 0, \\ \gamma \lambda(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda(l-0) - 2\delta_3 \lambda(l+0)(Q(l-0) - \delta_2) \bar{Q} &= 0, \\ u + \frac{\beta}{4l} \lambda(0) + \delta &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\lambda(x)$ — множитель Лагранжа, δ — постоянный параметр, содержащийся в расширенном критерии качества за счет неизвестного начального условия $u = Q(0)$ из (3).

Если каким-то образом в явном виде можно записать решение системы дифференциальных уравнений (3), (8) в интервалах $(0; l-0)$ и $(l+0; 2l)$, то имеем

$$\begin{bmatrix} Q(l-0) \\ \lambda(l-0) \end{bmatrix} = f(Q(0), \lambda(0)), \quad 0 < x < l-0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} Q(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = g(Q(l+0), \lambda(l+0)), \quad l+0 < x < 2l, \tag{11}$$

где f, g — первообразные функции правой части уравнений (3), (8). Тогда с помощью решений нелинейных алгебраических уравнений (4), (6), (9), (11) можно восстановить неизвестные $Q(0), \lambda(0), Q(l-0), \lambda(l-0), Q(l+0), \lambda(l+0), Q(2l), \lambda(2l), \delta$. Однако представление (10), (11) и даже нахождение решения нелинейных алгебраических уравнений (4), (6), (9)–(11) является трудной задачей. Поэтому используем методы квазилинеаризации [9] для нелинейных дифференциальных уравнений (3), (8), где краевые условия (4) и (9) тоже являются нелинейными.

Перейдем к построению вычислительного алгоритма для решения уравнений (3), (4), (6), (7).

Пусть заданы некоторые номинальные решения $Q^k(x), \lambda^k(x)$ задачи (3), (4), (6), (8), (9). Тогда, линеаризуя дифференциальные уравнения (3), (8) около этих номинальных траекторий, имеем следующие системы линейных дифференциальных уравнений для $(k+1)$ итерации:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(x) &= A(Q^k(x))Q(x) + B(Q^k(x)), \\ \dot{\lambda}(x) &= C(Q^k(x))\lambda(x) + D(Q^k(x))Q(x) + F(Q^k(x)), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} A(Q^k(x)) &= \frac{4c^2 a \rho^3 F^3 Q^k(x)}{((Q^k(x))^2 - c^2 \rho^2 F^2)^2}, \\ B(Q^k(x)) &= -\frac{2c^2 a \rho^3 F^3 (Q^k(x))^2 + 2a \rho F (Q^k(x))^4}{((Q^k(x))^2 - c^2 \rho^2 F^2)^2}, \end{aligned}$$

$$C(Q^k(x)) = -\frac{4c^2 a \rho^3 F^3 Q^k(x)}{((Q^k(x))^2 - c^2 \rho^2 F^2)^2}, \quad (13)$$

$$D(Q^k(x)) = -\frac{8c^4 a \rho^5 F^5 (Q^k(x))^2 - 12c^2 a \rho^3 F^3 (Q^k(x))^4 + 4c^6 a \rho^7 F^7}{((Q^k(x))^2 - c^2 \rho^2 F^2)^4} \lambda^k(x),$$

$$F(Q^k(x)) = \frac{8c^4 a \rho^5 F^5 (Q^k(x))^2 - 12c^2 a \rho^3 F^3 (Q^k(x))^4 + 4c^6 a \rho^7 F^7}{((Q^k(x))^2 - c^2 \rho^2 F^2)^4} \lambda^k(x) Q^k(x).$$

Поскольку второе уравнение (9) является нелинейным, его тоже нужно линеаризовать около этой траектории, т. е. уравнение (9) принимает следующий линейный вид:

$$\alpha Q(l+0) + \left(\frac{\beta}{4l} - 1\right) \lambda(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda(2l) = 0,$$

$$\xi(\lambda^k(l+0))Q(l-0) - \frac{\beta}{4l} \lambda(l-0) + \eta(Q^k(l-0))\lambda(l+0) = \chi(Q^k(l-0), \lambda^k(l+0)), \quad (14)$$

$$u + \frac{\beta}{4l} \lambda(0) + \delta = 0,$$

где

$$\xi(\lambda^k(l+0)) = -2\delta_3 \bar{Q} \lambda^k(l+0),$$

$$\eta(Q^k(l-0)) = \gamma - 2\delta_3 \bar{Q} (Q^k(l-0) - \delta_2),$$

$$\chi(Q^k(l-0), \lambda^k(l+0)) = -2\delta_3 \bar{Q} \lambda^k(l+0) Q^k(l-0).$$

С другой стороны, линеаризованные варианты самого условия (4) около номинальных траекторий $Q^k(x)$ имеют вид

$$Q(l+0) = \eta(Q^k(l-0))Q(l-0) + \mu(Q^k(l-0)), \quad (15)$$

$$\mu(Q^k(l-0)) = 2\delta_3 \bar{Q} Q^k(l-0) [Q^k(l-0) - \delta_2] - [\delta_3 [Q^k(l-0) - \delta_2]^2 - \delta_1] \bar{Q}.$$

Решая систему линейных дифференциальных уравнений (12) с начальными условиями (6), (14), (15), находим ее решение на $(k+1)$ -й итерации. Действительно, объединяя краевые условия (6), (14), (15), получаем

$$Kz = q, \quad (16)$$

где

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta(Q^k(l-0)) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \frac{\beta}{4l} - 1 & 0 & -\frac{\beta}{4l} & 0 \\ 0 & 0 & \xi(\lambda^k(l+0)) & -\frac{\beta}{4l} & 0 & \eta(Q^k(l-0)) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\beta}{4l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$z = [Q(0), \lambda(0), Q(l-0), \lambda(l-0), Q(l+0), \lambda(l+0), Q(2l), \lambda(2l), \delta],$$

$$q = [-\mu(Q^k(l-0)), 0, 0, \chi(Q^k(l-0), \lambda^k(l+0)), 0].$$

Таким образом, представляем решение уравнения (12) в виде [16]

$$\begin{bmatrix} Q(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = \Phi(x, 0) \begin{bmatrix} Q(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + \int_0^x \Phi(x, \delta) \begin{bmatrix} B \\ F \end{bmatrix} d\delta, \quad (18)$$

где Φ — переходная фундаментальная матрица для (12), и формулу (18) можем записать в более удобном для реализации виде на концах интервала $0 < x < l - 0$:

$$\begin{bmatrix} Q(l-0) \\ \lambda(l-0) \end{bmatrix} = \Phi(l, 0) \begin{bmatrix} Q(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + N(l, 0), \quad (19)$$

а для $l + 0 < x < 2l$

$$\begin{bmatrix} Q(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = \Phi(2l, l) \begin{bmatrix} Q(l+0) \\ \lambda(l+0) \end{bmatrix} + N(2l, l). \quad (20)$$

Отметим, что $N(l, 0)$ и $N(2l, l)$ из (19) и (20) определяются в виде [16]

$$N(i, j) = \int_l^j \Phi(j, \delta) \begin{bmatrix} B \\ F \end{bmatrix} d\delta.$$

Таким образом, имеем 9 линейных алгебраических уравнений (16), (19), (20) относительно z

$$\begin{bmatrix} & & K & & & & & & \\ \Phi(l, 0) & E & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \Phi(2l, l) & E & 0 & & & & \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} q \\ N(l, 0) \\ N(2l, l) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Решая эти уравнения относительно z , определяем $Q(0) = u$ — объем газа в устье скважины, $Q(l+0)$ — оптимальный объем ГЖС в начале подъемника, который определяет искомый дебит $Q(2l) = Q(l+0)$.

Теперь сформулируем пошаговый алгоритм:

1. Ввод исходных данных и параметров a, ρ, F, c, l из (3).
2. Выбор номинальных траекторий $Q^k(x)$ и управлений u^k .
3. Вычисление $A(Q^k(x)), B(Q^k(x)), C(Q^k(x)), D(Q^k(x)), F(Q^k(x))$ из (13).
4. Формирование фундаментальных матриц из линейных дифференциальных уравнений (12).
5. Решение системы линейных алгебраических уравнений (21) относительно z .
6. Решение системы дифференциальных уравнений (12) и нахождение $(k+1)$ -й итераций $Q^{k+1}(x)$ и $u^{k+1}(x)$.

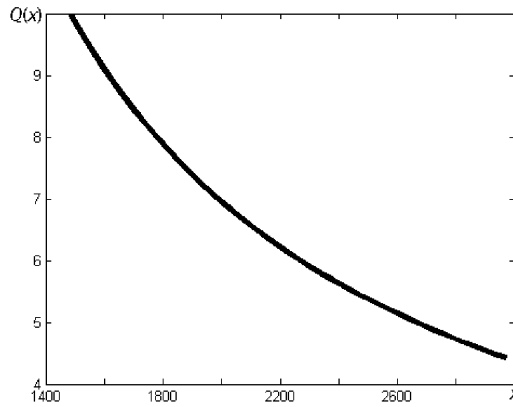


Рис. 2

7. Задание достаточно малого числа ε и проверка условия $\left| \frac{\partial J}{\partial u} \right| < \varepsilon$, где $\frac{\partial J}{\partial u} = u + \frac{\beta}{4l} \lambda(0) + \delta$:
 если оно удовлетворяется, то вычисления прекращаются,
 в противном случае переходим к шагу 2.
 Реализацию предложенного алгоритма проследим на следующем примере.
 Пусть в (3) в интервале $0 < x < l$

$$l = 1485m, \quad \rho_1 = 0,717kg/m^3, \quad F_1 = \sqrt{114^2 - 73^2} \times 10^{-3}m,$$

$$c_1 = 331m/c, \quad \omega_c^1 = 46,5225m/c, \quad \lambda_1 = 0,$$

а в интервале $l < x < 2l$

$$\rho_2 = 700kg/m^3, \quad F_2 = 0,073m, \quad c_2 = 850m/c, \quad \omega_A^2 = 0,0546m/c, \quad \lambda_c^2 = 0,23$$

и

$$l = 1485, \quad g = 9,81.$$

Сначала приведем решение задачи (3)–(5) без условия периодичности (6). Тогда для $Q(x)$, $l < x < 2l$, имеем график [6], построенный на рис. 2. Здесь в начале и в конце подъемника объем ГЖС будет

$$Q(l+0) = 9,9834, \quad Q(2l) = 4,4223.$$

Однако, если рассматривается периодический режим [17, 18], т. е. к задаче оптимизации (3)–(5) добавляется и условие периодичности (6) [19, 20], то картина (рис. 2) меняется. Таким образом, для $Q(x)$ имеем график, построенный на рис. 3. Здесь в начале и в конце подъемника объем ГЖС имеет вид $Q(l+0) = 9,968973$, $Q(2l) = 9,968128$.

Последний график (см. рис. 3), в отличие от [6], для $Q(x)$ дает совсем другую картину, т. е. условие (6) фактически обеспечивает безпотерьный режим в подъемнике ГЖС (де-

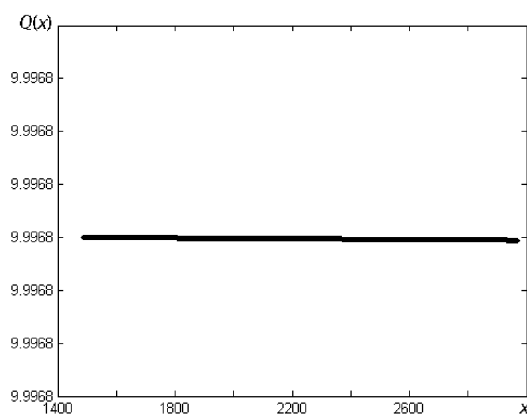


Рис. 3

бит составляет 98% от ГЖС в начале подъемника). Обычно эти потери, как видно из рис. 2, составляют 44% объема ГЖС в начале подъемника [6].

Таким образом, приводится новая математическая модель и соответствующая задача управления газлифта на основе метода периодической оптимизации [17–20], обеспечивающая добычу нефти без потери в подъемнике.

1. *Алиев Ф. А., Ильясов М. Х., Джамалбеков М. А.* Моделирование работы газлифтной скважины // Докл. НАН Азербайджана. — 2008. — № 4. — С. 107–116.
2. *Aliev F. A., Ismailov N. A., Temirbekova L. N.* Methods of solving the choice of extremal modes for the gas-lift process // Appl. Comput. Math. — 2012. — **11**, № 3. — P. 348–357.
3. *Aliev F. A., Ismailov N. A.* Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process // Appl. Comput. Math. — 2013. — **12**, № 3. — P. 306–313.
4. *Qurbanov R. S., Nuriyev N. B.* Technological control and optimization problems in oil production: Theory and practice // Appl. Comput. Math. — 2013. — **12**, № 3. — P. 314–324.
5. *Шуров В. И.* Технология и техника добычи нефти. — М.: Недра, 1983. — 510 с.
6. *Aliev F. A., Jamalbayov M. A., Nasibov S. M.* Mathematical modeling of the well-bed system while gaslift operation considering the influence of the depth effect // TWMS J. Pure and Appl. Math. — 2010. — **1**, № 1. — P. 5–13.
7. *Guliyev H. F., Sharifov Y. A.* Formula for the gradient in the optimal control problem for the non-linear system of the hyperbolic equations with non-local boundary conditions // TWMS J. Pure and Appl. Math. — 2012. — **3**, № 1. — P. 111–121.
8. *Aliev F. A., Djmalbekov M. A., Ilyasov M. Kh.* Mathematical simulation and control gas lift // J. Comput. and System. Sci. — 2011. — **50**, № 5. — P. 805–814.
9. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968. — 183 с.
10. *Алиев Ф. А., Ильясов М. Х., Нуриев Н. Б.* Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикл. механика. — 2010. — **46**, № 6. — С. 113–122.
11. *Temirbekova L. N., Dairbaeva G.* Gradient and direct method of solving Gelfand and Levitan integral equation // Appl. Comput. Math. — 2013. — **12**, № 2. — P. 234–246.
12. *Apostolyuk A. S., Larin V. B.* Updating of linear stationary dynamic system parameters // Appl. Comput. Math. — 2011. — **10**, № 3. — P. 402–408.
13. *Самойленко А. М., Ронто А. И.* Численно-аналитические методы исследования решения краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1985. — 224 с.

14. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
15. *Алиев Ф.А.* Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. — Баку: Элм, 1989. — 320 с.
16. *Андреев Ю. И.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
17. *Ларин В. Б.* Оптимизация периодических систем // Докл. АН СССР. — 1978. — **239**, № 1. — С. 67–70.
18. *Katriel G.* Existence of periodic solutions for the periodically forced SIR model // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — P. 359–366.
19. *Алиев Ф. А.* Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. — 1985. — № 6. — С. 138–146.
20. *Алиев Ф. А.* Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. — 1986. — № 2. — С. 345–347.

*Получено 27.05.13,
после доработки — 29.12.13*