

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВИНЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЕЛІПТИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ТОНКІЙ КАСКАДНІЙ ОБЛАСТІ

А. В. Клевцовський, Т. А. Мельник

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка

Україна, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

e-mail: melnyk@imath.kiev.ua

We construct and substantiate an asymptotic expansion of a solution to a nonhomogeneous Neumann boundary-value problem for the Poisson equation for a thin cascade domain, with the right-hand side of the equation depending on both the longitudinal and transversal variables. We find asymptotic energy and uniform pointwise estimates for the difference between a solution of the initial problem and a solution of the corresponding limit problem.

Побудовано і обґрунтовано асимптотичне розкладання для рішення неоднорідної крайової задачі Неймана для рівняння Пуассона з правою частиною, зависящою від продольної і поперечної змінних, в тонкій каскадній області. Отримано асимптотичні енергетичні та рівномірні поточечні оцінки для різниці між рішенням вихідної задачі та рішенням відповідної граничної задачі.

1. Вступ. Крайовим задачам у тонких областях (один із лінійних розмірів такої області значно менший за інші) присвячено велику кількість статей та книг (див., наприклад, [1 – 12]). Причина такої популярності цих задач полягає у широких можливостях застосування результатів до прикладних задач. Незважаючи на величезний прогрес обчислювальних засобів, неможливо знайти прийнятні чисельні розв'язки крайових задач у таких областях, оскільки достатньо мала товщина області природно приводить до подовження часу обчислень та істотно ускладнює підтримання прийняттого рівня точності. Таким чином, основним методом дослідження є асимптотичний аналіз. Мета цього аналізу полягає у розробці строгих асимптотичних методів для крайових задач у тонких областях.

В останні роки у зв'язку з розвитком новітніх технологій пористих, композитних та інших мікронеоднорідних матеріалів та біологічних структур зростає інтерес до дослідження крайових задач у тонких областях більш складної структури: в тонких перфорованих областях з швидко змінною товщиною та різними граничними розмірностями [8, 15, 16], у тонких областях з швидкозмінною товщиною [8, 13–15, 21, 22], у з'єднаннях тонких областей [20, 24, 27, 30, 31], у густих з'єднаннях тонких областей [25, 26, 29], у періодичних сітках та каркасах [23, 28].

Дослідження різних фізичних та біологічних процесів у каналах є актуальним для багатьох галузей природознавства (див., наприклад, [18] і наведену там бібліографію). Великий інтерес викликає в дослідників поява різних ефектів в околах локальних нерегулярностей геометрії (звужень або розширень) каналів (наприклад, налипання на стінках, зварювальні шви, стенози). У [18, 19] підсумовано результати останніх теоретичних, експериментальних та чисельних досліджень течій і пульсацій пристінного тиску в каналах з різними типами звуження.

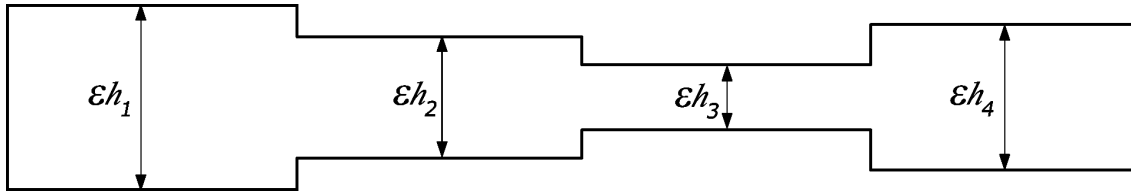


Рис. 1. Тонка каскадна область.

В роботі [20] методами формального асимптотичного аналізу отримано граничну задачу для однорідної задачі Неймана для рівняння Пуассона з правою частиною, яка залежить тільки від однієї поздовжньої змінної, в з'єднанні тонких областей. Показано, що локальна геометрична неоднорідність у зоні з'єднання не впливає на вигляд граничної задачі. Однак теореми збіжності та асимптотичних оцінок не було доведено.

Зауважимо, що оцінки похибок і швидкості збіжностей є дуже важливими як в обґрунтуванні адекватності одновимірних (двовимірних) моделей реальним тривимірним тонким тілам, так і в дослідженні крайових ефектів та ефектів локальних (внутрішніх) неоднорідностей в механіці та прикладній математиці. Такі оцінки можуть бути доведені шляхом розробки нових асимптотичних методів.

У даній статті ми починаємо розробку асимптотичних методів для крайових задач у тонких каскадних областях, які є об'єднанням тонких областей з різною товщиною (рис. 1). Для побудови формального асимптотичного розвинення було узагальнено асимптотичний метод для тонких областей сталої товщини з монографії [12]. Зокрема, було введено додатковий внутрішній примежовий шар в зонах з'єднання тонких областей та досліджено його властивості. Таким чином, асимптотика для розв'язку складається з трьох частин: регулярної частини, примежової частини біля крайніх вертикальних сторін та внутрішньої примежової асимптотики в зонах з'єднання.

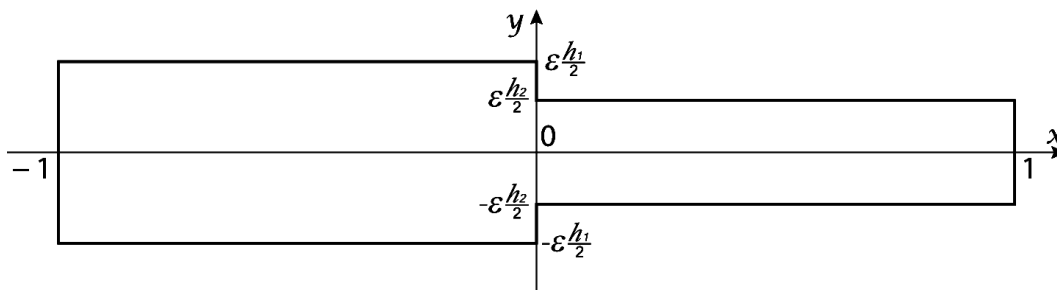
Зрозуміло, що немає принципової різниці між побудовою асимптотики для розв'язку крайової задачі в тонкій каскадній області, яка складається з двох тонких областей різної товщини, та в тонкій каскадній області, яка складається з n тонких областей різної товщини. Тому в даній роботі вивчається двоступінчаста тонка каскадна область. Також для спрощення викладок розглядається двовимірний випадок.

Метою роботи є побудова та обґрунтування асимптотичного розвинення для розв'язку неоднорідної крайової задачі Неймана для рівняння Пуассона з правою частиною, яка залежить від поздовжньої і поперечної змінних, у тонкій каскадній області, що складається з двох тонких прямокутників різної малої товщини εh_1 та εh_2 відповідно.

Стаття містить чотири пункти. У другому пункті побудовано формальну асимптотика для розв'язку задачі (1). Третій пункт присвячено обґрунтуванню асимптотики (теорема 1) та доведенню асимптотичних оцінок для головних членів асимптотики (наслідок 1). У четвертому пункті проведено аналіз отриманих результатів та показано можливі узагальнення.

1.1. Постановка задачі. Модельна тонка каскадна область Ω_ε складається з двох тонких прямокутників

$$\Omega_\varepsilon^{(1)} = \left((-1, 0) \times \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \right) \quad \text{та} \quad \Omega_\varepsilon^{(2)} = \left((0, 1) \times \Upsilon_\varepsilon^{(2)} \right),$$

Рис. 2. Модельна тонка каскадна область Ω_ε .

де $\Upsilon_\varepsilon^{(i)} = \left(-\varepsilon \frac{h_i}{2}, \varepsilon \frac{h_i}{2}\right)$, $i = 1, 2$, ε – малий параметр; h_1 та h_2 – фіксовані додатні сталі, $h_2 < h_1$ (рис. 2).

В області $\Omega_\varepsilon = ((-1, 0) \times \Upsilon_\varepsilon^{(1)}) \cup ([0, 1) \times \Upsilon_\varepsilon^{(2)})$ розглянемо мішану крайову задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon(x, y) &= f\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right), \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \\ -\partial_y u_\varepsilon(x, y)|_{y=\pm\varepsilon \frac{h_i}{2}} &= \varepsilon \varphi_\pm^{(i)}(x), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \\ u_\varepsilon(-1, y) &= 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)}, \\ u_\varepsilon(1, y) &= 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \\ \partial_x u_\varepsilon(x, y)|_{x=0} &= 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \setminus \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \\ [u_\varepsilon]|_{x=0} &= 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \\ [\partial_x u_\varepsilon]|_{x=0} &= 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $I_1 = (-1, 0)$, $I_2 = (0, 1)$, $[u]|_{x=0} = u(x, y)|_{x=0+} - u(x, y)|_{x=0-}$ – стрибок функції, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_{xx}^2 = \partial^2/\partial x^2$. Будемо вважати, що задані функції f та $\{\varphi_\pm^{(i)}\}$ є гладкими у відповідних областях визначення.

З теорії лінійних крайових задач випливає, що при кожному фіксованому значенні ε для задачі (1) існує єдиний узагальнений розв'язок u_ε з простору Соболева $H^1(\Omega_\varepsilon)$, сліди якого на крайніх вертикальних сторонах області Ω_ε дорівнюють нулю, тобто $u_\varepsilon|_{x=\pm 1} = 0$, та який задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx \, dy = \int_{\Omega_\varepsilon} f \psi \, dx \, dy \mp \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{I_i} \varphi_\pm^{(i)} \psi \, dx \tag{2}$$

для довільної функції $\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ такої, що $\psi|_{x=\pm 1} = 0$.

Зауваження 1. У правій частині тотожності (2) введено скорочення запису

$$\mp \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{I_i} \varphi_\pm^{(i)} \psi \, dx := -\varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{I_i} \varphi_+^{(i)} \psi \, dx + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{I_i} \varphi_-^{(i)} \psi \, dx,$$

яке будемо використовувати в подальшому.

Метою роботи є побудова й обґрунтування асимптотичного розвинення для розв'язку u_ε задачі (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Формальна побудова асимптотичного ряду. 2.1. Регулярна частина асимптотики. Регулярну частину асимптотики будемо шукати у вигляді

$$u_\infty^{(i)} := \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(u_k^{(i)} \left(x, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-2} \omega_k^{(i)}(x) \right), \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Формально підставивши ряд (3) в диференціальне рівняння та першу крайову умову задачі (1), отримуємо

$$\begin{aligned} - \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \partial_{xx}^2 u_k^{(i)}(x, \eta) - \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^{k-2} \partial_{\eta\eta}^2 u_k^{(i)}(x, \eta) - \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^{k-2} \frac{d^2 \omega_k^{(i)}}{dx^2}(x) &\approx f(x, \eta), \quad \eta = \frac{y}{\varepsilon}, \\ - \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \partial_\eta u_k^{(i)} \left(x, \pm \frac{h_i}{2} \right) &\approx \varepsilon^2 \varphi_\pm^{(i)}(x). \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , виводимо рекурентні співвідношення крайових задач для визначення коефіцієнтів розкладу (3). Розглянемо задачу для величини $u_2^{(i)}$:

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta\eta}^2 u_2^{(i)}(x, \eta) &= f(x, \eta) + \frac{d^2 \omega_2^{(i)}}{dx^2}(x), \quad \eta \in \Upsilon_i, \\ -\partial_\eta u_2^{(i)}(x, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_i}{2}} &= \varphi_\pm^{(i)}(x), \quad x \in I_i, \\ \langle u_2^{(i)}(x, \cdot) \rangle_{\Upsilon_i} &= 0, \quad x \in I_i, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\Upsilon_i = \left(-\frac{h_i}{2}, \frac{h_i}{2} \right)$, $\langle u(x, \cdot) \rangle_{\Upsilon_i} := \int_{\Upsilon_i} u(x, \eta) d\eta$, $i = 1, 2$. При кожному значенні i задача (4) — це задача Неймана для звичайного диференціального рівняння відносно змінної $\eta \in \Upsilon_i$; змінна x сюди входить як параметр. Записуючи необхідну та достатню умову розв'язності задачі (4), отримуємо диференціальне рівняння для функції $\omega_2^{(i)}$:

$$-h_i \frac{d^2 \omega_2^{(i)}}{dx^2}(x) = \int_{\Upsilon_i} f(x, \eta) d\eta - \varphi_+^{(i)}(x) + \varphi_-^{(i)}(x), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Нехай $\omega_2^{(i)}$ — деякий розв'язок диференціального рівняння (5) (крайові умови для цього диференціального рівняння будуть визначені пізніше). Тоді розв'язок задачі (4) існує та визначається з точністю до адитивної сталої.

Для знаходження коефіцієнтів $u_3^{(i)}$, $i = 1, 2$, отримуємо такі задачі:

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta\eta}^2 u_3^{(i)}(x, \eta) &= \frac{d^2 \omega_3^{(i)}}{dx^2}(x), \quad \eta \in \Upsilon_i, \\ -\partial_\eta u_3^{(i)}(x, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_i}{2}} &= 0, \quad x \in I_i, \\ \langle u_3^{(i)}(x, \cdot) \rangle_{\Upsilon_i} &= 0, \quad x \in I_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Повторюючи попередні міркування, знаходимо $u_3^{(i)} \equiv 0$, $\frac{d^2\omega_3^{(i)}}{dx^2}(x) = 0$, $x \in I_i$, $i = 1, 2$.

Розглянемо крайові задачі для функцій $u_k^{(i)}$ $k \geq 4$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta\eta}^2 u_k^{(i)}(x, \eta) &= \frac{d^2\omega_k^{(i)}}{dx^2}(x) + \partial_{xx}^2 u_{k-2}^{(i)}(x, \eta), \quad \eta \in \Upsilon_i, \\ -\partial_{\eta} u_k^{(i)}(x, \eta) \Big|_{\eta=\pm\frac{h_i}{2}} &= 0, \quad x \in I_i, \\ \langle u_k^{(i)}(x, \cdot) \rangle_{\Upsilon_i} &= 0, \quad x \in I_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Припустимо, що ми визначили всі коефіцієнти $u_2^{(i)}, \dots, u_{k-1}^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \dots, \omega_{k-1}^{(i)}$ розкладу (3). Визначимо $u_k^{(i)}, \omega_k^{(i)}$ із задачі (7). З умови розв'язності задачі (7) випливає, що

$$h_i \frac{d^2\omega_k^{(i)}}{dx^2}(x) = - \int_{\Upsilon_i} \partial_x^2 u_{k-2}^{(i)}(x, \eta) d\eta = -\partial_x^2 \left(\int_{\Upsilon_i} u_{k-2}^{(i)}(x, \eta) d\eta \right) = 0,$$

тобто $\omega_k^{(i)}$ — лінійна функція, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d^2\omega_k^{(i)}}{dx^2}(x) = 0, \quad x \in I_i. \quad (8)$$

Зауваження 2. Крайові умови для диференціальних рівнянь (5), (8) наперед невідомі і будуть знайдені на наступних етапах побудови асимптотики.

Таким чином, однозначно визначається розв'язок задачі (7), а отже, рекурентна процедура для визначення коефіцієнтів ряду (3) розв'язується однозначно.

Зауваження 3. З рекурентної процедури крайових задач (7) легко отримати, що для непарних $k = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, функції $u_{2p+1}^{(i)}$, $i = 1, 2$, тотожно дорівнюють нулю.

2.2. Примежова асимптотика біля вертикальних меж області Ω_ε . У попередньому пункті було розглянуто регулярну асимптотику, яка враховувала неоднорідність правої частини диференціального рівняння з (1) та крайової умови на горизонтальних сторонах тонкої каскадної області Ω_ε . Далі побудуємо примежову частину асимптотики, яка буде нейтралізувати відхил, що залишає регулярна частина асимптотики на лівому $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ та правому $\Omega_\varepsilon^{(2)}$ кінцях.

На лівій вертикальній частині межі області $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ будемо шукати примежову асимптотику для розв'язку у вигляді

$$\Pi_\infty^{(1)} := \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \Pi_k^{(1)} \left(\frac{1+x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right). \quad (9)$$

Підставивши (9) в (1) і зібравши коефіцієнти при однакових степенях ε , отримуємо мішану крайову задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi\eta}\Pi_k^{(1)}(\xi, \eta) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in (0, +\infty) \times \Upsilon_1, \\ -\partial_\eta\Pi_k^{(1)}(\xi, \eta)\Big|_{\eta=\pm\frac{h_1}{2}} &= 0, \quad \xi \in (0, +\infty), \\ \Pi_k^{(1)}(0, \eta) &= \Phi_k^{(1)}(\eta), \quad \eta \in \Upsilon_1, \\ \Pi_k^{(1)}(\xi, \eta) &\rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad \eta \in \Upsilon_1, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\xi = \frac{1+x}{\varepsilon}$, $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$, $\Phi_k^{(1)} = -\omega_{k+2}^{(1)}(-1)$, $k = 0, 1$,

$$\Phi_k^{(1)}(\eta) = -u_k^{(1)}(-1, \eta) - \omega_{k+2}^{(1)}(-1), \quad k \geq 2.$$

Використовуючи метод відокремлення змінних, знаходимо розв'язок задачі (10):

$$\Pi_k^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[a_p^{(1)} e^{-\frac{2p\pi}{h_1}\xi} \cos\left(\frac{2p\pi}{h_1}\eta\right) + b_p^{(1)} e^{-\frac{(2p+1)\pi}{h_1}\xi} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{h_1}\eta\right) \right], \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} a_p^{(1)} &= \frac{2}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \Phi_k^{(1)}(\eta) \cos\left(\frac{2p\pi}{h_1}\eta\right) d\eta, \quad b_p^{(1)} = \frac{2}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \Phi_k^{(1)}(\eta) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{h_1}\eta\right) d\eta, \\ a_0^{(1)} &= \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \Phi_k^{(1)}(\eta) d\eta = \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} u_k^{(1)}(-1, \eta) d\eta - \omega_{k+2}^{(1)}(-1) = -\omega_{k+2}^{(1)}(-1). \end{aligned}$$

З четвертої умови в (10) випливає, що коефіцієнт $a_0^{(1)}$ повинен дорівнювати нулю. Таким чином, приходимо до крайових умов для функцій $\{\omega_{k+2}^{(1)}\}$:

$$\omega_{k+2}^{(1)}(-1) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Примежову асимптотику на правому кінці шукаємо у вигляді

$$\Pi_\infty^{(2)} := \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \Pi_k^{(2)}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right). \quad (13)$$

Для визначення коефіцієнтів $\{\Pi_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ отримаємо такі крайові задачі:

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi^* \eta} \Pi_k^{(2)}(\xi^*, \eta) &= 0, \quad (\xi^*, \eta) \in (0, +\infty) \times \Upsilon_2, \\ -\partial_\eta \Pi_k^{(2)}(\xi^*, \eta)|_{\eta=\pm \frac{h_2}{2}} &= 0, \quad \xi^* \in (0, +\infty), \\ \Pi_k^{(1)}(0, \eta) &= \Phi_k^{(2)}(\eta), \quad \eta \in \Upsilon_2, \\ \Pi_k^{(1)}(\xi^*, \eta) &\rightarrow 0, \quad \xi^* \rightarrow +\infty, \quad \eta \in \Upsilon_2, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\xi^* = \frac{1-x}{\varepsilon}$, $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$, $\Phi_k^{(2)} = -\omega_{k+2}^{(2)}(1)$, $k = 0, 1$,

$$\Phi_k^{(2)}(\eta) = -u_k^{(2)}(1, \eta) - \omega_{k+2}^{(2)}(1), \quad k \geq 2.$$

Аналогічно знаходимо розв'язок задачі (14):

$$\Pi_k^{(2)}(\xi^*, \eta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[a_p^{(2)} e^{-\frac{2p\pi}{h_2} \xi^*} \cos\left(\frac{2p\pi}{h_2} \eta\right) + b_p^{(2)} e^{-\frac{(2p+1)\pi}{h_2} \xi^*} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{h_2} \eta\right) \right], \quad (15)$$

де

$$a_p^{(2)} = \frac{2}{h_2} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \Phi_k^{(2)}(\eta) \cos\left(\frac{2p\pi}{h_2} \eta\right) d\eta, \quad b_p^{(2)} = \frac{2}{h_2} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \Phi_k^{(2)}(\eta) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{h_2} \eta\right) d\eta,$$

$$a_0^{(2)} = \frac{1}{h_2} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \Phi_k^{(2)}(\eta) d\eta = \frac{1}{h_2} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} u_k^{(2)}(1, \eta) d\eta - \omega_{k+2}^{(2)}(1) = -\omega_{k+2}^{(2)}(1).$$

З четвертої умови в (14) випливає, що коефіцієнт $a_0^{(2)}$ повинен дорівнювати нулю. Це можливо тоді, коли

$$\omega_{k+2}^{(2)}(1) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (16)$$

Зауваження 4. Оскільки $u_k^{(i)} \equiv 0$ для $k = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, то $\Phi_k^{(i)} = 0$, а тому

$$\Pi_0^{(i)} \equiv 0, \quad \Pi_{2p-1}^{(i)} \equiv 0, \quad p \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2.$$

Крім того, із зображень (11) та (15) випливають асимптотичні оцінки

$$\begin{aligned} \Pi_k^{(1)}(\xi, \eta) &= \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\pi}{h_1} \xi\right)\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \\ \Pi_k^{(2)}(\xi^*, \eta) &= \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\pi}{h_2} \xi^*\right)\right) \quad \text{при } \xi^* \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Співвідношення (12) та (16) задають крайові умови в точках -1 та 1 для кожної з функцій $\omega_k^{(1)}$ та $\omega_k^{(2)}$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) відповідно. У наступному пункті ми вяснимо які умови для цих функцій потрібно задавати в точці 0 .

2.3. Внутрішня примежова частина асимптотики. Розглянемо, що відбувається з регулярною частиною асимптотики в зоні з'єднання двох тонких областей $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ і $\Omega_\varepsilon^{(2)}$. Підставивши формально регулярні частини асимптотики $u_\infty^{(1)}$ та $u_\infty^{(2)}$ в умови спряження задачі (1), отримуємо співвідношення

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(u_k^{(1)} \left(0, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-2} \omega_k^{(1)}(0) \right) \approx \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(u_k^{(2)} \left(0, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-2} \omega_k^{(2)}(0) \right), \quad (18)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\partial_x u_k^{(1)} \left(0, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-2} \frac{d\omega_k^{(1)}}{dx} (0) \right) \approx \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\partial_x u_k^{(2)} \left(0, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-2} \frac{d\omega_k^{(2)}}{dx} (0) \right). \quad (19)$$

Прирівняємо, наприклад, відповідні коефіцієнти при однакових степенях ε в (18):

$$\omega_k^{(2)}(0) = \omega_k^{(1)}(0) \quad \text{при} \quad k = 2 \quad \text{та} \quad k = 2p + 1,$$

$$u_k^{(2)} \left(0, \frac{y}{\varepsilon} \right) - u_k^{(1)} \left(0, \frac{y}{\varepsilon} \right) = \omega_{k+2}^{(2)}(0) - \omega_{k+2}^{(1)}(0) \quad \text{при} \quad k = 2p, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Оскільки в лівій частині (20) при фіксованому значенні k стоїть визначена величина, яка залежить від швидкої змінної $\frac{y}{\varepsilon}$ і не обов'язково дорівнює нулю, то неможливо у правій частині вибрати так сталу $\omega_{k+2}^{(2)}(0) - \omega_{k+2}^{(1)}(0)$, щоб виконувалась рівність (20).

Таким чином, необхідно ввести додаткову внутрішню асимптотику в зоні з'єднання, щоб зняти відхил, який залежить від швидкої змінної $\frac{y}{\varepsilon}$, у першій умові спряження задачі (1) у зоні з'єднання двох тонких областей $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ і $\Omega_\varepsilon^{(2)}$. Внутрішнє розвинення будемо шукати у вигляді

$$N_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k N_k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right). \quad (21)$$

Перейшовши в зоні з'єднання до координат $\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \eta = \frac{y}{\varepsilon}$, а потім спрямувавши параметр ε до нуля, отримуємо нескінченну область

$$\Xi = ((-\infty, 0) \times \Upsilon_1) \cup ([0, +\infty) \times \Upsilon_2),$$

яка є об'єднанням півсмуг $\Xi^{(1)} = (-\infty, 0) \times \Upsilon_1$ та $\Xi^{(2)} = (0, +\infty) \times \Upsilon_2$.

Введемо такі позначення для частин межі області Ξ :

$\partial\Xi_{\parallel} = \{0\} \times (\Upsilon_1 \setminus \Upsilon_2)$ — вертикальні частини межі $\partial\Xi$,

$\partial\Xi_{\perp}^{(i)}$ — горизонтальні частини межі $\partial\Xi^{(i)}$, $i = 1, 2$,

$\partial\Xi_{=} = \partial\Xi_{=}^{(1)} \cup \partial\Xi_{=}^{(2)}$.

Підставивши (21) в (1), врахувавши залишки, які залишають регулярні частини асимптотики на вертикальних сторонах і в зоні з'єднання, та прирівнявши відповідні коефіцієнти при однакових степенях ε , отримаємо такі співвідношення для коефіцієнтів $\{N_k\}$:

при парних значеннях $k = 2p, p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} -\Delta N_{2p} &= 0 \quad \text{в } \Xi, \\ \partial_\eta N_{2p} &= 0 \quad \text{на } \partial\Xi_-, \\ \partial_\xi N_{2p} &= \Theta_{2p} \quad \text{на } \partial\Xi_\parallel, \\ [N_{2p}]|_{\xi=0} &= \Psi_{2p} \quad \text{на } \Upsilon_2, \\ [\partial_\xi N_{2p}]|_{\xi=0} &= \Phi_{2p} \quad \text{на } \Upsilon_2, \end{aligned} \tag{22}$$

де

$$\Theta_{2p}(\eta) = -\frac{d\omega_{2p+1}^{(1)}}{dx}(0), \quad \eta \in \partial\Xi_\parallel,$$

$$\Psi_{2p}(\eta) = u_{2p}^{(1)}(0, \eta) - u_{2p}^{(2)}(0, \eta), \quad \eta \in \Upsilon_2,$$

$$\Phi_{2p}(\eta) = \frac{d\omega_{2p+1}^{(1)}}{dx}(0) - \frac{d\omega_{2p+1}^{(2)}}{dx}(0), \quad \eta \in \Upsilon_2;$$

при непарних $k = 2p + 1, p \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} -\Delta N_{2p+1} &= 0 \quad \text{в } \Xi, \\ \partial_\eta N_{2p+1} &= 0 \quad \text{на } \partial\Xi_-, \\ \partial_\xi N_{2p+1} &= \Theta_{2p+1} \quad \text{на } \partial\Xi_\parallel, \\ [N_{2p+1}]|_{\xi=0} &= 0 \quad \text{на } \Upsilon_2, \\ [\partial_\xi N_{2p+1}]|_{\xi=0} &= \Phi_{2p+1} \quad \text{на } \Upsilon_2, \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$\Theta_{2p+1}(\eta) = -\partial_x u_{2p}^{(1)}(0, \eta) - \frac{d\omega_{2p+2}^{(1)}}{dx}(0), \quad \eta \in \partial\Xi_\parallel,$$

$$\Phi_{2p+1}(\eta) = \partial_x u_{2p}^{(1)}(0, \eta) - \partial_x u_{2p}^{(2)}(0, \eta) + \frac{d\omega_{2p+2}^{(1)}}{dx}(0) - \frac{d\omega_{2p+2}^{(2)}}{dx}(0), \quad \eta \in \Upsilon_2.$$

Зауважимо, що $u_0 \equiv 0, u_1 \equiv 0$.

Для того щоб в'яснити чи існують функції, які задовольняють співвідношення задач

(22) та (23), дослідимо спочатку розв'язність крайової задачі

$$\begin{aligned} -\Delta N(\xi, \eta) &= F(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Xi, \\ \partial_\eta N(\xi, \eta)|_{\eta=\pm \frac{h_i}{2}} &= \pm B_\pm^{(i)}(\xi), \quad (-1)^i \xi \in (0, +\infty), \quad i = 1, 2, \\ \partial_\xi N(\xi, \eta)|_{\xi=0} &= G(\eta), \quad \eta \in \Upsilon_1 \setminus \Upsilon_2, \\ [N]|_{\xi=0} &= \Psi(\eta), \quad \eta \in \Upsilon_2, \\ [\partial_\xi N]|_{\xi=0} &= \Phi(\eta), \quad \eta \in \Upsilon_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Нехай $C_{0,\xi}^\infty(\bar{\Xi})$ — простір нескінченно диференційовних функцій на $\bar{\Xi}$, які є фінітними відносно змінної ξ , тобто

$$\forall v \in C_{0,\xi}^\infty(\bar{\Xi}) \quad \exists R > 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \bar{\Xi} \quad |\xi| \geq R : v(\xi, \eta) = 0.$$

Означимо простір $\mathcal{H} := \overline{(C_{0,\xi}^\infty(\bar{\Xi}), \|\cdot\|_{\mathcal{H}})}$, де

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\int_{\Xi} |\nabla v(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta + \int_{\Xi} |v(\xi, \eta)|^2 |\rho(\xi)|^2 d\xi d\eta},$$

а функція $\rho(\xi) = (1 + |\xi|)^{-1}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Випадок $\Psi \equiv 0$. Візьмемо довільну функцію $v \in C_{0,\xi}^\infty(\bar{\Xi})$, домножимо диференціальне рівняння задачі (24) і зінтегруємо по області Ξ . Використовуючи формулу Гріна–Остроградського, отримуємо інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Xi} \nabla N \cdot \nabla v d\xi d\eta &= \int_{\Xi} Fv d\xi d\eta + \int_{-\infty}^0 B_\pm^{(1)}(\xi)v\left(\xi, \pm \frac{h_1}{2}\right) d\xi + \int_0^{+\infty} B_\pm^{(2)}(\xi)v\left(\xi, \pm \frac{h_2}{2}\right) d\xi + \\ &+ \int_{\Upsilon_1 \setminus \Upsilon_2} G(\eta)v(0, \eta) d\eta - \int_{\Upsilon_2} \Phi(\eta)v(0, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (25)$$

Означення 1. Функція N з простору \mathcal{H} називається узагальненим розв'язком задачі (24), якщо для довільної функції $v \in \mathcal{H}$ має місце тотожність (25).

З леми 4.1, зауважень 4.1 та 4.2 [17] випливає таке твердження.

Твердження 1. Нехай $\rho^{-1}F \in L^2(\Xi)$, $\rho^{-1}B_\pm^{(2)} \in L^2(0, +\infty)$, $\rho^{-1}B_\pm^{(1)} \in L^2(-\infty, 0)$, $G \in L^2(\Upsilon_1 \setminus \Upsilon_2)$ та $\Phi \in L^2(\Upsilon_2)$.

Існує узагальнений розв'язок задачі (24) тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{\Upsilon_2} \Phi(\eta) d\eta = \int_{\Xi} F d\xi d\eta + \int_{-\infty}^0 B_\pm^{(1)}(\xi) d\xi + \int_0^{+\infty} B_\pm^{(2)}(\xi) d\xi + \int_{\Upsilon_1 \setminus \Upsilon_2} G(\eta) d\eta. \quad (26)$$

Цей розв'язок визначається з точністю до адитивної сталої.

Адитивну сталу можна вибрати таким чином, що буде існувати єдиний розв'язок задачі (24) з диференційовною асимптотикою

$$\mathcal{N}_0(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\exp\left(\frac{\pi}{h_1}\xi\right)\right) & \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ d_0 + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\pi}{h_2}\xi\right)\right) & \text{при } \xi \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (27)$$

Крім того, якщо функції F , G , Φ є парними відносно змінної η (F , G , Φ — непарні функції відносно η) та $B_-^{(i)} \equiv B_+^{(i)}$, $i = 1, 2$ ($B_-^{(i)} \equiv -B_+^{(i)}$, $i = 1, 2$), то розв'язок \mathcal{N}_0 є парною (непарною) функцією відносно змінної η . Якщо \mathcal{N}_0 — непарна функція, то в (27) стала d_0 дорівнює нулю.

З наслідку 4.1 [17] випливає таке твердження.

Твердження 2. Існує нетривіальний розв'язок \mathcal{Z}_0 однорідної задачі (24), який не належить простору \mathcal{H} , з диференційовною асимптотикою

$$\mathcal{Z}_0(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{\xi}{h_1} + C_{h_1} + \mathcal{O}\left(\exp\left(\frac{\pi}{h_1}\xi\right)\right) & \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ \frac{\xi}{h_2} + C_{h_2} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\pi}{h_2}\xi\right)\right) & \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (28)$$

де $C_{h_i} = h_i^{-1} \langle \mathcal{Z}_0(0, \eta) \rangle_{\Upsilon_i}$, $i = 1, 2$.

Крім того, цей розв'язок є парною функцією відносно змінної η і будь-який інший розв'язок однорідної задачі (24), який має поліноміальне зростання при $\xi \rightarrow \pm\infty$, є лінійною комбінацією $\alpha_1 + \alpha_2 \mathcal{Z}_0$, де α_1 та α_2 — деякі сталі.

Зауваження 5. Використовуючи другу формулу Гріна–Остроградського, як це було зроблено в зауваженні 4.3 [17], сталу d_0 із (27) можна знайти за формулою

$$\begin{aligned} d_0 = & \int_{\Xi} F(\xi, \eta) \mathcal{Z}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^0 B_{\pm}^{(1)}(\xi) \mathcal{Z}_0\left(\xi, \pm \frac{h_1}{2}\right) d\xi + \int_0^{+\infty} B_{\pm}^{(2)}(\xi) \mathcal{Z}_0\left(\xi, \pm \frac{h_2}{2}\right) d\xi + \\ & + \int_{\Upsilon_1 \setminus \Upsilon_2} G(\eta) \mathcal{Z}_0(0, \eta) d\eta - \int_{\Upsilon_2} \Phi(\eta) \mathcal{Z}_0(0, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (29)$$

У загальному випадку, коли $\Psi \neq 0$, в задачі (24) потрібно виконати заміну

$$W = N - \chi_{\delta} \Psi,$$

де $\chi_{\delta} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, $0 \leq \chi_{\delta} \leq 1$, та

$$\chi_{\delta}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq \xi \leq \delta \quad (\delta > 0), \\ 0 & \text{при } \xi \geq 2\delta. \end{cases}$$

Тоді $[W]|_{\xi=0} = 0$, і ми приходимо до попереднього випадку.

Означення 2. Функція N називається узагальненим розв'язком задачі (24), якщо існує функція W , яка належить простору \mathcal{H} і така, що задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Xi} \nabla W \cdot \nabla v \, d\xi \, d\eta &= \int_{\Xi} Fv \, d\xi \, d\eta - \int_{\Xi^{(2)}} \nabla(\chi_{\delta}(\xi)\Psi(\eta)) \cdot \nabla v \, d\xi \, d\eta + \int_{-\infty}^0 B_{\pm}^{(1)}(\xi) v \left(\xi, \pm \frac{h_1}{2} \right) d\xi + \\ &+ \int_0^{+\infty} B_{\pm}^{(2)}(\xi) v \left(\xi, \pm \frac{h_2}{2} \right) d\xi + \int_{\Upsilon_1 \setminus \Upsilon_2} G(\eta) v(0, \eta) \, d\eta - \\ &- \int_{\Upsilon_2} \Phi(\eta) v(0, \eta) \, d\eta \quad \forall v \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (30)$$

Зауваження 6. Легко переконатися, що і в загальному випадку буде мати місце твердження 1 з цією ж самою умовою розв'язності (26), якщо $\Psi \in H^1(\Upsilon_2)$. Крім того, потрібно вимагати, щоб в останньому абзаці твердження 1 Ψ була парною (непарною) функцією.

Тепер повернемося до задач (22) та (23). З (26) випливає, що умовою їх розв'язності є рівності

$$\int_{\partial\Xi_{\parallel}} \Theta_k(\eta) \, d\eta = \int_{\Upsilon_2} \Phi_k(\eta) \, d\eta, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Враховуючи третю рівність в задачі (4), з (31) виводимо такі співвідношення для функцій $\{\omega_k^{(i)}\}$:

$$h_1 \frac{d\omega_k^{(1)}}{dx}(0) = h_2 \frac{d\omega_k^{(2)}}{dx}(0), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2. \quad (32)$$

Отже, якщо $\{\omega_k^{(i)}\}$ задовольняють (32), то існують розв'язки задач (22) та (23). Їх згідно з твердженням 1 можна вибрати єдиним чином так, щоб вони мали асимптотику

$$\mathcal{N}_k(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathcal{O} \left(\exp \left(\frac{\pi}{h_1} \xi \right) \right) & \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ d_k^+ + \mathcal{O} \left(\exp \left(-\frac{\pi}{h_2} \xi \right) \right) & \text{при } \xi \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (33)$$

Далі в асимптотичному розвиненні (21) будемо використовувати функції

$$N_k(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathcal{N}_k(\xi, \eta), & \xi < 0, \\ \mathcal{N}_k(\xi, \eta) - d_k^+, & \xi > 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді на підставі (33) функції $\{N_k\}$ будуть експоненціально спадати при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Якщо формально підставити ряди (3) та (21) в першу умову спряження задачі (1), то отримаємо рівність

$$\left(u_{\infty}^{(1)} + N_{\infty}\right)\Big|_{x=0-} = \left(u_{\infty}^{(2)} + N_{\infty}\right)\Big|_{x=0+},$$

з якої на підставі відповідних рівностей в задачах (22) та (23) випливають такі співвідношення для функцій $\{\omega_k^{(i)}\}$:

$$\omega_2^{(2)}(0) = \omega_2^{(1)}(0), \quad \omega_k^{(2)}(0) - \omega_k^{(1)}(0) = d_{k-2}^+, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 3.$$

Таким чином, отримали послідовність крайових задач для визначення функцій $\{\omega_k^{(i)}\}$. Для функцій $\omega_2^{(1)}$ і $\omega_2^{(2)}$, які формують головний член асимптотики, задача має вигляд

$$\begin{aligned} -h_i \frac{d^2 \omega_2^{(i)}}{dx^2}(x) &= \widehat{F}^{(i)}(x), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \\ \omega_2^{(1)}(0) &= \omega_2^{(2)}(0), \\ h_1 \frac{d\omega_2^{(1)}}{dx}(0) &= h_2 \frac{d\omega_2^{(2)}}{dx}(0), \\ \omega_2^{(1)}(-1) &= 0, \quad \omega_2^{(2)}(1) = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

де

$$\widehat{F}^{(i)}(x) := \int_{\Upsilon_i} f(x, \eta) d\eta - \varphi_+^{(i)}(x) + \varphi_-^{(i)}(x), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2. \tag{35}$$

Задачу (34) будемо називати *усередненою задачею* для задачі (1).

Для наступних функцій $\{\omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)} : k \geq 3\}$ задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} -h_i \frac{d^2 \omega_k^{(i)}}{dx^2}(x) &= 0, \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \\ \omega_k^{(1)}(0) &= \omega_k^{(2)}(0) - d_{k-2}^+, \\ h_1 \frac{d\omega_k^{(1)}}{dx}(0) &= h_2 \frac{d\omega_k^{(2)}}{dx}(0), \\ \omega_k^{(1)}(-1) &= 0, \quad \omega_k^{(2)}(1) = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

а їх розв'язок є таким:

$$\begin{aligned} \omega_k^{(1)}(x) &= -\frac{h_2 d_{k-2}^+}{h_1 + h_2}(x + 1), \quad x \in I_1, \\ \omega_k^{(2)}(x) &= \frac{h_1 d_{k-2}^+}{h_1 + h_2}(1 - x), \quad x \in I_2. \end{aligned} \tag{37}$$

3. Схема побудови повної асимптотики та її обґрунтування. Введемо позначення

$$u_k\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} u_k^{(1)}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right), & (x, y) \in \Omega_\varepsilon^{(1)}, \\ u_k^{(2)}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right), & (x, y) \in \Omega_\varepsilon^{(2)}, \end{cases} \quad \omega_k(x) = \begin{cases} \omega_k^{(1)}(x), & x \in I_1, \\ \omega_k^{(2)}(x), & x \in I_2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$$

З усередненої задачі (34) однозначно визначаємо головний член асимптотики ω_2 ряду (3). Потім із задач (4), які можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta\eta}^2 u_2^{(i)}(x, \eta) &= f(x, \eta) - h_i^{-1} \widehat{F}^{(i)}(x), \quad \eta \in \Upsilon_i, \\ -\partial_\eta u_2^{(i)}(x, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_i}{2}} &= \varphi_\pm^{(i)}(x), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \\ \langle u_2^{(i)}(x, \cdot) \rangle_{\Upsilon_i} &= 0, \quad x \in I_i, \end{aligned} \quad (38)$$

однозначно визначаємо

$$u_2^{(i)}(x, \eta) = - \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\eta} (\eta - t) \left(f(x, t) - h_i^{-1} \widehat{F}^{(i)}(x) \right) dt - \eta \varphi_-^{(i)}(x) + \alpha_2^{(i)}(x), \quad (39)$$

де функція $\alpha_2^{(i)}$ однозначно визначається з третьої умови в (38), тобто

$$\alpha_2^{(i)}(x) = \int_{\Upsilon_i} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\eta} (\eta - t) f(x, t) dt d\eta - 6^{-1} h_i^2 \widehat{F}^{(i)}(x), \quad i = 1, 2;$$

функції $\widehat{F}^{(1)}$ та $\widehat{F}^{(2)}$ задаються формулами (35).

Тепер знаходимо перші члени $\Pi_2^{(1)}$ та $\Pi_2^{(2)}$ прилежових асимптотичних розвинень (9) та (13) відповідно, як розв'язки задач (10) та (14), які можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi\eta} \Pi_2^{(1)}(\xi, \eta) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in (0, +\infty) \times \Upsilon_1, \\ -\partial_\eta \Pi_2^{(1)}(\xi, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_1}{2}} &= 0, \quad \xi \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Pi_2^{(1)}(0, \eta) = -u_2^{(1)}(-1, \eta), \quad \eta \in \Upsilon_1,$$

$$\Pi_2^{(1)}(\xi, \eta) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad \eta \in \Upsilon_1;$$

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi^*\eta} \Pi_2^{(2)}(\xi^*, \eta) &= 0, \quad (\xi^*, \eta) \in (0, +\infty) \times \Upsilon_2, \\ -\partial_\eta \Pi_2^{(2)}(\xi^*, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_2}{2}} &= 0, \quad \xi^* \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Pi_2^{(1)}(0, \eta) = -u_2^{(2)}(1, \eta), \quad \eta \in \Upsilon_2,$$

$$\Pi_2^{(1)}(\xi^*, \eta) \rightarrow 0, \quad \xi^* \rightarrow +\infty, \quad \eta \in \Upsilon_2.$$

Далі знаходимо перший член внутрішнього асимптотичного розвинення (21):

$$N_1(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathcal{N}_1(\xi, \eta), & \xi < 0, \\ \mathcal{N}_1(\xi, \eta) - d_1^+, & \xi > 0, \end{cases}$$

де \mathcal{N}_1 — єдиний розв'язок задачі (23), яку можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{N}_1 &= 0 \quad \text{в } \Xi, \\ \partial_\eta \mathcal{N}_1 &= 0 \quad \text{на } \partial\Xi_-, \\ \partial_\xi \mathcal{N}_1 &= -\frac{d\omega_2^{(1)}}{dx}(0) \quad \text{на } \partial\Xi_\parallel, \\ [\mathcal{N}_1]|_{\xi=0} &= 0 \quad \text{на } \Upsilon_2, \\ [\partial_\xi \mathcal{N}_1]|_{\xi=0} &= \frac{d\omega_2^{(1)}}{dx}(0) - \frac{d\omega_2^{(2)}}{dx}(0) \quad \text{на } \Upsilon_2, \end{aligned} \quad (42)$$

з асимптотикою (33). Нагадаємо, що стала d_1^+ також визначається однозначно (див. зауваження 5).

Таким чином, однозначно визначаються перші члени асимптотичних розвинень (3), (9), (13) та (21).

Припустимо, що ми визначили коефіцієнти $\omega_2, \dots, \omega_{2n-2}$, $u_2, u_4, \dots, u_{2n-2}$ ряду (3), коефіцієнти $\Pi_2^{(i)}, \Pi_4^{(i)}, \dots, \Pi_{2n-2}^{(i)}$ рядів (9) та (13) відповідно і коефіцієнти N_1, \dots, N_{2n-3} ряду (21).

Тоді за формулами (37) запишемо розв'язок ω_{2n-1} задачі (36) із сталою d_{2n-3}^+ в першій умові спряження. Далі знаходимо коефіцієнт

$$N_{2n-2}(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathcal{N}_{2n-2}(\xi, \eta), & \xi < 0, \\ \mathcal{N}_{2n-2}(\xi, \eta) - d_{2n-2}^+, & \xi > 0, \end{cases}$$

внутрішнього асимптотичного розвинення (23), де \mathcal{N}_{2n-2} — єдиний розв'язок задачі (23), яку можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{N}_{2n-2} &= 0 \quad \text{в } \Xi, \\ \partial_\eta \mathcal{N}_{2n-2} &= 0 \quad \text{на } \partial\Xi_-, \\ \partial_\xi \mathcal{N}_{2n-2} &= \frac{h_2 d_{2n-3}^+}{h_1 + h_2} \quad \text{на } \partial\Xi_\parallel, \\ [\mathcal{N}_{2n-2}]|_{\xi=0} &= u_{2n-2}^{(1)}(0, \eta) - u_{2n-2}^{(2)}(0, \eta) \quad \text{на } \Upsilon_2, \\ [\partial_\xi \mathcal{N}_{2n-2}]|_{\xi=0} &= \frac{d_{2n-3}^+(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} \quad \text{на } \Upsilon_2, \end{aligned} \quad (43)$$

з асимптотикою (33).

Знаючи d_{2n-2}^+ , за допомогою (37) записуємо розв'язок ω_{2n} задачі (36). Наступний коефіцієнт

$$N_{2n-1}(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathcal{N}_{2n-1}(\xi, \eta), & \xi < 0, \\ \mathcal{N}_{2n-1}(\xi, \eta) - d_{2n-1}^+, & \xi > 0, \end{cases}$$

внутрішнього асимптотичного розвинення (21) шукаємо через розв'язок \mathcal{N}_{2n-1} задачі (23), яку можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{N}_{2n-1} &= 0 \quad \text{в } \Xi, \\ \partial_\eta \mathcal{N}_{2n-1} &= 0 \quad \text{на } \partial\Xi_-, \\ \partial_\xi \mathcal{N}_{2n-1} &= -\partial_x u_{2n-2}^{(1)}(0, \eta) + \frac{h_2 d_{2n-2}^+}{h_1 + h_2} \quad \text{на } \partial\Xi_{\parallel}, \\ [\mathcal{N}_{2n-1}]|_{\xi=0} &= 0 \quad \text{на } \Upsilon_2, \\ [\partial_\xi \mathcal{N}_{2n-1}]|_{\xi=0} &= \partial_x u_{2n-2}^{(1)}(0, \eta) - \partial_x u_{2n-2}^{(2)}(0, \eta) + \frac{d_{2n-2}^+(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} \quad \text{на } \Upsilon_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Коефіцієнти $u_{2n}^{(i)}$, $i = 1, 2$, визначаємо як розв'язки відповідних задач

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta\eta}^2 u_{2n}^{(i)}(x, \eta) &= \partial_{xx}^2 u_{2n-2}^{(i)}(x, \eta), \quad \eta \in \Upsilon_i, \\ -\partial_\eta u_{2n}^{(i)}(x, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_i}{2}} &= 0, \quad x \in I_i, \\ \langle u_{2n}^{(i)}(x, \cdot) \rangle_{\Upsilon_i} &= 0, \quad x \in I_i. \end{aligned} \quad (45)$$

І нарешті, знаходимо коефіцієнти $\Pi_{2n}^{(1)}$ та $\Pi_{2n}^{(2)}$ прилежових асимптотичних розвинень (9) та (13) відповідно, як розв'язки задач (10) та (14), які можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi\eta} \Pi_{2n}^{(1)}(\xi, \eta) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in (0, +\infty) \times \Upsilon_1, \\ -\partial_\eta \Pi_{2n}^{(1)}(\xi, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_1}{2}} &= 0, \quad \xi \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\Pi_{2n}^{(1)}(0, \eta) = -u_{2n}^{(1)}(-1, \eta), \quad \eta \in \Upsilon_1,$$

$$\Pi_{2n}^{(1)}(\xi, \eta) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad \eta \in \Upsilon_1;$$

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi^*\eta} \Pi_{2n}^{(2)}(\xi^*, \eta) &= 0, \quad (\xi^*, \eta) \in (0, +\infty) \times \Upsilon_2, \\ -\partial_\eta \Pi_{2n}^{(2)}(\xi^*, \eta) \Big|_{\eta=\pm \frac{h_2}{2}} &= 0, \quad \xi^* \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\Pi_{2n}^{(2)}(0, \eta) = -u_{2n}^{(2)}(1, \eta), \quad \eta \in \Upsilon_2,$$

$$\Pi_{2n}^{(2)}(\xi^*, \eta) \rightarrow 0, \quad \xi^* \rightarrow +\infty, \quad \eta \in \Upsilon_2.$$

Таким чином, послідовно визначають всі коефіцієнти рядів (3), (9), (13) та (21).

За допомогою рядів (3), (9), (13) та (21) побудуємо ряд

$$\begin{aligned} \omega_2(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^{2k-1} \left(\omega_{2k+1}(x) + \chi^0(x) N_{2k-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right) + \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^{2k} \left(u_{2k} \left(x, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \omega_{2k+2}(x) + \chi^0(x) N_{2k} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \right. \\ \left. + \chi^-(x) \Pi_{2k}^{(1)} \left(\frac{1+x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \chi^+(x) \Pi_{2k}^{(2)} \left(\frac{1-x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right), \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \end{aligned} \quad (48)$$

в якому гладкі зрізаючі функції χ^\pm , χ^0 визначаються таким чином:

$$\chi^\pm(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |1 \mp x| \leq \delta, \\ 0 & \text{при } |1 \mp x| \geq 2\delta, \end{cases} \quad \chi^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < \delta, \\ 0 & \text{при } |x| > 2\delta. \end{cases}$$

Тут δ — довільне достатньо мале фіксоване додатне число.

Теорема 1. Ряд (48) є асимптотичним розвиненням для розв'язку крайової задачі (1) у просторі Соболева $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Крім того, має місце асимптотична оцінка

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists C_m > 0 \exists \varepsilon_0 > 0 \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \|u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(m)}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_m \varepsilon^{2m+\frac{1}{2}}, \quad (49)$$

де $U_\varepsilon^{(m)}$ — часткова сума ряду (48):

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^{(m)}(x, y) = \omega_2(x) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^{2k-1} \left(\omega_{2k+1}(x) + \chi^0(x) N_{2k-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^{2k} \left(u_{2k} \left(x, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \right. \\ + \omega_{2k+2}(x) + \chi^0(x) N_{2k} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \chi^-(x) \Pi_{2k}^{(1)} \left(\frac{1+x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \\ \left. + \chi^+(x) \Pi_{2k}^{(2)} \left(\frac{1-x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right), \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon. \end{aligned} \quad (50)$$

Зауваження 7. Тут і далі всі сталі в нерівностях не залежать від параметра ε .

Доведення. Розглянемо довільне $m \in \mathbb{N}$. Підставляючи часткову суму $U_\varepsilon^{(m)}$ у рівняння та крайові умови задачі (1) і враховуючи співвідношення (34)–(47), які задовольняють

коєфіцієнти ряду (48), знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta U_\varepsilon^{(m)}(x, y) + f\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) &= \varepsilon^{2m} \partial_{xx} u_{2m}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^m \varepsilon^{2k-1} \left(2\varepsilon^{-1} \frac{d\chi^0}{dx}(x) \partial_\xi N_{2k-1}(\xi, \eta) + \frac{d^2\chi^0}{dx^2}(x) N_{2k-1}(\xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \varepsilon^{2k} \left(2\varepsilon^{-1} \frac{d\chi^0}{dx}(x) \partial_\xi N_{2k}(\xi, \eta) + \frac{d^2\chi^0}{dx^2}(x) N_{2k}(\xi, \eta) + \right. \\ &+ 2\varepsilon^{-1} \frac{d\chi^-}{dx}(x) \partial_\xi \Pi_{2k}^{(1)}(\xi, \eta) + \frac{d^2\chi^-}{dx^2}(x) \Pi_{2k}^{(1)}(\xi, \eta) + \\ &\left. + 2\varepsilon^{-1} \frac{d\chi^+}{dx}(x) \partial_\xi \Pi_{2k}^{(2)}(\xi, \eta) + \frac{d^2\chi^0}{dx^2}(x) \Pi_{2k}^{(2)}(\xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{1-x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} =: R_\varepsilon^{(m)}(x, y). \end{aligned} \tag{51}$$

Беручи до уваги експоненціальне спадання функцій $\{N_k, \Pi_k^{(1)}, \Pi_k^{(2)}\}$ (див. (33), (17)), робимо висновок, що

$$\exists \check{C}_m \exists \varepsilon_0 \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \limsup_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon^{(i)}} \left| R_\varepsilon^{(m)}(x, y) \right| \leq \check{C}_m \varepsilon^{2m}, \quad i = 1, 2. \tag{52}$$

Легко перевірити, що часткова сума залишає такі відхилення у крайових умовах:

$$-\partial_y U_\varepsilon^{(m)}(x, y) \Big|_{y=\pm\varepsilon \frac{h_i}{2}} = \varepsilon \varphi_\pm^{(i)}(x), \quad x \in I_i,$$

$$U_\varepsilon^{(m)}(\pm 1, y) = 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$\partial_x U_\varepsilon^{(m)}(x, y) \Big|_{x=0} = \varepsilon^{2m} \left(\partial_x u_{2m}^{(1)}\left(0, \frac{y}{\varepsilon}\right) - \frac{h_2}{h_1 + h_2} d_{2m}^+ \right) =: \bar{R}_\varepsilon^{(m)}(y), \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \setminus \Upsilon_\varepsilon^{(2)},$$

та в умовах спряження:

$$[U_\varepsilon^{(m)}] \Big|_{x=0} = 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)},$$

$$[\partial_x U_\varepsilon^{(m)}] \Big|_{x=0} = \varepsilon^{2m} \left([\partial_x u_{2m}] \Big|_{x=0} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2} d_{2m}^+ \right) =: \widehat{R}_\varepsilon^{(m)}(y), \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}.$$

Очевидно, що існують такі додатні сталі \bar{C}_m та $\bar{\varepsilon}_0$, що

$$\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_0) : \limsup_{y \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \setminus \Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \left| \bar{R}_\varepsilon^{(m)}(y) \right| \leq \bar{C}_m \varepsilon^{2m}, \quad \limsup_{y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \left| \widehat{R}_\varepsilon^{(m)}(y) \right| \leq \bar{C}_m \varepsilon^{2m}. \tag{53}$$

Тоді різниця $W_\varepsilon := u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(m)}$ задовольняє систему

$$\begin{aligned} -\Delta W_\varepsilon &= R_\varepsilon^{(m)} \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ \partial_y W_\varepsilon \left(x, \pm \varepsilon \frac{h_i}{2} \right) &= 0, \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \\ W_\varepsilon(\pm 1, y) &= 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(i)}, \quad i = 1, 2, \\ -\partial_x W_\varepsilon(0, y) &= \overline{R}_\varepsilon^{(m)}, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \setminus \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \\ [W_\varepsilon]|_{x=0} &= 0, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \\ [\partial_x W_\varepsilon]|_{x=0} &= -\widehat{R}_\varepsilon^{(m)}, \quad y \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned} \tag{54}$$

Таким чином, побудований ряд є формальним асимптотичним розв'язком задачі (1).

З (54) виводимо інтегральне співвідношення

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^2 dx dy = \int_{\Omega_\varepsilon} R_\varepsilon^{(m)} W_\varepsilon dx dy - \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)} \setminus \Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \overline{R}_\varepsilon^{(m)} (W_\varepsilon|_{x=0}) dy + \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \widehat{R}_\varepsilon^{(m)} (W_\varepsilon|_{x=0}) dy.$$

Тепер, використовуючи нерівність Фрідрікса та оцінки (52) і (53), з попередньої рівності отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^2 dx dy &\leq \check{C}_m \sqrt{h_1 + h_2} \varepsilon^{2m+\frac{1}{2}} \|W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \overline{C}_m \sqrt{h_1} \varepsilon^{2m+\frac{1}{2}} \|W_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(1)})} \leq \\ &\leq C_m \varepsilon^{2m+\frac{1}{2}} \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

звідки випливає асимптотична оцінка (49), яка обґрунтовує побудовану асимптотику і доводить теорему.

Наслідок 1. Для різниці між розв'язком u_ε задачі (1) та розв'язком ω_2 усередненої задачі (34) мають місце такі асимптотичні оцінки:

$$\|u_\varepsilon - \omega_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_0 \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \quad \|u_\varepsilon - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_0 \varepsilon, \tag{55}$$

$$\|u_\varepsilon - \omega_2 - \varepsilon(\omega_3 + \chi^0 N_1)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \tag{56}$$

$$\|E_\varepsilon^{(i)}(u_\varepsilon) - \omega_2\|_{L^2(I_i)} \leq C_2 \varepsilon, \quad \|E_\varepsilon^{(i)}(u_\varepsilon) - \omega_2\|_{H^1(I_i)} \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \tag{57}$$

$$\max_{x \in \overline{I}_i} \left| E_\varepsilon^{(i)}(u_\varepsilon)(x) - \omega_2(x) \right| \leq C_3 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \tag{58}$$

де

$$E_\varepsilon^{(i)}(u_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon h_i} \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(i)}} u_\varepsilon(x, y) dy, \quad i = 1, 2.$$

Доведення. Оскільки функції N_2 , $\Pi_2^{(1)}$ та $\Pi_2^{(2)}$ експоненціально спадають на нескінченності, то з оцінки (49) при $m = 1$ випливає така нерівність (56):

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - \omega_2 - \varepsilon(\omega_3 + \chi^0 N_1)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(1)}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|U_\varepsilon^{(1)} - \omega_2 - \varepsilon(\omega_3 + \chi^0 N_1)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \\
&\leq \tilde{C}_1 \varepsilon^{\frac{5}{2}} + \varepsilon^2 \|u_2 + \omega_4 + \chi^0 N_2 + \chi^- \Pi_2^{(1)} + \chi^+ \Pi_2^{(2)}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \\
&\leq \varepsilon^2 \|\nabla_x (u_2 + \omega_4 + \chi^0 N_2 + \chi^- \Pi_2^{(1)} + \chi^+ \Pi_2^{(2)})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\
&\quad + \varepsilon^2 \|u_2 + \omega_4 + \chi^0 N_2 + \chi^- \Pi_2^{(1)} + \chi^+ \Pi_2^{(2)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \tilde{C}_1 \varepsilon^{\frac{5}{2}} \leq \\
&\leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^2 \left(\int_{I_i \times \Upsilon_i} |\partial_\eta u_2(x, \eta)|^2 dx d\eta \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + \varepsilon^{\frac{5}{2}} \sum_{i=1}^2 (c_2 \|\omega_4\|_{H^1(I_i)} + \|u_2\|_{L^2(I_i \times \Upsilon_i)} + \|\partial_x u_2\|_{L^2(I_i \times \Upsilon_i)}) + \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(\|\nabla_{\xi\eta} N_2\|_{L^2(\Xi)} + \|\nabla_{\xi\eta} \Pi_2^{(1)}\|_{L^2((0, +\infty) \times \Upsilon_1)} + \|\nabla_{\xi^* \eta} \Pi_2^{(2)}\|_{L^2((0, +\infty) \times \Upsilon_2)} \right) + \\
&\quad + \varepsilon^3 \left(\|N_2\|_{L^2(\Xi)} + \|\Pi_2^{(1)}\|_{L^2((0, +\infty) \times \Upsilon_1)} + \|\Pi_2^{(2)}\|_{L^2((0, +\infty) \times \Upsilon_2)} \right) + \tilde{C}_1 \varepsilon^{\frac{5}{2}} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Враховуючи той факт, що $\|\chi^0 N_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c_2 \varepsilon$ та $\|\chi^0 N_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{(i)})} \leq c_3$, $i = 1, 2$, з (56) отримуємо нерівності (55).

Використовуючи нерівність Коші–Буняковського, з (55) виводимо нерівності (57). Оскільки простір $H^1(I_i)$ неперервно вкладається в $C(\bar{I}_i)$, то з другої нерівності в (57) випливають нерівності (58).

Наслідок доведено.

Зауваження 8. Основний вклад у сталу C_1 з нерівності (56) вносять доданки з шостого рядка при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ в оцінці (59). Знаючи явний вигляд коефіцієнтів $u_2^{(i)}$ (див. (39)), можна вказати залежність цієї сталої від правих частин задачі (1):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^2 \left(\int_{I_i \times \Upsilon_i} |\partial_\eta u_2(x, \eta)|^2 dx d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^2 \sqrt{h_i} \left(\sqrt{5h_i} \|f\|_{L^2(I_i \times \Upsilon_i)} + 2\sqrt{2} \|\varphi_-^{(i)}\|_{L^2(I_i)} + \sqrt{6} \|\varphi_+^{(i)}\|_{L^2(I_i)} \right).
\end{aligned} \tag{60}$$

Наступний вклад у сталу C_1 вносять доданки з восьмого рядка при ε^2 в оцінці (59). Із

відповідної інтегральної тотожності для розв'язку N_2 (див. (30)) виводимо

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\xi\eta} N_2\|_{L^2(\Xi)} &\leq c(\delta)\|\Psi_2\|_{L^2(\Upsilon_2)} + \|\Psi_2'\|_{L^2(\Upsilon_2)} + 2d_1^+ \frac{h_2\sqrt{h_1} + h_1\sqrt{h_2}}{h_1 + h_2} \leq \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^2 \left(h_i \left(c(\delta)\sqrt{2}h_i\sqrt{1+h_i^2} + \sqrt{5} \right) (\|f\|_{L^2(I_i \times \Upsilon_i)} + \|\partial_x f\|_{L^2(I_i \times \Upsilon_i)}) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{h_i} \left(c(\delta)h_i\sqrt{3+2h_i^2} + 2\sqrt{2} \right) (\|\varphi_-^{(i)}\|_{L^2(I_i)} + \|\partial_x \varphi_-^{(i)}\|_{L^2(I_i)}) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{h_i} \left(c(\delta)h_i\sqrt{3+2h_i^2} + \sqrt{6} \right) (\|\varphi_+^{(i)}\|_{L^2(I_i)} + \|\partial_x \varphi_+^{(i)}\|_{L^2(I_i)}) \right) + \\ &\quad + 2d_1^+ \frac{h_2\sqrt{h_1} + h_1\sqrt{h_2}}{h_1 + h_2}, \end{aligned} \quad (61)$$

де $\Psi_2(\eta) = u_2^{(1)}(0, \eta) - u_2^{(2)}(0, \eta)$. Аналогічно оцінюються величини $\|\nabla_{\xi\eta} \Pi_2^{(1)}\|_{L^2((0, +\infty) \times \Upsilon_1)}$ та $\|\nabla_{\xi^*\eta} \Pi_2^{(2)}\|_{L^2((0, +\infty) \times \Upsilon_2)}$.

Зауважимо також, що якщо $\varphi_{\pm}^{(i)} \equiv 0$ та функція f у правій частині диференціального рівняння задачі (1) залежить лише від змінної x , то всі коефіцієнти $\{u_{2k}\}$, $\{\Pi_{2k}^{(1)}\}$ та $\{\Pi_{2k}^{(2)}\}$ тотожно дорівнюють нулю. В цьому випадку асимптотичний ряд (48) має вигляд

$$\omega_2(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\omega_{k+2}(x) + \chi^0(x) N_k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right), \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad (62)$$

а асимптотична оцінка (56) має порядок ε^2 . Крім того, основний вклад у сталу C_1 з нерівності (56) вносить величина $\|\nabla_{\xi\eta} N_2\|_{L^2(\Xi)}$, яка обмежується тепер величиною

$$2d_1^+ \frac{h_2\sqrt{h_1} + h_1\sqrt{h_2}}{h_1 + h_2}$$

(див. (61)).

4. Обговорення результатів. 1. З оцінки (56) видно структуру коректора в асимптотичному наближенні для розв'язку u_ε задачі (1). Коректор має вигляд

$$\varepsilon \left(\omega_3(x) + \chi^0(x) N_1 \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right),$$

а його градієнт дорівнює

$$\chi^0(x) \nabla_{\xi\eta} N_1(\xi, \eta)|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon \left(\omega_3'(x) + (\chi^0(x))' N_1 \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right).$$

Оскільки функція N_1 експоненціально спадає на нескінченності (див. (33)), то

$$\varepsilon \|\omega_3 + \chi^0 N_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_0 \varepsilon,$$

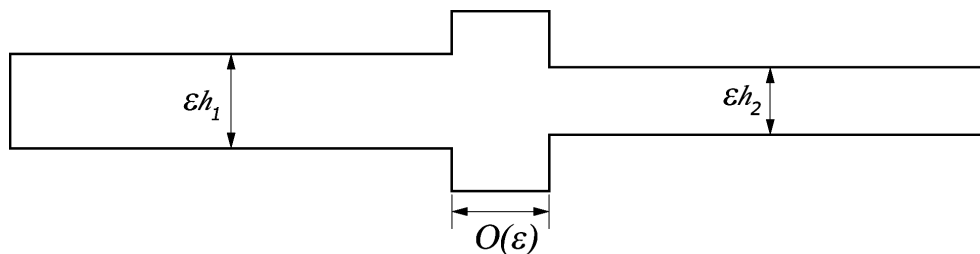


Рис. 3. Тонка каскадна область з локальним розширенням.

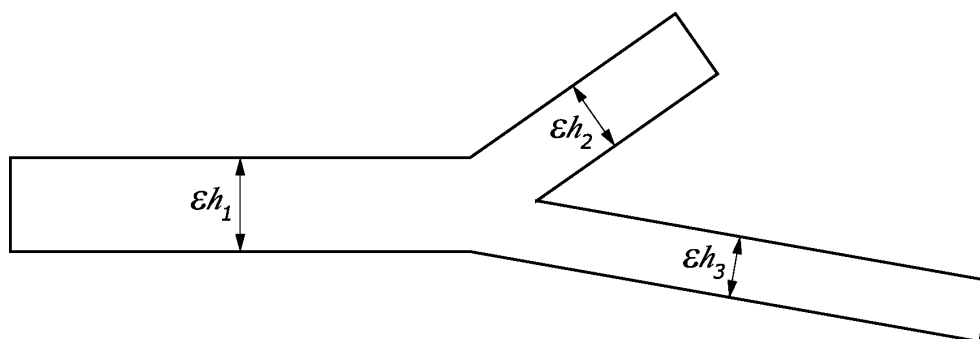


Рис. 4. Тонка каскадна область типу графа.

а отже, за даної структури тонкого каскадного з'єднання в околі зони з'єднання будуть відсутні суттєві примежові ефекти для розв'язку u_ε задачі (1). На це також вказує друга оцінка в (55) і рівномірною поточковою оцінкою (58).

Отримані результати дають право, з точки зору практичного застосування, замінити складну вихідну крайову задачу (1) на просту граничну задачу (34) з достатньою точністю, яка вимірюється параметром ε , що визначає характерну товщину тонкої каскадної області.

Крім того, в даній роботі встановлено залежність сталої C_1 в основній асимптотичній оцінці (56) від правих частин задачі (1) і від геометричних параметрів h_1 , h_2 та d_1^+ (див. зауваження 8). Також можна явно записати залежність і інших сталих в асимптотичних оцінках наслідку 1 від цих самих величин. Цей факт дає можливість використовувати асимптотичні оцінки безпосередньо для наближення розв'язків крайових задач у тонких каскадних областях замість чисельних розрахунків.

2. Запропонований у даній статті метод побудови асимптотичних розвинень можна застосувати без суттєвих змін і до асимптотичного дослідження крайових задач у тонких каскадних областях більш складної структури, а саме, або в тонких каскадних областях з локальними звуженнями чи розширеннями в околах з'єднання тонких областей (рис. 3), або в тонких каскадних областях типу графа (рис. 4), або в тонких каскадних перфорованих областях з швидкозмінною товщиною (рис. 5). Для останніх потрібно в регулярну частину асимптотики додати ряди з швидкоосцилюючими коефіцієнтами (див. [15, 16]).

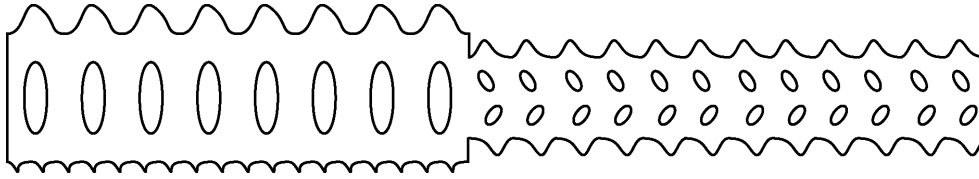


Рис. 5. Тонка каскадна перфорована область з швидкозмінною товщиною.

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикл. математика и механика. — 1962. — **26**, № 4. — С. 668–686.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976.
3. Джавадов М. Г. Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в тонких областях // Дифференц. уравнения. — 1968. — **4**, № 10. — С. 1901–1909.
4. Ciarlet P., Kesavan S. Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problem in plate theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1981. — **26**. — С. 145–172.
5. Назаров С. А. Структура решений краевой задачи для эллиптических уравнений в тонких областях // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика, астрономия. — 1982. — Вып. 2. — С. 65–68.
6. Панасенко Г. П., Резцов М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. — 1987. — **294**, № 5. — С. 1061–1065.
7. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990.
8. Мельник Т. А. Усреднения еліптичних рівнянь, які описують процеси в сильно неоднорідних тонких перфорованих областях з швидко змінною товщиною // Доп. АН України. — 1991. — № 10. — С. 15–19.
9. Назаров С. А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. — **7**, № 5. — С. 1–92.
10. Колпаков А. Г. Определяющие уравнения тонкой упругой напряженной балки периодической структуры // Прикл. математика и механика. — 1999. — **63**, вып. 3. — С. 513–523.
11. Lewinsky T., Telega J. Plates, laminates and shells // Asymptotic Analysis and Homogenization. — Singapore: World Sci., 2000.
12. Назаров С. А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. — Новосибирск: Научная книга, 2002. — Т. 1.
13. Chechkin G. A., Pichugina E. A. Weighted Korn's inequality for a thin plate with a rough surface // Rus. J. Math. Phys. — 2000. — **7**, № 3. — P. 375–383.
14. Korn R. V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II: A convergence proof // Quart. Appl. Math. — 1985. — **18**, № 1. — P. 1–22.
15. Мельник Т. А., Попов А. В. Асимптотический анализ краевых и спектральных задач в тонких перфорованных областях с быстро изменяющейся толщиной и различными предельными размерностями // Мат. сб. — 2012. — **203**, № 8. — С. 97–124.
16. Mel'nyk T. A., Popov A. V. Asymptotic analysis of the Dirichlet spectral problems in thin perforated domains with rapidly varying thickness and different limit dimensions // Math. and Life Sci. / Eds A. V. Antoniouk, R. V. N. Melnik. — Berlin: De Gruyter, 2012. — P. 87–111.
17. Mel'nyk T. A. Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Z. Anal. und ihre Anwendungen. — 1999. — **18**, № 4. — P. 953–975.
18. Борисюк А. О. Генерація звуку течіями в каналах з локальними нерегулярностями геометрії // Акуст. вісн. — 2007. — **10**, № 2. — С. 4–21.

19. *Borisyuk A. O.* Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing // *J. Fluids and Structures*. — 2010. — **26**. — P. 658–674.
20. *Gaudiello A., Kolpakov A. G.* Influence of non degenerated joint on the global and local behavior of joined rods // *Int. J. Eng. Sci.* — 2010. — **49**, Issue 3. — P. 295–309.
21. *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Silva R. P., Pereira M. C.* Semilinear parabolic problems in thin domains with a highly oscillatory boundary // *Nonlinear Anal.* — 2011. — **74**, № 15. — P. 5111–5132.
22. *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Silva R. P., Pereira M. C.* Nonlinear parabolic problems in thin domains with a highly oscillatory boundary // *Cad. mat.* — 2010. — **11**. — P. 331–364.
23. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины // *Мат. сб.* — 2003. — **194**, № 5. — P. 61–96.
24. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика спектра задачи Неймана в сингулярно вырождающихся тонких областях. I // *Алгебра и анализ*. — 1990. — **2**, № 2. — С. 85–111.
25. *Blanchard D., Gaudiello A., Mel'nyk T. A.* Boundary homogenization and reduction of dimension in a Kirchhoff–Love plate // *SIAM J. Math. Anal.* — 2008. — **39**. — P. 1764–1787.
26. *Mel'nyk T. A., Nazarov S. A.* Asymptotic structure of the spectrum of the Neumann problem in a thin comb-like domain // *C. r. Acad. sci. Ser. 1.* — 1994. — **319**. — P. 1343–1348.
27. *Nazarov S. A.* Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions // *J. Math. Sci.* — 1996. — **80**, № 5. — P. 1989–2034.
28. *Cioranescu D., Saint Jean Paulin J.* Homogenization of reticulated structures // *Appl. Math. Sci.* — New York: Springer, 1999. — **139**.
29. *Blanchard D., Gaudiello A.* Homogenization of highly oscillating boundaries and reduction of dimension for a monotone problem // *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.* — 2003. — **9**. — P. 449–460.
30. *Gaudiello A., Zappale E.* Junction in a thin multidomain for a fourth order problem // *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2006. — **16**. — P. 1887–1918.
31. *Panasenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems // *Int. Rus. J. Math. Phys.* — 1994. — **2**, № 3. — P. 325–352.

Одержано 25.02.13