

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЙ СИНХРОННОЙ ГЕНЕРАЦИИ
ОПТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ЛАЗЕРОВ
С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАКАЧКОЙ**

Д. М. Ли́ла, А. А. Мартынюк

Ин-т механики НАН Украины

Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3

Based on numerical-analytical scheme of investigation for periodical solutions one of the ways for constructing Lyapunov's matrix-valued function for linear approximation of a system of equations of locked lasing of two optically coupled and periodically pumped lasers has been proposed.

На основі чисельно-аналітичної схеми дослідження періодичних розв'язків указано спосіб побудови матричнозначної функції Ляпунова для лінійного наближення системи рівнянь синхронної генерації двох оптично зв'язаних лазерів із періодичною накачкою.

1. Введение. Одним из примеров сложного поведения нелинейных систем является динамический хаос. Неравновесные фазовые переходы и процессы самоорганизации в лазерах позволяют использовать ряд различного рода неустойчивостей (бистабильность, импульсы, хаос) и следующих за ними внутренних состояний в информационных системах [1, 2] при разработке, например, элементов запоминающих и логических устройств. Решение проблемы получения мощного излучения высокого качества связано с реализацией принципа модульного построения лазерных систем — ансамблей оптически связанных лазеров, являющихся по существу цепочкой нелинейных осцилляторов, моделируемых нелинейными динамическими системами с большим числом степеней свободы. Чтобы модульная схема имела преимущество перед монолазером, необходимо добиться фазовой синхронизации излучения всех модулей. В работе [3] выделено три способа частотной и фазовой синхронизации набора лазеров, одним из которых является введение оптической связи между лазерами. В то же время режим динамического хаоса в генераторе наиболее просто осуществить, модулируя добротность резонатора или мощность накачки на частоте, близкой к частоте релаксационных колебаний в активной среде [1]. Таким образом, при организации оптической связи даже между двумя лазерами с иницированным модульной накачкой хаотическим режимом можно ожидать значительно-го расширения возможных динамических сценариев.

В настоящей статье на основании результатов работ [1, 3] рассмотрен вопрос об устойчивости по линейному приближению некоторых периодических решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей экспериментальную реализацию „эквивалентного” вследствие фазовой синхронизации посредством оптической связи „хаотического” CO₂-лазера со 100%-но модулированной по глубине периодической накачкой переменным током. При этом для построения подходящей функции Ляпунова используются некоторые идеи метода матричнозначных функций [4, 5].

2. Постановка задачи и математическая модель. Изменение коэффициента усиления g и амплитуды E синхронизированного поля двух оптически связанных лазеров описывается простейшей моделью

$$\begin{aligned}\tau \dot{g} &= g_0(t) - g(1 + E^2), \\ \dot{E} &= \frac{1}{2}(g - \tilde{g}_{th})E,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где τ — эффективное время релаксации активной среды ($\tau \gg 1$), $g_0(t) = A(1 + \sin \omega t) - \frac{2\pi}{\omega}$ -периодическая накачка, $\tilde{g}_{th} = g_{th} + 2M \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{M} \right)^2} \right)$ — пороговый коэффициент усиления, g_{th} обозначает пороговое усиление, M — вещественный положительный коэффициент связи, Δ — величина, пропорциональная расстройке собственных частот резонаторов (далее — расстройка). Примерная схема организации оптической связи двух CO_2 -лазеров показана на рис. 1: 1, 2 — волноводные CO_2 -лазеры; 3, 4 — плоские зеркала, образующие резонаторы; 5, 6 — согласующая линза и внешнее зеркало, обеспечивающие оптическую связь; 7 — калиброванные поглотители; 8 — фотоприемник (см. [3]). Для исследуемых дальше вопросов отличие реальной кинетики среды CO_2 -лазера от модельной не играет существенной роли (см. [1]).

Изучаемый режим фазовой синхронизации, при котором амплитуды полей обеих лазеров равны в любой момент, а фаза постоянна и зависит от расстройки, осуществим при $|\Delta| < M$. При этом динамика двух связанных лазеров совпадает с динамикой одного эквивалентного лазера, порог которого растет с ростом расстройки. В режиме синхронной генерации (при фиксированном M) увеличение расстройки соответствует уменьшению параметра $\frac{A}{g_{th}}$ для эквивалентного лазера, что вследствие сложной бифуркационной диаграммы лазера с периодической накачкой приводит к генерированию как хаотического, так и регулярного сигнала.

Построению матричнозначной функции Ляпунова [6–9] для исследования устойчивости некоторых составляющих таких сигналов (периодических решений системы (2.1)) прямым методом посвящено все дальнейшее изложение.

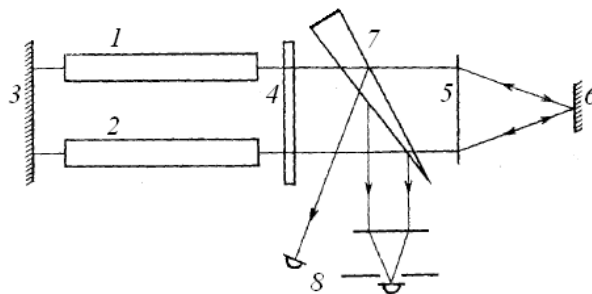


Рис. 1

3. Периодические решения и их устойчивость. Обозначим через $(g_T(t), E_T(t))^T$, $t \in [t'_0, \infty) = T_0$, $t'_0 \geq 0$, T -периодическое решение системы уравнений (2.1) с начальным условием

$$g(t'_0) = g'_0, \quad E(t'_0) = E'_0 \tag{3.1}$$

и определим переменные y_1, y_2 возмущенного движения системы (2.1) в виде

$$y_1 = g - g_T(t), \quad y_2 = E - E_T(t). \tag{3.2}$$

Тогда уравнения возмущенного движения системы (2.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tau \dot{y}_1 &= -(1 + E_T^2(t)) y_1 - 2g_T(t)E_T(t)y_2 - 2E_T(t)y_1y_2 - g_T(t)y_2^2 - y_1y_2^2, \\ 2\dot{y}_2 &= E_T(t)y_1 + (g_T(t) - \tilde{g}_{th})y_2 + y_1y_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для линейного приближения системы (3.3) (обозначим его (3.3')) построим вначале матричнозначную функцию

$$U(t, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} p_{20}y_1^2 & p_{11}(t)y_1y_2 \\ p_{11}(t)y_1y_2 & p_{02}y_2^2 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

где $p_{20}, p_{02} > 0$ — конечные положительные постоянные, $p_{11}(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, а затем и скалярную функцию Ляпунова

$$v(t, y, \eta) = \eta^T U(t, y_1, y_2) \eta, \tag{3.5}$$

где $y = (y_1, y_2)^T$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T > 0$.

Полная производная по времени функции (3.5), найденная в силу линейного приближения системы (3.3), будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} \Big|_{(3.3')} &= \left(-\frac{2\eta_1^2 p_{20}}{\tau} (1 + E_T^2(t)) + \eta_1 \eta_2 p_{11T}(t) E_T(t) \right) y_1^2 + \\ &+ \left(\eta_2^2 p_{02} (g_T(t) - \tilde{g}_{th}) - \frac{4\eta_1 \eta_2}{\tau} p_{11T}(t) g_T(t) E_T(t) \right) y_2^2 = \\ &= s_{20}(t) y_1^2 + s_{02}(t) y_2^2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

если предполагать, что $p_{11T}(t)$ — T -периодическое решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{p}_{11} = \left(\frac{1}{\tau} (1 + E_T^2(t)) - g_T(t) + \tilde{g}_{th} \right) p_{11} + \left(\frac{2\eta_1 p_{20}}{\tau \eta_2} g_T(t) - \frac{\eta_2 p_{02}}{2\eta_1} \right) E_T(t). \tag{3.7}$$

На основании теоремы о равномерной асимптотической устойчивости тривиального решения систем с квазипериодическими (периодическими) коэффициентами (см. [6, 7]) условия равномерной асимптотической устойчивости T -периодического решения системы уравнений (3.3) (некритический случай) получим в виде системы неравенств

$$\begin{aligned} p_{20}p_{02} - p_{11T}^2(t) &> 0, \\ s_{20}(t) &< 0, \\ s_{02}(t) &< 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

при всех $t \in [t', t' + T]$, $t' \in T_0$.

Таким образом, задача об асимптотической устойчивости некоторых сигналов эквивалентного CO_2 -лазера сводится в рамках предложенного способа построения матрично-значной функции Ляпунова к задаче отыскания T -периодических решений нелинейной нестационарной начальной задачи (2.1), (3.1) и линейного неоднородного уравнения (3.7) с периодическими коэффициентами и начальным условием

$$p_{11}(t'_0) = p'_{110}. \quad (3.9)$$

Это, в свою очередь, предполагает предварительное исследование вопроса об области, в которой уравнения (2.1), (3.7) образуют T -систему [10], и установление условий существования соответствующих T -периодических решений, проходящих в начальный момент t'_0 через точку (g'_0, E'_0, p'_{110}) .

Положим

$$T = k \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.10)$$

где k — некоторое натуральное число, и зададим область $D \subset \mathbb{R}^3$, выделяющую T -систему, неравенствами

$$D : |g| \leq g_{\max}, \quad |E| \leq E_{\max}, \quad |p_{11}| \leq p_{11 \max}. \quad (3.11)$$

Введем в рассмотрение вектор $M = (M_1, M_2)^T$ и скаляр M_3 , которыми ограничены при всех $t \in T_0$ и $g, E, p_{11} \in D$ абсолютные величины соответствующих правых частей уравнений (2.1) и (3.7) (в дальнейшем — f_1, f_2 и f_3):

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2A + g_{\max}(1 + E_{\max}^2)}{\tau}, \quad M_2 = \frac{(g_{\max} + \tilde{g}_{\text{th}})E_{\max}}{2}, \\ M_3 &= \left(\frac{1}{\tau} (1 + E_{\max}^2) + g_{\max} + \tilde{g}_{\text{th}} \right) p_{11 \max} + \left(\frac{2\eta_1 p_{20}}{\tau \eta_2} g_{\max} + \frac{\eta_2 p_{02}}{2\eta_1} \right) E_{\max}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Непрерывная периодическая по t с периодом T вектор-функция $f = (f_1, f_2)^T$ удовлетворяет в $T_0 \times [-g_{\max}, g_{\max}] \times [-E_{\max}, E_{\max}]$ условию Липшица с матрицей

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1 + E_{\max}^2}{\tau} & \frac{2g_{\max}E_{\max}}{\tau} \\ \frac{E_{\max}}{2} & \frac{g_{\max} + \tilde{g}_{\text{th}}}{2} \end{bmatrix},$$

а скалярная непрерывная периодическая функция f_3 в $T_0 \times [-p_{11 \max}, p_{11 \max}]$ — с постоянной

$$K_3 = \frac{1}{\tau} (1 + E_{\max}^2) + g_{\max} + \tilde{g}_{th}.$$

Следуя определению T -системы [10] и связывая с вектор-функцией $(f^T, f_3)^T$ и областью D непустое множество D_f точек \mathbb{R}^3 , содержащееся в D вместе со своей $\frac{T}{2}(M^T, M_3)^T$ -окрестностью, условия, выделяющие T -систему, получаем в виде системы неравенств

$$2g_{\max} - TM_1 > 0,$$

$$2E_{\max} - TM_2 > 0,$$

$$2p_{11 \max} - TM_3 > 0,$$

$$\frac{T}{\pi} \frac{K_{11} + K_{22} + \sqrt{(K_{11} - K_{22})^2 + 4K_{12}K_{21}}}{2} < 1,$$

$$\frac{T}{\pi} K_3 < 1.$$

При этом одновременно предполагается, что начальное значение (g'_0, E'_0, p'_{110}) принадлежит D_f .

Непосредственное построение искомым T -периодических решений осуществимо, например, методом тригонометрической коллокации по численно-аналитической схеме, обоснованной и алгоритмизованной в работе [10]. Для этого будем предполагать, что значения функций $f_j(t, g, E, p_{11})$, $j = 1, 2, 3$, вычисленные, исходя из m -го приближения к искомому периодическому решению, совпадают в $N = 2r + 1$ точках коллокации $t_i = i \frac{T}{N}$, $i = 0, 1, \dots, 2r$, со значениями тригонометрических полиномов

$$f_j^m = \alpha_{j0}^m + \sum_{l=1}^r (\alpha_{jl}^m \cos l\Omega t + \beta_{jl}^m \sin l\Omega t), \tag{3.13}$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Тогда векторы коэффициентов

$$f_j^{m\Gamma} = (\alpha_{j0}^m, \alpha_{j1}^m, \beta_{j1}^m, \dots, \alpha_{jr}^m, \beta_{jr}^m)^T \tag{3.14}$$

тригонометрических полиномов (3.14) выражаются через соответствующие векторы значений этих полиномов

$$f_j^{mM} = (f_j(t_i, g^m(t_i), E^m(t_i), p_{11}^m(t_i)))_{i=0}^{2r}$$

с помощью матрицы

$$\Gamma = [\Gamma_{pq}]_{p,q=1}^N,$$

где

$$\Gamma_{pq} = \begin{cases} \frac{1}{N}, & p = 1, \\ \frac{2}{N} \cos \left((p-1)(q-1) \frac{\pi}{N} \right), & p = 2, 4, \dots, 2r, \\ \frac{2}{N} \sin \left((p-1)(q-1) \frac{\pi}{N} \right), & p = 3, 5, \dots, N, \end{cases}$$

равенством

$$f_j^{m\Gamma} = \Gamma f_j^{mM}.$$

Введя в рассмотрение $N \times N$ -двухдиагональную матрицу

$$\mu^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Omega} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Omega} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\Omega} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\Omega} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{r\Omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{r\Omega} & 0 \end{bmatrix}$$

и N -мерные векторы

$$z_j^{m\Gamma} = \left(\alpha_{j0}^{m'} + \sum_{l=1}^r (\alpha_{jl}^{m'} \cos l \Omega t'_0 + \beta_{jl}^{m'} \sin l \Omega t'_0), 0, \dots, 0 \right)^T,$$

где

$$(\alpha_{j0}^{m'}, \alpha_{j1}^{m'}, \beta_{j1}^{m'}, \dots, \alpha_{jr}^{m'}, \beta_{jr}^{m'})^T = \mu^1 f_j^{m\Gamma},$$

векторы коэффициентов $(m+1)$ -го „тригонометрического” приближения к искомому T -периодическому решению получим в виде

$$g^{m+1,\Gamma} = g^{0\Gamma} + \mu^1 f_1^{m\Gamma} - z_1^{m\Gamma},$$

$$E^{m+1,\Gamma} = E^{0\Gamma} + \mu^1 f_2^{m\Gamma} - z_2^{m\Gamma},$$

$$p_{11}^{m+1,\Gamma} = p_{11}^{0\Gamma} + \mu^1 f_3^{m\Gamma} - z_3^{m\Gamma}.$$

Здесь $g^{0\Gamma}$, $E^{0\Gamma}$ и $p_{11}^{0\Gamma}$ — векторы коэффициентов соответствующих нулевых приближений.

Вид нулевого приближения $(g^0(t), E^0(t))^T$ и, соответственно, вектор начальных значений в точках коллокации и начальный вектор коэффициентов правых частей f_1, f_2 уравнений (2.1) выберем, исходя из решения линеаризованной по уравнению для g системы (2.1):

$$g^0(t) = C_g e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{A}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t) + A, \quad g^0(t'_0) = g'_0,$$

$$E^0(t) = C_E \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(-C_g \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + (A - \tilde{g}_{th})t - \frac{A}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(\frac{1}{\omega} \cos \omega t + \tau \sin \omega t \right) \right) \right\},$$

$$E^0(t'_0) = E'_0,$$

где постоянные C_g, C_E определяются однозначно. В качестве $p_{11}^0(t)$ возьмем решение соответствующей однородной начальной задачи (3.7), (3.9), считая уже известными T -периодические функции

$$g_T(t) \approx g^m(t) = \sum_{j=-r}^r g_j^m e^{i\Omega_j t},$$

$$E_T(t) \approx E^m(t) = \sum_{j=-r}^r E_j^m e^{i\Omega_j t},$$

где $g_j^m = \frac{\alpha_{gj}^m - i\beta_{gj}^m}{2}$, $g_{-j}^m = \overline{g_j^m}$, $E_j^m = \frac{\alpha_{Ej}^m - i\beta_{Ej}^m}{2}$, $E_{-j}^m = \overline{E_j^m}$, а $\alpha_{gj}^m, \beta_{gj}^m$ и $\alpha_{Ej}^m, \beta_{Ej}^m$ обозначают коэффициенты (3.14) соответствующих тригонометрических полиномов (3.13).

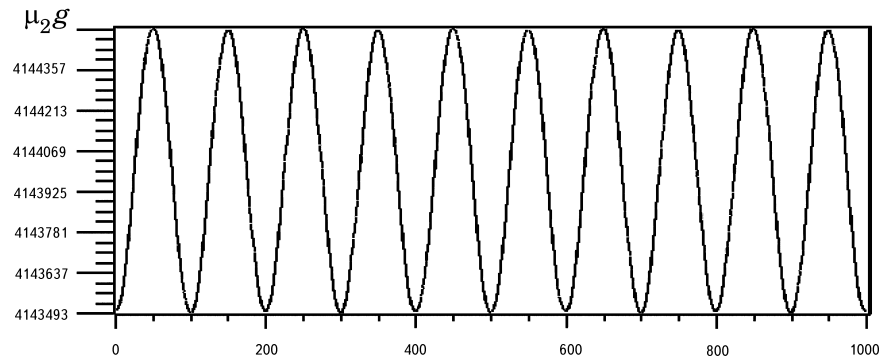
Тогда

$$p_{11}^0(t) = C_{p_{11}} \exp \left\{ \frac{1}{\tau} \left(\left(1 + \sum_j E_j^m E_{-j}^m \right) t + \sum_j \sum_{(s \neq -j)} \frac{E_j^m E_s^m}{i\Omega(j+s)} e^{i\Omega(j+s)t} \right) + \right.$$

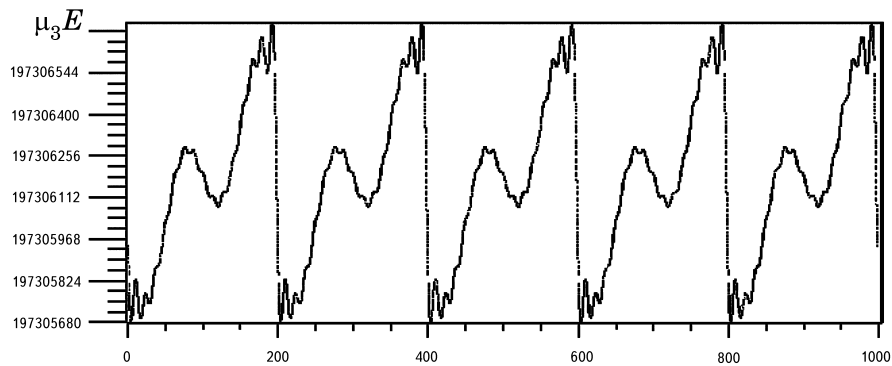
$$\left. + (\tilde{g}_{th} - g_0^m) t - \sum_{\substack{j \\ (j \neq 0)}} \frac{g_j^m}{i\Omega_j} e^{i\Omega_j t} \right\}, \quad p_{11}^0(t'_0) = p'_{110}.$$

Контроль сходимости описанного итерационного процесса нахождения T -периодического решения осуществляется путем сравнения с наперед заданной точностью ε_1 разности векторов коэффициентов m - и $(m + 1)$ -го тригонометрических приближений для $g_T(t), E_T(t), p_{11T}(t)$ с нуль-вектором и средних за период значений функций $f_j(t, g^m(t), E^m(t), p_{11}^m(t))$ с наперед заданной точностью ε_2 — с нулем. Последнее условие является необходимым и достаточным [10] для существования периодических решений периода T , проходящих при $t = t'_0$ через точку $(g'_0, E'_0, p'_{110}) \in D_f$, являясь индикатором удачного выбора чисел k (см. (3.10)), $g_{\max}, E_{\max}, p_{11 \max}$ (см. (3.11)), $t'_0, g'_0, E'_0, p'_{110}$ (см. (3.1), (3.9)), $p_{20}, p_{02}, \eta_1, \eta_2$ (см. (3.12)) и значений параметров исследуемой системы.

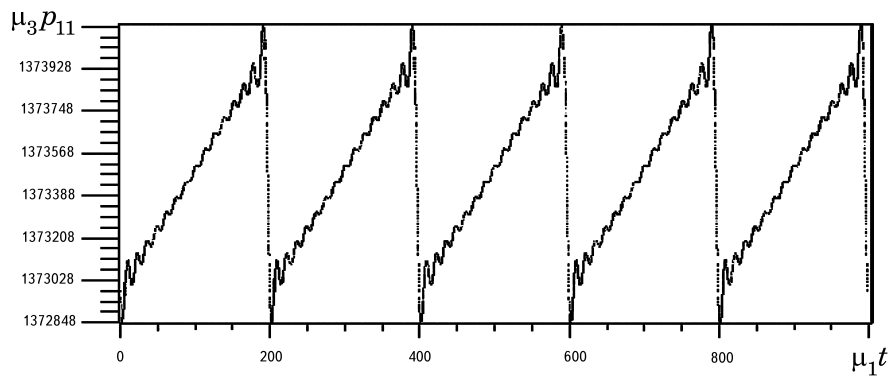
4. Численные примеры и обсуждение. При значениях $\omega = 40,96241$, $A = 0,39856$, $g_{\text{th}} = 0,4$, $M = 0,1$, $\tau = 400$, $\Delta = 0,001$, $t'_0 = 0$, $g_{\text{max}} = 4,77321$, $g'_0 = 0,40001$, $E_{\text{max}} = 9,27539$, $E'_0 = 0,03817$ с использованием $N = 31$ точек коллокации за 5 итераций ($\varepsilon_1 = 10^{-25}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$) было построено периодическое решение начальной задачи (2.1), (3.1) с удвоением периода ($k = 2$). Соответствующие графики приведены на рис. 2, а, б и рис. 3.



а



б



в

Рис. 2

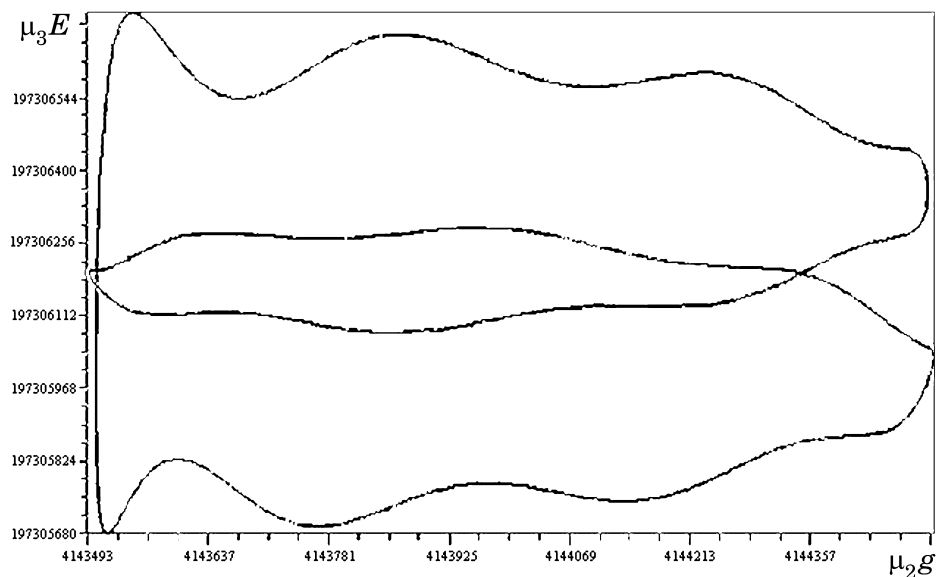


Рис. 3

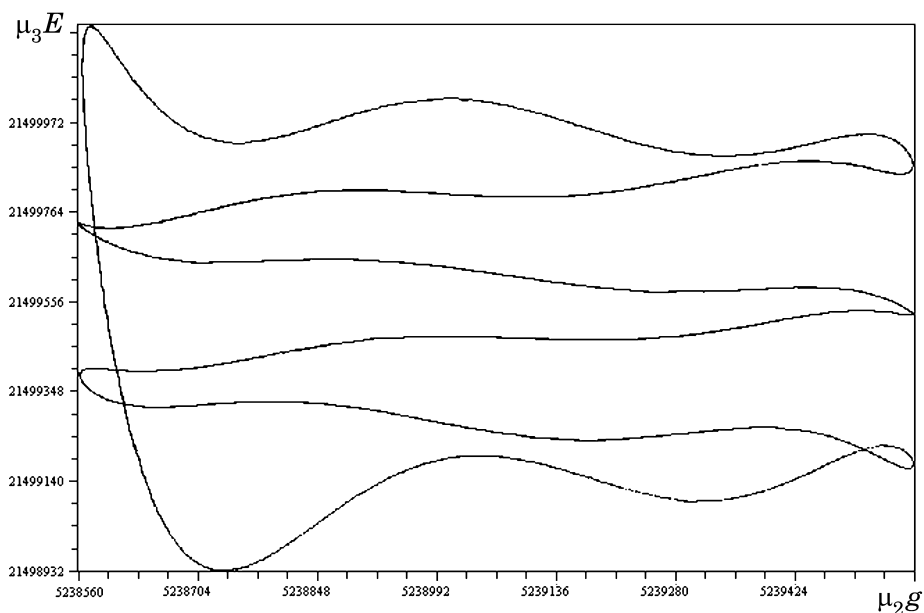


Рис. 4

Равномерная асимптотическая устойчивость соответствующего нулевого решения системы (3.3) установлена построением за 4 итерации с прежней точностью периодической функции $p_{11T}(t)$ (рис. 2, в), удовлетворяющей условиям (3.8). При этом $\eta_1 = 8,01158$, $\eta_2 = 4,38394$, $p_{20} = 2,97746$, $p_{02} = 0,14038$, $p_{11 \max} = 4,65370$, $p'_{110} = 0,42974$, а $\mu_1 = 651$, $\mu_2 = 10358490$, $\mu_3 = 5168882277$, $\mu_4 = 3194900$ – масштабные множители.

Равномерно асимптотически устойчивый сигнал с утроенным периодом по отношению к периоду накачки (рис. 4) исследуется таким же способом при измененных в сравне-

нии с предыдущим примером значениях параметров $\omega = 52, 116990$, $A = 0, 399742$, $g_{\max} = 0, 904412$, $g'_0 = 0, 399742$, $E_{\max} = 8, 306199$, $E'_0 = 0, 002538$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$, $\eta_1 = 8, 776919$, $\eta_2 = 0, 385523$, $p_{20} = 2, 070760$, $p_{02} = 8, 392944$, $p_{11 \max} = 8, 833734$, $p'_{110} = 0, 083020$, $\mu_2 = 13105471$, $\mu_3 = 8472130609$.

Таким образом, рассмотренные примеры демонстрируют возможность параллельного решения некоторых вопросов о спектре и структуре коллективных мод, а также их устойчивости и конкуренции между модами составного резонатора. Указанный в контексте матричнозначных функций Ляпунова способ построения конструктивной вспомогательной функции позволяет рассчитать области устойчивости некоторых периодических сигналов связанных лазеров с периодической накачкой в режиме синхронной генерации.

В заключение отметим, что предложенный подход к анализу устойчивости периодических решений системы (2.1) может быть распространен на случаи наличия фазы коэффициента оптической связи между лазерами, нейтральной устойчивости по линейному приближению, изучения элементов динамики многомодульных систем.

1. Лиханский В. В., Напартович А. П., Сухарев А. Г. Фазовая синхронизация оптически связанных лазеров с периодической накачкой // Квант. электроника. — 1995. — **22**, № 1. — С. 47–48.
2. Хакен Г. Синергетика: иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985. — 420 с.
3. Лиханский В. В., Напартович А. П. Излучение оптически связанных лазеров // Успехи физ. наук. — 1990. — **160**, № 3. — С. 101–143.
4. Martynuk A. A. Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov functions. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2007. — 322 p.
5. Martynuk A. A., Slyn'ko V. I. Matrix-valued Lyapunov function for an extended dynamic system // Int. Appl. Mech. — 2001. — **37**, № 8. — P. 1083–1088.
6. Ли́ла Д. М., Мартынюк А. А. О построении функции Ляпунова для класса систем с квазипериодическими коэффициентами // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 12. — С. 121–130.
7. Ли́ла Д. М., Слынько В. И. О построении матричнозначной функции Ляпунова для линейной системы с квазипериодическими коэффициентами // Доп. НАН України. — 2007. — № 11. — С. 60–65.
8. Мартынюк А. А., Слынько В. И. О построении матричнозначной функции Ляпунова для линейной периодической системы на временной шкале // Докл. АН. — 2007. — **417**, № 1. — С. 18–22.
9. Martynuk A. A., Slyn'ko V. I. Stability results for large-scale difference systems via matrix-valued Liapunov functions // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2007. — **7**, № 2. — P. 217–224.
10. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 184 с.

Получено 11.09.08