УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СИНГУЛЯРНО СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

Н.И. Шкиль

Нац. пед. ун-т,
Украина, 252030, Киев, ул. Пирогова, 9

In the given paper asymptotic formulae for solution of systems with slowly varying coefficients for a case of multiple roots of a characteristic equation are given. The obtained results are applicable for asymptotic integration of systems with points of a turn.

Наведені асимптотичні формули для розв'язків систем з повільно змінними коефіцієнтами у випадку кратних коренів характеристичного рівняння. Отримані результати застосовуються для асимптотичного інтегрування систем з точками повороту.

1. Краткий исторический обзор. В данной статье, в основном, излагаются результаты автора, относящиеся к исследованию линейных дифференциальных систем, коэффициенты которых зависят от „медленного" времени $\tau = \varepsilon t$ (ε — малый параметр). К этим уравнениям приводится широкий класс дифференциальных уравнений, в частности уравнения с малым параметром при старших производных, системы дифференциальных уравнений при части и при всех производных, дифференциальные уравнения с большим параметром, краевые задачи на собственные значения, а также ряд задач техники и практики.

Первые фундаментальные результаты исследования данных дифференциальных уравнений принадлежат С.Ф. Фещенко, С.Г. Крейну, Ю.Л. Далецкому, И.З. Штокало, Н.И. Шкилю. Работы указанных авторов появились под непосредственным влиянием работ Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, посвященных асимптотическим методам нелинейной механики. В частности, идея построения m-приближения и исследования его асимптотических свойств, явилась основополагающей при изучении указанных дифференциальных уравнений.

Заметим, что истоки асимптотических разложений восходят к работам Лиувилля, Биркгофа, Шлезингера, Тамаркина.

Так, Лиувилль рассмотрел вопрос о разложении произвольных функций по фундаментальным функциям уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda g(x) - r(x)]y = 0. \tag{1}$$

Фундаментальные функции, полученные Лиувиллем для уравнения (1) при больших значениях параметра λ, имеют свойство ортогональности. Поэтому вид разложения данной функции по фундаментальным функциям уравнения (1) определяется непосредственно. Остается показать, что: 1) построенный ряд сходится и 2) представляет данную функцию. Сходимость ряда Лиувилль доказал с помощью полученных им асимптотических формул для фундаментальных функций. Доказательство п. 2 проведено с помощью некоторых результатов Штурма.

После работ Штурма и Лиувилля теория асимптотического представления решений дифференциальных уравнений начала быстро развиваться. Однако все эти исследования относились к самосопряженным дифференциальным уравнениям. Эти ограничения сняли в своих исследованиях Шлезингер, Биркгоф, Тамаркин.

Так, Биркгоф рассмотрел вопрос о построении асимптотического решения для дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \rho a_{n-1}(x,\rho)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \rho^n a_0(x,\rho)y = 0,$$

где $a_i(x,\rho)$, $i = 0,1,...,n-1$, — аналитические функции относительно комплексного параметра на бесконечности, имеющие производные всех порядков по вещественной переменной.

При этом, в отличие от Шлезингера, который доказал асимптотическое свойство решений лишь на некотором фиксированном луче $\arg\rho = \alpha$ для больших $|\rho|$, Биркгоф доказывает аналогичные свойства для области $\theta < \arg\rho < \eta$.

Тамаркин обобщил результаты Биркгофа для систем линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x,\rho)y_k, \quad i = 1,...,n, \tag{2}$$

где $a_{ik}(x,\rho)$ — однозначные функции комплексного параметра ρ, аналитические около точки $\rho = \infty$, но имеющие особенность при $\rho = \infty$ (полюс порядка $r \geq 1$). Полученные им асимптотические выражения для решений системы (2) содержат в себе, как частные случаи, аналогичные формулы, установленные иным путем Шлезингером для систем вида (2) и Биркгофом для одного дифференциального уравнения порядка n (рассматривался случай $r = 1$).

В 1936 г. появилась работа Триитзинского, где дано полное изложение состояния вопроса об асимптотическом представлении решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщением теории Шлезингера — Биркгофа — Тамаркина на случай линейных интегро-дифференциальных уравнений.

В 1940–1945 гг. появились работы В.С. Пугачева, в которых, в отличие от предыдущих исследователей, асимптотическое представление решений приведено в более общем виде.

К работам асимптотического характера следует отнести также работы Г.Л. Турритина и М. Хукухары, в которых проведено асимптотическое расщепление системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметра, на системы более низкого порядка.

Заканчивая краткий обзор классических работ по асимптотическому представлению решений линейных дифференциальных уравнений, следует отметить, что эти методы в дальнейшем получили всестороннее и плодотворное развитие как в нашей стране, так и за рубежом. Обширная библиография работ, относящихся к указанным исследованиям, приведена в монографиях [1, 2].

Как упоминалось выше, под влиянием асимптотических методов Крылова — Боголюбова — Митропольского очень бурно начали развиваться исследования линейных дифференциальных уравнений, сингулярно содержащих малый параметр.

Первые результаты в этом направлении были получены С.Ф. Фещенко в 1948–1949 гг. для уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon\rho(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} + q(\tau,\varepsilon)y = \varepsilon f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(\tau,\varepsilon)}, \tag{3}$$

где $\rho(\tau,\varepsilon)$, $q(\tau,\varepsilon)$, $f(\tau,\varepsilon)$ — медленно меняющиеся функции, допускающие разложение по степеням малого параметра ε. При этом рассмотрен столь важный с точки зрения приложений к задачам математической физики, а также с теоретической стороны случай, когда функция $\nu(\tau)$ $\left(\nu(\tau) = \dfrac{d\theta(t,\varepsilon)}{dt}\right)$ при некоторых τ из области его изменения совпадает с одним из простых корней характеристического уравнения, составленного для уравнения (3). Этот случай автор назвал „резонансным".

Доказанные С.Ф. Фещенко теоремы позволяют строить асимптотическое решение уравнения (3) в „резонансном" и „нерезонансном" (когда $\nu(\tau)$ при любом τ из его области изменения не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения) случаях. Аналогичные теоремы были получены С.Ф. Фещенко для системы линейных дифференциальных уравнений вида (3).

Затем С.Ф. Фещенко получил очень важные результаты, относящиеся к асимптотическому расщеплению систем линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x, \tag{4}$$

где x — n-мерный вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ — действительная квадратная матрица порядка n, допускающая представление

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A^{(s)}(\tau).$$

В частности, он доказал следующие теоремы.

Теорема 1. *Допустим, что корни характеристического уравнения*

$$\det\|A^{(0)}(\tau) - \lambda E\| = 0 \tag{5}$$

(E — единичная матрица) можно разбить на две группы $\lambda_1(\tau),\ldots$, $\lambda_r(\tau)$ и $\lambda_{r+1}(\tau),\ldots$ $\ldots,\lambda_n(\tau)$ так, что ни один корень первой группы при всех $\tau\in[0,L]$ не равен корням другой группы. Тогда если $A(\tau,\varepsilon)$ на сегмента $[0,L]$ имеет производные по τ всех порядков, то система дифференциальных уравнений (4) имеет формальное решение вида

$$x = U_1(\tau,\varepsilon)\xi_1 + U_2(\tau,\varepsilon)\xi_2,$$

где $U_1(\tau,\varepsilon)$, $U_2(\tau,\varepsilon)$ — прямоугольные матрицы размеров соответственно $(n\times r)$, $(n\times n-r)$, а ξ_1 — r-мерный вектор, ξ_2 — $n-r$-мерный вектор, определяемые системами дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_1}{dt} = W_1(\tau,\varepsilon)\xi_1, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = W_2(\tau,\varepsilon)\xi_2$$

порядка соответственно r и n − r.

Теорема 2. *Если $A(\tau,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и собственные числа матриц*

$$\Delta_i(\tau) = \frac{1}{2}(W_i(\tau) + W_i^*(\tau)), \quad i = 1, 2,$$

где $W_1(\tau)$, $W_2(\tau)$ — диагональные клетки матрицы $T^{-1}(\tau)A^{(0)}(\tau)\ T(\tau)$ ($T(\tau)$ — матрица преобразования, $T^{-1}(\tau)$ — обратная к $T(\tau)$), $W_1^*(\tau)$, $W_2^*(\tau)$ — матрицы, сопряженные соответственно матрицам $W_1(\tau)$, $W_2(\tau)$, неположительны, то для любого $L > 0$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ можно указать такую постоянную $c > 0$, не зависящую от ε, что если только $x|_{t=0} = x_m|_{t=0}$ (x_m — m-приближение), то

$$\|x - x_m\| \leq \varepsilon^m c.$$

С помощью теорем 1, 2 можно асимптотически понизить порядок системы (4). В частности, если все корни уравнения (5) различны на сегменте $[0, L]$, то эти теоремы дают возможность получить асимптотическое решение системы (4).

Однако с помощью теорем об асимптотическом расщеплении можно, в основном, лишь асимптотически понизить порядок исходной системы. В случае кратных корней характеристического уравнения с помощью этих теорем невозможно получить решения исходной системы дифференциальных уравнений. Между тем этот случай довольно часто встречается как при исследовании теоретических вопросов, так и при решении практических задач. Так, уже при изучении простейшего уравнения, каким является уравнение Штурма — Лиувилля (1), приходится иметь дело с кратным корнем. Эти корни появляются при исследовании системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных, в задачах оптимального уравнения. Заметим, что случай кратных корней, особенно тот, когда кратным корням соответствуют кратные элементарные делители, достаточно труден. Это обусловлено тем, что исходная система дифференциальных уравнений, вообще говоря, не имеет решений, допускающих разложения по целым степеням параметра ε. Такие решения, в отличие от случая простых корней, представляются формальными рядами по различным дробным степеням этого параметра, причем показатели степени зависят не только от кратности корня характеристического уравнения, но и от кратности соответствующих элементарных делителей, а также от некоторых соотношений между коэффициентами рассматриваемой системы.

Случай кратных корней характеристического уравнения для систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами был всесторонне изучен Н.И. Шкилем. Он получил принципиально новые математические результаты по асимптотическому представлению решений данных систем дифференциальных уравнений. Эти результаты частично излагаются в последующих пунктах.

2. Асимптотические разложения в случае простых корней характеристического уравнения. Для большей общности будем рассматривать неоднородную систему вида

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon) + f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{6}$$

где $A(\tau,\varepsilon)$ — квадратная матрица n, $x(t,\varepsilon)$, $f(\tau,\varepsilon)$ — n-мерные векторы. Будем предполагать, что матрица $A(\tau,\varepsilon)$ и вектор $f(\tau,\varepsilon)$ допускают разложение

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A^{(s)}(\tau),\quad f(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s f^{(s)}(\tau),$$

где

$$\tau=\varepsilon t,\quad 0\le\tau\le L<\infty.$$

Относительно функции $\theta(t,\varepsilon)$ допускаем, что производная по t является медленно изменяющейся функцией, т.е.

$$\frac{d\theta(t,\varepsilon)}{dt}=\nu(\tau).$$

Рассмотрим уравнение

$$\det\|A^{(0)}(\tau)-\lambda E\|=0, \tag{7}$$

корни которого обозначим через $\lambda_1^{(0)}(\tau),\ldots,\ \lambda_n^{(0)}(\tau)$.

Уравнение (7) будем называть характеристическим, а его корни — собственными значениями матрицы $A^{(0)}(\tau)$.

Будем рассматривать „резонансный" случай, когда функция $i\nu(\tau)$ $(i=\sqrt{1})$ при $\tau\in[0,L]$ равна одному из корней уравнения (7), например корню $\lambda_1^{(0)}(\tau)$, однако при любом $\tau\in[0,L]$

$$i\nu(\tau)\ne\lambda_k^{(0)}(\tau),\quad k=2,\ldots,n.$$

Предполагаем, что корни характеристического уравнения (7) на сегменте $[0,L]$ остаются простыми, т.е. при любом $\tau\in[0,L]$

$$\lambda_i(\tau)\ne\lambda_j(\tau),\quad i\ne j,\ i,j=1,\ldots,n. \tag{8}$$

Теорема 3. *Если на сегменте $[0,L]$ матрицы $A^{(s)}(\tau)$ и векторы $f^{(s)}(\tau)$, $s=0,\ 1,\ldots$, неограниченно дифференцируемые и выполняется соотношение (8), то система дифференциальных уравнений (6) имеет формальное решение вида*

$$x(t,\varepsilon)=U(\tau,\varepsilon)h(t,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)},$$

где $U(\tau,\varepsilon)$ — квадратная матрица порядка n, а $h(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор, определяемый системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dh(t,\varepsilon)}{dt}=[\Lambda(\tau,\varepsilon)-i\nu(\tau)E]h(t,\varepsilon)+z(\tau,\varepsilon),$$

в которой $\Lambda(\tau,\varepsilon)$ — диагональная матрица, $z(\tau,\varepsilon)$ — n-мерный вектор, причем $U(\tau,\varepsilon)$, $\Lambda(\tau,\varepsilon)$, $z(\tau,\varepsilon)$ допускают формальные разложения

$$U(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s U^{(s)}(\tau),\quad \Lambda(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \Lambda^{(s)}(\tau),\quad z(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s z^{(s)}(\tau).$$

Заметим, что эта теорема верна независимо от того, имеется в системе „резонанс" или его нет.

Введем в рассмотрение вектор

$$x_m(\tau,\varepsilon) = U_m(\tau,\varepsilon)h_m(t,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)},$$

где $U_m(\tau,\varepsilon)$ — квадратная матрица вида

$$U_m(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U^{(s)}(\tau),$$

а $h_m(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор, определяемый системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_m(t,\varepsilon)}{dt} = [\Lambda_m(\tau,\varepsilon) - i\nu(\tau)E]h_m(\tau,\varepsilon) + z_m(\tau,\varepsilon),$$

в которой

$$\Lambda_m(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda^{(s)}(\tau), \quad z_m(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s z^{(s)}(\tau)$$

(m — натуральное число).

Вектор $x_m(t,\varepsilon)$ будем называть m-приближением.

Будем предполагать, что при любом $\tau \in [0,L]$ выполняются условия:

1) для j,..., n

$$\operatorname{Re}(\lambda_j^{(0)}(\tau)) \leq 0; \tag{9}$$

2) точное решение $x(t,\varepsilon)$ системы (6) и m-приближение при $t=0$ равны, т.е.

$$x(0,\varepsilon) = x_m(0,\varepsilon). \tag{10}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы 1 и условия (9), (10), то для любых $L > 0$ и $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ существует такая постоянная $c > 0$, не зависящая от ε, что при $t \in [0, L/\varepsilon]$*

$$\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-1}c.$$

3. Асимптотические разложения в случае простых элементарных делителей. Рассмотрим случай, когда среди корней характеристического уравнения (7) имеются кратные. В частности, предположим, что корень $\lambda_1^{(0)}(\tau)$ на сегменте $[0,L]$ имеет постоянную кратность k_1, корень $\lambda_2^{(0)}(\tau)$ — k_2 и т.д., корень $\lambda_p^{(0)}(\tau)$ имеет постоянную кратность k_p ($k_1+...+k_p = n$).

В настоящем пункте исследуем более простой случай, когда корням $\lambda_1^{(0)}(\tau)$,..., $\lambda_p^{(0)}(\tau)$ соответствуют простые элементарные делители.

Тогда, предполагая выполненным условие (9), систему (6) можно асимптотически расщепить на p подсистем, каждая из которых имеет соответственно порядок k_j, $j = 1$,..., p, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если матрицы $A^{(s)}(\tau)$, векторы $f^{(s)}(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots$, и функция $\nu(\tau)$ неограниченно дифференцируемые на сегменте $[0, L]$, то система дифференциальных уравнений (6) в „резонансном" случае имеет формальное решение*

$$x(t,\varepsilon) = [U_1(\tau,\varepsilon)h(\tau,\varepsilon) + \eta(\tau,\varepsilon)]e^{i\theta(\tau,\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{p} U_k(\tau,\varepsilon)h_k(\tau,\varepsilon),$$

где $U_j(\tau,\varepsilon)$ — прямоугольные матрицы размера $n \times k_j$, $\eta\ (\tau,\varepsilon)$ — n-мерный вектор, $h_j(\tau,\varepsilon)$ — векторы размерности k_j, $j = 1,\ldots,p$, удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_1(\tau,\varepsilon)}{dt} = [\Lambda_1(\tau,\varepsilon) - i\nu(\tau)E]h_1(\tau,\varepsilon) + z(\tau,\varepsilon), \tag{11}$$

$$\frac{dh_k(\tau,\varepsilon)}{dt} = \Lambda_k(\tau,\varepsilon)h_k(\tau,\varepsilon), \quad k = 2,\ldots,p, \tag{12}$$

в которых $\Lambda_j(\tau,\varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка k_j, $j = 1,\ldots,\ p$, а $z(\tau,\ \varepsilon)$ — вектор размерности k_1, причем справедливы формальные разложения

$$U_j(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_j^{(s)}(\tau), \quad \Lambda_j(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Lambda_j^{(s)}(\tau),$$

$$\eta(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \eta^{(s)}(\tau), \quad z(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s z^{(s)}(\tau).$$

Путем некоторых элементарных преобразований системы (11), (12) можно свести к системам дифференциальных уравнений, допускающим, в отличие от системы (6), применение метода последовательных приближений.

4. Асимптотические разложения в случае кратных элементарных делителей. В пп. 4, 5 будем рассматривать однородную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x, \tag{13}$$

где $A(\tau,\varepsilon)$ — та же матрица, что и в системе (6).

Предположим, что характеристическое уравнение (7) имеет, по крайней мере, один корень $\lambda = \lambda_0(\tau)$ постоянной кратности k, $2 \le k < n$, которому соответствует элементарный делитель той же кратности.

Теорема 6. *Если $A(\tau,\varepsilon)$ имеет на отрезке $[0, L]$ производные по τ всех порядков и матрица*

$$c(\tau) = T^{-1}(\tau)\left(\frac{dT(\tau)}{d\tau} - A_1(\tau)T(\tau)\right), \tag{14}$$

где $T(\tau)$ — матрица, приводящая $A_0(\tau)$ к жордановой форме, а $T^{-1}(\tau)$ — матрица, обратная к $T(\tau)$, такова, что при любом $\tau \in [0, L]$ ее элемент

$$c_{k1}(\tau) \neq 0,$$

то система дифференциальных уравнений (13) имеет формальное решение вида

$$x = u(\tau, \mu) \exp\Big(\int\limits_0^\tau \lambda(\tau, \mu) dt\Big), \tag{15}$$

где n-мерный вектор $u(\tau, \mu)$ и скалярная функция $\lambda(\tau, \mu)$ допускают разложения

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau), \quad \lambda(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau),$$

в которых

$$\mu = \varepsilon^{1/k}.$$

Заметим, если $c_{k1}(\tau) \equiv 0$ (но при этом $c_{k-1,1}(\tau)+ c_{k2}(\tau) \neq 0$), то исходная система имеет формальное решение вида (15), в котором $u(\tau,\mu)$, $\lambda(\tau,\mu)$ представляются формальными рядами по степеням параметра $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}$.

Приведем более общий результат, полученный автором в случае кратных элементарных делителей. Пусть выполняются условия:

1) матрица $A(\tau, \varepsilon)$ на отрезке $[0, L]$ имеет производные по τ всех порядков;

2) характеристическое уравнение (7) имеет один корень постоянной кратности k;

3) корню $\lambda_0(\tau)$ соответствует $r \geq 1$ элементарных делителей вида $(\lambda - \lambda_0(\tau))^{k_1}, \ldots$ $\ldots, (\lambda - \lambda_0(\tau))^{k_r}$;

4) выполняется одно из соотношений: а) $k_1 = k_2 = \ldots k_r = k$; б) $k_1 > k_2 > \ldots k_r$.

Тогда в случае 4а) справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Если выполняются условия 1–4, то для того чтобы вектор*

$$x = u(\tau, \mu) \exp\Big(\int\limits_0^\tau \lambda(\tau, \mu) dt\Big),$$

где n-мерный вектор $u(\tau, \mu)$ и скалярная функция $\lambda(\tau, \mu)$ представимы формальными рядами

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau), \qquad \lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau), \tag{16}$$

в которых $\mu = \varepsilon^{1/k}$, был формальным вектор-решением системы (13), необходимо и достаточно, чтобы функция $(\lambda_1(\tau))^k$ при любом $\tau \in [0, L]$ была корнем уравнения

$$\det \begin{Vmatrix} \rho + c_{k1}(\tau) & c_{k,k+1}(\tau) & \ldots & c_{k,l_{r-1}+1}(\tau) \\ c_{2k,1}(\tau) & \rho + c_{2k,k+1}(\tau) & \ldots & c_{2k,l_{r-1}+1}(\tau) \\ \text{-----} & \text{------} & \text{----} & \text{-------} \\ c_{n1}(\tau) & c_{n,k+1}(\tau) & \ldots & \rho + c_{n,l_{r-1}+1}(\tau) \end{Vmatrix} = 0,$$

где $c_{k1}(\tau), \ldots, c_{n,l_{r-1}+1}(\tau)$, $l_{r-1} = (r-1)k$ — элементы матрицы (14).

Заметим, что доказательство достаточного условия данной теоремы одновременно дает и метод построения коэффициентов формальных рядов (16).

Аналогичная теорема справедлива и для случая 4б). Доказано также, что для обоих случаев формальные решения являются асимптотическими разложениями по параметру ε истинных решений системы (13).

5. Точки поворота. Теоремы, приведенные в пп. 2 – 4, верны при условии, что корни характеристического уравнения и соответствующие им элементарные делители сохраняют постоянную кратность при любом $\tau \in [0, L]$. Если эти условия нарушаются (появляются точки поворота [3]), то построение асимптотических разложений для решений рассматриваемых систем весьма затруднительно. Более обозримые результаты при наличии точек поворота получены лишь для одного дифференциального уравнения второго порядка [4] и систем двух дифференциальных уравнений [3]. Исследование этого случая различными авторами проводилось с использованием функций Эйри или сведением рассматриваемых дифференциальных уравнений к некоторым эталонным уравнениям. Таким уравнением является, например, дифференциальное уравнений Эйри. Более подробную информацию можно найти в монографии [3].

Автором данной статьи была впервые сделана попытка [5] построить формальные разложения для точных решений в элементарных функциях для систем дифференциальных уравнений вида (13).

Теорема 8. *Пусть для системы дифференциальных уравнений (13) выполняются следующие условия:*

1) матрица $A(\tau, \varepsilon)$ допускает разложение

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau);$$

2) матрицы $A_s(\tau)$, s =0, 1,..., неограниченно дифференцируемые на отрезке $[0, L]$;

3) существует целое число $k \geq 0$ такое, что корни уравнения

$$\det \|A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^k A_k(\tau) - \lambda E\| = 0 \tag{17}$$

простые при любом $\tau \in [0, L]$.

Тогда существует формальный вектор — решение системы (13) вида

$$x(\tau, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \Lambda(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) a,$$

где $U(\tau, \varepsilon)$ — матрица размера $n \times n$, допускающая формальное разложение

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau, \varepsilon), \tag{18}$$

$\Lambda(\tau, \varepsilon)$ — диагональная матрица, составленная из корней уравнения (17), a — n-мерный вектор.

Заметим, что в отличие от формальных разложений, приведенных в пп. 2 — 4, в разложении (18) коэффициенты, в свою очередь, зависят от ε, что в значительной степени затрудняет исследования асимптотических свойств этих разложений. Некоторые результаты в этом направлении получены в работах [6, 7].

1. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1966. – 252 с.
2. *Шкиль Н.И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применение. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1996. – 198 с.
3. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 477 с.
4. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
5. *Шкиль Н.И.* О периодических решениях системы дифференциальных уравнений второго порядка //Arh. mat. – 1987. – **23**, № 1. – С. 34–40.
6. *Шкиль Н.И., Карпенко Ю.И.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с точковым резонансом //Допов. АН Украины. – 1991. – № 5. – С. 18–22.
7. *Шкиль Н.И., Завизион Г.В.* Асимптотическое представление решений систем линейных дифференциальных уравнений рационального ранга при наличии точки поворота //Диференциально-функциональные уравнения: сб. науч. тр. – Киев: Киев. пед. ин-т, 1991. – С. 93–100.

Получено 25.08.97