Нелінійні коливання 1 • 1998

УДК 517.944

ПРОСТОРИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Г.П. Хома

Тернопіл. акад. нар. госп-ва,
Україна, 282004, Тернопіль, вул. Львівська, 11

Functional spaces in which two-point problem $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$, $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$, $u(x+w) = u(x,t)$ has solution are determined.

Знайдено простори функцій, в яких двоточкова задача $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$, $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$, $u(x+w) = u(x,t)$ має розв'язок.

1. Існування розв'язку. Для функцій $g(x,t)$ із простору C (неперервних і обмежених на множині $\mathbb{R}^2$ функцій) розглянемо оператор [1 – 3]

$$(P^\alpha g)(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{4}\int_t^\alpha d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi,\tau)d\xi \equiv$$

$$\equiv \int_t^\alpha Q(\tau)d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi,\tau)d\xi, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{1}$$

де α — дійсне число, відмінне від нуля, $Q(\tau) = 1/4$ при $0 \le \tau \le t$ і $Q(\tau) = -1/4$ при $t < \tau \le \alpha$.

Якщо позначити через G_x простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$ разом із похідною по x, а символом Q_w простір функцій $g(x,t)$, які задовольняють на $\mathbb{R}^2$ співвідношення $g(x+w,t) = g(x,t)$, то легко переконатися, що оператор P^α має таку властивість.

Теорема 1. *Якщо $g \in G_x \cap Q_w$, то $P^\alpha g \in C^{2,2} \cap Q_w$ і функція $u = P^\alpha g$ є розв'язком задачі*

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \quad u(x+w,t) = u(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Доведення. Нехай $g \in G_x \cap Q_w$. Тоді безпосередньою перевіркою переконуємося, що $(P^\alpha g)(x+w,t) = (P^\alpha g)(x,t)$. Далі, обчислюючи частинні похідні функції $u = P^\alpha g$, знаходимо

$$(P^\alpha g)'_t(x,t) = \int_0^\alpha Q(\tau)(g(x+t-\tau,\tau) + g(x-t+\tau,\tau))d\tau, \tag{3}$$

$$(P^\alpha g)'_x(x,t) = \int_0^\alpha Q(\tau)(g(x+t-\tau,\tau) - g(x-t+\tau,\tau))d\tau, \tag{4}$$

$$(P^\alpha g)'_{tt}(x,t) = g(x,t) + \int\limits_0^\alpha Q(\tau)(g'_x(x+t-\tau,\tau) - g'_x(x-t+\tau,\tau))d\tau, \tag{5}$$

$$(P^\alpha g)'_{xx}(x,t) = \int\limits_0^\alpha Q(\tau)(g'_x(x+t-\tau,\tau) - g'_x(x-t+\tau,\tau))d\tau. \tag{6}$$

Отже, якщо $g \in G_x$, то $P^\alpha g \in C^{2,2}$ і $(P^\alpha g)_{tt}\ (x,t) -\ (P^\alpha g)_{xx}\ (x,t) = g(x,t)$, що й треба було довести.

Знайдемо умови, за яких функція $u(x,t) = (P^\alpha g)\ (x,t)$ може задовольняти крайові умови

$$u(x,0) = (P^\alpha g)(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = (P^\alpha g)(x,\pi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

З (1) при $t=0$ одержуємо

$$(P^\alpha g)(x,0) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\alpha d\tau \int\limits_{x-\tau}^{x+\tau} g(\xi,\tau)d\xi.$$

Обчислюючи похідну $(P^\alpha g)'_x(x,0)$ і виконуючи відповідні заміни змінних, знаходимо

$$(P^\alpha g)'_x(x,0) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\alpha g(x+\tau,\tau)d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_0^\alpha g(x-\tau,\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^\alpha (g(x-\tau+\alpha,\alpha-\tau) - g(x-\tau,\tau))d\tau. \tag{8}$$

Отже, при виконанні умови

$$g(x+\alpha,\alpha-t) = g(x,t) \tag{9}$$

на основі (8) завжди буде справджуватися рівність $(P^\alpha g)'_x\ (x,0) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, а це означає, що $(P^\alpha g)\ (x{,}0) = \text{const}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Якщо припустити, що для $g \in C$ виконується умова

$$g(x,t) = -g(-x,t), \tag{10}$$

то внаслідок непарності функції $g(x,t)$ по змінній x і рівності (1) маємо $(P^\alpha g)\ (0,0) = 0$, а це означає, що $(P^\alpha g)\ (x{,}0) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тобто при одночасному виконанні умов (9) і (10) завжди буде виконуватися рівність $(P^\alpha g)\ (x{,}0) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Тепер, покладаючи $t=\pi$ у формулі (1), дістаємо

$$(P^\alpha g)(x,\pi) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\tau \int\limits_{x-\pi+\tau}^{x+\pi-\tau} g(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{4}\int\limits_\pi^\alpha d\tau \int\limits_{x-\pi+\tau}^{x+\pi-\tau} g(\xi,\tau)d\xi. \tag{11}$$

Виконуючи заміну змінної $\tau = \pi - \theta$ у першому інтегралі рівності (11) і $\tau = \alpha +\ \pi - \theta$ у другому, одержуємо

$$(P^\alpha g)(x,\pi) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_{x-\theta}^{x+\theta} g(\xi,\pi-\theta)d\xi - \frac{1}{4}\int\limits_\pi^\alpha d\theta \int\limits_{x-\theta+\alpha}^{x+\theta-\alpha} g(\xi,\alpha+\pi-\theta)d\xi.$$

Звідси, обчислюючи похідну $(P^{\alpha}g)'_x(x,\pi)$, знаходимо

$$(P^{\alpha}g)'_x(x,\pi) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} g(x+\theta,\pi-\theta)d\theta - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} g(x-\theta,\pi-\theta)d\theta -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{\alpha} g(x+\theta-\alpha,\alpha+\pi-\theta)d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{\alpha} g(x-\theta+\alpha,\alpha+\pi-\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\tau} g(x+\theta,\pi-\theta)d\theta - \frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{0} g(x+\theta-\alpha,\alpha+\pi-\theta)d\theta -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} g(x-\theta,\pi-\theta)d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{0} g(x-\theta+\alpha,\alpha+\pi-\theta)d\theta -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\alpha} g(x+\theta-\alpha,\alpha+\pi-\theta)d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\alpha} g(x-\theta+\alpha,\alpha+\pi-\theta)d\theta =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6. \tag{12}$$

Легко переконатися, що при виконанні умов

$$g(x-\alpha,\alpha-t) = g(x,t) \ \text{ і } \ g(x,t) = -g(x,-t) \tag{13}$$

буде справедлива рівність $I_1 + I_2 = 0$; при виконанні умов

$$g(x+\alpha,\alpha-t) = g(x,t) \ \text{ і } \ g(x,t) = -g(x,-t) \tag{14}$$

— рівність $I_3 + I_4 = 0$, а при виконанні умов

$$g(x+\alpha,\alpha-t) = g(x,t) \ \text{ і } \ g(x,t) = g(x,t+2\pi) \tag{15}$$

— рівність $I_5 + I_6 = 0$.

Отже, на підставі умов (13) — (15) для функції $g \in C$ завжди справджується рівність $(P^{\alpha}g)'_x\ (x,\pi) = 0$, а це означає, що $(P^{\alpha}g)(x,\pi) = \mathrm{const}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Якщо тепер припустити, що для функції $g \in C$ виконується умова (10), то в просторі функцій

$$C^{\alpha-} = \{g:\ g(x,t) = g(x+\alpha,\alpha-t) = g(x-\alpha,\alpha-t) =$$

$$= g(x,t+2\pi) = -g(-x,t) = -g(x,-t)\} \tag{16}$$

буде виконуватися рівність $(P^{\alpha}g)\ (0,\pi) = 0$, а отже, $(P^{\alpha}g)\ (x,\pi) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Таким чином, в силу теореми 1 и проведених вище досліджень справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо $g \in G_x \cap C^{\alpha-}$, то $u = P^{\alpha}g \in C^{2,2} \cap\ Q_w$ і є розв'язком крайової періодичної задачі (2), (3).*

2. Простори розв'язків. Природно виникає питання: яка структура введеного простору $C^{\alpha-}$ і як визначити число α?

Позначимо через Q_w^- і $Q_{2\pi}^-$ відповідно простори функцій $Q_w^- = \{g : qq(x+w,t) = -g(-x,t) = g(x,t)\}$ і $Q_{2\pi}^- = \{g : g(x,t+2\pi) = -g(x,-t) = g(x,t)\}$. Покажемо, що на основі функціональної залежності

$$g(x+\alpha,\alpha-t) = g(x-\alpha,\alpha-t) = g(x,t) \tag{17}$$

можна, щонайменше, утворити три простори функцій, в яких задача (2), (7) має розв'язок.

I. Нехай

$$g \in Q_w^- \cap Q_{2\pi}^-; \quad \alpha = wq, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

В цьому випадку рівність (17) набуває вигляду

$$g(x, wq - t) = g(x,t). \tag{19}$$

Оскільки $g \in Q_{2\pi}^-$, то, зрозуміло, що $wq \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Покладемо

$$wq = (2p-1)\pi, \quad (2p-1,q) = 1, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

де запис $(k,s) = 1$ означає, що числа k і s — взаємно прості. Тепер рівність (19) можна записати так:

$$g(x,\pi - t) = g(x,t). \tag{21}$$

Враховуючи (21) і зроблені вище припущення, можна визначити число $\alpha = \alpha_1$, період w_1 і простір C_1^- функцій, в якому задача (2), (7) має розв'язок:

$$\alpha_1 = w_1 q, \quad w_1 q = (2p-1)\pi, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (2p-1,q) = 1,$$

$$C_1^- = \{g : g(x,t) = g(x+w_1,t) = g(x,\pi - t) = -g(-x,t) = -g(x,-t)\}. \tag{22}$$

Лема 1. *Якщо* $g \in C_1^-$, *то* $g \in Q_{2\pi}^-$.

Доведення. Справді, $g(x,t+2\pi) = g(x,\pi-(-\pi-t)) = -g(x,\pi-(-t)) = g(x,t)$, що й треба було довести.

II. Нехай

$$g \in Q_w^- \cap Q_{2\pi}^-; \quad 2\alpha = (2s-1)w, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

В цьому випадку рівність (17) набуває вигляду

$$g\left(\frac{(2s-1)w}{2} + x, \ \frac{(2s-1)w}{2} - t\right) = g(x,t). \tag{24}$$

Покладемо

$$(2s-1)w = 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2s-1,l) = 1. \tag{25}$$

Тепер на основі (25) в залежності від вибору числа l (парним чи непарним) визначаємо ще два підпростори C_j^-, $j = 2, 3$, функцій, в яких задача (2), (7) має розв'язок:

$$2\alpha_2 = (2s-1)w_2, \quad (2s-1)w_2 = 4\pi p, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (2s-1,p) = 1,$$

$$C_2^- = \{g : g(x,t) = -g(x+w_2/2,t) = g(x,t+2\pi) = -g(-x,t) = -g(x,-t)\};$$

$$2\alpha_3 = (2s-1)w_3, \quad (2s-1)w_3 = 2\pi(2p-1), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (2s-1, 2p-1) = 1,$$

$$C_3^- = \{g : g(x,t) = g(x + w_3/2, \pi - t) = g(x + w_3, t) = g(x, t + 2\pi) = -g(-x,t) =$$
$$= -g(x,-t)\}.$$

Лема 2. *Якщо* $g \in C_2^-$, *то* $g \in Q_{w_2}^-$.

Доведення. Справді, $g(x + w_2, t) = g(x + w_2/2 + w_2/2,\, t) = -g(x + w_2/2, t) = g(x,t)$, що й треба було довести.

Отже, ми вказали три простори C_j^-, $1 = 1, 2, 3$, функцій, в яких задача (2), (3) має розв'язок, тобто справедливе наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо* $g \in G_x \cap C_j^-$, $j = 1{,}2{,}3$, *то функція*

$$u(x,t) \equiv (P^{\alpha j} g)(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{4}\int_t^{\alpha j} d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\xi,\tau)d\xi,$$

$$\alpha_1 = w_1 q, \quad 2\alpha_j = w_j(2s-1), \quad j = 2,3, \tag{26}$$

є розв'язком задачі (2), (7).

Зауважимо, що вперше в класі 2π-періодичних по змінній t функцій аналогічний результат [1] було одержано і для періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \quad u(x + w, t) = u(x,t), \quad u(x, t + 2\pi) = u(x,t).$$

1. *Митропольський Ю.О., Хома Г.П., Цинайко П.В.* Періодична задача для неоднорідного рівняння коливання струни //Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 296–301.
2. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.

Одержано 20.02.98