

**ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПРО ВЛАСНІ
КОЛИВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ
У НАПОЛОВИНУ ЗАПОВНЕНІЙ СФЕРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ**

М. Я. Барняк, О. П. Лещук

*Ин-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3*

We study eigen oscillations of a viscous incompressible fluid, which has free boundary, in a hemispherical tank. We find four systems of coordinate functions that solve the problem inside the region and have properties of the sought solutions. Then using these systems we construct a coordinate system that satisfies all but one boundary conditions of the problem. These systems are used to solve the problem applying the projection method. We calculate eigen frequencies and logarithmic decrements of oscillations of the fluid. The obtained results are compared with asymptotic and empirical formulas.

Исследуются собственные колебания вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в сосуде, имеющем форму полусферы. Определены четыре системы координатных функций, удовлетворяющих уравнениям задачи внутри области, которые имеют свойства искомого решения. Затем с помощью этих систем построена одна координатная система, удовлетворяющая почти всем (кроме одного) краевым условиям задачи. Эта система использована при решении задачи проекционным методом. Приведены результаты вычисления собственных частот и логарифмических декрементов колебаний жидкости. Проведено сравнение с асимптотической и эмпирическими формулами.

1. Вступ. Визначення частот і логарифмічних декрементів затухань (далі просто декрементів) власних коливань рідини з вільною поверхнею в посудині скінченних розмірів є відомою задачею [1 – 10]. Незважаючи на це, отримати майже аналітичні розв'язки у попередніх роботах не вдавалося. За своєю суттю всі існуючі методи побудови розв'язків задачі про власні коливання, крім методів, що викладені в [7 – 10], є асимптотичними методами розкладу в ряд за степенями малого параметра [11].

У даній роботі використовується проекційний метод побудови розв'язків задачі. Успіх реалізації проекційних методів насамперед залежить від вдалого вибору системи координатних функцій. Використовуючи зображення розв'язків лінеаризованих рівнянь руху в'язкої нестисливої рідини через скалярні і векторні потенціали [12], у випадку півсфери вдається підібрати чотири системи координатних функцій, які задовольняють рівняння всередині області і дві крайові умови задачі. Частина функцій із цих систем має характер прилежового шару в околі твердої стінки і вільної поверхні, інша частина має властивості безвихрового руху рідини всередині посудини. Тобто системи координатних функцій мають характерні властивості шуканого розв'язку. За допомогою цих чотирьох систем побудовано одну координатну систему функцій, які задовольняють всі (крім однієї, яка містить спектральний параметр) крайові умови задачі.

Остання крайова умова задачі задовольняється на основі проекційного методу [10]. Таким чином вдається побудувати наближений аналітичний розв'язок задачі, для якого з високою точністю виконуються крайові умови.

2. Постановка задачі. Відомо [3, 13], що у лінійній постановці власні коливання в'язкої рідини, яка частково заповнює порожнину нерухомого твердого тіла, описуються спектральною крайовою задачею

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{H}\Delta\bar{v} + \nabla p &= \lambda\bar{v}, \quad \operatorname{div}\bar{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \bar{v} = 0 \quad \text{на } S, \\
 \int_{\Sigma} h dS &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\
 \frac{2}{H} \frac{\partial v_z}{\partial z} + h - p &= 0, \quad v_z + \lambda h = 0 \quad \text{на } \Sigma.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тут Ω — область, заповнена рідиною у стані спокою, Σ — незбурена вільна поверхня рідини, S — тверда стінка порожнини, $\bar{v}(x, y, z)e^{-\lambda t}$ — швидкість частинок рідини, $p(x, y, z)e^{-\lambda t}$ — відхилення тиску в рідині відносно його статичного значення, $h(x, y)e^{-\lambda t}$ — відхилення по вертикалі вільної поверхні рідини відносно стану рівноваги, t — час, λ — частотний параметр, (x, y, z) — декартова система координат, до того ж вісь z направлена вертикально вгору, а поверхня Σ лежить у площині $z = 0$, $H = g^{1/2}L^{3/2}\nu^{-1}$ — число Галілея, H — безрозмірний параметр, який характеризує співвідношення між силами ваги (g — прискорення сил земного тяжіння), силами в'язкого тертя (ν — кінематичний коефіцієнт в'язкості) і розмірами порожнини (L — характерний лінійний розмір порожнини). Координати, всі функції і величини в задачі (1) є безрозмірними.

Спектральна задача (1) є основним об'єктом дослідження у даній роботі. Теоретичні аспекти задачі досить добре досліджено [13–16]. Зокрема, було показано, що весь спектр задачі є не більш ніж зліченною множиною з можливими граничними точками 0 та $+\infty$. Всі точки спектра знаходяться у правій півплощині. При достатньо великих значеннях числа Галілея H задача (1) має скінченне число комплексних власних значень. Разом з тим побудова розв'язків (1) є досить складною і маловивченою проблемою. Дослідженню цієї проблеми у випадку, коли посудина (S), в якій відбувається рух рідини, є півсферою, присвячено дану роботу.

3. Проекційний метод побудови наближеного розв'язку. Виконаємо заміну

$$\bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{H}, \quad \omega^2 = \lambda H, \quad v_z^* = \omega f. \tag{2}$$

Далі знаком $*$ для зручності запису будемо нехтувати. Тоді задача (1) набере вигляду

$$\begin{aligned}
 -\Delta\bar{v} + \nabla p &= \omega^2\bar{v}, \quad \operatorname{div}\bar{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \bar{v} = 0 \quad \text{на } S, \quad \int_{\Sigma} f dS = 0, \\
 \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\
 \omega \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - p \right) - H^2 f &= 0, \quad v_z = \omega f \quad \text{на } \Sigma.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Завдяки заміні (2) у задачі (3) параметр H міститься лише в одній крайовій умові. Тому при побудові розв'язків задачі (3) доцільно вважати параметр ω фіксованим, а параметр H шуканим, тобто розглядати H як функцію від ω .

На класі соленоїдальних вектор-функцій $\bar{v} \in W_2^1(\Omega)$ і скалярних функцій $f \in L_2(\Sigma)$ і $\int_{\Sigma} f dS = 0$, $p \in W_2^1(\Omega)$, які задовольняють систему рівнянь

$$-\Delta \bar{v} + \nabla p = \omega^2 \bar{v}, \quad \operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (4)$$

і крайові умови

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (5)$$

визначимо функціонал [10]

$$K(\bar{v}, p, f, H) = E(\bar{v}, \bar{v}) - \omega^2 T(\bar{v}, \bar{v}) - 2\omega \int_{\Sigma} \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - p \right) f dS + H^2 \int_{\Sigma} f^2 dS,$$

де $H \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{C}$, а функціонали T і E мають вигляд

$$T(\bar{v}, \bar{u}) = \int_{\Omega} (v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3) d\Omega,$$

$$E(\bar{v}, \bar{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega.$$

Функціонали T і E визначаються на класі вектор-функцій \bar{v} , \bar{u} , які інтегровні з квадратом разом зі своїми першими похідними по області Ω ($\{\bar{v}, \bar{u}\} \subset W_2^1(\Omega)$). Тут для зручності запису декартові координати (x, y, z) позначено через (x_1, x_2, x_3) . Величина $\mu E(\bar{v}, \bar{u})$ для дійсних значень функцій \bar{v} і \bar{u} має фізичний зміст роботи, яка виконується за одиницю часу в'язкими силами, що виникають при наявності поля швидкостей \bar{v} на можливому переміщенні, яке визначається полем швидкостей \bar{u} (μ — динамічний коефіцієнт в'язкості).

В основу проекційного методу побудови наближених розв'язків (3) покладемо наступну теорему [10].

Теорема 1. Для того щоб вектор-функція $\bar{v}(x, y, z)$ та скалярна функція $p(x, y, z)$, що задовольняють систему рівнянь (4) та крайові умови (5), разом зі скалярною функцією $f(x, y)$ та відповідним їм власним значенням H при заданому значенні ω були розв'язками задачі (3), необхідно і достатньо, щоб вони надавали стаціонарного значення функціоналу $K(\bar{v}, p, f, H)$.

Наближений розв'язок задачі (3) подамо у вигляді скінченних сум

$$\bar{v}_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} a_k \bar{v}_k, \quad p_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} a_k p_k, \quad f_{n_2} = \sum_{k=1}^{n_2} b_k f_k,$$

де вектор-функції \bar{v}_k задовольняють умови (5) і разом зі скалярними функціями p_k є розв'язками системи рівнянь (4). Невідомі коефіцієнти a_k , b_k , а також значення числа H знаходимо з умов стаціонарності функціонала K , тобто з умов

$$\frac{\partial K(\bar{v}_{n_1}, p_{n_1}, f_{n_2}, H)}{\partial a_i} = 0, \quad i = \overline{1, n_1}; \quad \frac{\partial K(\bar{v}_{n_1}, p_{n_1}, f_{n_2}, H)}{\partial b_j} = 0, \quad j = \overline{1, n_2}.$$

Нижче будуть побудовані координатні функції \bar{v}_k , p_k , f_k .

4. Побудова систем координатних функцій. Перейдемо до сферичної системи координат (ρ, θ, η)

$$x = \rho \cos(\eta) \sin(\theta), \quad y = \rho \sin(\eta) \sin(\theta), \quad z = \rho \cos(\theta).$$

Оскільки ми досліджуємо коливання рідини у випадку, коли посудина, в якій знаходиться рідина, має форму півсфери, то $\Omega = \{(\rho, \theta, \eta) : 0 \leq \rho < 1, \pi/2 < \theta \leq \pi, 0 \leq \eta \leq 2\pi\}$, $S = \{(\rho, \theta, \eta) : \rho = 1, \pi/2 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \eta \leq 2\pi\}$, $\Sigma = \{(\rho, \theta, \eta) : 0 \leq \rho \leq 1, \theta = \pi/2, 0 \leq \eta \leq 2\pi\}$. Для такої форми області Ω у сферичній системі координат задача (3) має вигляд

$$-\Delta \bar{v} + \nabla p = \omega^2 \bar{v}, \quad \operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\theta}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\sin(\theta)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\eta}{\sin(\theta)} \right) + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (7)$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{на } S, \quad \int_{\Sigma} f dS = 0, \quad (8)$$

$$\omega \left(2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\rho}{\rho} \right) - p \right) - H^2 f = 0, \quad v_\theta = \omega f \quad \text{на } \Sigma. \quad (9)$$

Задача (6)–(9) допускає відокремлення кругової координати η для довільної області, яка має форму тіла обертання. Тому розв'язки (6)–(9) шукаємо у вигляді

$$v_\rho(\rho, \theta, \eta) = v_\rho^*(\rho, \theta) \cos(m\eta), \quad v_\theta(\rho, \theta, \eta) = v_\theta^*(\rho, \theta) \cos(m\eta), \quad v_\eta(\rho, \theta, \eta) = v_\eta^*(\rho, \theta) \sin(m\eta), \quad (10)$$

$$p(\rho, \theta, \eta) = p^*(\rho, \theta) \cos(m\eta), \quad f(\rho, \eta) = f^*(\rho) \cos(m\eta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Позначимо $L = \{(\rho, \theta) : \rho = 1, \pi/2 \leq \theta \leq \pi\}$, $\Gamma = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, \theta = \pi/2\}$. Контури L і Γ — це частини межі меридіального перерізу $G = \Omega \cap \{(\rho, \theta, \eta) : \eta = 0\}$ області Ω .

Відомо [12], що розв'язки системи рівнянь (6) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 p &= \omega^2 \varphi(\rho, \theta, \eta), \\
 \bar{v} &= \nabla \varphi(\rho, \theta, \eta) + \text{rot}(\text{rot}(\rho \psi_1(\rho, \theta, \eta) \bar{e}_\rho)) + \text{rot}(\rho \psi_2(\rho, \theta, \eta) \bar{e}_\rho) = \\
 &= \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{\cos(\theta)}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \bar{e}_\rho + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \bar{e}_\theta + \\
 &\quad + \left(-\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \rho \partial \eta} + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \bar{e}_\eta
 \end{aligned} \tag{11}$$

через гідродинамічні потенціали φ , ψ_1 і ψ_2 , які задовольняють рівняння

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta \psi_1 + \omega^2 \psi_1 = 0, \quad \Delta \psi_2 + \omega^2 \psi_2 = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Поряд із розв'язками (11) системи (6) будемо використовувати інше зображення частинних розв'язків системи (6) через гідродинамічні потенціали ξ , χ_1 , χ_2 у циліндричній системі координат (r, z, η)

$$x = r \cos(\eta), \quad y = r \sin(\eta), \quad z = z,$$

яке має вигляд [12]

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \nabla \xi(r, z, \eta) + \text{rot}(\text{rot}(\chi_1(r, z, \eta) \bar{e}_z)) + \text{rot}(\chi_2(r, z, \eta) \bar{e}_z), \\
 p &= \omega^2 \xi(r, z, \eta).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Тут скалярні функції ξ , χ_1 , χ_2 задовольняють рівняння

$$\Delta \xi = 0, \quad \Delta \chi_1 + \omega^2 \chi_1 = 0, \quad \Delta \chi_2 + \omega^2 \chi_2 = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Перейдемо у зображенні (12) до сферичної системи координат (ρ, θ, η) . Позначимо

$$\xi^* = \xi^*(\rho, \theta, \eta) = \xi(\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), \eta),$$

$$\chi_i^* = \chi_i^*(\rho, \theta, \eta) = \chi_i(\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), \eta), \quad i = \overline{1, 2}.$$

Враховуючи, що

$$\bar{e}_z = -\bar{e}_\theta \sin(\theta) + \bar{e}_\rho \cos(\theta),$$

маємо

$$\begin{aligned}
 p &= \omega^2 \xi^*, \\
 \bar{v} &= \nabla \xi^* + \text{rot}(\text{rot}(\chi_1^*(-\bar{e}_\theta \sin(\theta) + \bar{e}_\rho \cos(\theta)))) + \\
 &+ \text{rot}(\chi_2^*(-\bar{e}_\theta \sin(\theta) + \bar{e}_\rho \cos(\theta))) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi_2^*}{\partial \eta} - \frac{2 \cos(\theta)}{\rho} \frac{\partial \chi_1^*}{\partial \rho} - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \rho \partial \theta} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\sin(\theta)}{\rho^2} \frac{\partial \chi_1^*}{\partial \theta} - \frac{\cos(\theta)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \theta^2} - \frac{\cos^2(\theta)}{\rho^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \chi_1^*}{\partial \theta} - \frac{\cos(\theta)}{\rho^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \xi^*}{\partial \rho} \right) \bar{e}_\rho + \\
 &+ \left(\frac{\cos(\theta)}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \chi_2^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \eta^2} + \frac{\sin(\theta)}{\rho} \frac{\partial \chi_1^*}{\partial \rho} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \rho^2} + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \theta \partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi^*}{\partial \theta} \right) \bar{e}_\theta + \\
 &+ \left(-\sin(\theta) \frac{\partial \chi_2^*}{\partial \rho} - \frac{\cos(\theta)}{\rho} \frac{\partial \chi_2^*}{\partial \theta} + \frac{\cos(\theta)}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \rho \partial \eta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \chi_1^*}{\partial \theta \partial \eta} + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \xi^*}{\partial \eta} \right) \bar{e}_\eta.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Розглянемо такі розв'язки рівнянь Лапласа і Гельмгольца у сферичній системі координат:

$$\begin{aligned}
 ws_j(\rho, \theta, \eta) &= \rho^j P_j^m(\cos(\theta)) \cos(m\eta), \\
 gs_j(\rho, \theta, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{\rho} J_{j+1/2}(\omega)} J_{j+1/2}(\omega \rho) P_j^m(\cos(\theta)) \sin(m\eta), \\
 fs_j(\rho, \theta, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{\rho} J_{j+1/2}(\omega)} J_{j+1/2}(\omega \rho) P_j^m(\cos(\theta)) \cos(m\eta),
 \end{aligned}$$

де P_j^m — приєднані функції Лежандра 1-го роду, $J_{j+1/2}$ — функції Бесселя 1-го роду. Функції ws_j задовольняють рівняння $\Delta ws_j = 0$, функції fs_j — рівняння $\Delta fs_j + \omega^2 fs_j = 0$, функції gs_j — рівняння $\Delta gs_j + \omega^2 gs_j = 0$.

За допомогою функцій ws, gs, fs , використовуючи зображення (11), побудуємо вектор-функції швидкості

$$\bar{u}_j^1 = \nabla ws_j, \quad \bar{u}_j^2 = \text{rot}(\text{rot}(\rho fs_j \bar{e}_\rho)), \quad \bar{u}_j^3 = \text{rot}(\rho gs_j \bar{e}_\rho), \quad j = m, m+1, \dots, \tag{14}$$

та відповідні їм функції тиску

$$\Pi_j^1 = \omega^2 ws_j, \quad \Pi_j^2 = 0, \quad \Pi_j^3 = 0, \quad j = m, m+1, \dots$$

Розглянемо ще такі розв'язки рівнянь Лапласа і Гельмгольца у циліндричній системі координат:

$$\begin{aligned}
 wc_k(r, z, \eta) &= \frac{J_m(\zeta_k r) \cos h(\zeta_k(z+1))}{J_m(\zeta_k) \cos h(\zeta_k)} \cos(m\eta), \\
 fc_k(r, z, \eta) &= \frac{J_m(\zeta_k r) \exp(q_k z)}{J_m(\zeta_k) q_k} \cos(m\eta),
 \end{aligned}$$

де число ζ_k — k -й корінь похідної функції Бесселя $J'_m(\zeta) = 0$, $q_k = \sqrt{-\omega^2 + \zeta_k^2}$. Функції wc_k задовольняють рівняння $\Delta wc_k = 0$, функції fc_k — рівняння $\Delta fc_k + \omega^2 fc_k = 0$.

Тепер використаємо зображення (13). Покладемо в (13) $\xi^* = wc_k(\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), \eta)$, $\chi_1^* = h_k fc_k(\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), \eta)$, $\chi_2^* = 0$. Тоді отримуємо систему вектор-функцій швидкостей

$$\begin{aligned} \bar{v}_k^4 = & \nabla (wc_k(\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), \eta)) + \\ & + h_k \text{rot} (\text{rot} (fc_k(\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), \eta)(-\bar{e}_\theta \sin(\theta) + \bar{e}_\rho \cos(\theta))))), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

та відповідні їм функції тиску

$$p_k^4 = \omega^2 wc_k(\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), \eta), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Числа h_k визначаються так, щоб вектор-функції \bar{v}_k^4 задовольняли умови (7), і мають вигляд

$$h_k = -\frac{2\zeta_k q_k \tanh(\zeta_k)}{2\zeta_k^2 - \omega^2}.$$

Знайдемо координатні функції, які крім системи рівнянь (6) задовольняють крайові умови (7). Зазначимо, що вектор-функції $\bar{u}_{2(k-1)+m}^1$, $\bar{u}_{2(k-1)+m}^2$, \bar{u}_{2k-1+m}^3 , $k = 1, 2, 3, \dots$, за своєю побудовою і завдяки розміщенню вільної поверхні Σ ($\theta = \pi/2$ на Σ) задовольняють крайові умови (7), тоді як вектор-функції

$$\bar{u}_{2(k-1)+1+m}^1, \quad \bar{u}_{2(k-1)+1+m}^2, \quad \bar{u}_{2k+m}^3, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

не задовольняють (7). Такі факти є наслідком властивостей P_j^m .

Позначимо

$$\bar{v}_k^1 = \bar{u}_{2(k-1)+m}^1, \quad \bar{v}_k^2 = \bar{u}_{2(k-1)+m}^2, \quad \bar{v}_k^3 = \bar{u}_{2k-1+m}^3, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

і відповідні їм функції тиску

$$p_k^1 = \omega^2 \Pi_{2(k-1)+m}^1 = \omega^2 w s_{2(k-1)+m}, \quad p_k^2 = 0, \quad p_k^3 = 0.$$

На основі трьох систем вектор-функцій (16) можна було б побудувати одну систему вектор-функцій, які б задовольняли умови (7), але отримані в результаті ряди мали б при великих значеннях H повільну збіжність. Крім того, такі вектор-функції не мали б характеру прилежового шару в околі вільної поверхні. Тому виявилось більш ефективним замінити вектор-функції (16) вектор-функціями \bar{v}_k^4 , оскільки \bar{v}_k^4 задовольняють умови (7).

Зазначимо, що вектор-функції \bar{v}_k^j і відповідні їм функції тиску p_k^j , $j = \overline{1, 4}$, мають вигляд (10), тобто в функціях \bar{v}_k^j , p_k^j можна відокремити змінну η .

Звернемо увагу на те, що вектор-функції \bar{v}^4 мають характер прилежового шару в околі вільної поверхні Σ , \bar{v}^2 і \bar{v}^3 — в околі твердої стінки S . Також \bar{v}^4 і \bar{v}^1 мають властивості потенціального руху рідини всередині області Ω . Такі властивості характерні для руху ідеальної рідини.

Із зображень (11) і (12) видно, що шукану вектор-функцію швидкості \bar{v} можна подати у вигляді суми потенціальної та вихрової компонент. Покажемо, що потенціальну складову вектор-функції \bar{v} можна як завгодно точно наблизити за допомогою лінійної комбінації градієнтів функції

$$\{wc_k, ws_{2(k-1)+m}\}, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad m = \overline{0, \infty}. \quad (17)$$

Скалярні функції φ і ξ , які у зображеннях (11), (12) визначають потенціальну складову руху, повинні задовольняти рівняння Лапласа. Припустимо, що нам відомі вихрова складова вектора швидкості \bar{v} і функція f , а необхідно знайти скалярну функцію u , яка визначає потенціальну складову. Тоді, використовуючи крайові умови $\bar{v} = 0$ на S , $v_\theta = \omega f$ на Σ , отримуємо, що функція u повинна бути розв'язком задачі Неймана

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f_1 \quad \text{на } \Sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \quad \text{на } S, \quad (18)$$

де функції f_1 і f_2 є неперервними і задовольняють умову

$$\int_{\Sigma} f_1 dS + \int_S f_2 dS = 0.$$

Оскільки в задачі (6)–(9) ми відокремили кругову змінну η , то припустимо, що в задачі (18) також аналогічно можна відокремити η :

$$u(\rho, \theta, \eta) = u^*(\rho, \theta) \cos(m\eta), \quad f_1(r, \eta) = f_1^*(r) \cos(m\eta), \quad f_2(\theta, \eta) = f_2^*(\theta) \cos(m\eta),$$

$$m = 0, 1, \dots$$

Тоді отримаємо задачу

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\rho^2 \sin^2(\theta)} u^* = 0 \quad \text{в } G, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = f_1^* \quad \text{на } \Gamma, \quad \frac{\partial u^*}{\partial n} = f_2^* \quad \text{на } L.$$

Відокремимо η у функціях wc , ws і позначимо

$$ws_j^* = \frac{ws_j}{\cos(m\eta)}, \quad wc_j^* = \frac{wc_j}{\cos(m\eta)}.$$

Розглянемо сліди нормальних похідних від wc_k^* , $ws_{2(k-1)+m}^*$ на Γ і L відповідно:

$$g_k^1(\rho) = \frac{\partial wc_k^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\zeta_k \sin h(\zeta_k)}{\cos h(\zeta_k) J_m(\zeta_k)} J_m(\zeta_k \rho),$$

$$g_k^2(\theta) = \frac{\partial ws_{2(k-1)+m}^*}{\partial n} \Big|_L = (2(k-1) + m) P_{2(k-1)+m}^m(\cos(\theta)).$$

Функції g_k^1 є повними і ортогональними у просторі $L_2(0; 1)$ з вагою ρ , а функції g_k^2 — повними і ортогональними у просторі $L_2(\pi/2; \pi)$ з вагою $\sin(\theta)$.

Розв'язок u^* задачі (19) подамо у вигляді суми $u^* = u_1^* + u_2^*$, де

$$u_1^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w c_k^*, \quad u_2^* = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w s_{2(k-1)+m}^*.$$

Враховуючи, що

$$\left. \frac{\partial w s_{2(k-1)+m}^*}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0,$$

коефіцієнти a_k визначаємо з крайової умови $\partial u_1^* / \partial n = f_1$ на Γ . Тоді

$$a_k = \frac{\int_0^1 \rho g_k^1(\rho) f_1^*(\rho) d\rho}{\int_0^1 \rho (g_k^1(\rho))^2 d\rho}.$$

Тепер із крайової умови на L задачі (19) визначаємо коефіцієнти b_k :

$$b_k = \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) \left(f_2^*(\theta) - \partial u_1^* / \partial \rho |_{\rho=1} \right) g_k^2(\theta) d\theta}{\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) (g_k^2(\theta))^2 d\theta}.$$

Таким чином, одержуємо розв'язок u задачі Неймана (18).

Далі за допомогою \bar{v}_k^j , $j = \overline{1, 4}$, побудуємо систему вектор-функцій, яка буде задовольняти всі умови задачі (6)–(9), крім умов (9).

Спочатку знайдемо три координатні системи, які задовольняють умову

$$v_\rho = 0 \quad \text{на} \quad L. \tag{20}$$

Зауважимо, що \bar{v}_k^3 за своєю побудовою вже задовольняють (20). Визначимо систему вектор-функцій \bar{v}_k^5 таким чином:

$$\bar{v}_k^5 = \bar{v}_k^1 - d_k \bar{v}_k^2,$$

ρ -ті компоненти векторів v_k^1 і v_k^2 (відповідно $v_{\rho,k}^1$ і $v_{\rho,k}^2$) при фіксованому значенні змінної ρ відрізняються між собою лише постійним множником. Отже, якщо коефіцієнти d_k визначити як

$$d_k = \left. \frac{v_{\rho,k}^1}{v_{\rho,k}^2} \right|_{\rho=1} = \frac{1}{2k - 1 + m},$$

то система \bar{v}_k^5 буде задовольняти (20). Введемо систему \bar{v}_k^6 :

$$\bar{v}_k^6 = \bar{v}_k^4 - \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \bar{v}_j^1, \tag{21}$$

ρ -ті компоненти векторів v_k^1 мають вигляд

$$v_{\rho,k}^1 = (2k - 2 + m) \rho^{2k-3+m} P_{2k-2+m}^m(\cos(\theta)) \cos(m\eta).$$

Вони утворюють повну ортогональну систему в просторі $L_2(L)$ з вагою $\sin(\theta)$. Це є наслідком повноти і ортогональності приєднаних функцій Лежандра. Тому, якщо коефіцієнти $a_{k,j}$ визначити як коефіцієнти Фур'є за формулою

$$a_{kj} = \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) v_{\rho,j}^1 v_{\rho,k}^4 \Big|_{\rho=1} d\theta}{\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) v_{\rho,j}^1 v_{\rho,j}^1 \Big|_{\rho=1} d\theta} = \frac{(4j-3+2m)(2j-2)! \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) v_{\rho,j}^1 v_{\rho,k}^4 \Big|_{\rho=1} d\theta}{(2j-2+m)^2 \cos^2(m\eta)(2j-2+2m)!},$$

то ряди (21) будуть збігатись, і система \bar{v}^6 буде задовольняти (20). Отже, системи \bar{v}^3 , \bar{v}^5 , \bar{v}^6 задовольняють (20).

Тепер за допомогою систем \bar{v}^3 , \bar{v}^5 , \bar{v}^6 побудуємо одну систему вектор-функцій \bar{v}^7 , яка буде задовольняти умови

$$v_{\theta} = v_{\eta} = 0 \quad \text{на } L. \quad (22)$$

Систему \bar{v}^7 шукаємо у вигляді

$$\bar{v}_k^7 = \bar{v}_k^6 - \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj} \bar{v}_j^3 - \sum_{j=1}^{\infty} c_{kj} \bar{v}_j^5. \quad (23)$$

Введемо позначення

$$\langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) (u_{\theta} w_{\theta} + u_{\eta} w_{\eta}) \Big|_{\rho=1} d\theta d\eta. \quad (24)$$

Розглянемо вирази $\langle \bar{v}_i^l, \bar{v}_j^s \rangle$, $l = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,\infty}$, $j = \overline{1,\infty}$. При обчисленні таких виразів виникає інтеграл

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\sin(\theta) \frac{dP_i^m(\cos(\theta))}{d\theta} \frac{dP_j^m(\cos(\theta))}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin(\theta)} P_i^m(\cos(\theta)) P_j^m(\cos(\theta)) \right) d\theta. \quad (25)$$

Обчислимо I . Виконаємо заміну $x = \cos(\theta)$. Оскільки ми знехтували функцією (16), то будемо розглядати лише випадки, коли індекси i, j в інтегралі (25) обидва є парними, або непарними. Тоді підінтегральна функція в (25) є парною за змінною x , і інтеграл I можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left((1-x^2) \frac{dP_i^m(x)}{dx} \frac{dP_j^m(x)}{dx} + \frac{m^2}{1-x^2} P_i^m(x) P_j^m(x) \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} i(i+1) \int_{-1}^1 P_i^m P_j^m dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ -i(i+1)(i+m)! / ((2i+1)(i-m)!), & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Обчисливши I , легко встановити, що вектор-функції $\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{v}^3$ мають властивості

$$\begin{aligned} \langle \bar{v}_i^1, \bar{v}_j^3 \rangle &= 0, & \langle \bar{v}_i^2, \bar{v}_j^3 \rangle &= 0, & \langle \bar{v}_i^1, \bar{v}_j^1 \rangle &= c_i^1 g_m \delta_{ij}, & \langle \bar{v}_i^2, \bar{v}_j^2 \rangle &= c_i^2 g_m \delta_{ij}, \\ \langle \bar{v}_i^3, \bar{v}_j^3 \rangle &= c_i^3 g_m \delta_{ij}, & \langle \bar{v}_i^1, \bar{v}_j^2 \rangle &= c_i^4 g_m \delta_{ij} \quad \forall \{i, j\} \subset \mathbb{N}^2, \end{aligned} \quad (26)$$

де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad g_m = \begin{cases} 2\pi, & m = 0, \\ \pi, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Числа $c_i^1, c_i^2, c_i^3, c_i^4$ мають такий вигляд

$$\begin{aligned} c_i^1 &= -\frac{(2i-2+m)(2i-1+m)(2i-2+2m)!}{(4i-3+2m)(2i-2)!}, \\ c_i^2 &= \left(\frac{-(2i-2+m)J_{2i-3/2+m}(\omega) + \omega J_{2i-5/2+m}(\omega)}{J_{2i-3/2+m}(\omega)} \right)^2 c_i^1, \\ c_i^3 &= -\frac{(2i-1+m)(2i+m)(2i-1+2m)!}{(4i-1+2m)(2i-1)!}, \\ c_i^4 &= \frac{-(2i-2+m)J_{2i-3/2+m}(\omega) + \omega J_{2i-5/2+m}(\omega)}{J_{2i-3/2+m}(\omega)} c_i^1. \end{aligned}$$

Коефіцієнти b_{kj}, c_{kj} знаходимо з умов, щоб $\bar{v}_{\theta,k}^7, \bar{v}_{\eta,k}^7$ були ортогональними в сенсі (24) до $\bar{v}_{\theta,k}^3, \bar{v}_{\eta,k}^3$ і до $\bar{v}_{\theta,k}^2, \bar{v}_{\eta,k}^2$. Використовуючи властивості (26), отримуємо

$$b_{kj} = \frac{\langle \bar{v}_k^4, \bar{v}_j^3 \rangle}{\langle \bar{v}_j^3, \bar{v}_j^3 \rangle}, \quad c_{kj} = \frac{\langle \bar{v}_k^4, \bar{v}_j^2 \rangle - a_{kj} \langle \bar{v}_j^1, \bar{v}_j^2 \rangle}{\langle \bar{v}_j^5, \bar{v}_j^2 \rangle}.$$

Для ілюстрації наведеного вище процесу побудови координатних функцій \bar{v}^7 побудуємо графіки $|v_{\rho,1}^7|, |v_{\theta,1}^7|, |v_{\eta,1}^7|$ на контурі L (рис. 1–3). Ці графіки характеризують якість задоволення крайових умов (20), (22) функцією \bar{v}_1^7 . Зазначимо, що крайові умови (7) для \bar{v}_1^7 задовольняються точно. При побудові графіків ми наближали v_1^7 сумою (27) і поклали $\omega = 78,816 + 79,128i$, $N_1 = 20$, $N_2 = 25$, $N_3 = 30$. Зауважимо, що всередині області Ω функції $|v_{\rho,1}^7|, |v_{\theta,1}^7|, |v_{\eta,1}^7|$ є величинами порядку одиниці.

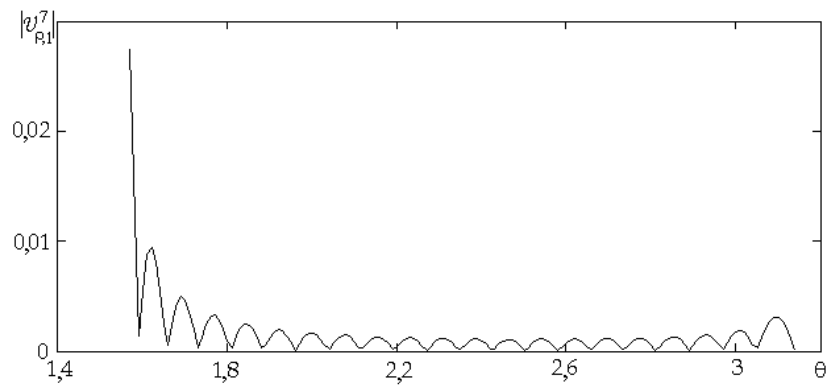


Рис. 1

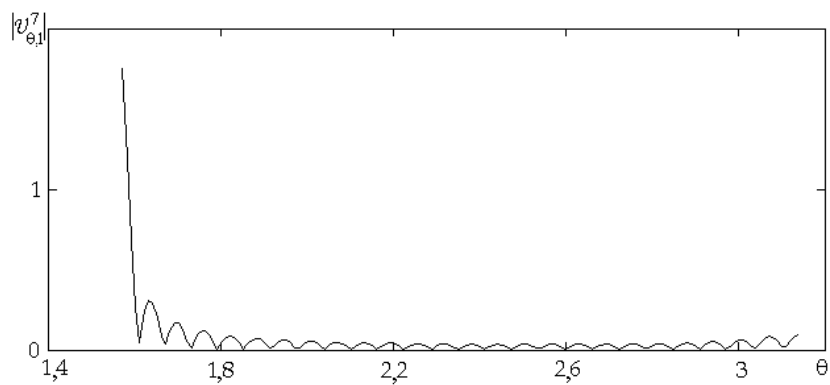


Рис. 2

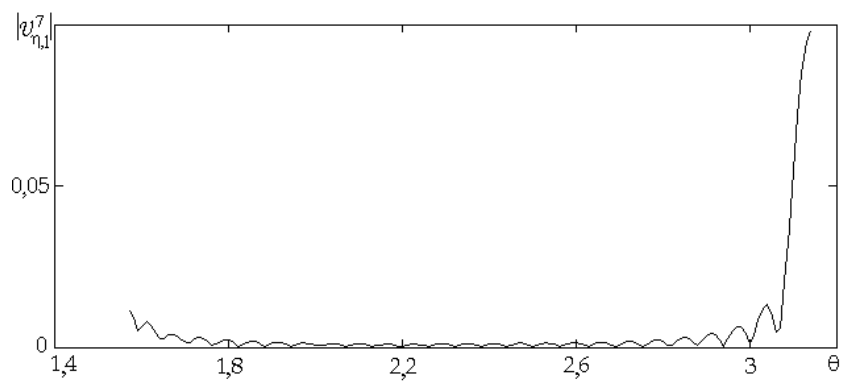


Рис. 3

5. Алгоритм реалізації наближеного методу розв'язку. Вище нам вдалося побудувати систему вектор-функцій \bar{v}^7 , які задовольняють всі рівняння і крайові умови задачі (6) – (9), крім умов (9). Оскільки ми будемо наближений розв'язок, то подамо кожну функцію із системи \bar{v}^7 у вигляді скінченної суми

$$\bar{v}_k^7 = \bar{v}_k^4 - \sum_{j=1}^{N_1} a_{kj} \bar{v}_j^1 - \sum_{j=1}^{N_3} b_{kj} \bar{v}_j^3 - \sum_{j=1}^{N_2} c_{kj} (\bar{v}_j^1 - d_j \bar{v}_j^2). \quad (27)$$

Відповідна функція тиску p_k^7 має вигляд

$$p_k^7 = p_k^4 - \sum_{j=1}^{N_1} a_{kj} p_j^1 - \sum_{j=1}^{N_3} b_{kj} p_j^3 - \sum_{j=1}^{N_2} c_{kj} (p_j^1 - d_j p_j^2) = p_k^4 - \sum_{j=1}^{N_1} a_{kj} p_j^1 - \sum_{j=1}^{N_2} c_{kj} p_j^1.$$

Наближений розв'язок \bar{v}_{N_4}, p_{N_4} задачі (6) – (9) шукаємо у вигляді

$$\bar{v}_{N_4} = \sum_{k=1}^{N_4} \gamma_k \bar{v}_k^7, \quad p_{N_4} = \sum_{k=1}^{N_4} \gamma_k p_k^7. \quad (28)$$

Коефіцієнти γ_k і відповідне значення H при фіксованому значенні ω в даній роботі визначалися двома способами.

Перший спосіб. Вилучимо f з крайових умов (9). Тоді отримаємо

$$\sum_{k=1}^{N_4} \gamma_k \left(\omega^2 \left(\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_{\theta,k}^7}{\partial \theta} + \bar{v}_{\rho,k}^7 \right) - p_k^7 \right) - H^2 \bar{v}_{\theta,k}^7 \right) \approx 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (29)$$

Невідомі a_k і H визначаємо з умови, щоб ліва частина (29) була ортогональною на Γ до функцій $\bar{v}_{\theta,j}^7, j = \overline{1, N_4}$. В результаті маємо матричну спектральну задачу

$$(\alpha - H^2 \beta) \gamma = \bar{0},$$

де

$$\alpha_{ij} = \omega^2 \int_0^1 \rho \left(\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_{\theta,i}^7}{\partial \theta} + \bar{v}_{\rho,i}^7 \right) - p_i^7 \right) \bar{v}_{\theta,j}^7 d\rho,$$

$$\beta_{ij} = \int_0^1 \rho \bar{v}_{\theta,i}^7 \bar{v}_{\theta,j}^7 d\rho, \quad i = \overline{1, N_4}, \quad j = \overline{1, N_4}.$$

Другий спосіб. Використаємо функціонал K . У сферичній системі координат він має вигляд

$$K(\bar{v}, p, f, H) = E(\bar{v}, \bar{v}) - \omega^2 T(\bar{v}, \bar{v}) - 2\omega \int_{\Sigma} \left(\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_{\rho} \right) - p \right) f dS + H^2 \int_{\Sigma} f^2 dS.$$

Розв'язок \bar{v} знову шукаємо у вигляді (28), а наближення f_{N_5} для функції f після відокремлення η — у вигляді

$$f_{N_5} = \sum_{k=1}^{N_5} \sigma_k P_{k-1}(2\rho - 1), \quad (30)$$

де P_{k-1} — многочлени Лежандра. Невідомі значення γ_k , σ_k , H знаходимо з умов стаціонарності функціонала K

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, N_4}, \quad \frac{\partial K}{\partial \sigma_j} = 0, \quad j = \overline{1, N_5}. \quad (31)$$

З умов (31) отримуємо матричну спектральну задачу

$$\begin{pmatrix} A & \omega B \\ \omega B^T & -H^2 C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = 0$$

де

$$A_{ij} = \omega^2 T(\bar{v}_i^7, \bar{v}_j^7) - E(\bar{v}_i^7, \bar{v}_j^7), \quad i = \overline{1, N_4}, \quad j = \overline{1, N_4},$$

$$B_{ij} = \int_0^1 \rho \left(\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_{\theta,i}^7}{\partial \theta} + \bar{v}_{\rho,i}^7 \right) - p_i^7 \right) P_{j-1}(2\rho - 1) d\rho, \quad i = \overline{1, N_4}, \quad j = \overline{1, N_5},$$

$$C_{ij} = \int_0^1 \rho P_{i-1}(2\rho - 1) P_{j-1}(2\rho - 1) d\rho, \quad i = \overline{1, N_5}, \quad j = \overline{1, N_5}.$$

В результаті реалізації першого і другого способів отримуємо H як функцію ω . Скористаємося методом хорд для того, щоб при заданому значенні числа Галілея H_0 визначити власні значення λ задачі (6)–(9).

Розглянемо функцію

$$g(\omega) = H(\omega) - H_0$$

і знайдемо комплексне число ω^* таке, що $g(\omega^*) = 0$. Задамо початкове значення $\omega_1 = \sqrt{\lambda_k^q H_0}$, де λ_k^q — наближення для власного значення λ_k задачі (6)–(9), обчислене за формулою Черноуська [3]

$$\lambda_k^q = i\omega_k^{\text{in}} + \frac{1-i}{2\sqrt{2H_0}(\omega_k^{\text{in}})^{3/2}} \frac{\int_S (\nabla \Phi_k)^2 dS}{\int_\Sigma \Phi_k^2 dS}. \quad (32)$$

Числа ω_k^{in} і функції Φ_k є відповідно власними числами і власними функціями задачі про власні коливання ідеальної рідини з вільною поверхнею

$$\Delta \Phi_k = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = \left(\omega_k^{\text{in}}\right)^2 \Phi_k \quad \text{на } \Sigma. \quad (33)$$

Розв'язок задачі (33) можна побудувати варіаційним методом [17].

Покладемо $\omega_a = \omega_1 + \Delta$. Шукаємо $(n + 1)$ -ше наближення ω^* згідно з методом хорд [18] у вигляді

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{g(\omega_n)(\omega_n - \omega_a)}{g(\omega_n) - g(\omega_a)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

Рекурентний процес (34) повторюємо до тих пір, поки $|g(\omega_{n+1})| > \epsilon$. Потім покладемо $\omega^* = \omega_{n+1}$. В розрахунках ми брали $\Delta = 0,1 \cdot (1 + i)$, $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$. Знаючи H_0 і ω^* , можемо визначити власні значення λ задачі (6)–(9) за формулою

$$\lambda = \frac{(\omega^*)^2}{H_0}.$$

Покажемо, як порахувати елементи матриці A , обчислюючи квадратури лише по межі області Ω . Будемо вважати, що вектор-функції \bar{v} , \bar{u} задовольняють рівняння (4), і використовувати позначення $(\bar{v}, \bar{u}) = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$. Тоді

$$\begin{aligned} \omega^2 T(\bar{v}, \bar{u}) - E(\bar{v}, \bar{u}) &= \\ &= \omega^2 \int_{\Omega} (\bar{v}, \bar{u}) d\Omega - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega = \\ &= \omega^2 \int_{\Omega} (\bar{v}, \bar{u}) d\Omega - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_j \right) \right) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) u_i + \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \right) u_j \right) d\Omega = \\ &= \omega^2 \int_{\Omega} (\bar{v}, \bar{u}) d\Omega + \int_{\Omega} (\Delta \bar{v}, \bar{u}) d\Omega - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_j \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\omega^2 \bar{v} + \Delta \bar{v} - \nabla p, \bar{u}) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla p, \bar{u}) d\Omega - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \cos(\bar{n}, x_i) u_j dS = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(p \sum_{i=1}^3 u_i \cos(\bar{n}, x_i) - \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \cos(\bar{n}, x_i) u_j \right) dS. \end{aligned}$$

У сферичній системі координат

$$\omega^2 T(\bar{v}, \bar{u}) - E(\bar{v}, \bar{u}) = \int_{\partial\Omega} (u_\rho, u_\theta, u_\eta) U(\bar{v}) \begin{pmatrix} \cos(\bar{n}, \bar{\rho}) \\ \cos(\bar{n}, \bar{\theta}) \\ \cos(\bar{n}, \bar{\eta}) \end{pmatrix} dS,$$

де елементи матриці U мають вигляд

$$U_{11} = -2 \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + p,$$

$$U_{12} = -\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\theta}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta},$$

$$U_{13} = -\frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial v_\rho}{\partial \eta} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\eta}{\rho} \right),$$

$$U_{22} = -\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\rho \right) + p,$$

$$U_{23} = -\frac{\sin(\theta)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\eta}{\sin(\theta)} \right) - \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \eta},$$

$$U_{33} = -\frac{2}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{2v_\rho}{\rho} - \frac{2v_\theta \cos(\theta)}{\rho \sin(\theta)} + p,$$

$$U_{21} = U_{12}, \quad U_{31} = U_{13}, \quad U_{32} = U_{23}.$$

6. Чисельні результати. Було проведено чисельну реалізацію запропонованого у роботі методу побудови розв'язку для випадку першої антисиметричної моди коливань ($m = 1$). При наближенні вектор-функцій \bar{v}_k^7 у формулі (27) ми брали $N_1 = 20$, $N_2 = 25$, $N_3 = 30$.

В табл. 1 наведено результати розрахунку перших трьох власних чисел λ задачі (6)–(9), проведеного першим способом, для випадків $N_4 = 7$, $N_4 = 9$, $N_4 = 11$. Це дозволяє оцінити швидкість збіжності власних значень λ при збільшенні кількості координатних функцій \bar{v}_7 .

Таблиця 1

H	λ_1	λ_2	λ_3
$N_4 = 7$			
10^2	$0,1825855 + 1,2000060i$	—	—
$5 \cdot 10^2$	$0,0568820 + 1,2174212i$	$0,1394143 + 2,2691272i$	$0,2844559 + 2,8581614i$
10^3	$0,0352629 + 1,2259658i$	$0,0762148 + 2,2787088i$	$0,1537070 + 2,8874164i$
$5 \cdot 10^3$	$0,0128621 + 1,2384929i$	$0,0195802 + 2,2893929i$	$0,0362702 + 2,9079211i$
10^4	$0,0086222 + 1,2415662i$	$0,0113208 + 2,2916424i$	$0,0197786 + 2,9107690i$
$5 \cdot 10^4$	$0,0035782 + 1,2456984i$	$0,0035339 + 2,2945332i$	$0,0052330 + 2,9139143i$
10^5	$0,0024841 + 1,2466806i$	$0,0022401 + 2,2952056i$	$0,0030821 + 2,9145902i$
$5 \cdot 10^5$	$0,0010835 + 1,2479922i$	—	—
$N_4 = 9$			
10^2	$0,1797226 + 1,2010305i$	—	—
$5 \cdot 10^2$	$0,0568562 + 1,2176607i$	$0,1389851 + 2,2699658i$	$0,2835932 + 2,8595461i$
10^3	$0,0352655 + 1,2260256i$	$0,0762173 + 2,2789440i$	$0,1537295 + 2,8878432i$
$5 \cdot 10^3$	$0,0128650 + 1,2384948i$	$0,0196002 + 2,2894005i$	$0,0363143 + 2,9079350i$
10^4	$0,0086238 + 1,2415665i$	$0,0113314 + 2,2916430i$	$0,0198018 + 2,9107693i$
$5 \cdot 10^4$	$0,0035785 + 1,2456983i$	$0,0035365 + 2,2945320i$	$0,0052386 + 2,9139115i$
10^5	$0,0024843 + 1,2466805i$	$0,0022415 + 2,2952045i$	$0,0030853 + 2,9145878i$
$5 \cdot 10^5$	$0,0010836 + 1,2479921i$	—	—
$N_4 = 11$			
10^2	$0,1779481 + 1,2012447i$	—	—
$5 \cdot 10^2$	$0,0568347 + 1,2178297i$	$0,1386154 + 2,2705467i$	$0,28284093 + 2,8604283i$
10^3	$0,0352655 + 1,2260721i$	$0,0761841 + 2,2791191i$	$0,1536681 + 2,8881419i$
$5 \cdot 10^3$	$0,0128663 + 1,2384963i$	$0,0196101 + 2,2894068i$	$0,0363362 + 2,9079463i$
10^4	$0,0086245 + 1,2415669i$	$0,0113367 + 2,2916440i$	$0,0198135 + 2,9107710i$
$5 \cdot 10^4$	$0,0035787 + 1,2456982i$	$0,0035377 + 2,2945315i$	$0,0052414 + 2,9139105i$
10^5	$0,0024844 + 1,2466804i$	$0,0022422 + 2,2952041i$	$0,0030869 + 2,9145869i$
$5 \cdot 10^5$	$0,0010836 + 1,2479921i$	—	—

У табл. 2 подано результати розрахунку перших трьох власних значень λ задачі (6)–(9), проведеного другим способом, для випадків $N_4 = 7$, $N_4 = 9$, $N_4 = 11$. При наближенні відхилення f у формулі (30) ми брали $N_5 = 20$.

Таблиця 2

H	λ_1	λ_2	λ_3
$N_4 = 7$			
10^2	$0,1753525 + 1,2085104i$	—	—
$5 \cdot 10^2$	$0,0569738 + 1,2182573i$	$0,1393454 + 2,2723184i$	$0,2846567 + 2,8632733i$
10^3	$0,0353142 + 1,2261928i$	$0,0763744 + 2,2795891i$	$0,1540376 + 2,8888195i$
$5 \cdot 10^3$	$0,0128699 + 1,2384926i$	$0,0196260 + 2,2893864i$	$0,0363548 + 2,9079036i$
10^4	$0,0086263 + 1,2415585i$	$0,0113453 + 2,2916081i$	$0,0198233 + 2,9107070i$
$5 \cdot 10^4$	$0,0035793 + 1,2456887i$	$0,0035405 + 2,2944924i$	$0,00524479 + 2,9138420i$
10^5	$0,0024848 + 1,2466710i$	$0,0022441 + 2,2951654i$	$0,0030891 + 2,9145190i$
$5 \cdot 10^5$	$0,0010838 + 1,2479828i$	—	—
$N_4 = 9$			
10^2	$0,1742616 + 1,2063337i$	—	—
$5 \cdot 10^2$	$0,0569153 + 1,2182757i$	$0,1388491 + 2,2723494i$	$0,2835369 + 2,8633673i$
10^3	$0,0353066 + 1,2261979i$	$0,0763172 + 2,2796428i$	$0,1539189 + 2,8889777i$
$5 \cdot 10^3$	$0,0128700 + 1,2384928i$	$0,0196300 + 2,2893889i$	$0,0363694 + 2,9079108i$
10^4	$0,0086264 + 1,2415585i$	$0,0113476 + 2,2916085i$	$0,0198314 + 2,9107077i$
$5 \cdot 10^4$	$0,0035793 + 1,2456887i$	$0,0035410 + 2,2944921i$	$0,0052467 + 2,9138409i$
10^5	$0,0024848 + 1,2466709i$	$0,0022444 + 2,2951652i$	$0,0030903 + 2,9145181i$
$5 \cdot 10^5$	$0,0010838 + 1,2479828i$	—	—
$N_4 = 11$			
10^2	$0,1738833 + 1,2047664i$	—	—
$5 \cdot 10^2$	$0,0568737 + 1,2182856i$	$0,1384928 + 2,2723257i$	$0,2827534 + 2,8632871i$
10^3	$0,0353005 + 1,2262012i$	$0,0762653 + 2,2796696i$	$0,1538043 + 2,8890511i$
$5 \cdot 10^3$	$0,0128700 + 1,2384929i$	$0,0196314 + 2,2893905i$	$0,0363747 + 2,9079153i$
10^4	$0,0086264 + 1,2415585i$	$0,0113485 + 2,2916088i$	$0,0198346 + 2,9107085i$
$5 \cdot 10^4$	$0,0035793 + 1,2456887i$	$0,0035412 + 2,2944920i$	$0,0052475 + 2,9138407i$
10^5	$0,0024848 + 1,2466709i$	$0,0022445 + 2,2951651i$	$0,0030907 + 2,9145178i$
$5 \cdot 10^5$	$0,0010838 + 1,2479828i$	—	—

7. Порівняння з асимптотичною і емпіричними формулами. Порівняємо знайдені нами декременти і частоти коливань зі значеннями, які дають асимптотична формула (32) і емпіричні формули з робіт [19, 20]. Позначимо через δ і ω відповідно декремент і частоту коливань, отримані в даній роботі. Зазначимо, що δ і ω виражаються через власні числа

λ задачі (6)–(9) таким чином:

$$\delta = \operatorname{Re}(\lambda), \quad \omega = \operatorname{Im}(\lambda).$$

Через $\delta^{\text{ч}}$, δ^* , δ^{**} позначимо відповідно декременти, обчислені за формулою (32), за емпіричною формулою (35) з роботи [19] і за емпіричною формулою (36) з роботи [20], а через $\omega^{\text{ч}}$ — частоту, обчислену за формулою (32), через ω^{**} — частоту, взяту з роботи [20].

У роботі [3] для побудови розв'язку задачі (1) використано метод примежового шару [11]. Розв'язок шукали у вигляді суми асимптотичного ряду за степенями малого параметра $H^{-1/2}$. При виведенні формули (32) зберігали лише доданки порядків H^0 і $H^{-1/2}$. Доданки при степенях H^{-1} , $H^{-3/2}$, ... вважали малими і нехтували ними. Отримана в [3] формула (32) враховує дисипацію енергії рідини у примежовому шарі біля твердої стінки порожнини і не враховує дисипацію в усьому об'ємі рідини і в примежовому шарі біля вільної поверхні. Перевагою формули (32) є те, що її можна застосовувати до порожнин довільної форми.

В роботі [19] проводилося експериментальне дослідження коливань в'язкої рідини з вільною поверхнею у сферичних баках. Досліджувалася перша антисиметрична мода. Визначалися горизонтальний вектор сили, яка діє на бак, і декремент. Вивчалася залежність цих двох величин від кінематичної в'язкості рідини, частоти й амплітуди зовнішнього збурення. Вимірювання проводилися у трьох баках з діаметром 9, 5; 20, 5; 32 дюйми. Кінематична в'язкість рідин варіювалася у межах $1,23 \cdot 10^{-6} \div 1,183 \cdot 10^{-2}$ фут²/с. На основі експериментальних даних у випадку наполовину заповненого баку отримано емпіричну формулу для декременту δ^* . В позначеннях даної роботи ця формула має вигляд

$$\delta^* = 0,131 \left(\frac{10^4}{2\sqrt{2}H} \right)^{0,359}. \quad (35)$$

У роботі [20] експериментально вимірювалися декремент і частота коливань в'язкої рідини з вільною поверхнею для порожнин, які мають форму прямого кругового циліндра з плоским дном, сфери, прямого кругового циліндра зі сферичним дном, прямого і оберненого конусів. Як і в роботі [19], у статті [20] дослідження проводилися лише для першої антисиметричної моди коливань. Вивчалася залежність частот і декрементів від глибини заповнення порожнини, відносної амплітуди коливань рідини на твердій стінці, числа H (у роботі [20] величину, що пропорційна до H , називають числом Рейнольдса), а також від коефіцієнта поверхневого натягу. У випадку наполовину заповненої сфери для декременту δ^{**} отримано емпіричну залежність

$$\delta^{**} = \frac{1,84\pi}{\sqrt[4]{1,84\sqrt{H}}}, \quad (36)$$

а для частоти ω^{**} встановлено наближення

$$\omega^{**} = \sqrt{1,84^2 - (1,97 - 1)^2} - 0,34 \approx 1,22355. \quad (37)$$

Зауважимо, що ω^{**} не залежить від H .

В табл. 3 наведено значення декрементів δ , $\delta^{\text{ч}}$, δ^* , δ^{**} в залежності від числа H .

Таблиця 3

H	δ	$\delta^{\text{ч}}$	δ^*	δ^{**}
10^2	0,1738833	0,0713139	0,4711581	0,4963217
$5 \cdot 10^2$	0,0568737	0,0318925	0,2643848	0,2219618
10^3	0,0353005	0,0225514	0,2061421	0,1569507
$5 \cdot 10^3$	0,0128700	0,0100853	0,1156742	0,0701905
10^4	0,0086264	0,0071314	0,0901917	0,0496322
$5 \cdot 10^4$	0,0035793	0,0031893	0,0506100	0,0221962
10^5	0,0024848	0,0022551	0,0394609	0,0156951
$5 \cdot 10^5$	0,0010838	0,0010085	0,0221430	0,0070190

Для того щоб було легше порівнювати між собою декременти δ , $\delta^{\text{ч}}$, δ^* , δ^{**} , наведемо в табл. 4 відношення $\delta^{\text{ч}}$, δ^* , δ^{**} до δ , а також відношення δ^* до δ^{**} . З табл. 4 видно, наскільки відрізняється знайдений нами декремент δ від асимптотичного декременту $\delta^{\text{ч}}$ і від емпіричних декрементів δ^* , δ^{**} , а також наскільки відрізняються між собою декременти δ^* і δ^{**} , отримані за різними емпіричними формулами.

Таблиця 4

H	$\delta^{\text{ч}}/\delta$	δ^*/δ	δ^{**}/δ	δ^*/δ^{**}
10^2	0,4101249	2,7096221	2,8543375	0,9492998
$5 \cdot 10^2$	0,5607605	4,6486279	3,9027130	1,1911273
10^3	0,6388420	5,8396397	4,4461350	1,3134193
$5 \cdot 10^3$	0,7836273	8,9878726	5,4537940	1,6480037
10^4	0,8266915	10,4552897	5,7535073	1,8172028
$5 \cdot 10^4$	0,8910274	14,1396419	6,2012642	2,2801225
10^5	0,9075821	15,8810247	6,3164799	2,5142207
$5 \cdot 10^5$	0,9305432	20,4307297	6,4762813	3,1547008

Таблиця 5

H	ω	$\omega^{\text{ч}}$	ω^{**}	$\omega^{\text{ід}}$
10^2	1,2047664	1,1777487	1,2235536	1,2490626
$5 \cdot 10^2$	1,2182856	1,2171700	1,2235536	1,2490626
10^3	1,2262012	1,2265111	1,2235536	1,2490626
$5 \cdot 10^3$	1,2384929	1,2389773	1,2235536	1,2490626
10^4	1,2415585	1,2419312	1,2235536	1,2490626
$5 \cdot 10^4$	1,2456887	1,2458733	1,2235536	1,2490626
10^5	1,2466709	1,2468074	1,2235536	1,2490626
$5 \cdot 10^5$	1,2479828	1,2480540	1,2235536	1,2490626

В табл. 5 наведено значення частот ω , $\omega^{\text{ч}}$, ω^{**} в залежності від числа Галілея H , а також

частоту коливань ідеальної рідини $\omega^{ид}$, що визначалася з задачі (33).

8. Висновки. Аналізуючи дані табл. 1 і 2, робимо висновок, що перший і другий варіанти проекційного методу дають практично однаковий результат. З табл. 1 і 2 видно, що зі збільшенням значень числа Галілея H покращується швидкість збіжності наближень до власних значень задачі (6)–(9). Швидкість збіжності другого способу є трохи кращою, ніж першого. При використанні другого способу і при $N_4 \geq 11$ наближення для перших трьох власних значень збігаються з точністю до двох, трьох перших значущих знаків при $10^2 \leq H < 5 \times 10^3$ і з точністю до чотирьох, п'яти перших значущих знаків при $H > 5 \times 10^3$. Чим меншим є номер власного числа, тим для нього швидше збігаються наближення.

Побудований наближений аналітичний розв'язок задачі (6)–(9) точно задовольняє рівняння і дві крайові умови на Γ . Крайові умови на L при збільшенні числа членів рядів (21), (23) маємо можливість задовольнити як завгодно точно. Лише останні крайові умови (9) задовольняються на основі проекційного методу. Висока точність одержаних результатів характеризується також малою відмінністю наближень до власних значень, наведених у табл. 1 і 2 при різних значеннях N_4 .

Із табл. 3 і 4 видно, що декременти δ значно відрізняються від емпіричних декрементів δ^* , δ^{**} ; δ відрізняється також від $\delta^ч$, але відмінність між δ і $\delta^ч$ є не такою значною, як між δ і δ^* , δ^{**} . Формула (32) є асимптотичною, тобто чим більшим є число H , тим формула (32) є точнішою. Як видно з табл. 3 і 4, при збільшенні H $\delta^ч$ прямує знизу до δ . У роботах [2, 4–6, 21] вказується, що декременти, отримані теоретично, є меншими за експериментальні дані, і така ситуація досить типова. Не є винятком і формула (32) ($\delta^ч < \delta^*$ і $\delta^ч < \delta^{**}$). Водночас отриманий нами декремент δ є більшим за $\delta^ч$, але меншим за δ^* , δ^{**} . Тому робимо висновок, що δ є ближчим до реального декременту, ніж $\delta^ч$.

Тепер зупинимось на значній відмінності δ від δ^* і δ^{**} . Декремент є величиною, яка дуже чутлива до умов проведення експерименту. На величину декременту впливають:

1. Рух лінії контакту рідини, повітря і твердої стінки порожнини.

Динаміка лінії контакту є ще не до кінця зрозумілим явищем і в деяких роботах моделюється феноменологічними формулами (див., наприклад, [6]). У представленій роботі на твердій стінці задається умова прилипання $\bar{v} = 0$ на S і будується неперервне поле швидкості \bar{v} . Звідси випливає, що у розглядуваній нами моделі лінія контакту є нерухомою. З іншого боку, в експериментах [19, 20] лінія контакту рухалася.

2. Забруднення вільної поверхні рідини.

Про цей ефект повідомлялося в [4–6]. Зокрема, в [4] вивчалася затухання хвиль у довгому каналі. Для „свіжої” води теоретичний декремент добре узгоджувався з експериментальним. Але з часом, коли вимірювання повторювали через годину, експериментальний декремент зростав до деякої граничної величини. Автор [4] пояснює таке зростання спонтанним або самочинним забрудненням вільної поверхні. Це забруднення створює плівку на вільній поверхні і, як наслідок, збільшує величину декременту. При цьому візуально важко було помітити чи забруднена вільна поверхня, чи ні. Автор [4] отримав адекватне теоретичне наближення для декременту лише тоді, коли врахував дисипацію енергії у примежовому шарі, породженому поверхневою плівкою. В деяких експериментах, щоб уникнути забруднення, використовували високоочищені рідини [6, 22] і посудину з рідиною вміщували у герметичний контейнер [6]. В роботах [19, 20] ніяких заходів для уникнення забруднення не вживали.

3. Фізичні властивості стінок посудини і матеріал, з якого зроблено посудину.

Зокрема, в [1] вимірювали декременти у прямому круговому циліндрі. Отримані експериментально декременти значно перевищили теоретичні передбачення. Після цього внутрішню поверхню посудини відшліфували до зеркального блиску і знову повторили експеримент. В результаті декременти зі шліфованою поверхнею були у 2–3 рази меншими за декременти, отримані у невідшліфованій посудині. Також у [21] повідомляється, що на значення декрементів впливає забруднення стінок посудини.

4. Для посудин невеликих розмірів на декремент може суттєво впливати поверхневий натяг [20, 21].

Звернемо увагу читача на суттєву невідповідність між емпіричними формулами (35) і (36), хоча в [19, 20] проводилися подібні експерименти. А саме, у формулу (35) число H входить у степені $H^{-0,359}$, а у формулу (36) — у степені $H^{-0,5}$. Цю відмінність було помічено у роботі [23]. Автор [23] робить припущення, що невідповідність між (35) і (36) пов'язана з нелінійною залежністю між затуханням відхилення вільної поверхні і затуханням сил, які діють на бак. З іншого боку, декременти, обчислені за теоретичною формулою (32) і емпіричною формулою (36), мають однаковий характер залежності від H . А саме, вирази для $\delta_{\text{ч}}$ і δ^{**} є формулами виду C/\sqrt{H} . Але (див. табл. 3) для випадку півсфери коефіцієнт C у формулі (32) у 6,95 разів менший, ніж у формулі (36), і $\delta^{**}/\delta_{\text{ч}} = 6,95$ при будь-якому H .

Підсумовуючи викладене вище про декременти, робимо такий висновок. Мабуть, реальні фізичні умови, при яких проводилися експерименти [19, 20], не зовсім відповідають розглядуваній нами теоретичній моделі руху рідини. Ми, як мінімум, не врахували рух лінії контакту і поверхневий натяг, а також нам невідомо чи була забруднена поверхня в [19, 20]. Крім цього, самі по собі експерименти [19, 20] погано узгоджуються між собою, а теоретична формула (32) узгоджується з емпіричними формулами (35), (36) ще гірше, ніж запропонований у даній роботі проєкційний метод. Як відмічено у [5], ситуація, коли теоретичні передбачення для декрементів є значно меншими за експериментальні спостереження, є типовою.

З табл. 5 видно, що частоти ω , $\omega^{\text{ч}}$, ω^{**} , на відміну від декрементів, є близькими одна до одної. Також частоти ω , $\omega^{\text{ч}}$, ω^{**} не сильно відрізняються від частоти коливань ідеальної рідини $\omega^{\text{ід}}$. Це пояснюється тим, що власна частота коливань в'язкої рідини менша за $\omega^{\text{ід}}$ на величину, яка приблизно дорівнює декременту. У формулі (32) маємо

$$\omega^{\text{ч}} = \omega^{\text{ід}} - \delta^{\text{ч}}.$$

Частота за своєю величиною є набагато більшою за величину декременту (особливо при великих значеннях H , коли декремент є малим) і менш чутливою до умов проведення експерименту. Тому теоретично вирахувати частоту легше, ніж теоретично знайти декремент. Отже, можемо стверджувати, що нам вдалося знайти частоту ω , яка добре узгоджується з асимптотичною $\omega^{\text{ч}}$ і експериментальною ω^{**} частотами.

1. Case K. M., Parkinson W. C. Damping of surface waves in an incompressible liquid // J. Fluid Mech. — 1957. — 2. — P. 172–184.
2. Викторов Е. Д. Вычисление коэффициента затухания свободных колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1965. — № 2. — С. 143–146.
3. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: ВЦ АН СССР, 1968. — 230 с.

4. *Van Dorn W. G.* Boundary dissipation of oscillating waves // *J. Fluid Mech.* — 1966. — **24**. — P. 769–779.
5. *Miles J. W.* Surface wave damping in closed basins // *Proc. Roy. Soc. London.* — 1967. — **297**. — P. 459–475.
6. *Henderson D. M., Miles J. W.* Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // *J. Fluid Mech.* — 1994. — **275**. — P. 285–299.
7. *Nicolas J. A.* The viscous damping of capillary-gravity waves in a brimful circular cylinder // *Phys. Fluids.* — 2002. — **14**. — P. 1910–1919.
8. *Барняк М. Я.* Асимптотичний розв'язок задачі про власні коливання в'язкої рідини в прямому круговому циліндрі // Сучасні проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — **1**, № 2. — С. 43–51.
9. *Барняк М. Я.* Малые колебания вязкой несжимаемой жидкости в сосуде. — Киев, 1989. — 60 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.43).
10. *Барняк М. Я.* Проекційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання в'язкої рідини в посудині // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки: Пр. Укр. мат. конгр.-2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 5–24.
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи мат. наук.* — 1957. — **12**, вып. 5. — С. 3–122.
12. *Гузь А. Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. — Киев: А.С.К., 1998. — 350 с.
13. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // *Докл. АН СССР.* — 1964. — **159**, № 2. — С. 262–265.
14. *Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лантев Г. И.* Задача о колебании вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // *Функцион. анализ и его прил.* — 1968. — **2**, вып. 1. — С. 40–50.
15. *Гараджаев А.* К задаче о нормальных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в сосуде // *Сиб. мат. журн.* — 1984. — **25**, № 2. — С. 213–216.
16. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
17. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач ограниченного объема жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — 228 с.
18. *Демидович Б. И., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
19. *Sumner I. E., Stofan A. J.* An experimental investigation of viscous damping of liquid sloshing in spherical tanks. — Washington, D. C.: NASA TN D-1991, 1963.
20. *Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я.* Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах // *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.* — 1961. — № 4. — С. 48–53.
21. *Микишев Г. Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.
22. *Howell D. R., Buhrow B., Heath T., McKenna C., Hwong W., Schatz M. F.* Measurements of surface-wave-damping in a container // *Phys. Fluids.* — 2000. — **12**. — P. 322–326.
23. *Abramson H. N.* The dynamic behavior of liquids in moving containers. — Washington, D. C.: NASA SP-106, 1966. — 467 p.

Отримано 29.05.08,
після доопрацювання — 01.12.08