

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШАЗИ**И. П. Мартынов***Гродн. ун-т**Республика Беларусь, 230023, Гродно, ул. Ожешко, 22**e-mail: chio@tut.by***А. В. Чичурин***Брест. ун-т**Республика Беларусь, 224665, Брест, бульв. Космонавтов, 21**e-mail: chio@tut.by*

We find a solution of a Chazy system consisting of nine nonlinear algebraic equations. This system gives a necessary condition for a class of nonlinear third order differential equations with six singularities to be of P-type.

Знайдено розв'язок системи Шазі, що складається з дев'яти нелінійних алгебраїчних рівнянь. Ця система є необхідною умовою належності до P-типу класу нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку з шістьма особливими точками.

Введение. Исследуя на предмет принадлежности к P-типу уравнения вида

$$w''' = R(w'', w', w, z), \quad (1)$$

где R-рациональная функция по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z , Шази получил упрощенное уравнение

$$w''' = \frac{PQ'' - P''Q}{PQ' - P'Q} w' w'' - \frac{P'Q'' - P''Q'}{PQ' - P'Q} \frac{w'^3}{2}, \quad (2)$$

в котором P, Q — два полинома четвертой степени по w с постоянными коэффициентами, а P', P'', Q', Q'' — производные полиномов P, Q по w [1]. В этой же работе он показал, что уравнение (2) имеет не более шести полюсов, а также то, что уравнение P-типа вида (1), которое допускает в качестве своего упрощения уравнение (2) (причем все корни относительно переменной w уравнения $PQ' - QP' = 0$ простые), необходимо имеет вид

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{(w' - a'_k)(w'' - a''_k) + A_k(w' - a'_k)^3 + B_k(w' - a'_k)^2 + C_k(w' - a'_k)}{w - a_k} + Dw'' + Ew' + \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k}. \quad (3)$$

Уравнение (3) содержит 32 функции по z : $a_k, A_k, B_k, C_k, F_k, k = \overline{1, 6}, D, E$. Развивая метод Пенлеве [2] для уравнения (3), Шази получил систему из 31 алгебраического и дифференциального уравнений, в которых в качестве неизвестных используются 32 функции

— коэффициенты уравнения (3). Система девяти уравнений, которая связывает функции A_k и a_k , $k = \overline{1, 6}$, согласно работе [1], имеет вид

$$\sum_{k=1}^6 A_k = 0, \quad \sum_{k=1}^6 a_k A_k = -6, \quad \sum_{k=1}^6 a_k^2 A_k = -2 \sum_{k=1}^6 a_k, \quad (4)$$

$$2A_k^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (5)$$

Неизвестными функциями в системе (4), (5) являются функции A_k , $k = \overline{1, 6}$.

Формулировка задачи. Целью данной работы является нахождение решения системы (4), (5).

Прежде всего отметим, что в работе [1] нет подробного вывода условий (4), (5). Поэтому приведем здесь подробную процедуру получения условий (4), (5).

Уравнение (3) имеет шесть конечных полюсов по w . Поэтому значение z_0 , при котором $w = \infty$, не может быть полюсом уравнения (3) и, следовательно, точка z_0 является только точкой голоморфности упрощенного уравнения (2), которое можно представить в виде

$$(w - a_1)w''' = \left(1 + \sum_{j=2}^6 \frac{w - a_1}{w - a_j}\right) w'w'' + \left(A_1 + \sum_{j=2}^6 \frac{(w - a_1)A_j}{w - a_j}\right) w'^3. \quad (6)$$

Запишем разложение для простого полюса z_0 функции w :

$$w(z) = \frac{\alpha}{z - z_0} + \beta + \gamma(z - z_0)^2 + \dots,$$

в котором α , β , z_0 — произвольные постоянные.

Тогда

$$\frac{w - a_1}{w - a_j} = 1 + \frac{a_j - a_1}{\alpha}(z - z_0) + \dots, \quad j = \overline{2, 6}, \quad (7)$$

$$(w - a_1)w''' = -\frac{6\alpha^2}{(z - z_0)^5} + \frac{6\alpha(a_1 - \beta)}{(z - z_0)^4} + \dots, \quad (8)$$

$$\frac{w - a_1}{w - a_j} w'^3 = -\frac{\alpha^3}{(z - z_0)^6} + \frac{(a_1 - a_j)\alpha^2}{(z - z_0)^5} + \frac{(a_1 - a_j)(a_j - \beta)\alpha}{(z - z_0)^4} + \dots, \quad j = \overline{2, 6}, \quad (9)$$

$$w'w'' = -\frac{2\alpha^2}{(z - z_0)^5} + \dots \quad (10)$$

Отсюда возникают коэффициентные условия (4) как резонансные условия [3] для любых значений α и β . Действительно, подставим соотношения (7)–(10) в уравнение (6) и сравним коэффициенты при $(z - z_0)^{-6}$, $(z - z_0)^{-5}$, $(z - z_0)^{-4}$. Коэффициентное условие при $(z - z_0)^{-6}$ есть

$$0 = \sum_{k=1}^6 A_k, \quad (11)$$

т. е. получаем первое условие системы (4). Коэффициентное условие при $(z - z_0)^{-5}$ имеет вид

$$-6\alpha^2 = -12\alpha^2 + \sum_{j=2}^6 A_j(a_1 - a_j)\alpha^2,$$

или

$$6 = a_1 \sum_{j=2}^6 A_j - \sum_{j=2}^6 a_j A_j.$$

Учитывая равенство (11), легко записать последнее соотношение в виде второго уравнения системы (4).

Коэффициентное условие при $(z - z_0)^{-4}$ есть

$$6\alpha a_1 - 6\alpha\beta = \alpha \left(2 \sum_{j=2}^6 (a_1 - a_j) + \sum_{j=2}^6 (a_1 - a_j) a_j A_j \right) - \alpha\beta \sum_{j=2}^6 (a_1 - a_j) A_j. \quad (12)$$

Поскольку α и β — произвольные постоянные, коэффициенты при α и β должны быть равными нулю. Приравняв коэффициенты при $\alpha\beta$ в обеих частях соотношения (12), получаем второе уравнение системы (4). Равенство коэффициентов при α в соотношении (12) приводит к уравнению

$$0 = 4a_1 - 2 \sum_{j=2}^6 a_j + a_1 \sum_{j=2}^6 a_j A_j - \sum_{j=2}^6 a_j^2 A_j. \quad (13)$$

Выразив значения сумм $\sum_{j=2}^6 A_j$ и $\sum_{j=2}^6 a_j A_j$ из первого и второго уравнений системы (4) и подставив их в равенство (13), получим третье уравнение системы (4).

Теперь выведем систему (5). Для этого рассмотрим голоморфное разложение функции w в точке z_0 :

$$w(z) = a_1(z_0) + \alpha(z - z_0) + \beta(z - z_0)^2 + \gamma(z - z_0)^3 + \dots, \quad (14)$$

где α, γ, z_0 — произвольные постоянные.

Дифференцируя (14), получаем

$$\begin{aligned} w''' &= 6\gamma + \dots, \\ w'w'' &= 2\alpha\beta + (6\alpha\gamma + 4\beta^2)(z - z_0) + \dots, \\ w'^3 &= \alpha^3 + 6\alpha^2\beta(z - z_0) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим в уравнение (6) соотношения (14), (15) и учтем, что

$$\frac{w - a_1}{w - a_j} = \frac{\alpha}{a_1 - a_j}(z - z_0) + \dots \quad (16)$$

В полученном уравнении сравним коэффициенты при $(z - z_0)^0$:

$$2\alpha\beta + A_1\alpha^3 = 0$$

или

$$2\beta = -A_1\alpha^2 \quad \text{для любого } \alpha; \quad (17)$$

и при $(z - z_0)^1$:

$$6\alpha\gamma = 6\alpha\gamma + 4\beta^2 + 6\alpha^2\beta A_1 + \sum_{j=2}^6 \frac{2\alpha^2\beta + A_j\alpha^4}{a_1 - a_j}.$$

Подставляя значение β из (17) в последнее соотношение, находим

$$A_1^2\alpha^4 - 3\alpha^4 A_1^2 + \sum_{j=2}^6 \frac{(A_j - A_1)\alpha^4}{a_1 - a_j} = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) можно представить в виде

$$2A_1^2 + \sum_{j=2}^6 \frac{A_1 - A_j}{a_1 - a_j} = 0. \quad (19)$$

Беря в соотношении (16) вместо a_1 функцию a_j , $j = \overline{2, 6}$, и проводя аналогичные рассуждения для каждого из этих значений j , получаем еще пять соотношений вида (19), т. е. систему (5).

Решение задачи. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Решение системы (4), (5) имеет вид*

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5}, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (20)$$

где основные симметрические многочлены σ_k , составленные из элементов a_k , $k = \overline{1, 6}$, связаны с величинами α_2 , β_2 , β_3 соотношениями

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \quad (21)$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\sigma_2\alpha_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4)}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)},$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению 5-й степени

$$\begin{aligned}
 & 1296\alpha_2^5 - 1296\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - \\
 & - 9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_3^2 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - \\
 & - 12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5) \times \\
 & \times (\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + 12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Доказательство основано на методе Н. А. Лукашевича [4]. Решение системы (4), (5) ищем, согласно работе [4], в виде

$$A_k = \frac{\sum_{i=0}^4 \chi_i a_i^{4-i}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 (a_k - a_j)}, \quad k, j = \overline{1, 6}, \tag{23}$$

где χ_i — неизвестные функции.

Перепишем знаменатели правых частей (23), используя основные симметрические многочлены σ_i , $i = \overline{1, 6}$, в виде

$$\varphi(a_k) \equiv \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 (a_k - a_j) = 6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5, \quad k = \overline{1, 6}.$$

Выберем функции χ_i , $i = \overline{0, 4}$, согласно формулам (20):

$$\chi_0 = -6, \quad \chi_1 = 4\sigma_1, \quad \chi_2 = 3(\alpha_2 - \sigma_2), \quad \chi_3 = -3\beta_2, \quad \chi_4 = 3\beta_3 - \sigma_4,$$

где неизвестные функции $\alpha_2, \beta_2, \beta_3$ связаны с другими функциями $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1$ и основными симметрическими многочленами σ_i , $i = \overline{1, 6}$, соотношениями

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -2\alpha_1, \quad \sigma_2 = \beta_1 + 3\alpha_2, \quad \sigma_3 = -4\alpha_3 - 2\beta_2, \quad \sigma_4 = 3\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, \\
 \sigma_5 &= -2(\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3), \quad \sigma_6 = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Решая систему (24) относительно неизвестных величин β_2, β_3 и α_2 , получаем соотношения (21), (22) и

$$\alpha_1 = -\frac{\sigma_1}{2}, \quad \beta_1 = \sigma_2 - 3\alpha_2, \quad \alpha_3 = \frac{\sigma_1(4\alpha_2(\sigma_2 - 3\alpha_2) - \sigma_1\sigma_3 + 4\sigma_4) - 12\sigma_5}{4(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}.$$

Подставим значения функций A_k , $k = \overline{1, 6}$, из соотношений (20) в левые части уравнений системы (4) и воспользуемся тождествами

$$\sum_{k=1}^6 \frac{1}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^6 \frac{a_k^2}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^6 \frac{a_k^3}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^6 \frac{a_k^4}{\varphi(a_k)} \equiv 0, \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^6 \frac{a_k^5}{\varphi(a_k)} \equiv 1, \quad \sum_{k=1}^6 \frac{a_k^6}{\varphi(a_k)} \equiv \sigma_1, \quad \sum_{k=1}^6 \frac{a_k^7}{\varphi(a_k)} \equiv \sigma_1^2 - \sigma_2$$

(тождества (25) доказаны в работе [4] на основе свойств определителей Вандермонда [5]). В результате несложных преобразований получим правые части уравнений системы (4). Таким образом, соотношения (20) удовлетворяют системе (4).

Теперь подставим значения функций A_k , $k = \overline{1, 6}$, из соотношений (20)–(22) в левые части уравнений системы (5). После приведения к общему знаменателю и выделения множителей получим шесть выражений

$$(6a_k^2 + \sigma_2 - 2a_k\sigma_1)(1296a_2^5 - 1296a_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4))\alpha_2^3 +$$

$$+ 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - 9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) +$$

$$+ \sigma_1^2(9\sigma_3^2 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - 12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 +$$

$$+ (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + 12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (26)$$

Но второй множитель в произведениях (26) равен нулю в силу соотношения (22). Таким образом, доказано, что функции (20)–(22) также удовлетворяют системе (5) для каждого из пяти корней уравнения (8).

Замечание. Если набор функций a_k , $k = \overline{1, 6}$, имеет определенную симметрию, то некоторые из пяти наборов функций A_k вида (20)–(22) могут совпадать.

Покажем это на примере.

Пример. Выберем функции a_k , $k = \overline{1, 6}$, линейными вида

$$a_1 = x, \quad a_2 = 2x, \quad a_3 = 4x, \quad a_4 = -x, \quad a_5 = -2x, \quad a_6 = -4x.$$

Тогда функции A_k , $k = \overline{1, 6}$, вида (20)–(22) примут вид

$$A_1 = \frac{19x^4 - 6x^2\alpha_2 - \alpha_2^2}{30x^5}, \quad A_2 = \frac{\alpha_2^2 + 3x^2\alpha_2 - 52x^4}{48x^5}, \quad A_3 = \frac{-\alpha_2^2 + 9x^2\alpha_2 - 176x^4}{480x^5},$$

$$A_4 = -A_1, \quad A_5 = -A_2, \quad A_6 = -A_3,$$

а функция α_2 является одной из трех функций

$$(\alpha_2)_1 = 4x^2, \quad (\alpha_2)_2 = -\frac{(\sqrt{57} + 11)x^2}{2}, \quad (\alpha_2)_3 = \frac{(\sqrt{57} - 11)x^2}{2}.$$

1. *Chazy J.* Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes // Acta Math. — 1911. — **34**. — P. 317–385.
2. *Painleve P.* Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles. Professies a Stokholm. — Paris, 1897.
3. *Мартынов И. П.* О некоторых задачах аналитической теории дифференциальных уравнений, решаемых в Гродненском государственном университете // Весн. Гродн. дзярж. ун-та. — 2003. — Сер. 2, № 2 (22). — С. 15–25.
4. *Лукашевич Н. А.* К теории уравнения Шази // Дифференц. уравнения. — 1993. — **29**, № 2. — С. 353–357.
5. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. — М.: Наука, 1976.

Получено 11.09.07