

## СОЛТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ІНВЕРСНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА

**О. В. Воробйова, М. М. Притула**

*Львів. нац. ун-т*

*Україна, 79000, Львів, вул. Університетська, 1*

*e-mail: pmt@franko.lviv.ua*

*vorobjova@yahoo.com*

*We construct soliton solutions for the inverse Korteweg–de Vries (KdV) equation by developing the tanh-function method and the machinery of symbolic calculus.*

*Побудовано солітонні розв'язки для інверсного рівняння Кортевега–де Фріза (КдФ) на основі розвитку методу tanh-функції та техніки символьних обчислень.*

У роботі [1] запропоновано метод tanh-функції, а в роботі [2] — розширений метод tanh-функції для знаходження точних розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними, який реалізовано на конкретних прикладах. У 2001 р. у роботі [3] розроблено пакет символьних обчислень у середовищі „Mathematica” для знаходження точних розв'язків, які виражаються через гіперболічні та еліптичні функції, для нелінійних рівнянь з частинними похідними і дискретних диференціальних рівнянь та реалізовано на багатьох конкретних рівняннях і системах.

Дослідженнями нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описують різні процеси поширення хвиль у нелінійних середовищах, займались багато вчених (див., наприклад, [4–6], а також бібліографію в [1–3]).

При дослідженні ряду задач гідродинаміки, фізики плазми та інших проблем фізики значну роль відіграють спеціальні нелінійні моделі типу інверсного рівняння КдФ.

У праці [7] було досліджено на повну інтегровність нелінійну інверсну динамічну систему КдФ

$$\begin{aligned}u_t &= v, \\v_t &= p, \\p_t &= u_x + uv,\end{aligned}\tag{1}$$

що включала знаходження законів збереження, узгодженої імплектичної пари ньотерових операторів та зображення Лакса [8]. У рівнянні (1)  $u, v, p$  — залежні змінні, що і є функціями змінних  $x, t$ . Виникає задача знаходження точних розв'язків системи (1). Як відомо [7], динамічна система (1) отримана із рівняння КдФ

$$u_t = u_{xxx} - uu_x\tag{2}$$

за допомогою відображення інверсії  $\mathbb{R} \ni x \iff t \in \mathbb{R}$ . Відомо, що рівняння (2) описує поширення хвиль в одному напрямку на поверхні мілкої води, тобто має розв'язок у вигляді відокремленої хвилі і поводить, як солітон, причому солітони рівняння КдФ мають форму  $(\operatorname{sech})^2$ . Виникає питання: яку ж форму мають розв'язки інверсного рівняння КдФ (1)? Цією задачею займемось нижче, використовуючи згадані вище методи знаходження точних розв'язків.

Запишемо систему (1) у вигляді

$$u_t - v = 0,$$

$$v_t - p = 0,$$

$$p_t - u_x - uv = 0,$$

або

$$u_{1,x_2} - u_2 = 0,$$

$$u_{2,x_2} - u_3 = 0, \tag{3}$$

$$u_{3,x_2} - u_{1,x_1} - u_1 u_2 = 0,$$

де  $x_1 = x$ ,  $x_2 = t$  і

$$u_1(x_1, x_2) = u(x, t), \quad u_2(x_1, x_2) = v(x, t), \quad u_3(x_1, x_2) = p(x, t), \quad u_{i,lx_j} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^l u_i}{\partial x_j^l}.$$

Щоб отримати явні розв'язки системи (3), опишемо наступні кроки.

*Крок 1.* Перетворимо систему (3) у нелінійне звичайне диференціальне рівняння, розв'язок якого шукаємо у рухомій системі відліку

$$\varphi = \sum_{j=1}^2 k_j x_j + \varphi_0, \tag{4}$$

де компоненти  $k_j$ ,  $j = \overline{1, 2}$ , хвильового вектора і фаза  $\varphi_0$  є сталими. Для знаходження поліноміальних розв'язків використаємо метод  $\tanh$ -функції [1–3],  $T = \tanh \varphi$ . Зауважимо, що перша, а отже, і всі похідні вищого порядку будуть многочленами від  $T$ . Дійсно, враховуючи тотожність

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1,$$

обчислюємо

$$\tanh' \varphi = \operatorname{sech}^2 \varphi = 1 - \tanh^2 \varphi,$$

$$\tanh'' \varphi = -2 \tanh \varphi + 2 \tanh^3 \varphi,$$

.....

Оскільки  $T' = 1 - T^2$ , застосовуючи правило диференціювання складної функції,

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x_j} = \frac{d \cdot}{dT} \frac{dT}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = k_j(1 - T^2) \frac{d \cdot}{dT},$$

переводимо задану систему (3) у систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, скориставшись при цьому підстановкою

$$u_{i,x_j} = k_j(1 - T^2)U_i'.$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} -U_2(T) + k_2U_1'(T) - k_2T^2U_1'(T) &= 0, \\ -U_3(T) + k_2U_2'(T) - k_2T^2U_2'(T) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$-U_1(T)U_2(T) - k_1U_1'(T) + k_1T^2U_1'(T) + k_2U_3'(T) - k_2T^2U_3'(T) = 0,$$

де  $U_1(T) = u_1(x_1, x_2)$ ,  $U_2(T) = u_2(x_1, x_2)$  і  $U_3(T) = u_3(x_1, x_2)$ .

*Крок 2.* Визначаємо степінь поліноміальних розв'язків. З цією метою поліноміальні розв'язки шукаємо у вигляді

$$U_i(T) = \sum_{j=0}^{M_i} a_{ij}T^j. \quad (6)$$

Перед обчисленням коефіцієнтів  $a_{ij}$  показники степеня  $M_i$  повинні бути визначені. Щоб уникнути нульових розв'язків, прийmemo  $M_i \geq 1$ . При підстановці  $U_i$  в (5) коефіцієнти при кожному степені  $T$  у кожному рівнянні повинні перетворитися в нуль. Зокрема, елементи найвищого степеня повинні перетворитися в нуль. Оскільки елементи найвищого степеня залежать тільки від  $T^{M_i}$  у (6), то достатньо підставити  $U_i(T) = T^{M_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , у ліві частини рівнянь (5). В результаті отримаємо поліноміальну систему від  $T$ . Прирівнювання кожних двох можливих найвищих показників степеня у кожному рівнянні системи (5) приводить до лінійної системи, що визначає  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$M_1 + 1 = M_2, \quad M_2 + 1 = M_3, \quad M_3 + 1 = M_1 + M_2.$$

Маємо  $M_1 = 2$ ,  $M_2 = 3$ ,  $M_3 = 4$ . Отже,

$$U_1(T) = a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2,$$

$$U_2(T) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^3, \quad (7)$$

$$U_3(T) = a_{30} + a_{31}T + a_{32}T^2 + a_{33}T^3 + a_{34}T^4.$$

Крок 3. Одержуємо алгебраїчну систему рівнянь для визначення коефіцієнтів  $a_{ij}$ , тобто, підставляючи (7) у (5), отримуємо систему

$$\begin{aligned}
 -a_{22} - a_{11} k_2 &= 0, \\
 -a_{20} + a_{11} k_2 &= 0, \\
 -a_{23} - 2 a_{12} k_2 &= 0, \\
 -a_{21} + 2 a_{12} k_2 &= 0, \\
 -a_{30} + a_{21} k_2 &= 0, \\
 -a_{33} - 2 a_{22} k_2 &= 0, \\
 -a_{31} + 2 a_{22} k_2 &= 0, \\
 -a_{34} - 3 a_{23} k_2 &= 0, \\
 -a_{32} - a_{21} k_2 + 3 a_{23} k_2 &= 0, \\
 -(a_{12} a_{23}) - 4 a_{34} k_2 &= 0, \\
 -(a_{10} a_{20}) - a_{11} k_1 + a_{31} k_2 &= 0, \\
 -(a_{12} a_{22}) - a_{11} a_{23} - 3 a_{33} k_2 &= 0, \\
 -(a_{11} a_{20}) - a_{10} a_{21} - 2 a_{12} k_1 + 2 a_{32} k_2 &= 0, \\
 -(a_{12} a_{20}) - a_{11} a_{21} - a_{10} a_{22} + a_{11} k_1 - a_{31} k_2 + 3 a_{33} k_2 &= 0, \\
 -(a_{12} a_{21}) - a_{11} a_{22} - a_{10} a_{23} + 2 a_{12} k_1 - 2 a_{32} k_2 + 4 a_{34} k_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

з невідомими  $a_{ij}$  і параметрами  $k_i$ .

Крок 4. Розв'язуємо нелінійну параметричну алгебраїчну систему (8) відповідно до таких припущень: а) коефіцієнти  $a_{ij} M_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , елементів найвищого степеня у (6) відмінні від нуля (для сумісності з кроком 2); б) всі  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ , відмінні від нуля (вимога фізичного характеру розв'язків).

Розв'язок (8) отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= -\frac{k_1}{k_2} - 8 k_2^2, \\
 a_{11} &= 0, \\
 a_{12} &= 12 k_2^2, \\
 a_{20} &= 0, \\
 a_{21} &= 24 k_2^3, \\
 a_{22} &= 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$a_{23} = -24 k_2^3,$$

$$a_{30} = 24 k_2^4,$$

$$a_{31} = 0,$$

$$a_{32} = -96 k_2^4,$$

$$a_{33} = 0,$$

$$a_{34} = 72 k_2^4.$$

Крок 5. Будуємо і перевіряємо розв'язки у вигляді відокремленої хвилі. Для цього підставляємо розв'язок (9), отриманий на кроці 4, у (6) і використовуємо процедуру, обернену до кроку 1, одержуємо явні розв'язки в початкових змінних. На завершення перевіряємо розв'язки, підставляючи їх у рівняння (3). Використовуючи  $T = \tanh(k_1 x + k_2 t + \varphi_0)$ , отримуємо розв'язки системи (1) у вигляді

$$u(x, t) = -\frac{k_1}{k_2} - 8 k_2^2 + 12 k_2^2 \tanh^2(\varphi_0 + x k_1 + t k_2),$$

$$v(x, t) = 24 k_2^3 \tanh(\varphi_0 + x k_1 + t k_2) - 24 k_2^3 \tanh^3(\varphi_0 + x k_1 + t k_2), \quad (10)$$

$$p(x, t) = 24 k_2^4 - 96 k_2^4 \tanh^2(\varphi_0 + x k_1 + t k_2) + 72 k_2^4 \tanh^4(\varphi_0 + x k_1 + t k_2).$$

Як видно з (10), розв'язки для функції  $u(x, t)$  мають форму  $1 - \operatorname{sech}^2$ , для функції  $v(x, t)$  — форму  $(1 - \operatorname{sech}^2)\sqrt{(1 - \operatorname{sech}^2)}$ , а для функції  $p(x, t)$  — форму  $(1 - \operatorname{sech}^2)^2$ . Графічне зображення розв'язків для інверсної динамічної системи (1) наведено на рис. 1–3 відповідно при значеннях  $\varphi_0 = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ;  $t = 0 : 10$ ,  $x = -10 : 10$ .

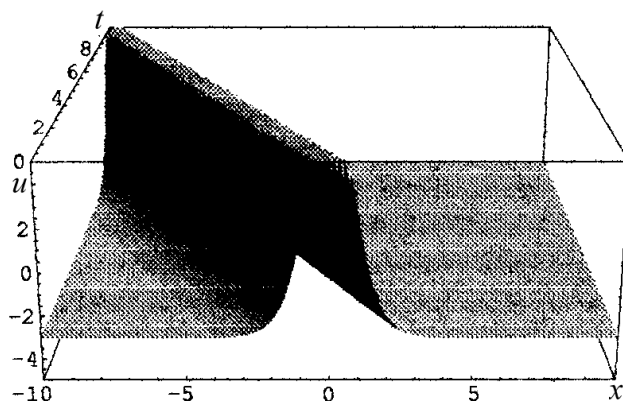
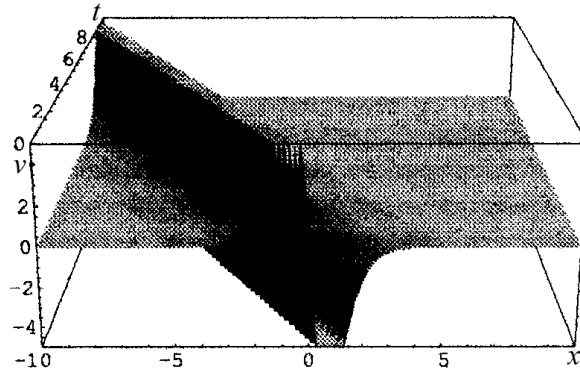
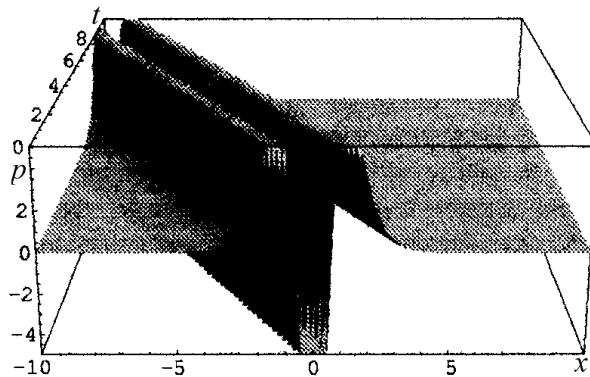


Рис. 1. Функція  $u(x, t)$ .

Рис. 2. Функція  $v(x, t)$ .Рис. 3. Функція  $p(x, t)$ .

1. *Malfliet W.* Solitary wave solutions of nonlinear wave equation // Amer. J. Phys. — 1992. — **60**. — P. 650–654.
2. *Fan E.G.* Extended-function method and its applications to nonlinear equation // Phys. Lett. A. — 2000. — **277**. — P. 212–218.
3. *Baldin D., Göktaş Ü., Hereman W., Hong L., Martino R.S., and Miller J.C.* Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear partial differential and difference equations. — 2001. — Available at URL://www.mines.edu/fs\_home/whereman/.
4. *Fan E.G.* Soliton solutions for a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation and a coupled MKdV equation // Phys. Lett. A. — 2001. — **282**. — P. 18–21.
5. *Hereman W., Nuseir A.* Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations // Math. Comput. in Simul. — 1997. — **43**. — P. 13–27.
6. *Fan E., Chao L.* Soliton solutions for the new complex version of a coupled KdV equation and a coupled MKdV equation // Phys. Lett. A. — 2001. — **285**. — P. 373–376.
7. *Prytula M., Samoylenko V., and Suyarov U.* The complete integrability analysis of the inverse Korteweg–de Vries (inv KdV) // Nonlinear Vibration Problems. — 1993. — **25**. — P. 411–422.
8. *Prykarpatsky A., Mykytiuk I.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical system on manifolds: classical and quantum aspect. — Dordrecht: Kluwer, 1988. — 288 p.

Одержано 22.01.2003