

## ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ У КРАЙОВИХ УМОВАХ

**В. В. Маринець**

Ужгород. нац. ун-т  
Україна, Ужгород, вул. Підгірна, 46  
e-mail: math1@univ.uzhgorod.ua

**О. Ю. Питьовка**

Мукач. технол. ін-т  
Україна, Мукачево, вул. Ужгородська, 26  
e-mail: nauka@mti.edu.ua

*We study a rapidly convergent modification of a two-sided method for approximate integration of a parametrized boundary-value problem for a system of quasilinear second-order differential equations.*

*Исследуется одна быстросходящаяся модификация двустороннего метода приближенного интегрирования краевой задачи с параметрами в крайевых условиях для случая системы квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка.*

**1.** У сучасному математичному аналізі і моделюванні важливе значення мають розробка і розвиток конструктивних методів. До таких методів належить і метод Чаплигіна, який дає можливість охопити шуканий розв'язок розглядуваної задачі у „вилку” і цим отримати зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку. Ця проблема є однією з важливих у теорії наближених методів.

Метою даної роботи є побудова модифікацій двостороннього методу наближеного інтегрування та дослідження задач з параметрами у крайових умовах у випадку системи квазілінійних звичайних диференціальних рівнянь.

**2.** Розглянемо крайову задачу

$$Y''(x) = F(x, Y(x), Y'(x)), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$A_1 \Lambda Y(0) + B_1 Y(1) = d_1,$$

$$A_2 Y'(0) + B_2 Y'(1) = \Lambda d_2, \quad (2)$$

$$Y(0) = Y_0,$$

де  $Y = (y_i)_{i=1}^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , — шукана функція,  $F = (f_i)_{i=1}^n : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y_0 = (y_{i,0})_{i=1}^n$ ,  $d_k = (d_{i,k})_{i=1}^n$ ,  $k = 1, 2$ , — вектори-стовпці,  $A_k = (\delta_{i,j} \alpha_{i,k})_{i,k=1}^n$ ,  $B_k = (\delta_{i,j} \beta_{i,k})_{i,k=1}^n$  — квадратні матриці,  $y_{i,0}$ ,  $d_{i,k}$ ,  $\alpha_{i,k}$ ,  $\beta_{i,k}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2$ , — задані сталі,  $\Lambda = (\delta_{i,j} \lambda_i)_{i,j=1}^n$ ,  $k = 1, 2$ , — діагональна матриця, складена з шуканих числових параметрів  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера.

Під розв'язком крайової задачі (1) будемо розуміти [1] пару  $(Y, \lambda) \in C^2([0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ , де  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n$  — вектор-стовпець,  $\lambda_i \in [\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}]$ ,  $\lambda_{i,k}$ ,  $k = 1, 2$ , — задані сталі, а вектор-функція  $Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  є розв'язком системи рівнянь (1) і при вказаному значенні параметра  $\lambda$  задовольняє крайові умови (2).

**3.** Нехай  $C([0, 1] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  — простір неперервних вектор-функцій  $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Якщо  $F \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  і матриця  $K = A_1 \bar{Y}_0 d_2^{-1} (A_2 + B_2) + B_1$  є невідродженою, то крайову задачу (1), (2) можна подати в еквівалентній інтегральній формі [2, 3]

$$Y(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G(x, \xi) F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi)) d\xi, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

$$\lambda = N_1 + \int_0^1 (N_3 \xi + N_2) F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi)) d\xi, \quad (4)$$

де вектор  $C \equiv K^{-1}(d_1 - B_1 Y_0) = (\rho_i^{-1}(d_{i,1} - \beta_{i,1} y_{i,0}) d_{i,2})$ ,  $\rho_i = \alpha_{i,1}(\alpha_{i,2} + \beta_{i,2}) y_{i,0} + \beta_{i,1} d_{i,2}$ ,  $d_2^{-1} = (\delta_{i,j} d_{i,2}^{-1})$ ,  $Y_0^{-1} = (\delta_{i,j} y_{i,0}^{-1})$ ,  $\bar{Y}_0 = (\delta_{i,j} y_{i,0})$ , функція  $G$  визначається рівністю

$$G(x, \xi) = \begin{cases} Bx + (Ax - E)\xi, & \xi \in [0, x], \\ Bx + (A\xi - E)x, & \xi \in (x, 1], \end{cases} \quad (5)$$

$A \equiv K^{-1} B_1 = (\delta_{i,j} \rho_i^{-1} \beta_{i,1} d_{i,2})_{i,j=1}^n$  і  $B \equiv K^{-1} A_1 \bar{Y}_0 d_2^{-1} A_2 = (\delta_{i,j} \rho_i^{-1} \alpha_{i,1} \alpha_{i,2} y_{i,0})_{i,j=1}^n$  — матриці, вектор  $N_1$  задано формулою

$$N_1 = A_1^{-1} Y_0^{-1} d_1 - A_1^{-1} B_1 Y_0^{-1} (Y_0 + C) = (\rho_i^{-1} (\alpha_{i,2} + \beta_{i,2}) (d_{i,1} - \beta_{i,1} y_{i,0}))_{i=1}^n,$$

а  $N_2 = -A_1^{-1} B_1 Y_0^{-1} B = (-\delta_{i,j} \rho_i^{-1} \alpha_{i,2} \beta_{i,1})_{i,j=1}^n$  і

$$N_3 = -A_1^{-1} B_1 Y_0^{-1} (A - E) = (\delta_{i,j} \rho_i^{-1} \beta_{i,1} (\alpha_{i,2} + \beta_{i,2}))_{i,j=1}^n$$

— матриці.

Не зменшуючи загальності подальших міркувань, будемо вважати, що  $\det A_2 Y_0^+ \neq 0$  та

$$d_2 = e \equiv (1, 1, \dots, 1), \quad A_1 = E,$$

де  $E$  — одинична матриця.

**4.** Нехай  $Z_0, V_0$  — такі функції з  $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ , що

$$Z_0^{(s)}(x) \geq V_0^{(s)}(x), \quad x \in [0, 1], \quad s = 0, 1. \quad (6)$$

**Означення 1.** Будемо говорити, що вектор-функція  $Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  належить множині  $\langle V_0, Z_0 \rangle$ , якщо

$$V_0^{(s)}(x) \leq Y^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (7)$$

Нехай  $L_i, i = 1, 2, \dots, n$ , — фіксовані квадратні матриці розмірності  $n$ .

З кожною парою функцій  $Z_0, V_0$ , що має властивість (6), пов'яжемо множину  $\mathcal{A}_L(Z_0, V_0)$  всіх таких вектор-функцій  $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , які задовольняють наступні умови:

1)  $F \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$ ;

2) для довільного  $x \in [0, 1]$  та довільних векторів  $\{Y, Z\} \subset \mathbb{R}^n$ , що містяться у множині  $\langle V_0, Z_0 \rangle$ , справджується рівність

$$F(x, Y, Z) = H(x, Y, Z, Y, Z), \quad (8)$$

де функція  $H : [0, 1] \times \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  є неспадною за 2-, 3-, ...,  $(2n + 1)$ -м та незростаючою за  $(2n + 2)$ -,  $(2n + 3)$ -, ...,  $4n$ -м її аргументами, тобто для довільних  $(Z_{s,0}, Z_{s,1}), s = 0, 1$ , та  $(V_{s,0}, V_{s,1}), s = 0, 1$ , з  $\mathbb{R}^{2n}$  таких, що

$$Z_0(x) \leq Z_{s,0} \leq Z_{s,1} \leq V_0(x), \quad V_0(x) \geq V_{s,0} \geq V_{s,1} \geq Z_0(x), \quad s = 0, 1, \quad x \in [0, 1], \quad (9)$$

виконується нерівність

$$H(x, Z_{10}, Z_{11}, V_{10}, V_{11}) \geq H(x, Z_{00}, Z_{01}, V_{00}, V_{01}), \quad x \in [0, 1]; \quad (10)$$

3) вектор-функція  $H$ , що входить до (8), задовольняє умову Ліпшиця з матрицею  $\frac{1}{4}L$ , тобто для довільних векторів  $(Z_{s,0}, Z_{s,1})$  та  $(V_{s,0}, V_{s,1}), s = 0, 1$ , з властивостями (9) і довільного  $x \in [0, 1]$  виконується оцінка

$$|H(x, Z_{10}, Z_{11}, V_{10}, V_{11}) - H(x, Z_{00}, Z_{01}, V_{00}, V_{01})| \leq \frac{1}{4}L \left( \sum_{s=0}^1 (|Z_{s,1} - Z_{s,0}| + |V_{s,1} - V_{s,0}|) \right),$$

де  $L = (\delta_{i,j}L_i)_{i,j=1}^n$ .

Тут і далі знак модуля і нерівність між векторами та матрицями розуміємо покомпонентно. Належність вектора  $Y \in \mathbb{R}^n$  множині  $\langle V_0, Z_0 \rangle$  розуміємо як належність вказаній множині сталої функції із відповідним значенням.

**5.** Нехай справджуються співвідношення

$$B_1(A_2\bar{Y}_0)^{-1} \leq \Theta, \quad K_1 = E + B_2A_2^{-1} + B_1(A_2\bar{Y}_0)^{-1} > \Theta, \quad (11)$$

де  $\Theta$  — нульова матриця. Тоді  $E + B_2A_2^{-1} > \Theta$  і  $A \leq \Theta, B > \Theta$ .

Подамо функцію Гріна лінійної частини задачі (1), (2) у вигляді

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + G_2(x, \xi), \quad (x, \xi) \in [0, 1]^2, \quad (12)$$

де

$$G_1(x, \xi) = Bx, \quad \xi \in [0, 1], \quad (13)$$

$$G_2(x, \xi) = \begin{cases} (Ax - E)\xi, & \xi \in [0, x], \\ (A\xi - E)x, & \xi \in (x, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, що  $(\partial^s/\partial x^s)G_1(x, \xi) \geq \Theta$  та  $(\partial^s/\partial x^s)G_2(x, \xi) \leq \Theta$ ,  $s = 0, 1$ , при  $x \in [0, 1]$ ,  $\xi \in [0, 1]$ .

Нехай  $R_p = (\delta_{i,j}r_{p,i})_{i,j=1}^n$  та  $D_p = (\delta_{i,j}d_{p,i})_{i,j=1}^n$  — матриці з довільними сталими невід'ємними елементами, які задовольняють умови

$$r_{p,i} \leq \frac{1}{2}, \quad d_{p,i} \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Побудуємо послідовності вектор-функцій  $Z_p, V_p, p = 0, 1, \dots$ , за рекурентним правилом [3, 4]

$$Z_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x, \xi)\bar{F}^p(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x, \xi)\bar{F}_p(\xi)d\xi, \quad (15)$$

$$V_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x, \xi)\bar{F}_p(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x, \xi)\bar{F}^p(\xi)d\xi, \quad (16)$$

де, за означенням,

$$\bar{F}^p(x) = F^p(x) - C_p(x)(F^p(x) - F_p(x)), \quad (17)$$

$$\bar{F}_p(x) = F_p(x) + Q_p(x)(F^p(x) - F_p(x)), \quad (18)$$

функції  $F^p$  та  $F_p$  задано формулами

$$F^p(x) = H(x, Z_p(x) - R_p W_p(x), Z'_p(x) - R_p W'_p(x), V_p(x) + D_p W_p(x), V'_p(x) + D_p W'_p(x)), \quad (19)$$

$$F_p(x) = H(x, V_p(x) + D_p W_p(x), V'_p(x) + D_p W'_p(x), Z_p(x) - R_p W_p(x), Z'_p(x) - R_p W'_p(x))$$

та

$$\alpha_p(x) = Z_p(x) - Y_0 - Cx - \int_0^1 G_1(x, \xi)F^p(\xi)d\xi - \int_0^1 G_2(x, \xi)F_p(\xi)d\xi, \quad (20)$$

$$\beta_p(x) = V_p(x) - Y_0 - Cx - \int_0^1 G_1(x, \xi)F_p(\xi)d\xi - \int_0^1 G_2(x, \xi)F^p(\xi)d\xi,$$

$$W_p(x) = Z_p(x) - V_p(x).$$

Тут  $C_p(x) = (\delta_{i,j} c_{p,i}(x))_{i,j=1}^n$ ,  $Q_p(x) = (\delta_{i,j} q_{p,i}(x))_{i,j=1}^n$ ,  $x \in [0, 1]$ , де  $c_{p,i}$ ,  $q_{p,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , — довільні невід’ємні функції з простору  $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ , а функції нульового наближення  $Z_0$  та  $V_0$  вибираємо у просторі  $C^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$  таким чином, щоб при  $R_0 = \Theta$  та  $D_0 = \Theta$  виконувались нерівності

$$W_0^{(s)}(x) \geq 0, \quad \alpha_0^{(s)}(x) \geq 0, \quad \beta_0^{(s)}(x) \leq 0, \quad s = 0, 1, \quad x \in [0, 1], \quad (21)$$

тобто щоб справджувалися співвідношення (6) та умови

$$\begin{aligned} Z_0'(x) &\geq C + \int_0^1 \left( \frac{\partial G_1(x, \xi)}{\partial x} H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial x} H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi)) \right) d\xi, \\ V_0'(x) &\leq C + \int_0^1 \left( \frac{\partial G_1(x, \xi)}{\partial x} H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial x} H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi)) \right) d\xi, \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Z_0(0) &\geq Y_0 - \int_0^1 (G_1(x, \xi) H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi)) + \\ &\quad + H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi))) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0(0) &\leq Y_0 + \int_0^1 (G_1(x, \xi) H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi)) + \\ &\quad + G_2(x, \xi) H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi))) d\xi. \end{aligned}$$

Зауважимо, що згідно з умовами (14), (21) при  $s = 0, 1$  та  $x \in [0, 1]$

$$V_0^{(s)}(x) \leq V_0^{(s)}(x) + D_0 W_0^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x) - R_0 W_0^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x),$$

тобто  $V_0(\cdot) + D_0 W_0(\cdot) \in \langle V_0, Z_0 \rangle$  та  $Z_0(\cdot) - R_0 W_0(\cdot) \in \langle V_0, Z_0 \rangle$ . На підставі останніх нерівностей та умов (10), (22) маємо  $\alpha_0^{(s)}(x) \geq 0$ ,  $\beta_0^{(s)}(x) \leq 0$ ,  $s = 0, 1$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Нехай

$$\sup_{x \in [0, 1]} c_{p,i}(x) \leq \frac{1}{2}, \quad \sup_{x \in [0, 1]} q_{p,i}(x) \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad p = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Тоді із (19), (20) і (15) отримуємо

$$Z_{p+1}(x) - Z_p(x) = -\alpha_p(x) + \int_0^1 \{G_2(x, \xi)Q_p(\xi) - G_1(x, \xi)C_p(\xi)\} (F^p(\xi) - F_p(\xi)) d\xi, \quad (24)$$

$$V_{p+1}(x) - V_p(x) = -\beta_p(x) + \int_0^1 \{G_1(x, \xi)Q_p(\xi) - G_2(x, \xi)C_p(\xi)\} (F^p(\xi) - F_p(\xi)) d\xi,$$

$$W_{p+1}(x) = \int_0^1 (G_1(x, \xi) - G_2(x, \xi)) (E - C_p(\xi) - Q_p(\xi)) (F^p(\xi) - F_p(\xi)) d\xi \quad (25)$$

та

$$\alpha_{p+1}(x) = \int_0^1 G_1(x, \xi) (\bar{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)) d\xi + \int_0^1 G_2(x, \xi) (\bar{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)) d\xi, \quad (26)$$

$$\beta_{p+1}(x) = \int_0^1 G_1(x, \xi) (\bar{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)) d\xi + \int_0^1 G_2(x, \xi) (\bar{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)) d\xi.$$

Із (24), враховуючи (10), (14), (21), при  $p = 0$  одержуємо

$$Z_1^{(s)}(x) - Z_0^{(s)}(x) = -\alpha_0^{(s)}(x) + \int_0^1 \left( \frac{\partial^s G_2(x, \xi)}{\partial x^s} Q_0(\xi) - \frac{\partial^s G_1(x, \xi)}{\partial x^s} C_0(x) \right) (F^0(\xi) - F_0(\xi)) d\xi \leq 0,$$

$$V_1^{(s)}(x) - V_0^{(s)}(x) = -\beta_0^{(s)}(x) + \int_0^1 \left( \frac{\partial^s G_1(x, \xi)}{\partial x^s} Q_0(\xi) - \frac{\partial^s G_2(x, \xi)}{\partial x^s} C_0(x) \right) (F^0(\xi) - F_0(\xi)) d\xi \geq 0.$$

Крім того, з (25) випливає, що  $W_1^{(s)}(x) \geq 0$ ,  $s = 0, 1$ , тобто виконуються нерівності

$$V_0^{(s)}(x) \leq V_1^{(s)}(x) \leq Z_1^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x), \quad s = 0, 1, \quad x \in [0, 1],$$

а це означає, що функції  $Z_1$  та  $V_1$  містяться у множині  $\langle V_0, Z_0 \rangle$ .

Якщо елементи матриць  $R_0, D_0$ , які задовольняють умови (14), вибрати таким чином, щоб при  $x \in [0, 1]$  виконувались нерівності

$$Z_0^{(s)}(x) - Z_1^{(s)}(x) - R_0 W_0^{(s)}(x) \geq 0, \quad V_0^{(s)}(x) - V_1^{(s)}(x) + D_0 W_0^{(s)}(x) \leq 0,$$

то для всіх  $x \in [0, 1]$

$$F^0(x) - F^1(x) \geq 0, \quad F_0(x) - F_1(x) \leq 0.$$

Отже, вибираючи елементи матриць  $C_0(\cdot)$  та  $Q_0(\cdot)$  так, щоб при  $V, Z \in \langle V_0, Z_0 \rangle$  виконувались умови

$$\bar{F}^0(x) - F^1(x) \geq 0, \quad \bar{F}_0(x) - F_1(x) \leq 0,$$

із (26) при  $p = 0$  одержуємо

$$\alpha_1^{(s)}(x) \geq 0, \quad \beta_1^{(s)}(x) \leq 0, \quad x \in [0, 1], \quad s = 0, 1.$$

Беручи вектор-функції  $Z_1(\cdot)$  та  $V_1(\cdot)$  за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, методом математичної індукції легко показати, що якщо на кожному кроці ітераційного процесу (15) елементи матриць  $R_p, D_p$  та матриць-функцій  $C_p(\cdot), Q_p(\cdot)$  вибирати таким чином, щоб при  $V, Z \in \langle V_0, Z_0 \rangle$  виконувались умови

$$\begin{aligned} Z_p^{(s)}(x) - Z_{p+1}^{(s)}(x) - R_p W_p^{(s)}(x) &\geq 0, \\ V_p^{(s)}(x) - V_{p+1}^{(s)}(x) + D_p W_p^{(s)}(x) &\leq 0, \\ F^p(x) - F^{p+1}(x) - C_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) &\geq 0, \\ F_p(x) - F_{p+1}(x) + Q_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) &\leq 0, \end{aligned} \tag{27}$$

то при довільних  $x \in [0, 1], p \in \mathbb{N}$  та  $s = 0, 1$  мають місце нерівності

$$\begin{aligned} V_p^{(s)}(x) \leq V_{p+1}^{(s)}(x) \leq Z_{p+1}^{(s)}(x) \leq Z_p^{(s)}(x), \\ \alpha_{p+1}^{(s)}(x) \geq 0, \quad \beta_{p+1}^{(s)}(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Встановимо достатню умову збіжності послідовностей вектор-функцій  $\{Z_p(\cdot)\}_{p=0}^\infty$  та  $\{V_p(\cdot)\}_{p=0}^\infty$  до єдиного у просторі  $C^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$  розв'язку рівняння (3). Нехай

$$\begin{aligned} q &= \sup_{p \geq 0} \sup_{x \in [0, 1]} \|E - C_p(x) - Q_p(x)\|, \\ d &= \sup_{x \in [0, 1]} \max \{\|W_0(x)\|, \|W_0'(x)\|\}, \quad \|L\| < M, \\ \nu &= \sup_{p \geq 0} \|E - R_p - D_p\|. \end{aligned}$$

Тоді з (25) методом математичної індукції одержуємо оцінку

$$\sup_{x \in [0, 1]} \max \{\|W_p(x)\|, \|W_p'(x)\|\} \leq (q\nu M \tau_1)^p d,$$

де

$$\tau_1 = \left\| \left( \delta_{i,j} \left( 1 + \rho_i^{-1} \left( \alpha_{i,2} y_{i,0} - \frac{1}{2} \beta_{i,1} \right) \right) \right)_{i,j=1}^n \right\|.$$

Якщо

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_1}, \quad (29)$$

то з останніх оцінок і нерівностей (28) випливає, що

$$V_p^{(s)}(x) \leq V_{p+1}^{(s)}(x) \leq Y^{(s)}(x) \leq Z_{p+1}^{(s)}(x) \leq Z_p^{(s)}(x), \quad s = 0, 1, \quad x \in [0, 1], \quad (30)$$

де  $Y(\cdot)$  — єдиний розв'язок рівняння (3) (єдиність доводиться методом від супротивного).

**Зауваження 1.** Чим більше елементів матриць  $R_p$ ,  $D_p$ ,  $C_p(\cdot)$ ,  $Q_p(\cdot)$  є відмінними від нуля, тим збіжність ітераційного процесу (15) буде швидшою.

Перейдемо до рівняння (4). При виконанні умов (11) маємо  $N_3 \geq \Theta$ ,  $N_2 \leq \Theta$  ( $N_3 \leq \Theta$ ,  $N_2 \geq \Theta$ ) при  $A_2 \leq \Theta$  ( $A_2 \geq \Theta$ ). Тоді двосторонні наближення до шуканого параметра  $\lambda$  будемо такими чином:

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int_0^1 [N_3 \xi F^p(\xi) + N_2 F_p(\xi)] d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int_0^1 [N_3 \xi F_p(\xi) + N_2 F^p(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (31)$$

Беручи до уваги нерівності (10), (30) та умову (11), одержуємо

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ - \lambda &= \int_0^1 [N_3 \xi (F^p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi))) + N_2 (F_p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi)))] d\xi, \\ \lambda_p^- - \lambda &= \int_0^1 [N_3 \xi (F_p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi))) + N_2 (F^p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi)))] d\xi, \end{aligned}$$

до того ж у випадку, коли  $A_2 \leq \Theta$  ( $A_2 \geq \Theta$ ), виконуються нерівності

$$\lambda_p^- \leq \lambda \leq \lambda_p^+ \quad (\text{відповідно} \quad \lambda_p^- \leq \lambda \leq \lambda_p^+), \quad p = 0, 1, \dots \quad (32)$$

Якщо  $\{\lambda_p^-, \lambda_p^+\} \subset [\lambda_1, \lambda_2]$ , то їх можна вважати за  $p$ -те двостороннє наближення до параметра  $\lambda$ , який визначається формулою (4).

**Зауваження 2.** Вектор-функції  $Z_{p+1}(\cdot)$  та  $V_{p+1}(\cdot)$ , побудовані згідно з правилами (13)–(21), (27), не задовольняють всі крайові умови (2), але функція  $\tilde{Y}_{p+1} = \frac{1}{2}(Z_{p+1} + V_{p+1})$  задовольняє всі крайові умови (2) і її разом зі значенням параметра  $\lambda_{p+1} = \frac{1}{2}(\lambda_{p+1}^+ + \lambda_{p+1}^-)$  можна брати за  $(p+1)$ -ше наближення до розв'язку крайової задачі (1).

Таким чином, справедливою є наступна теорема.

**Теорема 1.** Нехай існують вектор-функції нульового наближення  $Z_0$  та  $V_0$ , які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай  $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$  та виконуються умови (11) і (29).

Тоді  $p$ -м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара  $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$ , де

$$\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-), \quad (33)$$

$$\tilde{Y}_p = \frac{1}{2}(Z_p + V_p), \quad (34)$$

а вектор-функції  $Z_p$  та  $V_p$  є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (13)–(21), (27) і задовольняють нерівності (30). Пара  $\lambda_p^-, \lambda_p^+$  при цьому є  $p$ -м двостороннім наближенням до шуканого параметра  $\lambda$ , яке визначається згідно з (31), і виконуються нерівності (32).

6. Нехай справджуються співвідношення

$$E + B_2 A_2^{-1} \leq \Theta, \quad K_1 > \Theta. \quad (35)$$

Тоді  $B_1(A_2 \tilde{Y}_0)^{-1} > \Theta$  і  $A \geq \Theta, B > \Theta$ . У цьому випадку функцію Гріна (5) подамо у вигляді (12), де

$$G_1(x, \xi) = (A\xi + B)x, \quad \xi \in [0, 1], \quad (36)$$

$$G_2(x, \xi) = \begin{cases} -E\xi, & \xi \in [0, x], \\ -Ex, & \xi \in (x, 1]. \end{cases}$$

Із формул (36) очевидно, що  $\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_1(x, \xi) \geq \Theta$  і  $\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_2(x, \xi) \leq \Theta$  при  $s = 0, 1$  та  $(x, \xi) \in [0, 1]^2$ .

Побудуємо послідовності вектор-функцій  $\{Z_p(\cdot)\}_{p=0}^\infty$  та  $\{V_p(\cdot)\}_{p=0}^\infty$  за формулами (15)–(19). При цьому вектор-функції нульового наближення  $Z_0, V_0$  вибираємо таким чином, щоб виконувались умови (21).

У даному випадку має місце оцінка

$$\sup_{x \in [0, 1]} \max \{ \|W_p(x)\|, \|W_p'(x)\| \} \leq (q\nu M \tau_2)^p d,$$

де

$$\tau_2 = \left\| \left( \delta_{i,j} \frac{\frac{1}{2}\beta_{i,1} + \beta_{i,2}y_{i,0}}{\rho_i} \right)_{i,j=1}^n \right\|.$$

Якщо

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_2}, \quad (37)$$

то побудовані за формулами (19) – (21), (27) і (36) послідовності вектор-функцій  $\{Z_p\}_{p=0}^{\infty}$  та  $\{V_p\}_{p=0}^{\infty}$  збігаються до єдиного у просторі  $C^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$  розв'язку рівняння (3) і задовольняють нерівності (30).

Оскільки за умов (35) маємо  $N_2 \geq \Theta$  ( $N_2 \leq \Theta$ ),  $N_3 \geq \Theta$  ( $N_3 \leq \Theta$ ) при  $A_2 \leq \Theta$  ( $A_2 \geq \Theta$ ), то двосторонні наближення до шуканого параметра  $\lambda$ , який визначається згідно з (4), знаходимо за формулами

$$\lambda_p^+ = N_1 + \int_0^1 (N_3\xi + N_2) F^p(\xi) d\xi, \quad (38)$$

$$\lambda_p^- = N_1 + \int_0^1 (N_3\xi + N_2) F_p(\xi) d\xi,$$

при цьому мають місце нерівності (32).

**Теорема 2.** *Нехай існують вектор-функції нульового наближення  $Z_0$  та  $V_0$ , які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай  $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$  та виконуються умови (35) і (37).*

*Тоді  $p$ -м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара  $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$ , де  $\lambda_p$  та  $\tilde{Y}_p$  визначаються формулами (33), (34). При цьому вектор-функції  $Z_p$  та  $V_p$  є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (19) – (21), (27), (36) і задовольняють нерівності (30). Крім того,  $\lambda_p^-$ ,  $\lambda_p^+$  дають  $p$ -те двостороннє наближення до шуканого параметра  $\lambda$ , яке визначається згідно з (38), і виконуються співвідношення (32).*

## 7. Нехай

$$B_1(A_2\bar{Y}_0)^{-1} \geq \Theta, \quad K_1 < \Theta. \quad (39)$$

Тоді очевидно, що  $E + B_2A_2^{-1} < \Theta$ ,  $A \leq \Theta$ ,  $B < \Theta$ , і, отже, в цьому випадку функція Гріна (5) задовольняє умови

$$G(x, \xi) \leq \Theta, \quad \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) \leq \Theta \quad \text{для } (x, \xi) \in [0, 1]^2.$$

Побудуємо послідовності вектор-функцій  $\{Z_p\}_{p=0}^{\infty}$  та  $\{V_p\}_{p=0}^{\infty}$  за формулами

$$Z_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G(x, \xi) \bar{F}_p(\xi) d\xi, \quad (40)$$

$$V_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G(x, \xi) \bar{F}^p(\xi) d\xi,$$

де  $F^p$  та  $F_p$  визначено згідно з (19), а вектор-функції нульового наближення  $Z_0$  та  $V_0$  вибираємо так, щоб виконувались умови (6), (22). Методом математичної індукції легко показати, що має місце оцінка

$$\sup_{x \in [0,1]} \max \{ \|W_p(x)\|, \|W_p'(x)\| \} \leq (q\nu M \tau_3)^p d,$$

де

$$\tau_3 = \left\| \left( \delta_{i,j} \left( 1 - \frac{\alpha_{i,2} y_{i,0} + \frac{1}{2} \beta_{i,1}}{\rho_i} \right) \right)_{i,j=1}^n \right\|.$$

Якщо

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_3}, \quad (41)$$

то побудовані згідно з (40), (5), (19), (14) і (27) послідовності вектор-функцій  $\{Z_p\}_{p=0}^\infty$  та  $\{V_p\}_{p=0}^\infty$  збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3) і виконуються нерівності (30).

При виконанні умов (39)  $N_2 \leq \Theta$  ( $N_2 \geq \Theta$ ) і  $N_3 \leq \Theta$  ( $N_3 \geq \Theta$ ), якщо  $A_2 \leq \Theta$  ( $A_2 \geq \Theta$ ). Тоді двосторонні наближення до шуканого параметра  $\lambda$  будуємо за формулами

$$\lambda_p^+ = N_1 + \int_0^1 [N_3 \xi + N_2] F_p(\xi) d\xi, \quad (42)$$

$$\lambda_p^- = N_1 + \int_0^1 [N_3 \xi + N_2] F^p(\xi) d\xi,$$

де  $F_p, F^p$  визначаються згідно з (19), і виконуються нерівності (32).

**Теорема 3.** Нехай існують вектор-функції нульового наближення  $Z_0$  та  $V_0$ , які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай  $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$  та виконуються умови (39) і (41).

Тоді  $p$ -м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара  $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$ , де  $\lambda_p$  та  $\tilde{Y}_p$  визначаються формулами (33), (34), а вектор-функції  $Z_p$  та  $V_p$  є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (40), (5), (19), (14), (27) та задовольняють нерівності (30). Пара  $\lambda_p^-, \lambda_p^+$  при цьому є  $p$ -м двостороннім наближенням до шуканого параметра  $\lambda$ , яке визначається згідно з (31), і виконуються нерівності (32).

**8.** Нехай

$$E + B_2 A_2^{-1} \geq \Theta, \quad K_1 < \Theta, \quad (43)$$

тоді  $B_1 (A_2 \bar{Y}_0)^{-1} < \Theta$ ,  $A > \Theta$ ,  $B < \Theta$ . В цьому випадку функцію Гріна (5) лінійної частини задачі (1), (2) подамо у вигляді (12), де

$$G_1(x, \xi) = Ax\xi, \quad \xi \in [0, 1],$$

$$G_2(x, \xi) = \begin{cases} -E\xi + Bx, & \xi \in [0, x], \\ -Ex + Bx, & \xi \in (x, 1]. \end{cases}$$

При цьому  $\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_1(x, \xi) \geq \Theta$  та  $\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_2(x, \xi) \leq \Theta$  для  $s = 0, 1$  і  $(x, \xi) \in [0, 1]^2$ .

У даному випадку двосторонні наближення до розв'язку рівняння (3) будемо згідно з (19), (15), (27), де за нульове наближення вибираємо пару довільних вектор-функцій  $Z_0, V_0$ , з простору  $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ , які задовольняють умови (6), (22).

За прийнятих умов справедливою є оцінка

$$\sup_{x \in [0, 1]} \max \{ \|W_p(x)\|, \|W'_p(x)\| \} \leq (q\nu M \tau_4)^p d,$$

де

$$\tau_4 = \max \left\{ \left\| \frac{1}{2} \left( \delta_{i,j} \frac{3\beta_{i,1} + 2\beta_{i,2} y_{i,0}}{2\rho_i} \right)^2 \right\|, \left\| \left( \delta_{i,j} \frac{2\beta_{i,1} + (\beta_{i,2} - \alpha_{i,2}) y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\| \right\}.$$

Якщо справджується умова

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_4}, \tag{44}$$

то послідовності вектор-функцій  $\{Z_p\}_{p=0}^\infty$  та  $\{V_p\}_{p=0}^\infty$ , побудовані за формулами (19), (15), (27), збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3) і мають місце нерівності (30).

При виконанні умов (43) маємо  $N_2 \geq \Theta$  ( $N_2 \leq \Theta$ ) і  $N_3 \leq \Theta$  ( $N_3 \geq \Theta$ ), якщо  $A_2 \leq \Theta$  ( $A_2 \geq \Theta$ ). Отже, двосторонні наближення до шуканого параметра  $\lambda$ , який визначається згідно з (4), будемо за формулами

$$\lambda_p^+ = N_1 + \int_0^1 [N_3 \xi F_p(\xi) + N_2 F^p(\xi)] d\xi,$$

$$\lambda_p^- = N_1 + \int_0^1 [N_3 \xi F^p(\xi) + N_2 F_p(\xi)] d\xi,$$

при цьому виконуються нерівності (32).

**Теорема 4.** *Нехай існують вектор-функції нульового наближення  $Z_0$  та  $V_0$ , які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай  $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$  та виконуються умови (43) і (44).*

*Тоді  $p$ -м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара  $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$ , де  $\lambda_p$  та  $\tilde{Y}_p$  визначаються формулами (33), (34), а вектор-функції  $Z_p$  та  $V_p$  є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (19), (15), (27) та задовольняють нерівності (30). Пара  $\lambda_p^-, \lambda_p^+$  при цьому є  $p$ -м двостороннім наближенням до шуканого параметра  $\lambda$ , яке визначається згідно з (45), і виконуються нерівності (32).*

Аналогічно будуються модифікації двостороннього методу наближеного інтегрування задачі (1), (2) і у випадку виконання умов, відмінних від умов (11), (35), (39) і (43). Для ілюстрації наведемо приклад.

**9. Приклад.** У просторі функцій  $C^2([0, 1], \mathbb{R})$  будемо шукати розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$y_1''(x) = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi x}{6} (y_1'(x))^3 - \frac{1}{3} y_2(x),$$

$$y_2''(x) = \frac{x}{5} y_1(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 y_2(x) - \frac{x}{5} (1+x), \quad x \in (0, 1),$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1(0) - 0, 1 y_1(1) &= -0, 6, \\ 0, 1 y_1'(0) - 0, 5 y_1'(1) &= \lambda_1, \\ y_1(0) &= 1, \\ \lambda_2 y_2(0) - 0, 2 y_2(1) &= 0, 227, \\ 0, 3 y_2'(0) - \frac{24}{5\pi} y_2'(1) &= \lambda_2, \\ y_2(0) &= 1, \end{aligned}$$

та визначимо значення параметрів  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\lambda_i \in [-1, 1]$ .

У даному випадку  $E + B_2 A_2^{-1} \leq \Theta$ ,  $B_1 (A_2 \bar{Y}_0) \leq \Theta$ , де

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0, 1 & 0 \\ 0 & -0, 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -0, 5 & 0 \\ 0 & -24/5\pi \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0, 1 & 0 \\ 0 & 0, 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай  $R_p \equiv \Theta$ ,  $D_p \equiv \Theta$  та  $C_p(x) \equiv \Theta$ ,  $Q_p(x) \equiv \Theta$ . За нульове наближення вибираємо функції  $Z_0 = (z_{0i})_{i=1}^2$ ,  $V_0 = (v_{0i})_{i=1}^2$ , де

$$\begin{aligned} z_{01}(x) &= 1 + 1, 58x - 0, 2x^2, & v_{01}(x) &= 1 - 0, 16x + 0, 5x^2, \\ z_{02}(x) &= 1 + 0, 188x - 0, 2x^2, & v_{02}(x) &= 1 - 0, 447x + 0, 05x^2, \end{aligned}$$

які задовольняють умови (6), (22). У даному випадку для функцій  $F^0 = (f^{0i})_{i=1}^2$  та  $F_0 = (f_{0i})_{i=1}^2$ , що визначаються формулами (19), маємо рівності

$$\begin{aligned} f^{01}(x) &= \frac{1}{3} \cos \left(\frac{\pi x}{6}\right) (z'_{01}(x))^3 - \frac{1}{3} v_{02}(x), \\ f^{02}(x) &= \frac{x}{5} z_{01}(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 v_{02}(x) - \frac{x}{5} (1+x), \\ f_{01}(x) &= \frac{1}{3} \cos \left(\frac{\pi x}{6}\right) (v'_{01}(x))^3 - \frac{1}{3} z_{02}(x), \\ f_{02}(x) &= \frac{x}{5} v_{01}(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 z_{02}(x) - \frac{x}{5} (1+x). \end{aligned}$$

Наступні наближення  $Z_1 = (z_{1i})_{i=1}^2$ ,  $V_1 = (v_{1i})_{i=1}^2$  будемо за формулами

$$\begin{aligned} z_{11}(x) &= 1 + x + \int_0^1 0,2x\xi f^{01}(\xi)d\xi - \int_0^x (\xi + 0,2x)f_{01}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,2xf_{01}(\xi)d\xi = \\ &= 13,7675 + 27,9308x - 0,166x^2 - 1,067 \cdot 10^{-2}x^3 + 0,555 \cdot 10^{-2}x^4 + \\ &\quad + \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-12,7675 + 79,744x + 0,5837x^2 - 1,215x^3) + \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-202,9244 - 5,0772x + 13,933x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{11}(x) &= 1 + x + \int_0^1 0,2x\xi f_{01}(\xi)d\xi - \int_0^x (\xi + 0,2x)f^{01}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,2xf^{01}(\xi)d\xi = \\ &= -14,3849 + 2,1933x - 0,167x^2 + 2,489 \cdot 10^{-2}x^3 - 1,388 \cdot 10^{-3}x^4 + \\ &\quad + \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) (15,3849 - 1,466x - 0,9221x^2 + 0,077x^3) + \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-0,9026 + 7,0443x - 0,891x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{12}(x) &= 1 - 0,299x + \int_0^1 0,14x\xi f^{02}(\xi)d\xi - \\ &\quad - \int_0^x (\xi + 0,21x)f_{02}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,21xf_{02}(\xi)d\xi = \\ &= 1 + 9,4783 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 - 8,773 \cdot 10^{-3}x^3 - \\ &\quad - 1,4764 \cdot 10^{-2}x^4 + 5 \cdot 10^{-3}x^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{12}(x) &= 1 - 0,299x + \int_0^1 0,14x\xi f_{02}(\xi)d\xi - \\ &\quad - \int_0^x (\xi + 0,21x)f^{02}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,21xf^{02}(\xi)d\xi = \\ &= 1 - 9,5785 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 + 2,047 \cdot 10^{-2}x^3 + \\ &\quad + 8,5244 \cdot 10^{-3}x^4 - 2 \cdot 10^{-3}x^5. \end{aligned}$$

Для параметра  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^2$  визначаємо двосторонні наближення за формулами

$$\lambda_{1,1}^+ = -0,4 + \int_0^1 (-0,08\xi - 0,02)f_{1,1}(\xi)d\xi = -0,3867,$$

$$\lambda_{1,1}^- = -0,4 + \int_0^1 (-0,08\xi - 0,02)f^{1,1}(\xi)d\xi = -0,4166,$$

$$\lambda_{1,2}^+ = 0,367 + \int_0^1 (-0,172\xi - 0,042)f_{1,2}(\xi)d\xi = 0,4068,$$

$$\lambda_{1,2}^- = 0,367 + \int_0^1 (-0,172\xi - 0,042)f^{1,2}(\xi)d\xi = 0,395.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{11}(x) &= \frac{1}{2}(z_{11}(x) + v_{11}(x)) = -0,3087 + 15,062x - 0,166x^2 + \\ &+ 0,711 \cdot 10^{-2}x^3 - 2,085 \cdot 10^{-3}x^4 + \\ &+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)(1,3087 + 39,139x - 0,1692x^2 + 0,569x^3) + \\ &+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)(-101,9135 + 0,9835x + 6,521x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{12}(x) &= \frac{1}{2}(z_{12}(x) + v_{12}(x)) = \\ &= 1 - 5 \cdot 10^{-4}x - 0,1371x^2 + 5,8485 \cdot 10^{-3}x^3 - 3,1198 \cdot 10^{-3}x^4 + 1,5 \cdot 10^{-3}x^5 \end{aligned}$$

та

$$\tilde{\lambda}_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_{11}^+ + \lambda_{11}^-) = -0,40166, \quad \tilde{\lambda}_{12} = \frac{1}{2}(\lambda_{12}^+ + \lambda_{12}^-) = 0,40093.$$

При цьому одержуємо

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |w_{01}(x)| &\leq 1,04, & \sup_{x \in [0,1]} |w_{11}(x)| &\leq 0,637, \\ \sup_{x \in [0,1]} |w_{02}(x)| &\leq 0,385, & \sup_{x \in [0,1]} |w_{12}(x)| &\leq 0,145, \end{aligned}$$

та  $|\lambda_{11}^+ - \lambda_{11}^-| = 2,99 \cdot 10^{-2}$ ,  $|\lambda_{12}^+ - \lambda_{12}^-| = 1,18 \cdot 10^{-2}$ .

Розглянемо випадок, коли  $R_p \equiv \Theta$ ,  $D_p \equiv \Theta$ , а  $C_p(x)$ ,  $Q_p(x)$  — матриці-функції, елементами яких є лінійні невід'ємні функції:  $c_{01}(x) = 0,2x$ ,  $c_{02}(x) = 0,15x$ ,  $q_{01}(x) = 0,01(1-x)$ ,

$q_{02}(x) = 0,05(1-x)$ . Тоді

$$\begin{aligned}\bar{f}^{0i}(x) &= f^{0i}(x) - c_{0i}(x)(f^{0i}(x) - f_{0i}(x)), \\ \bar{f}_{0i}(x) &= f_{0i}(x) + q_{0i}(x)(f^{0i}(x) - f_{0i}(x)), \quad i = 1, 2, \quad x \in [0, 1],\end{aligned}$$

і наступні наближення визначаємо за формулами

$$\begin{aligned}\hat{z}_{11}(x) &= 1 + x + \int_0^1 0,2x\xi \bar{f}^{01}(\xi) d\xi - \int_0^x (\xi + 0,2x) \bar{f}_{01}(\xi) d\xi - \int_x^1 1,2x \bar{f}_{01}(\xi) d\xi = \\ &= 33,3191 + 27,3850x - 0,167x^2 - 1,0092 \cdot 10^{-2}x^3 + \\ &+ 0,53097 \cdot 10^{-2}x^4 + 0,0417 \cdot 10^{-3}x^5 + \\ &+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-32,3191 + 77,9756x + 2,2298x^2 - 1,1878x^3 - 1,2936 \cdot 10^{-2}x^4) + \\ &+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-198,55 - 12,7085x + 13,611x^2 + 0,1976x^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{11}(x) &= 1 + x + \int_0^1 0,2x\xi \bar{f}_{01}(\xi) d\xi - \int_0^x (\xi + 0,2x) \bar{f}^{01}(\xi) d\xi - \int_x^1 1,2x \bar{f}^{01}(\xi) d\xi = \\ &= 382,299 - 3,3450x - 0,1666x^2 + 2,4833 \cdot 10^{-2}x^3 - \\ &- 0,4917 \cdot 10^{-2}x^4 + 8,333 \cdot 10^{-4}x^5 + \\ &+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-381,299 - 20,2765x + 32,3028x^2 + 0,3789x^3 - 0,2587x^4) + \\ &+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) (45,7729 - 160,263x - 4,3422x^2 + 3,9529x^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_{12}(x) &= 1 - 0,299x + \int_0^1 0,14x\xi \bar{f}^{02}(\xi) d\xi - \int_0^x (\xi + 0,21x) \bar{f}_{02}(\xi) d\xi - \int_x^1 1,21x \bar{f}_{02}(\xi) d\xi = \\ &= 1 + 8,977 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 - 7,1395 \cdot 10^{-3}x^3 - \\ &- 1,4325 \cdot 10^{-2}x^4 + 3,9513 \cdot 10^{-3}x^5 + 2,33 \cdot 10^{-4}x^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{12}(x) &= 1 - 0,299x + \int_0^1 0,14x\xi \bar{f}_{02}(\xi) d\xi - \int_0^x (\xi + 0,21x) \bar{f}^{02}(\xi) d\xi - \int_x^1 1,21x \bar{f}^{02}(\xi) d\xi = \\ &= 1 - 7,727 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 + 2,042 \cdot 10^{-2}x^3 + \\ &+ 6,348 \cdot 10^{-3}x^4 - 4,096 \cdot 10^{-3}x^5 + 7,0 \cdot 10^{-4}x^6\end{aligned}$$

та

$$\hat{\lambda}_{1,1}^+ = -0,387, \quad \hat{\lambda}_{1,1}^- = -0,4154, \quad \hat{\lambda}_{1,2}^+ = 0,4059, \quad \hat{\lambda}_{1,2}^- = 0,3955.$$

При цьому

$$\sup_{x \in [0,1]} |\hat{w}_{11}(x)| \leq 0,5632, \quad \sup_{x \in [0,1]} |\hat{w}_{12}(x)| \leq 0,1264,$$

а отже, збіжність ітераційного методу покращується у випадку відмінності від нуля елементів матриць  $C_p(x)$ ,  $Q_p(x)$ . За наближений розв'язок розглядуваної задачі приймаємо

$$\begin{aligned} \hat{y}_{11}(x) &= \frac{1}{2}(\hat{z}_{11}(x) + \hat{v}_{11}(x)) = \\ &= 207,809 + 12,02x - 0,167x^2 + 0,7371 \cdot 10^{-2}x^3 + \\ &\quad + 0,1965 \cdot 10^{-3}x^4 + 0,4375 \cdot 10^{-3}x^5 + \\ &\quad + \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-206,809 + 28,8496x + 17,2663x^2 - 0,4044x^3 - 0,1358x^4) + \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) (-76,3879 - 86,4858x + 4,6344x^2 + 2,075x^3), \\ \hat{y}_{12}(x) &= \frac{1}{2}(\hat{z}_{12}(x) + \hat{v}_{12}(x)) = 1 + 6,2492 \cdot 10^{-3}x - 0,1371x^2 + \\ &\quad + 6,6426 \cdot 10^{-3}x^3 - 3,988 \cdot 10^{-3}x^4 - 7,2305 \cdot 10^{-5}x^5 + 4,67 \cdot 10^{-4}x^6, \\ \hat{\lambda}_{11} &= \frac{1}{2}(\lambda_{11}^+ + \lambda_{11}^-) = -0,40121, \quad \hat{\lambda}_{12} = \frac{1}{2}(\lambda_{12}^+ + \lambda_{12}^-) = 0,40074. \end{aligned}$$

Відмітимо, що

$$\sup_{x \in [0,1]} |y_1(x) - \hat{y}_{11}| \leq 4,4 \cdot 10^{-2}, \quad \sup_{x \in [0,1]} |y_2(x) - \hat{y}_{12}| \leq 6,4 \cdot 10^{-3}$$

та  $|\lambda_1 - \hat{\lambda}_{11}| = 1,2 \cdot 10^{-3}$ ,  $|\lambda_2 - \hat{\lambda}_{12}| = 7,4 \cdot 10^{-4}$ , де  $(y_i, \lambda_i)_{i=1}^2$  — точний розв'язок розглядуваної крайової задачі.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
3. *Маринец В. В.* Об одном подходе построения итерационных методов приближенного интегрирования краевых задач теории пластин и оболочек // Мат. VIII Всесоюз. конф. „Численные методы решения задач теории упругости и пластичности“. — Новосибирск, 1984. — С. 194–198.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунцицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

Одержано 11.06.06,  
після доопрацювання — 20.03.08