Нелінійні коливання 1 • 1998

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ*

Ю.А. Митропольский

Ин-т математики НАН Украины,
Украина, 252601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: yumitro@imc.freenet.kiev.ua

The review of results concerning the application of Krylov – Bogoliubov – Mitropolsky method for studying some nonlinear partial differential equations describing wave processes is given.

Наведено огляд результатів, одержаних при застосуванні асимптотичного методу Крилова – Боголюбова – Митропольського (КБМ) для дослідження деяких нелінійних рівнянь з частинними похідними, які описують хвильові процеси.

Как известно [1], асимптотические методы нелинейной механики с успехом применяются для построения приближенных решений нелинейных уравнений в частных производных, близких к линейным гиперболического типа. Это дает возможность решить многие задачи о колебаниях в системах с распределенными параметрами (колебания стержней, балок, пластин, валов и т.п.). Для решения указанных задач обычно на основе метода Фурье разделения переменных в линейной части уравнения, а также принципа одночастотности задача сводилась к построению асимптотического приближения для нелинейного (с малой нелинейностью) обыкновенного уравнения второго порядка.

В настоящем обзоре приведены некоторые общие соображения, относящиеся к применению метода КБМ для уравнений, описывающих задачу о колебаниях ограниченных объемов [2]

$$\operatorname{div}\,[k(t,\vec{r})\,\operatorname{grad} u] - q(t,\vec{r})u = \rho(t,\vec{r})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

В случае переменных коэффициентов k, q, ρ, зависящих от пространственных координат $\vec{r}$ и времени t, система (1) описывает процессы колебаний в неоднородных средах. В частности, к уравнению вида (1) приводятся задачи о колебаниях мембран, об акустических колебаниях газа, электромагнитных процессах в непроводящих средах, а также связанные с генерацией электромагнитных колебаний в замкнутых полых резонаторах и др.

В большинстве случаев исследование такого класса уравнений проводится преимущественно на основе линейного подхода. Вместе с тем учет даже малой нелинейности, возникающей от воздействия различных факторов, может дать возможность обнаружить ряд новых специфических особенностей рассматриваемого колебательного процесса.

* Выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект № 1.4/49).

Ниже приведены частные примеры уравнений типа (1), а также основные моменты построения для них приближенного решения.

В конце обзора изложены также некоторые соображения о рассмотрении дифференциальных уравнений, описывающих волновые процессы в нелинейных многомерных системах.

В качестве первого примера рассмотрим распространение нелинейных волн в системах со слабыми неоднородностями геометрического и временного типа для одномерного случая [3].

Будем рассматривать следующее нелинейное уравнение с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2(\varepsilon x, \varepsilon t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2(\varepsilon x, \varepsilon t)u = \varepsilon f\left(\varepsilon x, \varepsilon t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{2}$$

где ε — положительный малый параметр, $f\left(\varepsilon x, \varepsilon t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — функция, удовлетворяющая всем необходимым для построения асимптотического приближения условиям.

Введя обозначения $\varepsilon x = \varkappa$, $\varepsilon t = \tau$, $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$, уравнение (1) можем записать в сокращенном виде

$$u_{tt} - \alpha^2(\varkappa, \tau)u_{xx} + \beta^2(\varkappa, \tau)u = \varepsilon f(\varkappa, \tau, u, u_t, u_x). \tag{3}$$

При $\varepsilon = 0$ и $\varkappa$, τ, рассматриваемых как постоянные параметры, уравнение (3) является общеизвестным классическим уравнением Клейна – Гордона

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u = 0, \tag{4}$$

где $\alpha = \alpha(\varkappa, \tau) = \text{const}$, $\beta = \beta(\varkappa, \tau) = \text{const}$.

Уравнение (4) в дальнейшем будем рассматривать как невозмущенное уравнение, соответствующее возмущенному уравнению (3).

Как известно, решение уравнения (3) имеет вид

$$u(a, \psi) = a\cos\psi, \tag{5}$$

где $\psi = kx - \omega t + \varphi$, a и φ — постоянные, $\psi_x = k$, $\psi_t = -\omega$,

$$\omega^2 = \alpha^2 k^2 + \beta^2 \tag{6}$$

— дисперсионное соотношение.

При $\varepsilon \neq 0$, $\varkappa = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$ асимптотическое приближенное решение возмущенного уравнения (3) будем искать, согласно схеме асимптотического метода КБМ [4] (см. также [5]), в виде ряда

$$u(\varkappa, \tau, a, \psi) = u_0(a, \psi) + \varepsilon u_1(\varkappa, \tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\varkappa, \tau, a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots, \tag{7}$$

в котором $u_0(a, \psi) = a\cos\psi$, искомые функции $u_1(\varkappa, \tau, a, \psi)$, $u_2(\varkappa, \tau, a, \psi)$,... периодические по ψ с периодом 2π, $\psi = kx - \omega t + \varphi$, $\varepsilon \neq 0$, $\varkappa = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$, а a и φ как функции времени t и пространственной координаты x должны быть определены из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \varepsilon A_1(\tau,a)+\varepsilon^2 A_2(\tau,a)+\varepsilon^3\ldots, \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= \varepsilon B_1(\varkappa,a)+\varepsilon^2 B_2(\varkappa,a)+\varepsilon^3\ldots, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \varepsilon C_1(\tau,a)+\varepsilon^2 C_2(\tau,a)+\varepsilon^3\ldots, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varepsilon D_1(\varkappa,a)+\varepsilon^2 D_2(\varkappa,a)+\varepsilon^3\ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

где $A_i(\tau,a)$, $B_i(\varkappa,a)$, $C_i(\tau,a)$, $D_i(\varkappa,a)$, $i=1,2,\ldots$, — функции, подлежащие определению согласно общей схеме метода КБМ, $\tau=\varepsilon t$, $\varkappa=\varepsilon x$.

Очевидно, что два последних уравнения системы (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\omega+\varepsilon C_1(\tau,a)+\varepsilon^2 C_2(\tau,a)+\varepsilon^3\ldots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= k+\varepsilon D_1(\varkappa,a)+\varepsilon^2 D_2(\varkappa,a)+\varepsilon^3\ldots. \end{aligned} \tag{9}$$

Далее поступаем согласно известным правилам метода КБМ. Подставляем правую часть ряда (7) в уравнение (3). Дифференцируем слагаемые этого ряда по t и x, учитывая при этом уравнения (8) и то, что k и ω должны быть также медленно меняющимися функциями по x и t. В результате получаем сложное выражение (здесь его не приводим), которое располагаем по степеням малого параметра ε.

Правую часть уравнения (3) после подстановки в нее значений u, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, найденных после дифференцирования ряда (7) по t и x с учетом системы уравнений (8), располагаем также в ряд по возрастающим степеням малого параметра ε.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в полученных выше выражениях, находим уравнения для определения функций $u_1(\varkappa,\tau,a,\psi)$, $u_2(\varkappa,\tau,a,\psi),\ldots$, а также условия разрешимости этих уравнений (условия, обеспечивающие отсутствие секулярных членов у функций $u_1(\varkappa,\tau,a,\psi)$, $u_2(\varkappa,\tau,a,\psi),\ldots$), позволяющие определить правые части системы уравнений (8): $A_i(\tau,a)$, $B_i(\varkappa,a)$, $C_i(\tau,a)$, $D_i(\varkappa,a)$, $i=1,2,\ldots$.

Таким образом (более подробно см. [3]), в первом приближении получаем

$$u(\varkappa,\tau,a,\psi)=u_0(a,\psi)=a\cos\psi \qquad (\psi=kx-\omega t+\varphi), \tag{10}$$

где a и φ должны быть определены как функции x и t из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial t}+\omega'\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\varepsilon}{2\omega}[f_{01}^{(2)}(\varkappa,\tau,a)-(\omega_t+\alpha^2(\varkappa,\tau)k_x)a], \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\omega'\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\varepsilon}{2\omega a}f_{01}^{(1)}(\varkappa,\tau,a). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\omega'=\dfrac{\alpha^2(\varkappa,\tau)k}{\omega}$ — групповая скорость, $f_{01}^{(2)}(\varkappa,\tau,a)$ и $f_{01}^{(1)}(\varkappa,\tau,a)$ — коэффициенты Фурье в разложении правой части уравнения (3).

При этом заметим, что при рассмотрении первого приближения (уравнения (11)) должно выполняться дисперсионное соотношение

$$\bar{\omega}^2 - \alpha^2(\varkappa, \tau)\bar{k}^2 - \beta^2(\varkappa, \tau) = 0 \tag{12}$$

и условие совместности

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

где $\bar{\omega} = \omega - \varphi_t$, $\bar{k} = k + \varphi_x$, взятые в первом приближении.

Приведенный метод также применим для построения приближенного асимптотического решения нелинейного уравнения типа уравнения Клейна – Гордона путем сочетания метода КБМ и применения периодических Ateb-функций. В качестве примера рассмотрим волновой процесс, описываемый возмущенным уравнением типа Клейна – Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u^{\nu+1} = \varepsilon f\left(\mu t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{14}$$

где α, β, ν, μ — постоянные, причем $\nu + 1 = (2m + 1)\ (2n + 1)^{-1}$, m, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $f\left(\mu t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — аналитическая, 2π-периодическая по μt функция, ε — малый положительный параметр.

Невозмущенное уравнение типа Клейна – Гордона (уравнение (14) при $\varepsilon = 0$), как это показано в работах [6, 7], имеет волновое решение. Действительно, пусть $u_0(a, \psi)$, $\psi = kx - \omega(a)t$, a и k — постоянные, $\omega(a)$ — некоторая функция a (вид которой будет установлен ниже), является решением невозмущенного уравнения (уравнения (14) при $\varepsilon = 0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u^{\nu+1} = 0. \tag{15}$$

Тогда для рассматриваемого решения $u_0(a, \psi)$, согласно уравнению (15), можем записать уравнение

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2}(\omega^2(a) - \alpha^2 k^2) + \beta u_0^{\nu+1} = 0, \tag{16}$$

которое в дальнейшем будем рассматривать при следующих начальных условиях:

$$u_0(a, \psi)\Big|_{\psi=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} = 0. \tag{17}$$

Проинтегрировав уравнение (16) при начальных условиях (17), получим

$$\psi = \left[\frac{(\nu + 2)(\omega^2(a) - \alpha^2 k^2)}{2\beta}\right]^{1/2} \int_0^{u_0} (a^{\nu+2} - \bar{u}_0^{\nu+2})^{-1/2} d\bar{u}_0. \tag{18}$$

Соотношение (18) в случае $\beta > 0$, как показано в работе [6], представляет решение уравнения (16) с помощью периодических Ateb-функций, а в случае $\beta < 0$ — решение уравнения (16) с помощью гиперболических Ateb-функций соответственно в виде (19*а*) и (19*б*):

$$u_0(a,\psi) = a \begin{cases} ca(\nu+1, 1, kx - \omega(a)t); & (19a) \\ cha(\nu+1, 1, kx - \omega(a)t); & (19б) \end{cases}$$

при этом решение в виде ($19a$) периодично по ψ с периодом

$$2\Pi_1 = 2\sqrt{\pi}\Gamma((\nu+2)^{-1})\Gamma^{-1}\Big(\frac{1}{2} + (\nu+2)^{-1}\Big), \tag{20}$$

а в виде (19б) является периодическим по ψ с периодом

$$2\Pi_2 = \sqrt{\pi}\Gamma(\nu(2(\nu+2))^{-1})\Gamma^{-1}((\nu+1) + (\nu+2)^{-1}) \tag{21}$$

только при $\nu > 0$.

Подставляя теперь ($19a$) или (19б) в уравнение (16), получаем дисперсионное соотношение для определения $\omega(a)$:

$$\omega^2(a) - \alpha^2 k^2 + (-1)^i \frac{\nu+2}{2}\beta a^\nu = 0, \tag{22}$$

где $i = 1$ в случае ($19a$) и $i = 2$ в случае (19б).

Для того чтобы получить 2π-периодические по ψ решения уравнения (16), необходимо в выражениях ($19a$) и (19б) ввести нормирующий множитель $l = \prod_i \pi^{-1}$, т. е. записать их в виде

$$u_0(a, \pi^{-1}\Pi\psi) = a \begin{cases} ca(\nu+1), 1, \pi^{-1}\Pi_1(kx - \omega(a)t), & (23a) \\ cha(\nu+1), 1, \pi^{-1}\Pi_2(kx - \omega(a)t). & (23б) \end{cases}$$

В этом случае дисперсионное соотношение определяется зависимостью

$$\omega^2(a) - \alpha^2 k^2 + (-1)^i \frac{\nu+2}{2}\beta(\pi\Pi_i^{-1})a^\nu = 0. \tag{24}$$

После этих предварительных замечаний не представляет затруднений согласно общему методу КБМ рассмотреть построение асимптотических приближений (при $\beta > 0$) как для автономного случая ($\mu = 0$), так и для неавтономного.

Подробные выкладки читатель может найти в работе [6]; здесь же мы приведем только некоторые формулы, характеризующие окончательный результат. Так, в автономном случае решение уравнения (14) ищем в виде асимптотического ряда

$$u(x,t) = u_0(a,\psi) + \varepsilon u_1(a, u_0) + \varepsilon^2 u_2(a, u_0) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{25}$$

в котором

$$u_1(a, u_0) = \int f^*(a, \bar{u}_0)\{\bar{u}_1(a, \bar{u}_0)\tilde{u}_1(a, u_0) - \bar{u}_1(a, u_0)\tilde{u}_1(a, \bar{u}_0)\} d\bar{u}_0, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} f^*(a, u_0) \;&=\; f\Big(u_0, -\omega(a)\frac{\partial u_0}{\partial\psi}, k\frac{\partial u_0}{\partial\psi}\Big) + \frac{1}{a}\lambda_0(a, u_0)\Big\{A_1(a)\Big(2\omega(a) + \frac{d\omega(a)}{da}\Big) - \\ &-\; \alpha^2 k B_1(a)\Big\} - \frac{\beta u_0^{\nu+1}}{\omega^2(a) - \alpha^2 k^2}\{2\omega(a)C_1(a) - \alpha^2 k D_1(a)\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь

$$\lambda_0(a, u_0) = \left[\frac{2\beta}{(\nu+2)(\omega^2(a) - \alpha^2 k^2)}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\right]^{1/2},$$

$$\bar{u}_0(a, u_0) = \left[\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\right]^{1/2},$$

$$\tilde{u}_1(a, u_0) = \bar{u}_1(a, u_0) \int \left[\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\right]^{1/2} du_0,$$

а функции $A_1(a)$, $B_1(a)$, $C_1(a)$ и $D_1(a)$, определяющие систему уравнений типа (8), в первом приближении удовлетворяют следующим соотношениям (обеспечивающим отсутствие секулярных членов в решении уравнения (14) в первом приближении):

$$A_1(a)\left(2\omega(a) + \frac{d\omega(a)}{da}\right) - \alpha^2 k B_1(a) = \frac{\nu+4}{4a\Pi_1} \oint f\left(u_0, -\omega(a)\frac{\partial u_0}{\partial \psi}, k\frac{\partial u_0}{\partial \psi}\right) du_0,$$

$$2C_1(a)\omega(a) - \alpha^2 k D_1(a) = \frac{(\nu+2)(\nu+4)}{8a^2\Pi_1} \oint f\left(u_0, -\omega_0(a)\frac{\partial u_0}{\partial \psi}, k\frac{\partial u_0}{\partial \psi}\right) u_0 \lambda_0^{-1}(a, u_0) du_0. \tag{28}$$

Рассматривая неавтономный случай (в первую очередь резонансный, когда $\omega(a) \approx \mu$), как и обычно, кроме того, что решение соответствующего уравнения следует искать в виде более сложного ряда, в уравнениях, определяющих амплитуду и фазу, необходимо учесть зависимость от разности фаз, что, как известно, значительно усложняет все выкладки. Эти выкладки мы здесь не приводим; читатель их может найти в работе [6], либо восстановить самостоятельно.

Многочисленные волновые процессы физики, гидродинамики, биофизики, как правило, моделируются многомерными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Одним из первых существенных шагов в применении идей и методов КБМ к решению указанных уравнений сделан в работе [1]. Однако эта монография посвящена, в основном, обобщению методов нелинейной механики на двумерные нелинейные уравнения в частных производных, близкие к уравнениям гиперболического типа.

Изложим, в общих чертах, некоторые идеи построения асимптотических решений для многомерных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих волновые процессы. Это удается сделать путем сочетания асимптотических методов [4], методов теории С. Ли [8] и группового анализа дифференциальных уравнений [9].

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о построении приближенных решений нелинейного многомерного волнового уравнения [10] на следующем конкретном уравнении:

$$\Box u + m^2 u + \varepsilon u^3 = 0, \quad \Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{29}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $x_0 \equiv t$, параметры $m^2 > 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Уравнение (29) встречается в теории нелинейных волн, квантовой механике и ряде других задач математической физики.

Для решения уравнения (29) сначала, используя симметрию его относительно группы Пуанкаре, находим новые переменные $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$, число которых на единицу меньше, чем число декартовых переменных $x = \{x_0,x_1,x_2,x_3\}$. Затем с помощью подстановки [9]

$$u = \varphi(\omega) \tag{30}$$

получаем из (29) редуцированное волновое уравнение относительно переменных ω_1, ω_2, ω_3. Полученное редуцированное уравнение приводим к двумерному уравнению, которое сводим к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Для многомерного волнового уравнения (29) все редуцированные уравнения имеют структуру

$$a_{22}(\omega)\frac{d^2\varphi(\omega)}{d\omega^2} + a_{12}(\omega)\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} + a_{00}(\omega)\varphi(\omega) + a_{01}(\omega)\varphi^3(\omega) = 0, \tag{31}$$

где $a_{22}(\omega)$, $a_{12}(\omega)$, $a_{00}(\omega)$, $a_{01}(\omega)$ — линейные функции ω, явный вид которых читатель может найти в работе [10].

Из всех редуцированных уравнений приведем в явном виде лишь несколько типичных:

$$1)\varphi'' - m^2\varphi - \varepsilon\varphi^3 = 0, \quad \varphi = \varphi(\omega_1), \tag{32}$$

где φ — неизвестная функция,

$$\omega_1 = \beta_1(\tilde{p}_\nu x^\nu + a_1) - \beta_2(\tilde{\alpha}_\nu x^\nu + a_2) - \beta_3(\tilde{\beta}_\nu x^\nu + a_3)+$$

$$+a\ln\{\alpha_1(\tilde{p}_\nu x^\nu + a_1) - \alpha_2(\tilde{\alpha}_\nu x^\nu + a_2) - \alpha_3(\tilde{\beta}_\nu x^\nu + a_3)\};$$

произвольные параметры α_μ, β_μ удовлетворяют условиям

$$\beta_\mu\beta^\mu = -1, \quad \alpha_\mu\alpha^\mu = \alpha_\mu\beta^\mu = 0, \quad \mu = 1,2,3;$$

$$2)a^2db\varphi'' - m^2 - \varepsilon\varphi^3 = 0, \quad \varphi = \varphi(\omega_2), \tag{33}$$

φ — неизвестная функция,

$$\omega_2 = -\frac{d_2}{2}\{\alpha_1(\tilde{p}_\nu x^\nu + a_1) - \alpha_2(\tilde{\alpha}_\nu x^\nu + a_2) - \alpha_3(\tilde{\beta}_\nu x^\nu + a_3)\}^2-$$

$$-d_2a\{\beta_1(\tilde{p}_\nu x^\nu + a_1) - \beta_2(\tilde{\alpha}_\nu x^\nu + a_2) - \beta_3(\tilde{\beta}_\nu x^\nu + a_3)\};$$

параметры α_μ, β_μ, d_2 удовлетворяют условиям

$$\alpha_\mu\alpha^\mu = \alpha_\mu\beta^\mu = 0, \ -\beta_\mu\beta^\mu = b = \mathrm{const} \neq 0,$$

$$\mu = 1,2,3; \ d_2^2 = d = \mathrm{const} \neq 0;$$

$$3)(2C_{23}\omega_3 + d)\varphi'' + 2C_{23}\varphi' - m^2\varphi - \varepsilon\varphi^3 = 0, \quad \varphi = \varphi(\omega_3), \tag{34}$$

φ — неизвестная функция,

$$\omega_3 = -\frac{C_{23}}{2}\{(\tilde{\gamma}_\nu x^\nu)^2 + (\tilde{\beta}_\nu x^\nu + \frac{1}{4}(\tilde{p}_\nu x^\nu + \tilde{\alpha}_\nu x^\nu)^2\}^{1/2}\} +$$

$$+ d_2\tilde{\gamma}_\nu x^\nu - d_3\{\tilde{\beta}_\nu x^\nu + \frac{1}{4}(\tilde{p}_\nu x^\nu + \tilde{\alpha}_\nu x^\nu)^2\},$$

d_2, d_3 удовлетворяют условию $d_2^2 + d_3^2 = d = \text{const} \neq 0$, C_{23} — произвольный параметр;

$$4) d\omega_4\varphi'' + 2d\varphi' + m^2\omega_4\varphi + \varepsilon\omega_4\varphi^3 = 0, \quad \varphi = \varphi(\omega_4), \tag{35}$$

φ — неизвестная функция,

$$\omega_4 = -d_3\{(\tilde{p}_\nu x^\nu)^2 - (\tilde{\alpha}_\nu x^\nu)^2 - (\tilde{\beta}_\nu x^\nu)^2\}^{1/2}, \quad d_3^2 = d = \text{const} \neq 0.$$

В уравнениях (32) – (35) $\tilde{\alpha}_\nu$, $\tilde{\beta}_\nu$, $\tilde{\gamma}_\nu$, $\tilde{p}_\nu$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{\alpha}_\nu\tilde{\alpha}^\nu = \tilde{\beta}_\nu\tilde{\beta}^\nu = \tilde{\gamma}_\nu\tilde{\gamma}^\nu = -1, \quad \tilde{p}_\nu\tilde{p}^\nu = 1,$$

$$\tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}^\nu = \tilde{\beta}_\nu\tilde{\gamma}^\nu = \tilde{\gamma}_\nu\tilde{p}^\nu = \tilde{p}_\nu\tilde{\alpha}^\nu = \tilde{\alpha}_\nu\tilde{\gamma}^\nu = \tilde{\beta}_\nu\tilde{p}^\nu, \ \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Мы привели окончательные выражения только для указанных выше четырех типичных редуцированных уравнений для того, чтобы обратить внимание читателя на чрезвычайно сложные и громоздкие выкладки, которые приходится произвести даже для такого, на первый взгляд, простого уравнения, как уравнение (29) с очень простой нелинейностью (εu^3).

Из формул (32) – (35) видно, что редуцированные уравнения представляют собой уравнения типа Дуффинга, Пенлеве, с постоянными или переменными коэффициентами. Для таких уравнений в ряде случаев можно с успехом применить асимптотические методы.

Не останавливаясь на применении к уравнениям (32) – (35) алгоритма построения асимптотических решений, приведем только одно из семейств решений уравнения (29) с точностью до величин порядка ε включительно (более подробно см. [10]):

$$\begin{aligned} u &= C_1\cos\frac{p}{\sqrt{A}}\omega + C_2\sin\frac{p}{\sqrt{A}}\omega + \varepsilon\Big\{C_3\cos\frac{p}{\sqrt{A}}\omega + C_4\sin\frac{p}{\sqrt{A}}\omega + \\ &+ \frac{1}{32}\frac{C_1}{p^2}(C_1^2 - 3C_2^2)\cos\frac{3p}{\sqrt{A}}\omega - \frac{1}{32}\frac{C_2}{p^2}(C_2^2 - 3C_1^2)\sin\frac{3p}{\sqrt{A}}\omega\Big\} + \varepsilon^2\ldots, \end{aligned} \tag{36}$$

где A, p и ω задаются выражениями, которые из-за сложности мы не приводим.

Заметим, что приведенный алгоритм редуцирования многомерного волнового уравнения с последующим применением асимптотических методов нелинейной механики может быть применен и для более сложных нелинейных систем уравнений в частных производных, описывающих многомерные волновые процессы с учетом нелинейности, внешних возмущающих сил, зависящих от времени, медленно меняющихся параметров.

1. *Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Высш. шк., 1976. – 589 с.

2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

3. *Митропольский Ю.А., Лимарченко О.С.* К вопросу об асимптотических приближениях для медленных волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах //Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 3. – С. 357–371.

4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.

5. *Митропольский Ю.А.* О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Брезертона //Укр. мат. журн. – 1958. – **50**, № 1. – С. 58–71.

6. *Митропольський Ю.О., Сокіл Б.І.* Про застосування Ateb-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна – Гордона //Там же. – 1998. – **50**, №5. – С. 665–670.

7. *Сокил Б.И.* Применение Ateb-функций для построения решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных //Там же. – 1996. – **48**, №2. – С. 291–292.

8. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

9. *Фущич В.И.* Симметрия в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 6–27.

10. *Митропольский Ю.А., Шульга М.В.* Асимптотические решения многомерного нелинейного волнового уравнения //Докл. АН СССР. – 1997. – **295**, №1. – С. 30–33.

11. *Митропольский Ю.А., Шульга М.В.* Асимптотические и точные решения многомерного нелинейного уравнения типа Шредингера //Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 6. – С. 744–751.

Получено 04.05.98