УДК 517.929

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ І ДЕКОМПОЗИЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

І.М. Черевко

Чернів. ун-т,
Україна, 274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

In this paper with the help of integral manifolds slow and fast variables was obtained a transformation that decomposes nonlinear singularly perturbed systems with small delay into slow and fast sybsystems. The use of this transformation permit us to investigate a problem of stability and establish reduction principle.

За допомогою інтегральних многовидів повільних і швидких змінних одержано перетворення, яке розщеплює лінійну сингулярно збурену систему із малим запізненням на повільну і швидку підсистеми. Використання цього перетворення дозволило дослідити задачу стійкості і встановити принцип зведення.

Метод інтегральних многовидів, розвинутий М.М. Боголюбовим і Ю.О. Митропольським, широко використовується для дослідження багатьох важливих задач якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосувань. Він виявився зручним апаратом для дослідження сингулярно збурених диференціальних систем із запізненням [1 – 5].

В даній роботі за допомогою інтегральних многовидів швидких та повільних змінних побудована заміна, яка розщеплює вихідну систему на дві підсистеми „блочно-трикутного" вигляду і дозволяє звести задачу про стійкість нульового розв'язку до дослідження регулярно збуреної системи меншої розмірності.

Для лінійних сингулярно збурених систем із запізненням такі питання вивчались в [4, 5], а для сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь — в [6, 7].

1. Розглянемо систему сингулярно збурених рівнянь з малим запізненням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = C(t)y + Dy_\Delta + \varepsilon\, g(t, x, y, y_\Delta, \varepsilon), \tag{1}$$

де $t \in R$, $x \in R^m$, y, $y_\Delta \in \Omega_\rho = \{y \in R, |y| < \rho\}$, $\varepsilon > 0$, $(y_\Delta = y(t - \varepsilon\Delta)$, $\Delta > 0)$.

Припустимо, що для системи (1) виконуються умови:

1) функції f, g — неперервні, рівномірно обмежені і задовольняють умову Ліпшіца по x, y, y_Δ із сталою L;

2) матричні функції $C(t)$, $D(t)$ рівномірно обмежені і всі корені $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, характеристичного рівняння

$$\mathrm{Det}\,(\lambda E - C - De^{-\lambda\Delta}) = 0$$

задовольняють умову $\mathrm{Re}\,\lambda_i(t) \leq 2\mu < 0$ для $t \in R$.

Нехай $C = C[-\varepsilon\Delta, 0]$ — простір неперервних функцій φ: $[\varepsilon\Delta, 0] \to R^n$ з нормою $|\varphi| = \sup_{-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$. Через x_i позначимо елемент простору C, що задається при кожному t функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$.

Позначимо через $Y(t, s)$ фундаментальну матрицю рівняння

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = C(t, y) + D(t) y_\Delta, \tag{2}$$

що задовольняє початкову умову $Y(t, s) = \begin{cases} 0, & t < s; \\ E, & t = s, \end{cases}$, а через $T(t,s)$ — оператор зсуву за розв'язками рівняння (2). Система (1) еквівалентна системі інтегро-диференціальних рівнянь [8]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \varepsilon),$$

$$y_t = T(t, \sigma) y_\sigma + \int_\sigma^t T(t, s) Y_0 \, \bar{g}(s, x(s), y_s, \varepsilon) ds, \tag{3}$$

де $y_t = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$, $Y_0 = \begin{cases} 0, & \theta \in [-\varepsilon\Delta, 0); \\ E, & \theta = 0, \end{cases}$, $\bar{g}(s, x(s), y_s, \varepsilon) = g(s, x(s), y_s(0), y_s(-\varepsilon\Delta), \varepsilon)$.

Інтеграл в (3) для кожного $\theta \in [-\varepsilon\theta, 0]$ розуміємо як інтеграл в R^n.

2. Означення. *Множину точок $M \subset R \times R^m \times C$ будемо називати інтегральним многовидом системи (3), якщо для довільної точки $(t_0, x_0, y_0) \in M$ виконується умова $(t, x(t), y_t) \in M$ для всіх $t \in R$, де $(x(t), y_t)$ — розв'язок системи (3) з початковою умовою (t_0, x_0, y_{t_0}).*

При виконанні умов 1, 2 і достатньо малих ε система (1) має інтегральний многовид повільних змінних [1 – 3]

$$y = \varepsilon h(t, x, \varepsilon), \tag{4}$$

де h — неперервна, обмежена функція і задовольняє умову Ліпшіца по x із сталою l.

Якщо функції f, g, $(C + D)^{-1}$ рівномірно обмежені для $t \in R$ разом із своїми частинними похідними по всіх аргументах до $n+1$ порядку включно, то функція h буде n раз неперервно диференційовною і її похідні обмежені та задовольняють умову Ліпшіца по x. В цьому випадку можна побудувати асимптотичний розклад інтегрального многовиду

$$\varepsilon h = \varepsilon h_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^n h_n(t, x) + h_{n+1}(t, x, \varepsilon), \quad h_{n+1} = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Коефіцієнти розкладу h_i можуть бути знайдені із рівняння

$$Ch + Dh_\Delta + g(t, x, \varepsilon h, \varepsilon h_\Delta) = \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, \varepsilon h, \varepsilon).$$

Інтегральний многовид (4) стійкий в тому розумінні, що будь-який розв'язок системи (1), що задовольняє умови $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \varepsilon\Delta, t_0]$ ($|\varphi| < \rho$), буде притягуватись до многовиду (4) за експоненціальним законом [1 – 3].

На інтегральному многовиді (4) система рівнянь (1) зводиться до рівняння

$$\frac{du}{dt} = f(t, u, \varepsilon h(t, u, \varepsilon), \varepsilon), \tag{5}$$

яке регулярно залежить від малого параметра ε, і, крім того, не містить запізнення аргументу.

Нехай для системи (1) крім умов 1, 2 виконується умова:

3) функції f, g неперервно диференційовні і їхні частинні похідні обмежені та задовольняють умову Ліпшіца по x, y, y_Δ.

Зробимо в системі (3) заміну $x = u + v$, $y = z + \varepsilon h(t, x, \varepsilon)$, де u є розв'язком рівняння (5). Нові змінні задовольняють систему рівнянь

$$\frac{du}{dt} = F(t, u, \varepsilon),$$

$$\frac{dv}{dt} = F_1(t, u, v, z_t, \varepsilon), \tag{6}$$

$$z_t = T(t, \sigma) z_\sigma + \int\limits_0^t T(t, s) Y_0 G(s, u, v, z_s, \varepsilon) ds + \varepsilon \int\limits_0^t T(t, s) F_2(s, u, v, z_s, \varepsilon) ds,$$

де

$$F = f(t, u, \varepsilon h(t, u, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$F_1 = f(t, u + v, z + \varepsilon h(t, u + v, \varepsilon), \varepsilon) - f(t, u, \varepsilon h(t, u, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$G = \bar{g}(t, u + v, z + \varepsilon h(t, u + v, \varepsilon), \varepsilon) - \bar{g}(t, u + v, \varepsilon h(t, u + v, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$F_2 = -\frac{\partial h(t, u + v, \varepsilon)}{\partial x}[f(t, u + v, z + \varepsilon h(t, u + v, \varepsilon), \varepsilon) - f(t, u + v, \varepsilon h(t, u + v, \varepsilon), \varepsilon)].$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1 — 3. Тоді при достатньо малих ε існує інтегральний многовид швидких змінних системи (6), який можна зобразити у вигляді*

$$v = \varepsilon H(t, u, z_t, \varepsilon). \tag{7}$$

Функція $H(t, u, z_t, \varepsilon)$ — рівномірно неперервна по всіх аргументах і задовольняє умови

$$|H(t, u, z, \varepsilon)| \leq a|z|,$$

$$|H(t, u, z, \varepsilon) - H(t, u, \bar{z}, \varepsilon)| \leq b|z - \bar{z}|,$$

$$|H(t, u, z, \varepsilon) - H(t, \bar{u}, z, \varepsilon)| \leq c|z|\,|u - \bar{u}|, \tag{8}$$

де a, b, $c > 0$, $t \in R$, u, $\bar{u} \in R^m$, z, $\bar{z} \in \Omega_\rho$.

Доведення теореми 1 проводиться за схемою Боголюбова – Митропольського [1], як в [3, 6].

3. На інтегральному многовиді швидких змінних (7) система (3) зводиться до системи рівнянь

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = F(t, \tilde{u}, \varepsilon),$$

$$z_t = T(t,\sigma)z_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t,s)[Y_0 G(s,u,\varepsilon H(s,u,v,z_s,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon F_2(s,u,\varepsilon H(s,u,z_s,\varepsilon),\varepsilon)]ds. \tag{9}$$

Нехай (u, z) — розв'язок системи (9), тоді маємо співвідношення для вихідних і нових змінних

$$x = u + \varepsilon H(t,u,z,\varepsilon), \quad y = z + \varepsilon h(t,x,\varepsilon). \tag{10}$$

Розглянемо розв'язок $(x(t), y_t)$ системи (3) з початковими даними $(t_0,\ x_0,\ y_{t_0}) \in \in R \times R^m \times C$. Покажемо, що існує такий розв'язок $(u(t),\ z_t)$ системи (9) з початковими даними $(t_0,\ u_0,\ z_{t_0})$, що для всіх $t \geq t_0$ виконуються співвідношення

$$x(t) = u(t) + \varepsilon H(t,u(t),z_t,\varepsilon), \quad y(t) = z_t + \varepsilon h(t,x(t),\varepsilon). \tag{11}$$

Згідно з теоремою про єдиність розв'язку достатньо показати, що співвідношення (11) мають місце для $t = t_0$. Підставимо $t = t_0$ в (11). Тоді

$$x_0 = u_0 + \varepsilon H(t_0,u_0,z_{t_0},\varepsilon), \quad y_{t_0} = z_{t_0} + \varepsilon h(t_0,x_0,\varepsilon). \tag{12}$$

Покажемо, що система рівнянь (12) має єдиний розв'язок відносно u_0, z_{t_0} при фіксованих y_{t_0}, x_0. Із рівностей (12) маємо

$$z_{t_0} = y_{t_0} - \varepsilon h(t_0,x_0,\varepsilon), \tag{13}$$

$$u_0 = x_0 - \varepsilon H(t_0,u_0,y_{t_0} - \varepsilon h(t_0,x_0,\varepsilon),\varepsilon). \tag{14}$$

Розглянемо в R^m кулю S, що визначається нерівністю

$$|u_0 - x_0| \leq |y_{t_0} - \varepsilon h(t_0,x_0,\varepsilon)|,$$

і породжене рівнянням (14) відображення

$$u_0 = P(u_0,\varepsilon) = x_0 - \varepsilon H(t_0,u_0,y_{t_0} - \varepsilon h(t_0,x_0,\varepsilon),\varepsilon).$$

Із властивостей функції H випливає, що при достатньо малих ε відображення P відображає кулю S в себе і є стислим. Тому воно має єдину нерухому точку в S, яка є розв'язком рівняння (14). Отже, справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1 — 3. Тоді для достатньо малих ε система (3) за допомогою заміни (10) зводиться до вигляду (9). Для розв'язків системи (3) з початковими даними $(t_0,\ x_0,\ y_{t_0})$ існує єдиний розв'язок системи (9) з початковими даними $(t_0,\ u_0,\ z_{t_0})$ такий, що виконується співвідношення (11). Початкові значення $(u_0,\ z_{t_0})$ однозначно визначаються із рівнянь (13), (14).*

Розглянемо тепер задачу про стійкість розв'язків системи (3). При виконанні умови 2 справедлива оцінка для фундаментальної матриці $Y(t,s)$ [9]

$$|Y(t,s)| \leq K e^{-\frac{2\mu}{\varepsilon}(t-s)},$$

де $t \geq s$, $K > 0$.

Для оператора зсуву $T(t,s)$ і фундаментальної матриці $Y(t,s)$ має місце співвідношення

$$T(t,\sigma)\varphi(\theta) = Y(t+\theta,\sigma)\varphi(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma-\varepsilon\Delta}^{\sigma} Y(t+\theta, s+\varepsilon\Delta)C(s-\varepsilon\Delta)\varphi(s-\sigma)ds.$$

Тому

$$|T(t,\sigma)\varphi| \leq K_1\, e^{-\frac{2\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}, \tag{15}$$

де $K_1 = Ke^{2\mu\Delta}\left(1 + \sup\limits_{1}(C(t))e^{2\mu\Delta}\right)$, $t \geq \sigma$.

Із другого рівняння системи (9), враховуючи властивості функцій h, f, g, маємо

$$|z_t| \leq K_1\, e^{-\frac{2\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}|z_\sigma| + \int\limits_{\sigma}^{t} K_1\, e^{-\frac{2\mu}{\varepsilon}(t-s)} L z_s ds.$$

Використовуючи нерівність Гронуолла, для достатньо малих ε одержуємо

$$z_t \leq 2K_1\,|z_\sigma|\, e^{-\frac{2\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}, \quad t \geq \sigma. \tag{16}$$

Із співвідношень (11) випливає, що розв'язок $(x(t), y_t)$ системи (3) можна зобразити у вигляді

$$x(t) = u(t) + \psi_1(t),$$

$$y_t = \varepsilon h(t,u,\varepsilon) + \psi_2(t), \tag{17}$$

де $(u(t), \varepsilon h(t,u(t),\varepsilon))$ — розв'язок на інтегральному многовиді (4), $\psi_1 = \varepsilon H(t, u(t), z_t, \varepsilon)$, $\psi_2 = z_t + \varepsilon h(t,u(t) + \varepsilon H(t,u(t), z_t, \varepsilon) - \varepsilon h(t,u(t),\varepsilon)$.

Для функцій ψ_1, ψ_2, враховуючи властивості h, H і нерівність (16), маємо оцінки

$$\begin{aligned} &|\psi_1(t)| \leq 2\varepsilon a K_1\,|z_\sigma|\, e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}, \qquad t \geq \sigma, \\ &|\psi_2(t)| \leq 2K_1\,(1+\varepsilon^2 al)\,|z_\sigma|\, e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}, \quad t \geq \sigma. \end{aligned} \tag{18}$$

Нехай $f(t,0,0,\varepsilon) = 0$, $g = (t,0,0,\varepsilon) = 0$, тоді $h(t,0,\varepsilon) = 0$, $F(t,0,\varepsilon) = 0$. Із зображення (11) та оцінок (18) випливає така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1 — 3. Тоді нульовий розв'язок системи (3) стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) тоді і тільки тоді, коли стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) нульовий розв'язок рівняння (5) на інтегральному многовиді повільних змінних.*

Остання теорема — це принцип зведення для систем вигляду (1). Вона дозволяє звести вихідну сингулярно збурену систему із запізненням (1) до системи меншої розмірності (5), яка є регулярною і не містить запізнення аргументу.

1. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И.* Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием //Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, №6. – P. 791–801.
2. *Фодчук В.И., Черевко И.М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений //Там же. – 1982. – **34**, №6. – С. 725–731.
3. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений //Там же. – 1986. – **38**, №3. – С. 335–340.
4. *Фридман Э.М.* Декомпозиция линейных оптимальных сингулярно возмущенных систем с последействием //Автоматика и телемеханика. – 1980. – №11. – С. 73–83.
5. *Черевко І.М.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-різницевих систем //Допов. НАН України. – 1997. – №6. – С. 42–45.
6. *Гольдштейн В.М., Соболев В.А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. – Новосибирск: Наука, 1988. – 153 с.
7. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем //Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, №4. – С. 569–578.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
9. *Халанай А.* Периодические и почти периодические решения некоторых сингулярно возмущенных систем с запаздыванием //Rev. roum. math. pures et appl. – 1963. – №2. – P. 285–292.

Одержано 10.02.98