

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЩО ПІДКРІПЛЕНА ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕВИМ РЕБРОМ

В. А. Троценко, Ю. В. Троценко

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: trots@imath.kiev.ua

We propose an algorithm for calculating the frequencies and forms of natural vibrations of a thin-walled circular cylindrical shell supported by a transverse annular elastic rib of small width taking into account the presence of discontinuities of the first kind in force factors on the line of contact of the rib with the shell. In the construction of approximate solutions of the spectral problem under consideration, the variational method is used in combination with the division of the domain of definition of the required functions into regular subdomains, in each of which displacements, forces, and moments have the properties of continuity and differentiability. The Ritz method used for solving the initial problem provides convergence in a uniform metric for displacements and force factors of the elastic shell.

Запропоновано алгоритм розрахунку частот і форм власних коливань тонкостінної кругової циліндричної оболонки, підкріпленої поперечним кільцевим пружним ребром малої ширини, враховуючи при цьому наявність розривів першого роду в силових факторах на лінії контакту ребра з оболонкою. При побудові наближених розв'язків розглядуваної спектральної задачі використано варіаційний метод у поєднанні з розбиттям області визначення шуканих функцій на регулярні підобласті, в кожній з яких переміщення, зусилля і моменти мають властивості неперервності та диференційовності. Запропонований метод Рітца розв'язування вихідної задачі забезпечує збіжність у рівномірній метриці для переміщень і силових факторів пружної оболонки.

Вступ. У різних областях сучасної техніки та будівництва широке застосування отримали тонкостінні оболонки, підкріплені ребрами жорсткості. Одним з найбільш важливих у прикладному відношенні є розрахунок таких оболонок на динамічні навантаження. Перший крок у розв'язуванні цієї проблеми полягає у визначенні частот і форм власних коливань розглядуваної конструкції. Тому цій проблемі присвячено значну кількість наукових робіт. Показовими у цьому відношенні являються огляди літератури в роботах [1–4], що дають певне уявлення про сучасний стан досліджень у цій області теорії оболонок.

При розв'язуванні спектральних задач для підкріплених оболонок обертання широке застосування отримали дискретні методи, такі як метод скінченних елементів (МСЕ) та метод скінченних різниць. При використанні МСЕ ширина кільцевих елементів, на які ділиться оболонка обертання, для забезпечення необхідної точності апроксимації розв'язків повинна бути значно меншою від довжини зони згинного крайового ефекту. В результаті для видовжених конструкцій системи алгебраїчних рівнянь МСЕ мають високий порядок, що ускладнює отримання стійкого алгоритму. Застосування методу скінченних різниць також має труднощі, пов'язані з необхідністю використання густих сіток. Проте дискретні

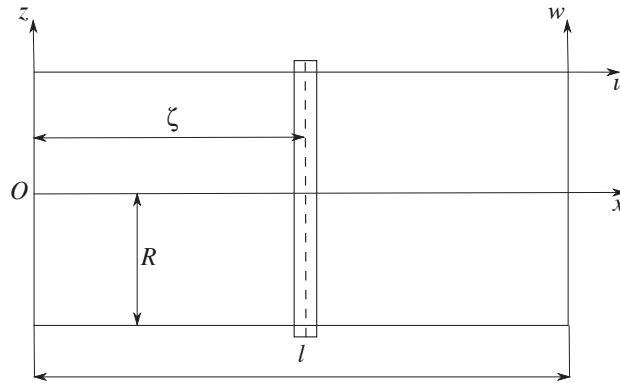


Рис. 1. Основні параметри розглядуваної механічної системи.

методи мають велику універсальність і дозволяють визначати частоти та форми власних коливань підкріплених оболонок обертання в широкому діапазоні вхідних параметрів конструкції.

В опублікованих роботах при використанні методу Рітца для побудови наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі розклади для переміщень оболонки представляють за неперервними базисними функціями на замкненому відрізку інтегрування вихідних рівнянь. Оскільки зусилля і моменти мають розриви першого роду на лініях кріплення ребер з оболонкою, то такі подання дозволяють із задовільною точністю визначити лише частоти та форми коливань конструкції. Визначення силових факторів у кожній точці серединної поверхні оболонки є неможливим при такому підході.

Зауважимо, що в роботі [5] отримано точний розв'язок задачі про вільні коливання циліндричної оболонки, підкріпленої поперечними кільцевими ребрами. Цей результат отримано завдяки тому, що вихідні рівняння для циліндричної оболонки являють собою систему диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. Чисельні розв'язки роботи [5] можуть бути використані при оцінці точності більш простих наближених розв'язків розглядуваної задачі.

Цю роботу присвячено застосуванню методу Рітца для розв'язування задачі про вільні коливання циліндричної оболонки, підкріпленої пружним кільцевим ребром, який забезпечує рівномірну збіжність розкладів як для переміщень, так і для силових факторів деформованої оболонки.

1. Варіаційна постановка задачі. Розглянемо замкнену кругову циліндричну оболонку малої постійної товщини h із радіусом серединної поверхні R і довжиною l . Введемо до розгляду декартову систему координат $Oxyz$, вісь Ox якої збігається з віссю симетрії оболонки й початком O , що міститься в площині її торцевого перерізу. Покладемо, що оболонку в перерізі $x = \zeta$ підкріплено пружним кільцевим ребром жорсткості (рис. 1). Будемо вважати, що товщина ребра мала відносно радіуса серединної поверхні оболонки, а площа контакту ребра з оболонкою така, що його дію на оболонку зосереджено по лінії.

Для отримання рівнянь коливань і граничних умов на лінії контакту оболонки й ребра скористаємося принципом можливих переміщень, який має вигляд

$$\delta\Pi = \delta A, \quad (1)$$

де $\delta\Pi$ — варіація потенціальної енергії системи, що складається з оболонки та ребра, δA — робота зовнішніх сил на можливих переміщеннях.

До зовнішніх сил, відповідно з принципом Даламбера, включимо сили інерції оболонки та ребра.

У подальшому будемо користуватися спрощеною теорією тонких оболонок, яку В. З. Власов назвав технічною [6]. Проекції переміщень серединної поверхні оболонки на напрямки її твірної, паралелі й зовнішньої нормалі позначимо через u , v і w . Варіацію потенціальної енергії деформації циліндричної оболонки можна подати у вигляді [7]

$$\delta\Pi_c = \iint_{\Sigma} (T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + S\delta\gamma_{12} + M_1\delta\kappa_1 + M_2\delta\kappa_2 + 2H\delta\kappa_{12}) R dx d\varphi, \quad (2)$$

де Σ — поверхня оболонки, φ — кут, що визначає положення меридіана, T_1 , T_2 , S і M_1 , M_2 , H — погонні зусилля й моменти, які виникають у серединній поверхні оболонки.

Залежність зусиль і моментів від деформацій оболонки ε_1 , ε_2 , γ_{12} та параметрів зміни кривини κ_1 , κ_2 , κ_{12} має вигляд

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma_{12}, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \quad H = D(1-\nu)\kappa_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $B = \frac{Eh}{1-\nu}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жорсткості оболонки на розтяг і згин відповідно; E , ν — модуль пружності та коефіцієнт Пуассона.

Деформації поверхні оболонки пов'язані з її переміщеннями формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{R\partial\varphi} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial\varphi}. \quad (4)$$

Відповідно до технічної теорії оболонок параметри зміни кривини оболонки мають вигляд

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}, \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\varphi}. \quad (5)$$

Позначимо через u_r , v_r , w_r складові вектора повного переміщення центра ваги поперечного перерізу ребра. При його встановленні на зовнішній поверхні оболонки потенціальну енергію деформації кільцевого ребра можна зобразити [2, 8] у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_r I_z}{R_r^2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial x} - \frac{1}{R_r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} \right)^2 + \frac{E_r I_x}{R_r^4} \left(w_r + \frac{\partial^2 w_r}{\partial\varphi^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_r S_r}{R_r^2} \left(w_r + \frac{\partial v_r}{\partial\varphi} \right)^2 + \frac{G_r C}{R_r^2} \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x \partial\varphi} + \frac{1}{R_r} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} \right)^2 \right] R_r d\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

де E_r , G_r — модуль пружності та модуль зсуву матеріалу ребра; I_z , I_x — осьові моменти інерції поперечного перерізу ребра відносно осей, що проходять через його центр ваги;

S_r — площа поперечного перерізу ребра; C — геометричний параметр, що залежить від форми поперечного перерізу ребра; $R_r = R + e$ — радіус центра мас ребра; e — відстань від серединної поверхні оболонки до центра ваги поперечного перерізу ребра. При встановленні ребра на внутрішній поверхні оболонки потрібно змінити знак при e .

У першому наближенні величини u_r , v_r , w_r можна виразити через переміщення точок серединної поверхні оболонки u , v , w у перерізі, де встановлено ребро [2, 8]:

$$u_r = \left[u - e \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=\zeta}, \quad v_r = \left[\frac{R_r}{R} v - \frac{e}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right]_{x=\zeta}, \quad w_r = w|_{x=\zeta}. \quad (7)$$

Робота сил інерції оболонки на можливих переміщеннях δu , δv , δw має вигляд

$$\delta A_c = -\rho h \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] R dx d\varphi, \quad (8)$$

де ρ — густина матеріалу оболонки.

Відповідно роботу сил інерції ребра на можливих переміщеннях зобразимо у формі

$$\begin{aligned} \delta A_r = & -\rho_r S_r \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \delta u_r + \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} \delta v_r + \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} \delta w_r \right] R_r d\varphi - \\ & - \rho_r I_p \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w_r}{\partial x} \right) \right] R_r d\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

де ρ_r — густина матеріалу ребра; I_p — полярний момент інерції поперечного перерізу ребра.

Розділення змінних для усталених коливань розглядуваної системи з частотою ω та з n хвилями по паралелі проводимо за формулами

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, t) &= u(x) \cos n\varphi \sin \omega t, \\ v(x, \varphi, t) &= v(x) \sin n\varphi \sin \omega t, \\ w(x, \varphi, t) &= w(x) \cos n\varphi \sin \omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

Введемо до розгляду безрозмірні величини (позначені рискою зверху), які пов'язані з відповідними розмірними величинами таким чином:

$$\begin{aligned} \{u, v, w\} &= R \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}, \quad E_r = E \bar{E}_r, \quad \rho_r = \rho \bar{\rho}_r, \quad \{I_z, I_x, I_p, C\} = R^3 h \{\bar{I}_z, \bar{I}_x, \bar{I}_p, \bar{C}\}, \\ S_r &= R h E \bar{S}_r, \quad \{T_1, Q_1, S\} = \frac{E h}{(1 - \nu^2)} \{\bar{T}_1, \bar{Q}_1, \bar{S}\}, \quad \{M_1, H\} = \frac{E h R}{(1 - \nu^2)} \{\bar{M}_1, \bar{H}\}, \quad (11) \\ \lambda^2 &= \frac{(1 - \nu^2) \rho R^2 \omega^2}{E}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12 R^2}, \quad G_r = E \bar{G}_r. \end{aligned}$$

Усі геометричні параметри конструкції віднесені до радіуса оболонки R . У подальшому риску над безрозмірними параметрами будемо пропускати.

Після розділення змінних і інтегрування за кутом φ з урахуванням формул (3)–(5) безрозмірну варіацію потенціальної енергії деформації циліндричної оболонки з точністю до постійного множника зобразимо у вигляді

$$\delta\Pi = \int_0^l \left[\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta v, u) + \right. \\ \left. + \Psi_{22}(v, \delta v) + \Psi_{23}(w, \delta v) + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \Psi_{33}(w, \delta w) \right] dx, \quad (12)$$

де

$$\Psi_{11}(p, q) = \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx} + \nu_1 n^2 pq, \quad \Psi_{12}(p, q) = \nu np \frac{dq}{dx} - \nu_1 nq \frac{dp}{dx}, \\ \Psi_{13}(p, q) = \nu p \frac{dq}{dx}, \quad \Psi_{23}(p, q) = npq, \quad \Psi_{22}(p, q) = n^2 pq + \nu_1 \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx}, \quad \nu_1 = \frac{(1-\nu)}{2}, \\ \Psi_{33}(p, q) = pq + c^2 \left[\left(\frac{d^2 p}{dx^2} - \nu n^2 p \right) \frac{d^2 q}{dx^2} + \left(n^4 p - \nu n^2 \frac{d^2 p}{dx^2} \right) q + 2(1-\nu) n^2 \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx} \right].$$

Введення до розгляду підінтегральних функцій у (12) дозволяє істотно спростити процедуру формування алгебраїчної системи згідно з методом Рітца та її подальше програмування.

Відповідно потенціальна енергія деформації ребра Π_r , робота сил інерції підкріпленого ребра δA_c та оболонки на їхніх можливих переміщеннях у безрозмірних величинах набудуть вигляду [2, 5]

$$\Pi_r = \frac{1}{2} \left[c_1 \left(\frac{dw_r}{dx} + \frac{n^2}{R_r} u_r \right)^2 + c_2 w_r^2 + c_3 (w_r + \nu v_r)^2 + c_4 n^2 \left(\frac{dw_r}{dx} + \frac{1}{R_r} u_r \right)^2 \right], \\ \delta A_r = \lambda^2 \left[d_1 (u_r \delta u_r + v_r \delta v_r + w_r \delta w_r) + d_2 \frac{dw_r}{dx} \frac{d\delta w_r}{dx} \right], \quad (13) \\ \delta A_c = \lambda^2 \int_0^l (u \delta u + v \delta v + w \delta w) dx.$$

Тут

$$c_1 = \frac{E_r(1-\nu^2)I_z}{R_r}, \quad c_2 = \frac{E_r(1-\nu^2)(1-n^2)^2 I_x}{R_r^3}, \quad c_3 = \frac{E_r S_r(1-\nu^2)}{R_r}, \\ c_4 = \frac{G_r(1-\nu^2)C}{R_r}, \quad d_1 = \rho_r R_r S_r, \quad d_2 = \rho_r R_r I_p.$$

Отримані формули для Π_r та A_r необхідно виразити через переміщення оболонки u , v , w на лінії контакту з ребром. Для цього потрібно скористатися формулами (7).

Таким чином, визначення частот і форм власних коливань розглядуваної підкріпленої оболонки зведено до розв'язування варіаційного рівняння

$$\delta I_1 = \delta \Pi_c + \delta \Pi_r - \delta A_c - \delta A_r = 0 \quad (14)$$

на класі допустимих функцій, що задовольняють головні граничні умови кріплення торців оболонки.

Для встановлення граничних умов на лінії кріплення ребра та оболонки скористаємося варіаційним рівнянням (14). Для цього розіб'ємо область $\Sigma = [0, l]$ точкою $x = \zeta$ на дві підобласті $\Sigma^{(1)} = [0, \zeta]$ і $\Sigma^{(2)} = [\zeta, l]$. Позначимо розв'язки вихідної задачі в підобластях $\Sigma^{(1)}$ і $\Sigma^{(2)}$ відповідно через $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, k = 1, 2$. У подальшому верхній індекс в усіх виразах, що зустрічаються, буде означати область, у якій ці вирази визначені. З'єднання ребра з оболонкою припускається таким, що виконуються такі умови неперервності для переміщень оболонки:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\zeta) &= u^{(2)}(\zeta) = u, & v^{(1)}(\zeta) &= v^{(2)}(\zeta) = v, \\ w^{(1)}(\zeta) &= w^{(2)}(\zeta) = w, & \left(\frac{dw^{(1)}}{dx} = \frac{dw^{(2)}}{dx} \right)_{x=\zeta} &= \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\zeta}. \end{aligned} \quad (15)$$

Скористаємося варіаційним рівнянням (14), замінивши в ньому інтеграли по всій області Σ на суми інтегралів по підобластях $\Sigma^{(1)}$ і $\Sigma^{(2)}$. З урахуванням інтегрування частинами та умов (15) отримаємо відомі системи звичайних диференціальних рівнянь для циліндричної оболонки в підобластях $\Sigma^{(1)}$ і $\Sigma^{(2)}$, а також силові граничні умови при $x = \zeta$:

$$\begin{aligned} T_1^{(1)}(\zeta) - T_1^{(2)}(\zeta) &= R_T, & S^{(1)}(\zeta) - S^{(2)}(\zeta) &= R_S, \\ Q_1^{(1)}(\zeta) - Q_1^{(2)}(\zeta) &= R_Q, & M_1^{(1)}(\zeta) - M_1^{(2)}(\zeta) &= R_M. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут

$$\begin{aligned} T_1^{(k)} &= \frac{du^{(k)}}{dx} + \nu(nv^{(k)} + w^{(k)}), & S^{(k)} &= \nu_1 \left(\frac{dv^{(k)}}{dx} - nu^{(k)} \right), \\ Q_1^{(k)} &= -c^2 \left[\frac{d^3 w^{(k)}}{dx^3} - n^2(2 - \nu) \frac{dw^{(k)}}{dx} \right], & M_1^{(k)} &= -c^2 \left[\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} - \nu n^2 w^{(k)} \right], \quad k = 1, 2, \\ R_T &= -F_1 \left(u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right) + \lambda^2 G_1 \left(u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right), \\ R_S &= -F_2(v^{(1)}, w^{(1)}) + \lambda^2 G_2(v^{(1)}, w^{(1)}), \\ R_Q &= -F_3(v^{(1)}, w^{(1)}) + \lambda^2 G_3(v^{(1)}, w^{(1)}), \\ R_M &= -F_4 \left(u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right) + \lambda^2 G_4 \left(u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right). \end{aligned}$$

Функції від двох аргументів F_i і G_i визначаються за формулами

$$\begin{aligned} F_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right) &= (n^2 c_1 + c_4) \left(\frac{n}{R_r}\right)^2 u + [c_1(R_r - n^2 e) + c_4] \left(\frac{n}{R_r}\right)^2 \frac{dw}{dx}, \\ F_2(v, w) &= c_3 n R_r (n R_r v + e_n w), \quad F_3(v, w) = c_3 n R_r e_n v + (c_2 + c_3 e_n^2) w, \\ F_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right) &= [c_1(R_r - n^2 e) + c_4] \left(\frac{n}{R_r}\right)^2 u + \left[c_1 \left(1 - \frac{n^2 e}{R_r}\right)^2 + c_4 \left(\frac{n}{R_r}\right)^2\right] \frac{dw}{dx}, \\ G_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right) &= d_1 \left(u - e \frac{dw}{dx}\right), \quad G_2(u, w) = d_1 R_r (R_r v + e n w), \quad e_n = 1 + n^2 e, \\ G_3(v, w) &= d_1 [n e R_r v + (1 + n^2 e^2) w], \quad G_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right) = -d_1 e u + (d_1 e^2 + d_2) \frac{dw}{dx}. \end{aligned} \quad (17)$$

Зауважимо, що досить складні силові граничні умови (16) є природними граничними умовами для розглядуваного функціонала.

2. Застосування методу Рітца до розв'язування варіаційного рівняння. При використанні методу Рітца для розглядуваної спектральної задачі, як правило, розклади для переміщень оболонки зображуються з використанням неперервних базисних функцій на замкненому відрізку інтегрування вихідних рівнянь [3, 4, 8]. Із граничних умов (16) випливає, що в перерізі, де розміщено кільцеве ребро, силові характеристики деформівної оболонки мають розриви першого роду. Це викликає відповідні розриви в перших похідних для функцій u , v і другий похідній для функції w .

При використанні неперервних базисних функцій для апроксимації розв'язків із задовільною точністю можливо визначати частоти коливань розглядуваної конструкції. Розклади для похідних від функцій u , v , w та dw/dx будуть збігатися лише в середньому. Звідси випливає, що отримані таким чином розв'язки не дають можливості визначення напружено-деформівного стану оболонки.

Для отримання рівномірної збіжності розкладів Рітца необхідно враховувати установлені розриви поля зусиль деформованої оболонки. У зв'язку з цим побудова наближених розв'язків розглядуваної задачі базується на варіаційному методі в поєднанні з декомпозицією області визначення шуканих функцій на підобласті, в кожній з яких розв'язки неперервні та диференційовані. Ці суміжні підобласті регулярності розв'язків розділені лінією контакту підкріплюючого ребра та оболонки. Такий підхід був раніше успішно застосований при побудові наближених розв'язків у інших задачах механіки з розривними параметрами [9, 10].

Варіацію потенціальної енергії ребра і роботу його сил інерції на можливих переміщеннях оболонки в перерізі, де встановлено шпангоут, подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_r &= F_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right) \delta u + F_2(v, w) \delta v + F_3(v, w) \delta w + F_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right) \frac{d\delta w}{dx}, \\ \delta A_r &= \lambda^2 \left[G_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right) \delta u + G_2(v, w) \delta v + G_3(v, w) \delta w + G_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right) \frac{d\delta w}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Побудова розв'язків варіаційного рівняння (14) повинна відбуватися на класі функцій, що задовольняють кінематичні умови спряження (15) і головні граничні умови кріплення торців оболонки. Виконання умов (15) є основною проблемою при розв'язуванні задачі методом Рітца. Цю проблему можна вирішити шляхом побудови деякого функціонала I , для якого кінематичні умови (15) були б природними граничними умовами. Якщо розглядати умови (15) як допоміжні обмеження на клас допустимих функцій, то, скориставшись методом Лагранжа, побудуємо новий функціонал I . У зв'язку з цим помножимо множники Лагранжа на вказані обмеження та додамо ці добутки у вихідний функціонал. Враховуючи ці доданки, варіація функціонала I набуває вигляду

$$\delta I = \delta I_1 + \delta \left[\alpha_1 (u^{(1)} - u^{(2)}) + \alpha_2 (v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ \left. + \alpha_3 (w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{dx} - \frac{dw^{(2)}}{dx} \right) \right]_{x=\zeta}, \quad (19)$$

де α_i , $i = \overline{1,4}$, — множники Лагранжа, які підлягають визначенню в подальшому.

Для уникнення штучного підвищення числа невідомих за рахунок множників Лагранжа та спрощення алгоритму побудови розв'язку задачі знайдемо явні вирази для множників α_i у термінах вихідних розв'язків. Для цього вирахуємо першу варіацію функціонала I при вільному варіюванні переміщень оболонки та постійних α_i з урахуванням граничних умов на торцях оболонки. З цієї варіації випишемо тільки позаінтегральні члени при $x = \zeta$. При цьому будемо мати

$$\left[\delta \alpha_1 (u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta \alpha_2 (v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ + \delta \alpha_3 (w^{(1)} - w^{(2)}) + \delta \alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{dx} - \frac{dw^{(2)}}{dx} \right) + (T_1^{(1)} + \alpha_1) \delta u^{(1)} - \\ - (T_1^{(2)} + \alpha_1) \delta u^{(2)} + (S^{(1)} + \alpha_2) \delta v^{(1)} - (S^{(2)} + \alpha_2) \delta v^{(2)} + \\ + (Q_1^{(1)} + \alpha_3) \delta w^{(1)} - (Q_1^{(2)} + \alpha_3) \delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)}) \frac{d\delta w^{(1)}}{dx} + \\ + (M_1^{(2)} - \alpha_4) \frac{d\delta w^{(2)}}{dx} + (F_1 - \lambda^2 G_1) \delta u + (F_2 - \lambda^2 G_2) \delta v + \\ \left. + (F_3 - \lambda^2 G_3) \delta w + (F_4 - \lambda^2 G_4) \frac{d\delta w}{dx} \right]_{x=\zeta}. \quad (20)$$

Нагадаємо, що у формулі (20) функції u , v , w , dw/dx означають переміщення оболонки в місці розташування підкріплюючого ребра. За допомогою формул (15) їх можна виразити через переміщення оболонки у введених підобластях. Після перегрупування членів при варіаціях шуканих функцій формули (20) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
& \left\{ \delta\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\
& + \delta\alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \delta\alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{dx} - \frac{dw^{(2)}}{dx}\right) + \\
& + \left[T_1^{(1)} + \alpha_1 + \frac{1}{2}(F_1^{(1)} - \lambda^2 G_1^{(1)})\right] \delta u^{(1)} + \\
& + \left[-T_1^{(2)} - \alpha_1 + \frac{1}{2}(F_1^{(2)} - \lambda^2 G_1^{(2)})\right] \delta u^{(2)} + \\
& + \left[S^{(1)} + \alpha_2 + \frac{1}{2}(F_2^{(1)} - \lambda^2 G_2^{(1)})\right] \delta v^{(1)} + \\
& + \left[-S^{(2)} - \alpha_2 + \frac{1}{2}(F_2^{(2)} - \lambda^2 G_2^{(2)})\right] \delta v^{(2)} + \\
& + \left[Q_1^{(1)} + \alpha_3 + \frac{1}{2}(F_3^{(1)} - \lambda^2 G_3^{(1)})\right] \delta w^{(1)} + \\
& + \left[-Q_1^{(2)} - \alpha_3 + \frac{1}{2}(F_3^{(2)} - \lambda^2 G_3^{(2)})\right] \delta w^{(2)} + \\
& + \left[-M_1^{(1)} + \alpha_4 + \frac{1}{2}(F_4^{(1)} - \lambda^2 G_4^{(1)})\right] \frac{d\delta w^{(1)}}{dx} + \\
& + \left[M_1^{(2)} - \alpha_4 + \frac{1}{2}(F_4^{(2)} - \lambda^2 G_4^{(2)})\right] \frac{d\delta w^{(2)}}{dx} \Bigg\}_{x=\zeta}. \tag{21}
\end{aligned}$$

Якщо функціонал I набирає стаціонарних значень для довільних варіацій від переміщень оболонки та множників Лагранжа, то з (21) випливає, що в точці $x = \zeta$ будуть виконуватись умови спряження розв'язків (15), а також співвідношення

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -T_1^{(1)} - \frac{1}{2}(F_1^{(1)} - \lambda^2 G_1^{(1)}), & \alpha_1 &= -T_1^{(2)} + \frac{1}{2}(F_1^{(2)} - \lambda^2 G_1^{(2)}), \\
\alpha_2 &= -S^{(1)} - \frac{1}{2}(F_2^{(1)} - \lambda^2 G_2^{(1)}), & \alpha_2 &= -S^{(2)} + \frac{1}{2}(F_2^{(2)} - \lambda^2 G_2^{(2)}), \\
\alpha_3 &= -Q_1^{(1)} - \frac{1}{2}(F_3^{(1)} - \lambda^2 G_3^{(1)}), & \alpha_3 &= -Q_1^{(2)} + \frac{1}{2}(F_3^{(2)} - \lambda^2 G_3^{(2)}), \\
\alpha_4 &= M_1^{(1)} - \frac{1}{2}(F_4^{(1)} - \lambda^2 G_4^{(1)}), & \alpha_4 &= M_1^{(2)} + \frac{1}{2}(F_4^{(2)} - \lambda^2 G_4^{(2)}).
\end{aligned} \tag{22}$$

Із рівності правих частин для кожного α_i , $i = \overline{1,4}$, випливають силові умови спряження (16). Окрім цього для множників Лагранжа можна отримати такі вирази:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{1}{2}(T_1^{(1)} + T_1^{(2)}) + \frac{1}{4} \left[-F_1^{(1)} + F_1^{(2)} - \lambda^2(-G_1^{(1)} + G_1^{(2)}) \right], \\
\alpha_2 &= -\frac{1}{2}(S^{(1)} + S^{(2)}) + \frac{1}{4} \left[-F_2^{(1)} + F_2^{(2)} - \lambda^2(-G_2^{(1)} + G_2^{(2)}) \right], \\
\alpha_3 &= -\frac{1}{2}(Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)}) + \frac{1}{4} \left[-F_3^{(1)} + F_3^{(2)} - \lambda^2(-G_3^{(1)} + G_3^{(2)}) \right], \\
\alpha_4 &= \frac{1}{2}(M^{(1)} + M^{(2)}) + \frac{1}{4} \left[-F_4^{(1)} + F_4^{(2)} - \lambda^2(-G_4^{(1)} + G_4^{(2)}) \right].
\end{aligned} \tag{23}$$

Після підстановки виразів (23) у (19) отримаємо узагальнене варіаційне рівняння в термінах переміщень оболонки, яке вільне від попереднього виконання складних умов спряження. Це досить важливий момент при застосуванні варіаційного методу до розв'язування спектральної задачі з розривними граничними умовами. Одержані результати складають основу для застосування методу Рітца при побудові наближеного розв'язку розглядуваної задачі.

Зобразимо функції $u^{(k)}(x)$, $v^{(k)}(x)$, $w^{(k)}(x)$, що визначені в підобластях $\Sigma^{(k)}$, $k = 1, 2$, у вигляді відрізків узагальнених рядів

$$u^{(k)} = \sum_{j=1}^N a_j^{(k)} U_j^{(k)}(x), \quad v^{(k)} = \sum_{j=1}^N b_j^{(k)} V_j^{(k)}(x), \quad w^{(k)} = \sum_{j=1}^N c_j^{(k)} W_j^{(k)}(x). \tag{24}$$

Тут $a_j^{(k)}$, $b_j^{(k)}$, $c_j^{(k)}$ — довільні сталі, що підлягають визначенню далі, $\{U_j^{(k)}\}$, $\{V_j^{(k)}\}$, $\{W_j^{(k)}\}$ — системи координатних функцій, визначених у підобластях $\Sigma^{(k)}$.

Надалі вважаємо, що лівий торець оболонки жорстко закріплений, а правий — вільний. Координатні функції відповідно до умов закріплення торців оболонки виберемо у вигляді

$$\begin{aligned}
U_j^{(1)} &= V_j^{(1)} = x P_j(z), & W_j^{(1)} &= x^2 P_j(z), & z &= \frac{2x}{\zeta} - 1, \\
U_j^{(2)} &= V_j^{(2)} = (x-l) P_j(y), & W_j^{(2)} &= (x-l)^2 P_j(y), & y &= \frac{2x-l-\zeta}{l-\zeta},
\end{aligned}$$

де $P_j(z)$, $P_j(y)$ — зміщені на одиницю по індексу j многочлени Лежандра з аргументами, які перетворюють інтервали $[0, \zeta]$ і $[\zeta, l]$ на інтервал $[-1, 1]$.

Введені базисні функції є лінійно незалежними і повними системами функцій у відповідних підобластях, абсолютні значення яких не зростають на відрізку ортогональності функцій Лежандра зі збільшенням їхнього порядку. Це дозволяє значною мірою підвищити стійкість обчислювального процесу відносно степеневому базису. Після підстановки розкладів (24) у варіаційне рівняння (14) отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda^2 B) \vec{X} = 0, \tag{25}$$

де вектор-стовпець $\vec{X}$ має координати

$$\vec{X} = \left\{ a_1^{(1)}, \dots, a_N^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_N^{(1)}, c_1^{(1)}, \dots, c_N^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_N^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots, b_N^{(2)}, c_1^{(2)}, \dots, c_N^{(2)} \right\}.$$

Матриці A та B зручно зобразити у вигляді

$$A = A^{(1)} + \frac{1}{2} A^{(2)} + \frac{1}{4} A^{(3)}, \quad B = B^{(1)} + \frac{1}{4} B^{(3)}. \quad (26)$$

Згідно з формулами (12) ненульові елементи $\alpha_{ij}^{(1)}$ симетричної матриці $A^{(1)}$, що розміщені в ній вище головної діагоналі, вираховуються за формулами

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(1)} &= \int_0^\zeta \Psi_{11}(U_i^{(1)}, U_j^{(1)}) dx, & \alpha_{i,j+N}^{(1)} &= \int_0^\zeta \Psi_{12}(V_j^{(1)}, U_i^{(1)}) dx, \\ \alpha_{i,j+2N}^{(1)} &= \int_0^\zeta \Psi_{13}(W_j^{(1)}, U_i^{(1)}) dx, & \alpha_{i+N,j+N}^{(1)} &= \int_0^\zeta \Psi_{22}(V_j^{(1)}, V_i^{(1)}) dx, \\ \alpha_{i+N,j+2N}^{(1)} &= \int_0^\zeta \Psi_{23}(W_j^{(1)}, V_i^{(1)}) dx, \\ \alpha_{i+2N,j+2N}^{(1)} &= \int_0^\zeta \Psi_{33}(W_j^{(1)}, W_i^{(1)}) dx, \quad i, j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Формули для коефіцієнтів

$$\begin{aligned} \alpha_{i+3N,j+3N}^{(1)}, & \quad \alpha_{i+3N,j+4N}^{(1)}, & \quad \alpha_{i+3N,j+5N}^{(1)}, \\ \alpha_{i+4N,j+4N}^{(1)}, & \quad \alpha_{i+4N,j+5N}^{(1)}, & \quad \alpha_{i+5N,j+5N}^{(1)} \end{aligned}$$

отримуються з формул (27) після заміни в них функцій $u_k^{(1)}$, $v_k^{(1)}$, $w_k^{(1)}$ на $u_k^{(2)}$, $v_k^{(2)}$, $w_k^{(2)}$, встановлення границь інтегрування від ζ до l та відповідної заміни в елементах $\alpha_{pq}^{(1)}$ нижніх індексів на індекси вказаних коефіцієнтів.

Елементи симетричної матриці $B^{(1)}$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(1)} &= \int_0^\zeta U_i^{(1)} U_j^{(1)} dx, & \beta_{i+N,j+N}^{(1)} &= \int_0^\zeta V_i^{(1)} V_j^{(1)} dx, & \beta_{i+2N,j+2N}^{(1)} &= \int_0^\zeta W_i^{(1)} W_j^{(1)} dx, \\ \beta_{i+3N,j+3N}^{(1)} &= \int_\zeta^l U_i^{(2)} U_j^{(2)} dx, & \beta_{i+4N,j+4N}^{(1)} &= \int_\zeta^l V_i^{(2)} V_j^{(2)} dx, \\ \beta_{i+5N,j+5N}^{(1)} &= \int_\zeta^l W_i^{(2)} W_j^{(2)} dx, \quad i, j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (28)$$

Всі інші коефіцієнти матриці $B^{(1)}$ дорівнюють нулю.

Обчислення ненульових елементів матриці $A^{(2)}$, $x = \zeta$, розміщених вище головної діагоналі, здійснюється за формулами

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij}^{(2)} &= -T(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(1)} - T(U_j^{(1)}, 0, 0)U_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i+N, j+N}^{(2)} &= -S(0, V_i^{(1)})V_j^{(1)} - S(0, V_j^{(1)})V_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i+2N, j+2N}^{(2)} &= M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(1)}}{dx} + M(W_j^{(1)})\frac{dW_i^{(1)}}{dx} - \\
 &\quad - Q(W_i^{(1)})W_j^{(1)} - Q(W_j^{(1)})W_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = i, \\
 \alpha_{i, j+N}^{(2)} &= -T(0, V_j^{(1)}, 0)U_i^{(1)} - S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(1)}, \\
 \alpha_{i, j+2N}^{(2)} &= -T(0, 0, W_j^{(1)})U_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i, j+3N}^{(2)} &= T(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(2)} - T(U_j^{(2)}, 0, 0)U_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i, j+4N}^{(2)} &= S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(2)} - T(0, V_j^{(2)}, 0)U_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i, j+5N}^{(2)} &= -T(0, 0, W_j^{(2)})U_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i+N, j+3N}^{(2)} &= T(0, V_i^{(1)}, 0)U_j^{(2)} - S(U_j^{(2)}, 0)V_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i+N, j+4N}^{(2)} &= S(0, V_i^{(1)})V_j^{(2)} - S(0, V_j^{(2)})V_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i+2N, j+3N}^{(2)} &= T(0, 0, W_i^{(1)})U_j^{(2)}, \\
 \alpha_{i+2N, j+5N}^{(2)} &= Q(W_i^{(1)})W_j^{(2)} - Q(W_j^{(2)})W_i^{(1)} - \\
 &\quad - M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(2)}}{dx} + M(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(1)}}{dx}, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Інші елементи матриці $A^{(2)}$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i+3N, j+3N}^{(2)} &= -\alpha_{ij}^{(2)}, \quad \alpha_{i+4N, j+4N}^{(2)} = -\alpha_{i+N, j+N}^{(2)}, \\
 \alpha_{i+5N, j+5N}^{(2)} &= -\alpha_{i+2N, j+2N}^{(2)}, \quad \alpha_{i+3N, j+5N}^{(2)} = -\alpha_{i, j+2N}^{(2)}, \quad i, j = \overline{1, N},
 \end{aligned}$$

де у правих частинах цих формул верхні індекси при функціях слід замінити 1 на 2, а 2 на 1.

Уведені у виразах (29) функції T , S , M та Q набувають вигляду

$$\begin{aligned}
 T(p, q, r) &= \frac{dp}{dx} + \nu nq + \nu r, \quad S(p, q) = \nu_1 \frac{dq}{dx} - \nu_1 np, \quad \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2}, \\
 M(r) &= -c^2 \left(\frac{d^2 r}{dx^2} - \nu n^2 r \right), \quad Q(r) = -c^2 \left[\frac{d^3 r}{dx^3} - n^2 (2 - \nu) \frac{dr}{dx} \right].
 \end{aligned}$$

Ненульові елементи матриці $A^{(3)}$, які розміщені у верхній половині відносно головної діагоналі, мають вигляд

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i,j+3N}^{(3)} &= F_1(U_i^{(1)}, 0)U_j^{(2)} + F_1(U_j^{(2)}, 0)U_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i,j+5N} &= F_1\left(0, \frac{dW_j^{(2)}}{dx}\right)U_i^{(1)} + F_4(U_i^{(1)}, 0)\frac{dW_j^{(2)}}{dx}, \\
 \alpha_{i+N,j+4N}^{(3)} &= F_2(V_i^{(1)}, 0)V_j^{(2)} + F_2(V_j^{(2)}, 0)V_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i+N,j+5N}^{(3)} &= F_2(0, W_j^{(2)})V_i^{(1)} + F_3(V_i^{(1)}, 0)W_j^{(2)}, \\
 \alpha_{i+2N,j+3N} &= F_1\left(0, \frac{dW_i^{(1)}}{dx}\right)U_j^{(2)} + F_4(U_j^{(2)}, 0)\frac{dW_i^{(1)}}{dx}, \\
 \alpha_{i+2N,j+4N}^{(3)} &= F_2(0, W_i^{(1)})V_j^{(2)} + F_3(V_j^{(2)}, 0)W_i^{(1)}, \\
 \alpha_{i+2N,j+5N}^{(3)} &= F_3(0, W_i^{(1)})W_j^{(2)} + F_3(0, W_j^{(2)})W_i^{(1)} + \\
 &+ F_4\left(0, \frac{dW_i^{(1)}}{dx}\right)\frac{dW_j^{(2)}}{dx} + F_4\left(0, \frac{dW_j^{(2)}}{dx}\right)\frac{dW_i^{(1)}}{dx}, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Коефіцієнти матриці $B^{(3)}$ отримуються з формул (30), якщо в них замінити α на β та функції F_i на G_i .

Наведені вище формули для елементів матриці A справедливі для технічної теорії оболонок. Аналогічний підхід при побудові матриці A може бути застосований і при використанні класичної теорії тонких оболонок. При цьому зміни будуть стосуватися лише операторів Ψ_{ij} .

3. Деякі результати розрахунків. Наведемо результати розрахунків частот, форм власних коливань, зусиль і моментів, що виникають у серединній поверхні циліндричної оболонки по запропонованому алгоритму.

Згідно з роботою [5], в якій на основі технічної теорії оболонок побудовано точний розв'язок розглядуваної задачі, покладемо $\nu = 0,3$ та виберемо такі безрозмірні характеристики оболонки і ребра:

$$\begin{aligned}
 \frac{l}{R} = 4, \quad \frac{R}{h} = 600, \quad e = -1,63 \cdot 10^{-2} \quad I_z = 2,824 \cdot 10^{-6}, \quad I_x = 1,004 \cdot 10^{-5}, \\
 I_p = 1,2864 \cdot 10^{-5}, \quad C = 5,56 \cdot 10^{-8}, \quad S_r = 6,08 \cdot 10^{-2}, \quad \zeta = 2, \quad n = 4. \quad (31)
 \end{aligned}$$

Оцінимо ефективність розв'язування вихідної задачі спряження на основі запропонованого варіаційного методу.

Далі наведено дані для випадку, коли при $x = 0$ торець оболонки жорстко закріплений, а при $x = l$ — вільний.

Таблиця 1. Значення перших п'яти частот λ_i коливань оболонки залежно від числа членів N у розкладах (24)

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
14	.02372	.08528	.17002	.28230	.39256
16	.02340	.08378	.16997	.28155	.39238
18	.02335	.08356	.16996	.28143	.39236
20	.02334	.08352	.16996	.28142	.39235
22	.02334	.08352	.16996	.28141	.39235
24	.02334	.08351	.16996	.28141	.39235
26	.02334	.08351	.16996	.28141	.39235
28	.02334	.08351	.16996	.28141	.39235

У табл. 1 наведено значення перших п'яти власних частот λ_i залежно від кількості наближень N у методі Рітца. Результати цієї таблиці свідчать про монотонну збіжність частот коливань оболонки з ребром при збільшенні числа наближень.

Розглянемо виконання граничних умов (15) та (16), які відіграють вирішальну роль при розв'язуванні задач спряження розв'язків із використанням варіаційного методу.

Значення функцій $u^{(i)}(x)$, $v^{(i)}(x)$, $w^{(i)}(x)$ і $dw^{(i)}(x)/dx$ при $x = \zeta$ залежно від числа членів N у розкладах (24) ($i = 1$ — верхній рядок, $i = 2$ — нижній рядок) наведено у табл. 2. Зауважимо, що вектор $\vec{X}$ однорідної алгебраїчної системи (25) вибирався таким чином, щоб $w^{(1)}(\zeta) = 1$.

У табл. 3 наведено значення лівих L_T , L_S , L_Q , L_M (верхній рядок) і правих R_T , R_S , R_Q , R_M (нижній рядок) частин силових граничних умов (16) залежно від числа членів N у розкладах (24). Тут

$$L_T = T_1^{(1)}(\zeta) - T_1^{(2)}(\zeta),$$

$$L_S = S^{(1)}(\zeta) - S^{(2)}(\zeta),$$

$$L_Q = Q_1^{(1)}(\zeta) - Q_1^{(2)}(\zeta),$$

$$L_M = M_1^{(1)}(\zeta) - M_1^{(2)}(\zeta).$$

Дані табл. 2, 3 свідчать про високу точність виконання кінематичних і силових умов спряження. Окрім цього було проведено обчислення переміщень, зусиль і моментів у серединній поверхні оболонки в точках підобластей $\Sigma^{(1)}$ і $\Sigma^{(2)}$, а також їхні значення у граничній точці $x = l$. Ці обчислення показали, що запропонований метод розв'язування вихідної задачі забезпечує поточкову збіжність для розв'язків та їхніх похідних, що входять у T_1 , S , Q_1 , M_1 в усіх внутрішніх точках регулярних підобластей $\Sigma^{(1)}$ і $\Sigma^{(2)}$. При $x \rightarrow l$ згідно з прийнятими умовами кріплення оболонки $T_1(l) = S(l) = Q_1(l) = M_1(l) \rightarrow 0$. Це дозволяє розраховувати напружено-деформівний стан оболонки у будь-якій точці її серединної поверхні. Слід також зауважити, що алгебраїчна система (25) добре обумовлена при вибраних базисних функціях.

Таблиця 2. Значення функцій $u^{(i)}(x)$, $v^{(i)}(x)$, $w^{(i)}(x)$ і $dw^{(i)}(x)/dx$
при $x = \zeta$ залежно від числа членів N у розкладах (24)
($i = 1$ — верхній рядок, $i = 2$ — нижній рядок)

N	$u^{(i)}(x)$	$v^{(i)}(x)$	$w^{(i)}(x)$	$dw^{(i)}(x)/dx$
14	-.10195E+00	-.28431E+00	.10000E+01	-.67936E+01
	-.10210E+00	-.28565E+00	.13833E+01	.34734E+01
18	-.78802E-01	-.22769E+00	.10000E+01	.10557E+01
	-.78827E-01	-.22772E+00	.10072E+01	.14594E+01
22	-.78338E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12617E+01
	-.78338E-01	-.22656E+00	.99993E+00	.12070E+01
26	-.78334E-01	-.22655E+00	.10000E+01	.12408E+01
	-.78333E-01	-.22655E+00	.99992E+00	.12284E+01
30	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12345E+01
	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12351E+01
34	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12348E+01
	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12349E+01
38	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12348E+01
	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12348E+01

Таблиця 3. Значення лівих L_T , L_S , L_Q , L_M (верхній рядок) та правих R_T , R_S , R_Q , R_M (нижній рядок) частин силових граничних умов (16)
залежно від числа членів N в розкладах (24)

N	$L_T \backslash R_T$	$L_S \backslash R_S$	$L_Q \backslash R_Q$	$L_M \backslash R_M$
16	.25989E-02	.41157E-01	.30204E-02	.28543E-05
	.37714E-04	.38425E-01	.50942E-02	.30259E-05
20	.52490E-03	.34811E-01	.44820E-02	-.43887E-06
	-.14586E-04	.33842E-01	.42331E-02	-.13588E-05
24	.18711E-04	.33649E-01	.45209E-02	-.17310E-05
	-.15423E-04	.33674E-01	.42015E-02	-.14289E-05
28	-.41461E-04	.33644E-01	.42181E-02	-.14337E-05
	-.14561E-04	.33686E-01	.42037E-02	-.13566E-05
32	-.15649E-04	.33688E-01	.41915E-02	-.13406E-05
	-.14503E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13517E-05
36	-.14006E-04	.33689E-01	.42043E-02	-.13521E-05
	-.14515E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13527E-05
40	-.14536E-04	.33688E-01	.42042E-02	-.13529E-05
	-.14515E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13527E-05
44	-.14516E-04	.33688E-01	.42040E-02	-.13527E-05
	-.14515E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13527E-05

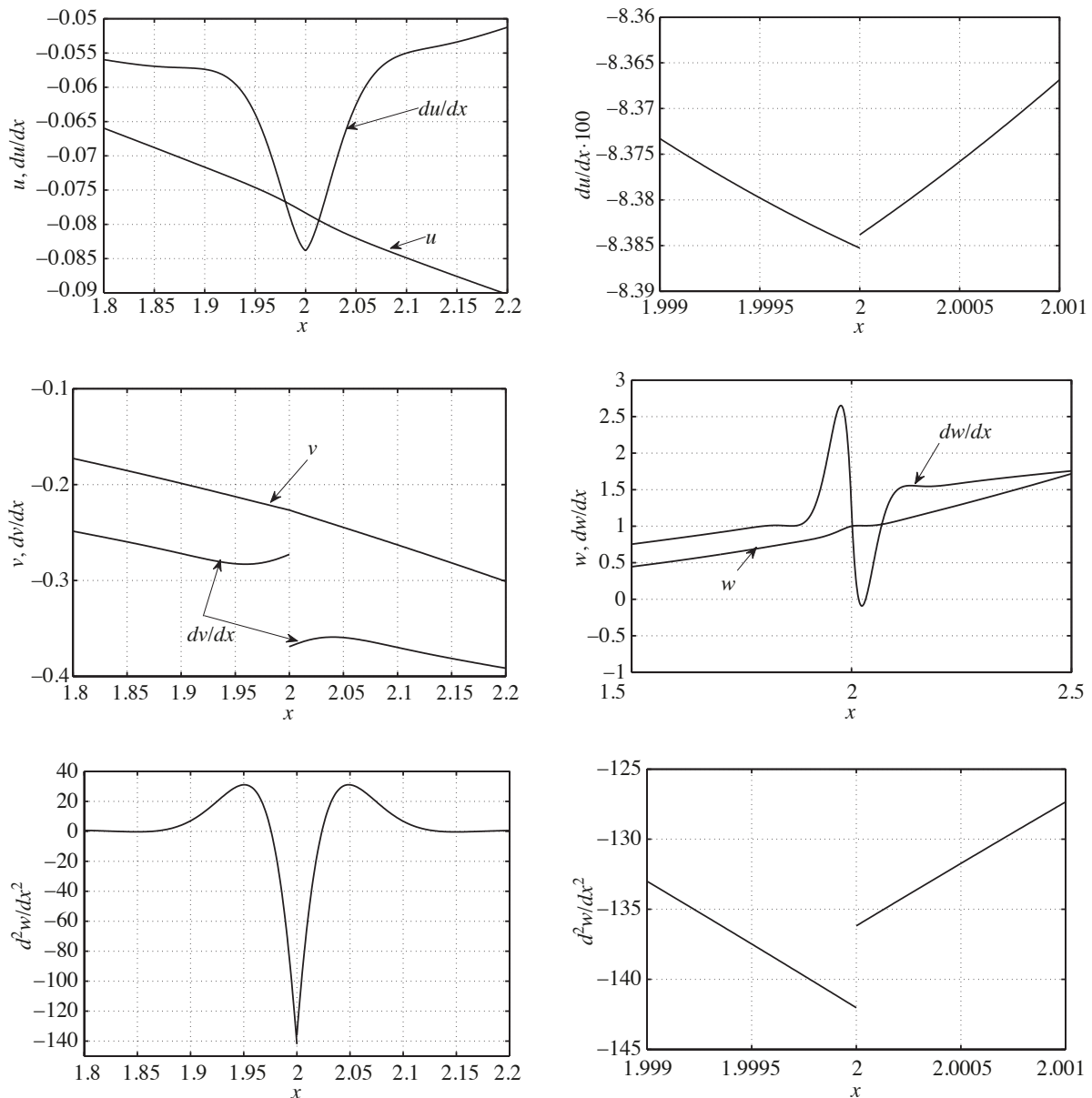
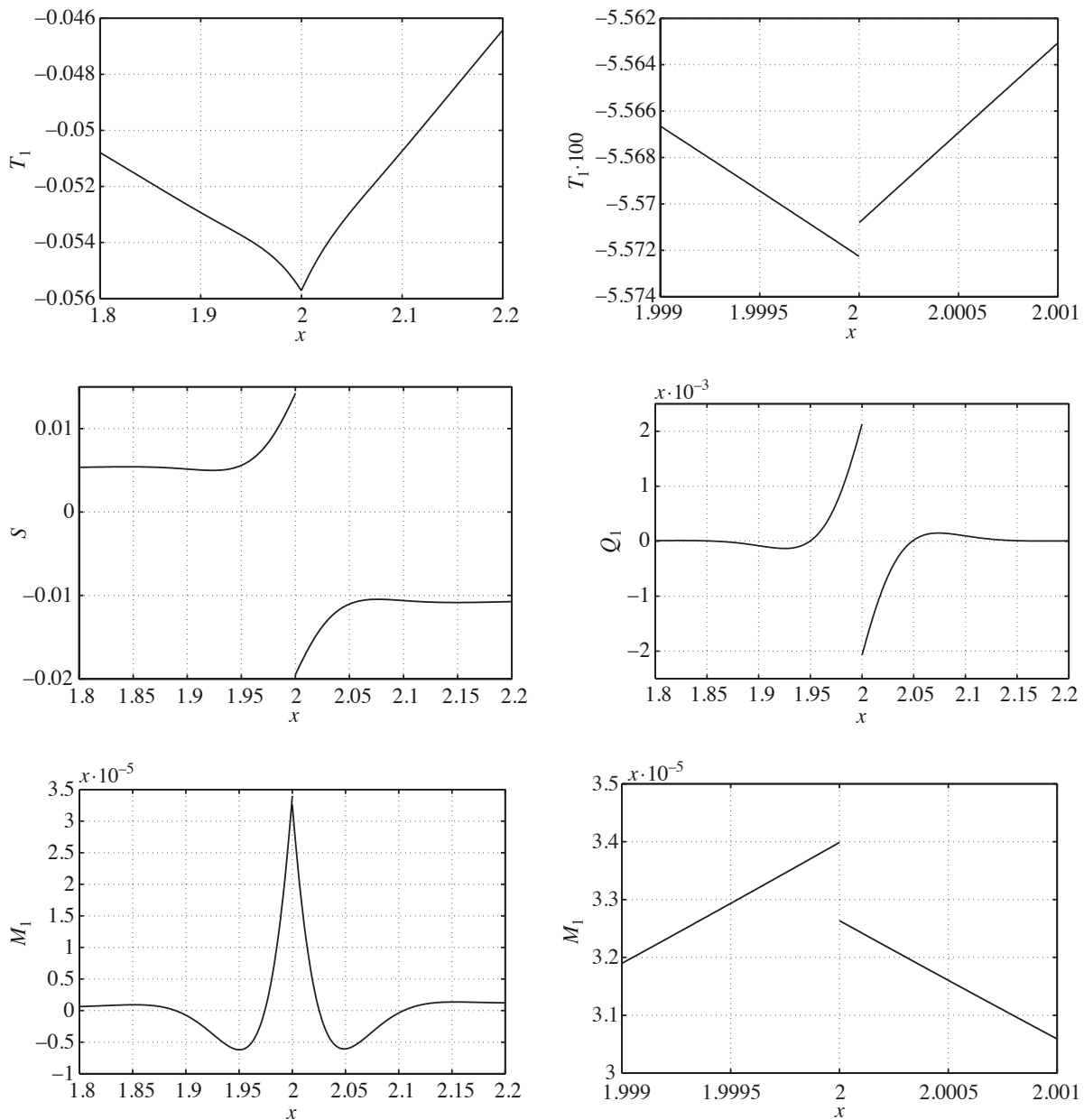


Рис. 2. Поведінка функцій $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ та їхніх похідних в околі кріплення ребра та оболонки.

На рис. 2 зображено поведінку функцій $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ та їхніх похідних в околі кріплення ребра та оболонки. З графіків випливає, що для перших похідних від функцій $u(x)$ і $v(x)$, а також для другої похідної від функції $w(x)$ у точці $x = \zeta$ існують розриви першого роду. Така поведінка від шуканих функцій впливає зі встановлених граничних умов (16). Привертає увагу та обставина, що у вузькому околі кріплення ребра до оболонки шукані розв'язки мають високі градієнти. Це пов'язано з наявністю малого параметра при старшій похідній у вихідній системі диференціальних рівнянь. Зменшення відносної товщини оболонки приводить до того, що розглядувана гранична задача переходить до розряду сингулярно збурених спектральних задач, для яких розв'язки мають високі граді-

Рис. 3. Поведінка функцій $T_1(x)$, $S(x)$, $M_1(x)$ і $Q_1(x)$ в околі кріплення ребра та оболонки.

енти у вузьких примежових зонах. Ця обставина значно ускладнює апроксимацію шуканих функцій. У зв'язку з цим для зниження порядку алгебраїчної системи (25) і для збереження стійкості обчислень при подальшому зменшенні відносної товщини оболонки клас допустимих функцій слід розширити функціями, що мають властивості типу крайового ефекту. Це можна зробити, скориставшись результатами роботи [11].

На рис. 3 зображено поведінку функцій $T_1(x)$, $S(x)$, $M_1(x)$ і $Q_1(x)$ в околі кріплення ребра та оболонки. З графіків видно, що наведені силові характеристики в точці $x = \zeta$ мають розриви першого роду і високу змінність у околі цієї точки.

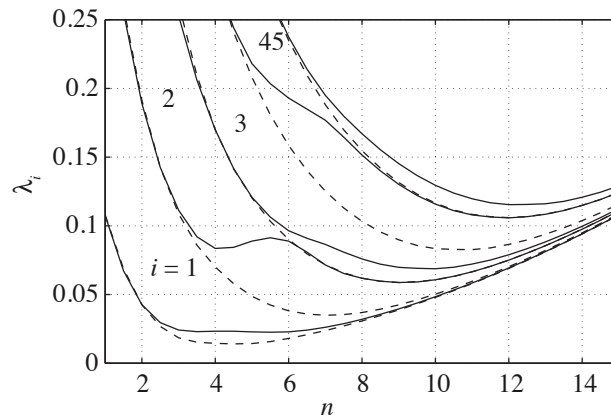


Рис. 4. Залежність перших п'яти власних частот коливань λ_i від числа хвиль у круговому напрямку оболонки n .

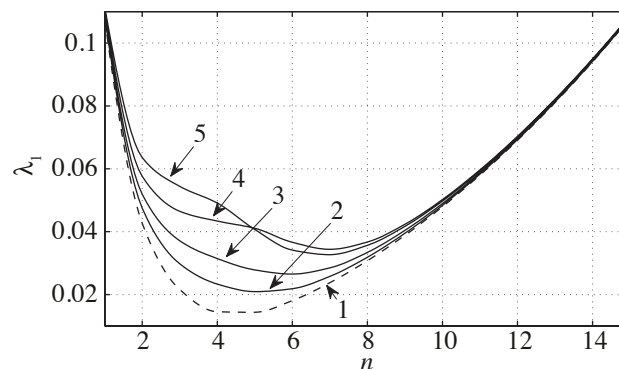


Рис. 5. Залежність першої частоти коливань λ_1 від місця розташування ребра жорсткості та числа хвиль у круговому напрямку оболонки n (1 — без ребра; 2 — $\zeta = 2$; 3 — $\zeta = 2,5$; 4 — $\zeta = 3$; 5 — $\zeta = 3,5$).

На рис. 4 наведено залежність перших п'яти власних частот коливань λ_i від числа хвиль у круговому напрямку оболонки n . Штрихові лінії тут і далі відповідають розрахункам для оболонки без приєднаного ребра жорсткості. Окремі точки для кожного значення n умовно з'єднані плавними лініями після проведення інтерполяції. Нумерація кривих проведена в порядку зростання значень λ .

Поведінка першої частоти λ_1 залежно від місця розташування ребра жорсткості та числа хвиль у круговому напрямку оболонки n зображена на рис. 5: (1 — без ребра; 2 — $\zeta = 2$; 3 — $\zeta = 2,5$; 4 — $\zeta = 3$; 5 — $\zeta = 3,5$).

Для порівняння з існуючими числовими даними роботи [5] проведено розрахунок коливань розглядуваної механічної системи з двома жорстко закріпленими торцями оболонки для випадків внутрішнього ($e = -0,00163$) та зовнішнього ($e = 0,00163$) кріплення ребра жорсткості при $\zeta = 2$. Згідно з роботою [5] для першого випадку $\lambda_1 = 0,08218$, для другого — $\lambda_1 = 0,07614$. Відповідні частоти, отримані на основі запропонованого підходу, набувають значень $\lambda_1 = 0,08222$ і $\lambda_1 = 0,07615$, що свідчить про задовільний збіг результатів. Також слід відзначити повний збіг графічних даних роботи [5] з розрахунками, одержаними у цій роботі.

Висновки. У цій статті запропоновано варіаційний метод розв'язування спектральної задачі про коливання тонкостінної циліндричної оболонки, яка підкріплена кільцевим ребром жорсткості малої ширини. При цьому враховується розривність поля зусиль і моментів на лінії кріплення ребра та оболонки. Розв'язки побудовано шляхом розбиття області визначення шуканих функцій на дві регулярні підобласті, де силові характеристики деформованої оболонки є неперервними і диференційовними. Побудова розв'язків цієї задачі спряження базується на формулюванні узагальненого функціонала в термінах переміщень оболонки, для якого досить складні граничні умови спряження є природними граничними умовами. Такий підхід забезпечує збіжність у рівномірній метриці розкладів Рітца для зусиль і моментів деформованої оболонки в усій замкненій області визначення шуканих функцій. Це дозволяє використовувати отримані результати при аналізі динамічної міцності конструкції.

Література

1. В. А. Заруцкий, *Теория и методы определения напряженно-деформированного состояния ребристых оболочек*, Прикл. механика, **36**, № 10, 3 – 24 (2000).
2. A. M. J. Al-Najafi, G. B. Warburton, *Free vibration of ring stiffened cylindrical shells*, J. Sound Vib., **13**, 9 – 25 (1970).
3. C. M. Wang, S. Swaddiwudhipong, J. Tian, *Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners*, J. Engrg. Mech., **123**, 134 – 142 (1997).
4. X. Qu, X. Chen, X. Long, H. Hua, G. Meng, *A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations*, Eur. J. Mech. A Solids, **37**, 200 – 215 (2013).
5. Ю. Ю. Швейко, А. Д. Брусиловский, *О собственных колебаниях цилиндрических оболочек, подкрепленных поперечными ребрами жесткости*, Расчеты на прочность, Вып. 15, 312 – 327 (1971).
6. В. З. Власов, *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*, Гостехиздат, Москва, Ленинград (1949).
7. В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судромгиз, Ленинград (1962).
8. G. D. Galletly, *On the in-vacuo vibrations of simply supported, ring-stiffened cylindrical shells*, U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., № 2, 225 – 231 (1965).
9. Yu. V. Trotsenko, *Determination of the frequencies and modes of natural oscillations of liquids in composed vessels*, J. Math. Sci., **215**, № 3, 345 – 407 (2016).
10. Yu. V. Trotsenko, *Determination of elastic shells of revolution partially filled with ideal liquid*, J. Math. Sci., **229**, № 4, 470 – 486 (2018).
11. V. A. Trotsenko, Yu. V. Trotsenko, *Solution of the problem of the oscillations of a nonclosed shell of revolution under the conditions of singular perturbations*, Nonlinear Oscil. (N. Y.), **8**, № 3, 414 – 429 (2005).

Одержано 20.04.22,

після доопрацювання — 28.04.22