

МОДЕЛЬ КОНФЛІКТНОГО СОЦІУМУ З ЕФЕКТАМИ ЗОВНІШНЬОГО ВПЛИВУ

Т. В. Каратаєва

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: karat@imath.kiev.ua

В. Д. Кошманенко

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова

вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна

e-mail: koshman63@gmail.com

A mathematical model of an abstract society with redistributions of individual social energy, which is determined by two factors, namely, the mutual competition and the inflow of external influence, is studied. The behavior of our model is described by fairly simple iterative equations that generate a dynamic system with discrete time. Fixed points of the system are found. For those of them that are attractors, their pools are partially described. In the general case, we prove the convergence of trajectories to equilibrium states. In particular, we show that individuals with the highest initial energy are doomed to defeat if some weaker one receives a strong enough external support. Four examples are discussed to illustrate the most interesting effects of the external influence on the dynamics of competition between individuals of an abstract society.

Досліджується математична модель абстрактного суспільства, в якій перерозподіл соціальної енергії індивідів визначається двома факторами — взаємною конкурентною боротьбою та надходженням зовнішнього впливу. Поведінка цієї моделі описується досить простими ітераційними рівняннями, які генерують динамічну систему з дискретним часом. Знайдено нерухомі точки системи. Для тих із них, які є атракторами, частково описано їхні басейни. У загальному випадку доведено збіжність траєкторій до рівноважних станів. Показано, що індивіди з найбільшою початковою енергією приречені на поразку, якщо деякий слабший отримує досить сильну зовнішню підтримку. Наведено чотири приклади для ілюстрації найбільш цікавих ефектів зовнішнього впливу на динаміку конкуренції між індивідами абстрактного суспільства.

1. Вступ. У цій роботі продовжено дослідження математичної моделі конфліктного соціуму, розпочаті в [1] (див. також [2–7]). Зазначена модель описує перерозподіл соціальної енергії між індивідами абстрактного суспільства під дією двох факторів: взаємної конкурентної боротьби та зовнішнього впливу. Фактично, ми досліджуємо поведінку складної динамічної системи з довільною кількістю відносно подібних між собою елементів, які ведуть боротьбу за свій умовно енергетичний статус. У різних термінах і за допомогою специфічного вигляду динамічних рівнянь аналогічні системи інтенсивно вивчаються та моделюються вже понад 40 років (наведемо лише деякі публікації: [8–33]). Особливу популярність мають дослідження моделей соціальних мереж, стимульовані роботою [11]. А численні моделі формування поглядів та переконань (див., наприклад, [21–24]) мають не лише теоретичний інтерес, а й викликають практичне зацікавлення для передбачень політичних рейтингів та результатів виборів. Класичні підходи [15, 16] набувають несподіваного розвитку

© Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, 2021

[12 – 14, 18, 19] поза межами загальних теорій [17, 21, 31, 32]. Але математична складність не сприяє широким застосуванням. Для справжнього успіху потрібно знайти прості формули, типу рівнянь Лотки – Вольтерри, з глибоким універсальним змістом. Для моделей типу соціальних мереж цю проблему ще не розв’язано. Хоча для фізичних моделей типу квантових графів або мереж фазових осциляторів [34 – 36] вигляд динамічних рівнянь уже визначений і проблеми виникають при дослідженні поведінки конкретних моделей різного класу.

У роботах [27, 28] (див. також [8]) запропоновано абстрактний підхід до опису конфліктної взаємодії між довільною кількістю опонентів у термінах ймовірнісних розподілів на спільному просторі існування. На основі такого підходу побудовано ряд досить реалістичних моделей: [1, 5, 6, 9, 10] (див. також детальний виклад у [29]). Ключова формула конфліктної взаємодії в нашому підході ґрунтується на класичній теоремі Баєса про умовну ймовірність. Ітерація формули Баєса в дискретному часі породжує динаміку станів складної системи в термінах ймовірнісних розподілів. При цьому ми удосконалюємо наш підхід введенням фактору зовнішнього впливу. З цієї причини система стає неавтономною і, як наслідок, кардинально змінюється початкова ієрархія домінувань індивідуальних пріоритетів, що приводить до значно складнішого закону визначення остаточного переможця у конфліктній боротьбі. Асимптотична поведінка стає менш передбачуваною, а досягнення рівноважних станів забирає багато часу.

Але, незважаючи на велику кількість варіантів упорядкування взаємних залежностей та домінувань між елементами системи, яке чутливо змінюється під дією зовнішнього впливу, асимптотичний стан у більшості випадків має типовий характер — перемогу одержує лише один індивід, не обов’язково початково найсильніший.

Від вигляду рівнянь залежить лише локальна поведінка, тип нерухомих точок та циклічних орбіт, якщо останні існують. Тому для опису закону конфліктної взаємодії ми використовуємо досить прості різницеві рівняння. При фіксації початкових даних динаміка стає фактично детермінованою. Але включення зовнішнього впливу здатне все змінити. У цьому полягає основне спостереження роботи. Використання зовнішнього ресурсу набуває вирішального значення. Індивід з достатньо великим систематичним енергетичним підживленням стає домінуючим у суспільстві.

Відзначимо, що в роботі [7] ми досліджували роль параметра інтенсивності конфліктної взаємодії, зокрема, встановили цікавий факт: зменшення параметра конфліктності здатне забезпечити виживання навіть спочатку найслабшому індивіду. Тут ми виявляємо і демонструємо нові ефекти, спричинені зовнішнім впливом. Під ним ми розуміємо адитивні зсуви соціальних статусів (енергетичних рівнів) індивідів. Аналітично доводимо та ілюструємо комп’ютерними прикладами, що при введенні зовнішнього впливу еволюційна динаміка може кардинально відрізнятися від випадків із суто внутрішньою боротьбою, при цьому асимптотика граничних розподілів істотно змінюються. Типовий принцип конфліктної боротьби, коли “переможець забирає все”, при урахуванні зовнішніх впливів модифікується: визначення переможця залежить від тонкого балансу між початковим ресурсом та величиною зовнішнього впливу. Ми описуємо різні режими поведінки в термінах траєкторій динамічних систем конфлікту та встановлюємо умови існування рівноважних (нерухомих) станів, знаходимо їхній явний вигляд.

2. Опис моделі. Нехай $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m$, $1 < m < \infty$, позначає множину подібних елементів (індивідів) абстрактного суспільства (соціуму). Кількість елементів a_i скінченна і як завгодно велика.

У кожен момент дискретного часу $t = 0, 1, \dots$ стан системи задається нормованим

вектором $\mathbf{p}^t \in \mathbb{R}_1^m$ (індекс 1 означає нормованість на одиницю, а $m \geq 2$ — кількість невід’ємних координат:

$$\mathbf{p}^t = (p_1^t, \dots, p_m^t), \quad p_1^t + \dots + p_i^t + \dots + p_m^t = 1, \quad p_i^t \geq 0$$

(залежність від часу вектора та його координат позначаємо верхнім індексом). Значення координати характеризує соціальний статус (запас соціальної енергії) відповідного індивіда a_i . Внаслідок конкурентної та конфліктної боротьби, а також зовнішнього впливу цей статус змінюється:

$$\mathbf{p}^t \xrightarrow{*} \mathbf{p}^{t+1}, \quad \mathbf{p}^{t=0} = \mathbf{p}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

де відображення $*$ позначає фіксований закон конфліктної взаємодії та зовнішнього впливу (див. далі формули (2), (3)).

Далі припускаємо, що абстрактне суспільство $\mathcal{A}$ є цілком конфліктним. Це означає, що оточення кожного індивіда a_i , тобто множина всіх інших індивідів $\mathcal{A}_i^\perp := \{a_k\}_{k \neq i}$, є для нього конкурентом або опонентом. Отже, в нашій моделі виконується принцип — “кожен сам за себе і проти всіх”. Тоді соціальна енергія конкурента для a_i визначається як середнє значення енергій усіх індивідів із оточення $\mathcal{A}_i^\perp$. Фактично тут використовується відомий метод середнього поля (див. [7]). Отже, в початковий момент часу вектору індивідуальних енергій $\mathbf{p}$ протистоїть вектор енергій усереднених оточень:

$$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m), \quad r_i = \frac{\sum_{k \neq i} p_k}{m-1} = \frac{1-p_i}{m-1} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m r_i = 1.$$

Покладаємо, що еволюцією змін керують різниці рівняння

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1-r_i^t) + b_i^t}{z^t}, \quad p_i^0 = p_i, \quad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

де $0 \leq b_i^t < 1$ позначають величини зовнішнього впливу, задані адитивними зсувами координат. Нормувальний знаменник z^t забезпечує стохастичність вектора $\mathbf{p}^t$. Аргументацію, чому саме такого вигляду рівняння ми беремо за основу закону динаміки, можна знайти в роботах [7, 33].

Далі ми використовуємо трохи інші, асимптотично еквівалентні рівняння

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1+\theta^t-r_i^t) + b_i^t}{z^t}, \quad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

де

$$\theta^t = (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t) = \frac{1}{m-1} (1 - \|\mathbf{p}^t\|^2), \quad z^t = 1 + \sum_k b_k^t.$$

Динамічна система, породжена рівняннями (1), називається динамічною системою конфлікту (ДСК) абстрактного суспільства із зовнішніми впливами. Задача цієї статті полягає у дослідженні поведінки траєкторій ДСК залежно від початкових значень координат p_i та величин зовнішнього впливу b_i^t .

Усюди далі покладаємо, що зовнішні впливи (вони задані доданками b_i^t) є пропорційними індивідуальним енергіям індивідів:

$$b_i^t = b_i p_i^t, \quad 0 \leq b_i < 1 \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Отже, зовнішній вплив на систему задається вектором $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, координати b_i якого визначають пропорційну величину зовнішньої енергії (ресурсу) акумульовану елементом суспільства a_i в кожен момент часу. При цьому формули (1) набувають такого вигляду:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t \left(1 + \frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + b_i \right)}{z^t}, \quad z^t = 1 + \sum_{k=1}^m b_k p_k^t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Вводячи позначення

$$\gamma_i^t := \frac{p_i^t}{m-1} + b_i, \quad B^t := \sum_{k=1}^m b_k p_k^t,$$

перепишемо (2) у вигляді

$$p_i^{t+1} = p_i^t c_i^t, \quad c_i^t = \frac{1 - \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + \gamma_i^t}{1 + B^t}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

де коефіцієнти c_i^t задають швидкість зміни енергетичного статусу індивідів абстрактного суспільства. Всі вони за побудовою, як неважко переконалися, є строго додатними: $c_i^t > 0$.

Із формул (3) видно, що статус індивіда a_i зростає, тобто виконується нерівність $p_i^{t+1} > p_i^t$, лише якщо $c_i^t > 1$. Введемо важливу величину

$$\xi^t := \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + B^t.$$

Тоді умову $c_i^t > 1$, або еквівалентну їй $\gamma_i^t - \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} > B^t$, можна переписати у вигляді нерівності

$$\gamma_i^t > \xi^t. \quad (4)$$

Нерівність (4) визначає критерій успішного розвитку індивіда a_i у конфліктному суспільстві, тобто зростання його енергетичного статусу, $p_i^{t+1} > p_i^t$. Внаслідок конкуренції та зовнішнього впливу нерівність (4) може змінитися на протилежну і статус відповідного індивіда почне спадати. В цілому, динамічна картина перерозподілу енергетичних статусів усіх індивідів a_i є досить складною, вона істотно залежить від величин b_i , які мають стратегічне значення.

3. Нерухомі точки. У цьому пункті ми шукаємо нерухомі точки ДСК, породжені формулами (3). Їм відповідають вектори $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^m$, координати яких не змінюються під дією динамічної системи. Існування та вигляд нерухомих станів істотно залежать від значень зовнішніх впливів b_i .

Позначимо через $\mathbf{p}^C$ вектор з координатами $p_i^C = 1/m \ \forall i$. Якщо всі зсуви однакові, $b_i = b$, то неважко перевірити, що вектор $\mathbf{p}^C$ є нерухомою точкою динамічної системи. При цьому треба врахувати, що $\gamma_i = 1/m + b = \gamma$ не залежить від індексу координати, всі c_i однакові й дорівнюють одиниці, а також, що норма $\|\mathbf{p}^C\|_1 = 1/m$.

Щоб знайти інші нерухомі точки, проведемо деякий аналіз. З формули (3) очевидно, що вектор $\mathbf{p}^*$ з ненульовими координатами, $p_i^* > 0 \ \forall i$, утворює нерухому точку системи тоді й лише тоді, коли всі $c_i = 1$.

Твердження 1. *Необхідною і достатньою умовою нерухомості точки $\mathbf{p}^*$ із строго додатними координатами та зсувами*

$$p_i^* > 0, \quad b_i > 0 \quad \forall i$$

є виконання рівностей

$$\gamma_i^* = \frac{p_i^*}{m-1} + b_i = \gamma_j^* = \frac{p_j^*}{m-1} + b_j \quad \forall i, j \in \overline{1, m}. \quad (5)$$

Доведення. З (5) випливає, що всі

$$c_i^* := \frac{1 - \frac{\|\mathbf{p}^*\|^2}{m-1} + \gamma_i^*}{1 + \sum_k p_k^* b_k} \quad \forall i \in \overline{1, m}$$

однакові та дорівнюють одиниці:

$$c_i^* = c_j^* = 1 \quad \forall i, j \in \overline{1, m}. \quad (6)$$

Тому, підставляючи координати вектора $(\mathbf{p}^*)^t$ у рівняння (3), переконуємося, що вони не змінюється з часом. Навпаки, якщо виконуються умови нерухомості (6), то це можливо, лише якщо справедливі рівності (5).

Виявляється, що залежно від розмірності системи, тобто цілого числа m , та значень b_i , кількість і вигляд нерухомих векторів змінюється. Розглянемо конкретні випадки.

3.1. Випадок $m = 2$. Якщо $m = 2$, то формули (3) мають вигляд

$$p_i^{t+1} = p_i^t c_i^t, \quad c_i^t = \frac{1 - (p_1^t)^2 - (p_2^t)^2 + \gamma_i^t}{1 + p_1^t b_1 + p_2^t b_2}, \quad i = 1, 2, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

де $\gamma_1^t = p_1^t + b_1$, $\gamma_2^t = p_2^t + b_2$.

Якщо $b_1 = b_2 = b \geq 0$, то вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^2$ з координатами $p_1 = 1/2 = p_2$ буде нерухомим, оскільки тоді $c_1 = c_2 = 1$. Цей вектор як нерухому точку динамічної системи позначаємо через $\mathbf{p}^C$. Ця точка є не стійкою. При найменшому відхиленні від рівноваги, $p_1 = 1/2 \pm \varepsilon$, $p_2 = 1/2 \mp \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, траєкторія $\mathbf{p}^t$ збігається до одного зі стійких нерухомих станів: $\mathbf{p}^\infty = (1, 0)$ або $\mathbf{p}^\infty = (0, 1)$ (див. далі твердження 3). Так само ця точка не стійка при зміні рівності $b_1 = b_2$ на нерівність.

Рівняння $c_1^t = c_2^t = 1$ для коефіцієнтів у формулах (7) мають ще один розв'язок у термінах координат векторів із простору $\mathbb{R}_1^2$. А саме, будемо позначати через $\mathbf{p}^*$ вектори з координатами

$$p_1^* = 1/2(1 + b_2 - b_1), \quad p_2^* = 1/2(1 + b_1 - b_2)$$

при умові $|b_2 - b_1| \leq 1$. Неважко переконатися, що всі такі вектори є нерухомими точками динамічних рівнянь (7).

При $b_1 \neq b_2$, $b_1, b_2 > 0$, існують інші нерухомі точки. Дійсно, якщо для координат початкового вектора $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^2$ справджуються рівності $p_1 = b_2$, $p_2 = b_1$ (зрозуміло, що це можливо, лише якщо $b_1 + b_2 = 1$), тоді $\gamma_1 = \gamma_2$ і, як легко переконатися, $c_1^t = c_2^t = 1$. Тому

$$p_1^t = p_1 = b_2, \quad p_2^t = p_2 = b_1, \quad t \geq 1.$$

Кожен вектор, координати якого визначаються по зсувам рівностями $p_1 = b_2$, $p_2 = b_1$, позначаємо $\mathbf{p}^{**}$. Змінюючи b_1 по відкритому інтервалу від нуля до одиниці, одержуємо континуальну множину векторів $\mathbf{p}^{**}$, які є нерухомими точками для рівнянь (7).

Твердження 2. При $m = 2$ траєкторія $\mathbf{p}^t$, що починається з довільної точки $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^2$, $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, яка не є однією з нерухомих точок типу $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$, тобто виконується умова $p_1 + b_1 = \gamma_1 \neq \gamma_2 = p_2 + b_2$, збігається до одного з локальних одноточкових атракторів:

$$\Gamma_\infty = \left\{ \mathbf{p}_{1,0}^\infty = (1, 0), \mathbf{p}_{0,1}^\infty = (0, 1) \right\}.$$

А саме, до $\mathbf{p}_{1,0}^\infty$, якщо $\gamma_1 > \gamma_2$, або до $\mathbf{p}_{0,1}^\infty$, якщо $\gamma_1 < \gamma_2$.

Доведення. Якщо $\gamma_1 < \gamma_2$, то це приводить до нерівностей $c_1 < 1 < c_2$, оскільки $p_1 c_1 + p_2 c_2 = 1$. Тоді згідно з (7) одержуємо $c_1 p_1 = p_1^1 < p_1$, $p_2 < c_2 p_2 = p_2^1$. Тому $\gamma_1^1 = p_1^1 + b_1 < \gamma_2^1 = p_2^1 + b_2$.

Отже, $\gamma_1^1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_2^1$. За індукцією, координата p_1^t буде монотонно спадати, а p_2^t — зростати. В результаті,

$$p_1^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_1^t = 0, \quad p_2^\infty = 1.$$

Аналогічно, якщо $\gamma_1 > \gamma_2$, то

$$p_1^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_1^t = 1, \quad p_2^\infty = 0.$$

Легко бачити, що кожна точка з Γ_∞ є стійким локальним атрактором.

Твердження 3. ДСК із зовнішніми впливами, задана формулами (7), має дві множини нерухомих точок: множину Γ_∞ , яка складається з двох одноточкових атракторів, та континуальну множину репелерів,

$$\Gamma_0 = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^2 \mid \mathbf{p}^C, \mathbf{p}^*, \mathbf{p}^{**} \}.$$

При цьому точка $\mathbf{p}$ належить Γ_0 тоді й лише тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2$. Це трапляється в трьох випадках:

- 1) $\mathbf{p} = \mathbf{p}^C$, коли $b_2 = b_1 \geq 0$, а $p_1 = p_2 = 1/2$;
- 2) $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$, коли $|b_2 - b_1| \leq 1$, а $p_1^* = 1/2(1 + b_2 - b_1)$, $p_2^* = 1/2(1 + b_1 + b_2)$;
- 3) $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{**}$, коли $b_2 \neq b_1$, $b_1, b_2 > 0$, $b_2 + b_1 = 1$, а $p_1^{**} = b_2$, $p_2^{**} = b_1$.

Доведення. У кожному з трьох випадків виконується умова $\gamma_1 = \gamma_2$. Це згідно з (7) забезпечує рівність $c_1 = c_2 = 1$. Тому $p_1^1 = p_1$, $p_2^1 = p_2$. За індукцією, така ж рівність виконується для всіх $t \geq 0$, що означає нерухомість точки $\mathbf{p}$ в усіх випадках.

Усі точки з Γ_0 є репелерами. Дійсно, при найменшому збуренні будь-якої нерухомої точки з множини Γ_0 виникає нерівність $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Тоді згідно з твердженням 2 траєкторія буде збігатися до одного з атракторів в Γ_∞ .

3.2. Випадок $m = 3$. У випадку $m = 3$ спектр нерухомих точок, як показано далі, розширюється. Згідно з (3) динаміка системи задається трьома рівняннями

$$p_i^{t+1} = p_i^t c_i^t, \quad c_i^t = \frac{1 - 1/2 \|\mathbf{p}^t\|^2 + \gamma_i^t}{1 + p_1^t b_1 + p_2^t b_2 + p_3^t b_3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

де $\gamma_i^t = p_i^t/2 + b_i$. Вектор з $\mathbb{R}_1^3$, який має однакові координати, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$, як і вище позначаємо через $\mathbf{p}^C$. Відповідний стан буде нерухомим, лише якщо всі зсуви однакові $b_1 = b_2 = b_3 = b \geq 0$. Дійсно, очевидно, що всі величини γ_i , $i = 1, 2, 3$, однакові, а тому коефіцієнти $c_i = 1$. Цей стан не стійкий. При його збуренні траєкторія $\mathbf{p}^t$ збігається (див. далі твердження 4) до одного з шести граничних станів:

$$\mathbf{p}_{0,0,1}^\infty = (0, 0, 1), \quad \mathbf{p}_{0,1,0}^\infty = (0, 1, 0), \quad \mathbf{p}_{1,0,0}^\infty = (1, 0, 0) \quad (9)$$

або

$$\mathbf{p}_{0,0,5,0,5}^{\infty} = (0, 0,5, 0,5), \quad \mathbf{p}_{0,5,0,0,5}^{\infty} = (0,5, 0, 0,5), \quad \mathbf{p}_{0,5,0,5,0}^{\infty} = (0,5, 0,5, 0). \quad (10)$$

Окрім точки $\mathbf{p}^C$, рівняння (8) припускають існування ще трьох серій нерухомих точок $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$ та $\mathbf{p}_1^{0**}$ при відповідних додаткових умовах на зсуви b_i .

Так, при умові

$$b_i < B/3 + 1/6, \quad B = b_1 + b_2 + b_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

точка $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_1^3$ з додатними координатами

$$p_i^* = 1/3 + 2/3 B - 2b_i,$$

як легко перевірити, буде нерухомою. Таких точок — континуальна кількість.

Наведемо конкретний приклад нерухокої точки типу $\mathbf{p}^*$. Нехай $b_1 = 3/18$, $b_2 = 6/18$, $b_3 = 8/18$, $B = 17/18 < 1$. Тоді згідно з наведеними вище формулами нерухома точка має координати $p_1^* = 34/54$, $p_2^* = 16/54$, $p_3^* = 4/54$.

Третя серія нерухомих точок для системи рівнянь (8) виникає, якщо зсуви задовольняють умову $B = b_1 + b_2 + b_3 = 1/4$. Тоді безпосередня перевірка показує, що вектор $\mathbf{p}^{**}$ з координатами

$$p_i^{**} = 2 \sum_{j \neq i} b_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

також є нерухомою точкою для (8). Далі показано, що ця точка є нестійким репелером. Але якщо припустити використання від'ємних зсувів, то можливо існують траєкторії, збіжні до цієї точки.

Зрозуміло, що всі точки типу $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$ є нестійкими, найменше їхнє збурення приводить до траєкторій, що збігаються до однієї з нерухомих точок вигляду (10) або (9), які є локально стійкими атракторами.

Якщо шукати нерухомі точки в $\mathbb{R}_1^3$ з однією нульовою координатою, то при додаткових умовах на зсуви виникає ще одна серія нерухомих станів. Відповідні вектори позначимо через $\mathbf{p}^{0**}$. Оскільки одна з координат такого вектора дорівнює нулю, $p_{i_1} = 0$, то умови нерухомоті зводяться до одного рівняння: $\gamma_{i_2} = p_{i_2}/2 + b_{i_2} = \gamma_{i_3} = p_{i_3}/2 + b_{i_3}$. З нього знаходимо дві інші координати:

$$p_{i_2} = 1/2 + b_{i_3} - b_{i_2}, \quad p_{i_3} = 1/2 + b_{i_2} - b_{i_3}.$$

При $b_{i_3} > b_{i_2}$ обов'язково $p_{i_3} < p_{i_2}$ і $b_{i_3} - b_{i_2} < 1/2$. Перестановки координат додають кількість такого типу нерухомих векторів. Питання, чи мають вони непорожні басейни притягання, чи вони є ізольованими репелерами, — відкриті.

Твердження 4. Нехай вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^3$ не є нерухомою точкою одного з описаних вище типів, $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$, $\mathbf{p}^{0**}$, і всі його координати є строго додатними. Тоді траєкторія $\mathbf{p}^t$, яка починається з цієї точки і задана рівняннями (8), збігається до граничної нерухокої точки $\mathbf{p}^{\infty}$ вигляду (9) або (10). А саме: (9) у двох випадках, якщо всі зсуви попарно різні, $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_1$, або якщо $b_1 = b_2 = b_3$ і лише одна координата $p_i > 1/3$ (тоді саме ця координата і буде прямувати до 1); (10), якщо $b_1 = b_2 = b_3$ і лише одна з початкових координат є строго меншою за $1/3$, а дві інші рівні.

Доведення. Існування граничного вектора $\mathbf{p}^\infty$ в загальному випадку впливає з того, що координата, яка відповідає максимальному значенню величини γ_i^t , позначаємо її $\gamma_{\max}^t$, монотонно зростає, а координата, відповідна до мінімального значення цієї ж величини, — монотонно збігається до нуля (цей факт встановлено для довільного m у наступному пункті, теорема 1). Отже, завдяки збіжності до нуля координати, відповідної до величини $\gamma_{\min}^t$, граничним вектором не може стати жоден із векторів типу $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$. Питання про існування траєкторій, збіжних до граничного вектора типу $\mathbf{p}^{0**}$, відкрите.

Якщо $b_1 = b_2 = b_3$, одна координата менша за $1/3$, а дві інші рівні, то, як легко зрозуміти, на границі з необхідністю виникає одна з граничних точок вигляду (10). Так само очевидна поява на границі однієї з точок вигляду (9), якщо лише одна координата $p_i > 1/3$ і всі зсуви однакові.

Розглянемо випадок, коли пара зсувів і пара початкових координат однакові. Тобто, не втрачаючи загальності, покладемо $p_1 < p_2 = p_3$, $b_2 = b_3$. Якщо $b_1 < b_2 = b_3$, то $\gamma_1 < \gamma_2 = \gamma_3$. Тоді, очевидно, $p_1^t \rightarrow 0$, $p_2^t \rightarrow 1/2$, $p_3^t \rightarrow 1/2$. Але якщо $b_1 > b_2 = b_3$ є таким, що $2(b_1 - b_2) > p_2 - p_1$, то $\gamma_1 > \gamma_2 = \gamma_3$. Тому $c_1 > c_2 = c_3$ і, автоматично, $c_1 > 1$, $c_2 = c_3 < 1$. На першому кроці координата p_1 зростає, а дві інші — спадають. Якщо це буде продовжуватися до моменту, коли $p_1^t > 1/3$, тоді $p_1^t \rightarrow 1$, $p_2^t \rightarrow 0$, $p_3^t \rightarrow 0$.

Отже, при $b_2 = b_3$, $p_2 = p_3$ вирішальним є знак різниці $\Delta_{12}(\gamma^t) = \gamma_1^t - \gamma_2^t$ незалежно від того, яка з координат p_1^t , $p_2^t = p_3^t$ більша чи менша. Якщо цей знак додатний, $\Delta_{12}(\gamma^t) > 0$, то $\mathbf{p}^t \rightarrow (1, 0, 0)$, $t \rightarrow \infty$, а якщо від'ємний, $\Delta_{12}(\gamma) < 0$, то $\mathbf{p}^t \rightarrow (0, 1/2, 1/2)$, $t \rightarrow \infty$.

Коли ж усі координати та зсуви попарно різні, тоді ситуація складніша, але граничною точкою стане одна з множини (9), хоча невідомо, яка саме з координат збігається до одиниці. Якщо $\gamma_{\max} = \gamma_i = p_i/2 + b_i$, де $p_i > 1/3$, то $c_i > 1$. Припустимо, що два інші коефіцієнти $c_k < 1$, $k \neq i$. Тоді, згідно з (8), i -та координата зростає, $p_i^1 > p_i > 1/3$, і тому $\gamma_{\max}^1 = \gamma_i^1 = p_i^1/2 + b_i$, $c_i^1 > 1$. Якщо виявиться, що $c_k^1 < 1$, $k \neq i$, то на другому кроці ситуація повторюється. За індукцією, саме координата p_i^t буде монотонно зростати до одиниці, а $p_k^t \rightarrow 0$, $k \neq i$. Інше неможливе, тому що завжди $c_k^t < 1 < c_i^t$. Взагалі, якщо одна із координат p_k , $k \neq i$, позначимо її $p_{k'}$, є більшою, $p_{k'} > p_i$, то може статися, що відповідний коефіцієнт $c_{k'} > 1$ (ця ситуація може виникнути, не зважаючи на нерівність $\gamma_{k'} < \gamma_i = \gamma_{\max}$). Тоді на якомусь кроці (можливо навіть на другому), початкове впорядкування, $\gamma_k < \gamma_{k'} < \gamma_i$, може змінитися на таке: $\gamma_k^t < \gamma_i^t < \gamma_{k'}^t$. У цьому випадку саме координата $p_{k'}^t$ прямує до одиниці при $t \rightarrow \infty$ (впорядкування величин $\gamma_{k'}^t$, γ_i^t може змінитися лише один раз).

Чи можлива ситуація, коли $\gamma_{k'} < \gamma_i$, $c_{k'}^t > 1 \ \forall t \geq 1$, є відкритим питанням. У такому випадку обидві координати $p_{k'}$, p_i монотонно зростали б і граничною точкою став би вектор типу $\mathbf{p}^{0**}$.

3.3. Випадок довільної розмірності m . Для динамічних систем із довільною кількістю індивідів виникають ті ж самі типи нерухомих точок, а саме: $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$, $\mathbf{p}^{0**}$, де останній тип включає в себе всі нерухомі вектори, які мають нульові координати і їхня кількість не перевищує $m - 2$.

Із твердження 1 знаходимо загальний вигляд серії нерухомих точок типів $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$.

Твердження 5. Для ДСК довільної розмірності $m > 1$ у випадку строго додатних зсувів, $b_i > 0 \ \forall i$, які задовольняють умову

$$b_i \leq \frac{B}{m} + \frac{1}{m(m-1)}, \quad (11)$$

вектор $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_1^m$ із додатними координатами утворює нерухому точку, якщо його координати припускають зображення

$$p_i^* = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} B - (m-1)b_i, \quad B := \sum_{j=1}^m b_j. \quad (12)$$

Доведення. Згідно з (5) координати нерухомої точки пов'язані співвідношенням

$$p_k^* = p_i^* + (m-1)(b_i - b_k), \quad k \neq i.$$

Звідси, користуючись умовою стохастичності

$$1 = \sum_k p_k^* = m p_i^* + m(m-1)b_i - (m-1)B,$$

знаходимо для p_i^* зображення (12). Необхідність виконання умови на відхилення b_i від середнього значення (11) безпосередньо випливає з формули (12) та додатності координат p_i^* .

У випадку, коли всі b_i однакові, $b_i = b > 0$, тоді автоматично всі $p_i^* = 1/m$, і точка $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^C$.

Роль умови (11), тобто “концентрованість” зсувів b_i біля середнього значення B/m , можна проілюструвати на прикладі. Припустимо $B = 1$. Тоді, якщо зсув b_i порушує умову (11) (це означає, що $b_i > 1/(m-1)$), то, як легко перевірити, координата p_i завдяки зображенню (12) має бути від'ємною. Цікаво відзначити, що вектор із такою координатою буде також нерухомим.

Варто також зауважити, що координата $p_i^* < 1/m$, якщо $b_i > B/m$, та $p_i^* > 1/m$, якщо $b_i < B/m$. Щоб у цьому переконатися, треба переписати формулу (12) у вигляді рівності $p_i^* = \frac{1}{m} + (m-1)\left(\frac{B}{m} - b_i\right)$, з якої і випливають наведені оцінки.

Серія нерухомих точок типу $\mathbf{p}^{**} = (p_1^{**}, \dots, p_m^{**})$, $p_i^{**} > 0$, для рівняння (2) виникає при додаткових умовах на зсуви.

Твердження 6. Нехай усі значення зсувів строго додатні, $b_i > 0$, і задовольняють умову

$$B = \sum_i b_i = \frac{1}{(m-1)^2}. \quad (13)$$

Тоді вектор $\mathbf{p}^{**}$ з координатами

$$p_i^{**} = (m-1) \sum_{j \neq i} b_j \quad \forall i \quad (14)$$

є нерухомою точкою для динамічних рівнянь (2).

Доведення. Нагадаємо вигляд рівнянь (2):

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t \left(1 + \frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + b_i \right)}{z^t}, \quad (15)$$

де $z^t = 1 + B^t = 1 + \sum_k b_k p_k^t$. З (15) бачимо, що кожна з координат p_i^{**} нерухомого вектора $\mathbf{p}^{**}$ має задовольняти рівність

$$\frac{p_i^{**}}{m-1} - \frac{1}{m-1} \|\mathbf{p}^{**}\|^2 + b_i = \sum_{j=1}^m b_j p_j^{**}.$$

Отже, маємо

$$\frac{p_i^{**}}{m-1} + b_i = \sum_{j=1}^m b_j p_j^{**} + \frac{1}{m-1} \|\mathbf{p}^{**}\|^2,$$

де праворуч стоїть одна й та ж величина. Тому

$$\frac{p_i^{**}}{m-1} + b_i = \frac{p_k^{**}}{m-1} + b_k \quad \forall i, k. \quad (16)$$

Якщо згідно з (14) покласти $p_i^{**} = (m-1) \sum_{j \neq i} b_j$, $p_k^{**} = (m-1) \sum_{j \neq k} b_j$, то рівняння (16) перетворюються у тотожності $\sum_{j \neq i} b_j + b_i = B = \sum_{j \neq k} b_j + b_k$, що й забезпечує нерухомість цієї точки.

Далі, завдяки стохастичності,

$$\sum_i p_i^{**} = 1 = (m-1) \sum_i \sum_{j \neq i} b_j,$$

виникає додаткова умова на зсуви: $1 = (m-1)^2 \sum_i b_i$, яка еквівалентна (13).

Зазначимо, що зображення для координат нерухомого вектора (14) можна одержати прямо з (12), підставляючи туди B у вигляді (13).

Варто також зауважити, що при великій кількості індивідів m , внаслідок умови (13), існування нерухомого стану типу $\mathbf{p}^{**}$ можливе лише при дуже малих зсувах, $b_i \simeq 1/(m-1)^2$. Це впливає з вимоги на концентрованість зсувів b_i біля середнього значення величини B , яка в такому випадку не може бути занадто великою.

Окрім векторів типу $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$ існує також серія нерухомих векторів, які позначаємо через $\mathbf{p}^{0**}$, де нуль означає наявність у цих векторів нульових координат. Підклас таких векторів позначаємо через $\mathbf{p}_n^{0**}$, де $1 \leq n \leq m-2$ дорівнює кількості нульових координат. Щоб знайти формулу для решти ненульових координат, кількість яких становить $s = m-n$, треба розв'язати систему рівнянь (умова нерухомості вектора)

$$\frac{p_{j_1}}{m-1} + b_{j_1} = \dots = \frac{p_{j_s}}{m-1} + b_{j_s}, \quad (17)$$

де $b_{j_1}, \dots, b_{j_s}$ — деяка фіксована підмножина зсувів.

Твердження 7. Якщо підмножина зсувів $b_{j_1}, \dots, b_{j_s}$, $s = m-n$, $1 \leq n \leq m-2$ задовольняє умови

$$b_{j_i} - \frac{B_s}{s} < \frac{1}{(m-1)s}, \quad i \in \overline{1, s}, \quad (18)$$

то рівняння (17) мають розв'язки вигляду

$$p_{j_i} = \frac{1}{s} + (m-1) \left(\frac{B_s}{s} - b_{j_i} \right), \quad B_s := \sum_{i=1}^s b_{j_i}. \quad (19)$$

Доведення. Щоб одержати розв'язки рівнянь (17) у вигляді (19), потрібно ввести позначення B_s і, використовуючи ці рівняння, виразити всі координати p_{jk} , $k = 1, \dots, s$, через фіксовану координату p_{ji} . Нарешті, скористатися тим, що сума цих координат дорівнює одиниці. При цьому умови (18) є необхідними завдяки строгій додатності координат p_{ji} .

4. Збіжність траєкторій до граничних нерухомих точок.

Теорема 1. Нехай вектор-функція $\mathbf{p}^t$, $t \geq 0$, описує траєкторію ДСК, задану формулами (3), з деяким початковим вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^m$. Припустимо, що виконуються такі умови:

- 1) усі координати вектора $\mathbf{p}$ ненульові й попарно різні, $0 \neq p_i \neq p_k$, $i \neq k$;
- 2) $\mathbf{p}$ не є однією з нерухомих точок типу $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$, $\mathbf{p}_n^{0**}$, $1 \leq n \leq m-2$;
- 3) для кожної підмножини координат $b_{j_1}, \dots, b_{j_s}$, $s = m-n$ вектора зовнішнього впливу $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ існує хоча б одна b_{ji} , $i \in \overline{1, s}$, яка задовольняє нерівність

$$b_{ji} > \frac{mB_s}{s(m-1)}, \quad B_s := \sum_{i=1}^s b_{ji}. \quad (20)$$

Тоді існує границя $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$. При цьому вектор $\mathbf{p}^\infty$ є нерухомою точкою з єдиною ненульовою координатою

$$p_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 1, \quad (21)$$

всі інші координати p_k^∞ , $k \neq i$, рівні нулю.

Доведення. Треба показати, що за умов теореми всі координати початкового вектора, окрім однієї, збігаються до нуля. І лише одна, індекс якої позначаємо напівжирною літерою $\mathbf{i}$, збігається до одиниці. Яка саме координата прямує до одиниці — взагалі невідомо. Згідно з формулами

$$p_i^{t+1} = p_i^t c_i^t, \quad c_i^t = \frac{1 - \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + \gamma_i^t}{1 + \sum_{k=1}^m b_k p_k^t}, \quad i \in \overline{1, m}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

динаміка змін координат p_i^t істотно залежить від значень величин $\gamma_i^t = \frac{p_i^t}{m-1} + b_i$. А

саме, якщо $\gamma_i^t > \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + \sum_{k=1}^m b_k p_k^t$, то коефіцієнт $c_i > 1$ і координата p_i^t зростає, а якщо

$\gamma_i^t \leq \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + \sum_{k=1}^m b_k p_k^t$, то $c_i \leq 1$ і координата p_i^t спадає або незмінна.

Упорядкуємо координати початкового вектора

$$\mathbf{p} = (p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, \dots, p_{i_m}) \quad (23)$$

таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\gamma_{i_1} \leq \dots \leq \gamma_{i_l} < \gamma_{i_{l+1}} \leq \dots \leq \gamma_{i_m}. \quad (24)$$

При цьому, якщо для якоїсь пари індексів виявиться, що $\gamma_j = \gamma_k$, то в (23) ці координати розташовуються за зростанням, (нагадаємо, що за припущенням $p_j \neq p_k$). Строга нерівність у (24) поділяє координати на дві частини: до першої, з індексами від i_1 до i_l , належать

ті, які на першому кроці спадають або нерухомі (для них $c_i \leq 1$), а до другої належать ті, які зростають ($c_i > 1$), з індексами, починаючи від i_{l+1} до i_m . Зрозуміло, що подібна упорядкованість виконується й для коефіцієнтів c_i з формул (22): одна частина складається з підмножини тих, які не перевищують одиниці, а друга з тих, які строго більші одиниці:

$$0 < c_{i_1} \leq \dots \leq c_{i_l} \leq 1 < c_{i_{l+1}} \leq \dots \leq c_{i_m}. \quad (25)$$

Зауважимо, що можливість поділу множників c_i на дві підмножини, більші за одиницю та менші або рівні одиниці, випливає з рівності

$$\sum_{i_l} p_{i_l}^{t=1} = p_{i_1} c_{i_1} + \dots + p_{i_l} c_{i_l} + \dots + p_{i_m} c_{i_m} = 1,$$

оскільки за побудовою вектор $\mathbf{p}^{t=1}$ є стохастичним. Дійсно, враховуючи рівність $\sum_{i_l} p_{i_l} = 1$, робимо висновок, що існує індекс (його позначено через i_l) такий, що $c_{i_{l+1}}, \dots, c_{i_m} > 1$, а всі інші $c_{i_1}, \dots, c_{i_l} \leq 1$. При цьому може статися, що $i_l = i_1$, тоді лише один перший множник є строго меншим одиниці, $c_{i_1} < 1$.

Неважко зрозуміти, що впорядкованість у (23) та (25) зліва від індексу l залишається незмінною для всіх $t \geq 1$. Дійсно, якщо $\gamma_i < \gamma_k$, $0 < c_i \leq c_k$, то неминуче $\gamma_i^1 < \gamma_k^1$. При $p_i < p_k$ це очевидно. А якщо $p_i \geq p_k$, то це випливає з того, що $(c_i p_i - c_k p_k)/(m-1) < c_i(p_i - p_k)/(m-1) < (p_i - p_k)/(m-1) < b_k - b_i$, а це еквівалентно нерівностям $\gamma_i^1 < \gamma_k^1$, $0 < c_i^1 \leq c_k^1$. Тому всі координати, лівіші за p_{i_l} , завжди спадають або можуть залишитися незмінними на один крок. Неважко зрозуміти, що вже з цього випливає збіжність до нуля принаймні крайньої зліва координати.

Зазначимо, що кількість незмінних на першому кроці координат (якщо вони є) така ж, як і кількість множників, рівних одиниці: $c_{i_{l'}} = \dots = c_{i_l} = 1$, $1 < l' < l$. Тоді строга нерівність обов'язково має стояти для координат з індексами зліва від l' і яких не менше однієї:

$$p_{i_1}^1 < p_{i_1}, \dots, p_{i_{l'-1}}^1 < p_{i_{l'-1}}, \quad p_{i_{l'}}^1 = p_{i_{l'}}, \dots, p_{i_l}^1 = p_{i_l}.$$

З іншого боку, з (25) випливає, що всі координати початкового вектора $\mathbf{p}$ з індексами, які розташовані справа від i_l при впорядкуванні (23), на першому кроці будуть зростати:

$$p_{i_{l+1}} < p_{i_{l+1}}^1, \dots, p_{i_m} < p_{i_m}^1.$$

До того ж, строга нерівність у (24) при переході до $t = 1$ посилюється;

$$\gamma_{i_l}^1 \leq \gamma_{i_l} < \gamma_{i_{l+1}} < \gamma_{i_{l+1}}^1. \quad (26)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \Delta_{l+1,l}^1 &:= \gamma_{l+1}^1 - \gamma_l^1 = \frac{c_{l+1}p_{l+1}}{m-1} + b_{l+1} - \frac{c_l p_l}{m-1} - b_l = \\ &= \Delta_{l+1,l} + \varepsilon_{l+1}p_{l+1} + \varepsilon_l p_l > \Delta_{l+1,l} := \gamma_{l+1} - \gamma_l, \end{aligned}$$

де використано те, що $c_{l+1} = 1 + \varepsilon_{l+1}$, $c_l = 1 - \varepsilon_l$, $\varepsilon_l \geq 0$, $\varepsilon_{l+1} > 0$.

Зрозуміло, що інші строги нерівності в (24) при переході до $t = 1$ також посилюються. Тому для будь-якої пари індексів $i \leq i_l$ та $k > i_l$ нерівності $\gamma_i < \gamma_k$ при переході до

$t = 1$ посилюються, оскільки завдяки $c_i < 1$, $c_k > 1$ справджуються співвідношення $\gamma_i^1 = c_i p_i / (m - 1) + b_i = (1 - \varepsilon_i) p_i / (m - 1) + b_i < \gamma_i$, $\gamma_k^1 = c_k p_k / (m - 1) + b_k = (1 + \varepsilon_k) p_k / (m - 1) + b_k > \gamma_k$, де $\varepsilon_i, \varepsilon_k > 0$.

Те ж саме, тобто посилення нерівностей, буде відбуватися (з деякими уточненнями) на кожному наступному кроці. Повторюючи наведені міркування для $t = 2, 3, \dots$, робимо висновок про збіжність до нуля всіх координат із індексами зліва від i_l . Кількість таких координат на кожному кроці зростає (хоча й не строго монотонно) до моменту, коли виявиться, що $i_l = i_{m-1}$. Тоді справа залишиться лише одна координата p_i^t , $i_l < i \leq i_m$, для якої множник $c_i^t > 1$ буде прямувати до 1 при $t \rightarrow \infty$. Отже, $p_i^\infty = 1$.

Опишемо детальніше цю аргументацію. Позначимо $\Delta_m(\gamma^t) := \gamma_{i_m}^t - \gamma_{i_1}^t$. Покажемо, що $\Delta_m(\gamma^t)$ монотонно зростає:

$$\Delta_m(\gamma^{t+1}) > \Delta_m(\gamma^t), \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Дійсно, оскільки $c_{i_1} < 1$, а $c_{i_m} > 1$, то

$$p_{i_1}^1 \leq (p_{i_1})^1 = c_{i_1} p_{i_1} < p_{i_1}, \quad p_{i_m} < (p_{i_m})^1 = c_{i_m} p_{i_m} \leq p_{i_m}^1.$$

Тому $\gamma_{i_1}^1 < \gamma_{i_1}$, а $\gamma_{i_m}^1 > \gamma_{i_m}$.

Отже, $\Delta_m(\gamma^1) > \Delta_m(\gamma)$. За індукцією одержуємо (27). Завдяки монотонності з (27) випливає, що при $t \rightarrow \infty$ координата, відповідна до $\gamma_{i_1}^t$, спадає, а координата, відповідна до $\gamma_{i_m}^t$, зростає. Індекс у крайньої справа координати взагалі може змінюватися, але до певного моменту. Водночас як границя для $p_{i_1}^t$ є нульовою, тому що

$$R_m^{t+1} := \frac{p_{i_m}^{t+1}}{p_{i_1}^{t+1}} = R_m^t c_m^t \rightarrow \infty, \quad c_m^t = \frac{1 - \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + \gamma_{i_m}^t}{1 - \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + \gamma_{i_1}^t},$$

оскільки очевидно, що всі $c_m^t > 1$ і не спадають. Це забезпечує $p_{i_1}^t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Треба переконатися, що існує лише одна ненульова гранична координата p_i^∞ і вона дорівнює одиниці. Якщо припустити, що $p_i^\infty < 1$, то це означає, що $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}_n^{0**}$ з певним $1 \leq n < m - 1$, тобто що у граничного вектора лише $1 \leq n \leq m - 2$ координат є нульовими, а хоча б дві — строго додатними. Але тоді завдяки нерухомості для решти координат мають виконуватися нерівності (18). Проте це виключено умовою (20). Тому граничний вектор має точно $m - 1$ нульових координат і одну ненульову p_i^∞ , рівну 1.

Питання, чи може граничною нерухомою точкою стати вектор типу $\mathbf{p}_n^{0**}$, $n = m - s$, якщо для якоїсь підмножини зсувів $b_{j_1}, \dots, b_{j_s}$, $2 \leq s < m - 1$, замість (20) виконуються умови (18), відкрите.

5. Приклади. У наведених далі прикладах ілюструємо декілька цікавих нелінійних ефектів поведінки ДСК, обумовлених наявністю зовнішніх впливів.

5.1. Приклад 1. Нелінійні ефекти зовнішнього впливу. Цей приклад демонструє (див. рис. 1) істотно нелінійний закон залежності форми траєкторій координат динамічної системи від невеликої зміни навіть лише однієї з координат вектора зовнішнього впливу. Тут початковий вектор $\mathbf{p} = (0,16, 0,35, 0,56)$ є фіксованим, а вектор зовнішнього впливу $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ набуває значень

$$b_{1,l} = 0,145 + (0,01)l, \quad b_2 = 0,145, \quad b_3 = 0,145, \quad l = \overline{1, 23},$$

(залежно від параметру l змінюється лише перша координата).

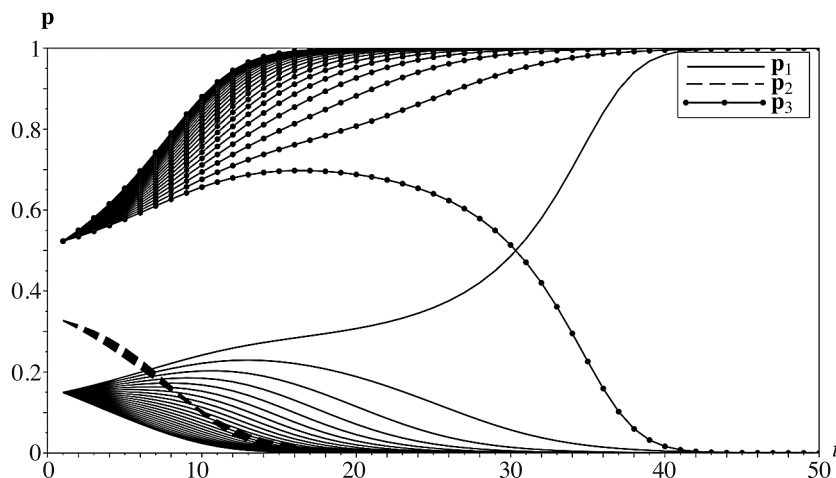


Рис. 1. $m = 3$. Нелінійна залежність еволюції координат динамічної системи від зміни першої координати вектора зовнішнього впливу; $\mathbf{p} = (0,16, 0,35, 0,56)$, $\mathbf{b}_l = (0,145 + (0,01) \cdot (l-1), 0,145, 0,145)$, $l = \overline{1, 23}$.

На рис. 1 зображено 23 сценаріїв поведінки траєкторій ДСК. Згідно з формулами динаміки $p_i^{t+1} = p_i^t c_i^t$, координата p_i^t зростає, якщо $c_i^t > 1$, або, еквівалентно, якщо

$$\gamma_i^t > \xi^t, \quad \gamma_i^t = p_i^t / (m-1) + b_i, \quad \xi^t = B^t + 1/2 \|p^t\|^2.$$

При всіх $l \in \overline{1, 22}$ ця умова виконується тільки для координати $p_{i=3}$, яка має найбільше початкове значення. Заразом, незважаючи на зростання зовнішнього впливу для p_1 , траєкторія координати p_3^t домінує над двома іншими, тому що виконуються нерівності

$$\gamma_{3,l}^t > \gamma_{1,l}^t > \gamma_{2,l}^t, \quad c_{3,l}^t > 1, \quad t \geq 1.$$

Тому в усіх цих випадках p_3^t збігається до одиниці.

Поступове зростання $b_{1,l}$ приводить до збільшення $\gamma_{1,l}$. Існує критичне значення $l = 15$, коли навіть за один крок величина $\gamma_{1,l}^{t=1}$ збільшується настільки, що виконується нерівність $\gamma_{1,15}^1 > \xi_{15}^{t=1}$ і коефіцієнт $c_{1,l}$ стає більшим за одиницю. Хоча вже при $t = 2$ ця нерівність змінюється на протилежну і перша координата буде спадати знову. Так само в сценаріях $l = \overline{16, 22}$ координата $p_{1,l}^t$ зростає лише до певного моменту, коли при збільшенні t нерівність $\gamma_{1,l}^t > \xi_l^t$ змінюється на протилежну. При цьому координата $p_{3,l}^t$ продовжує домінувати, хоча не з такою перевагою, як при попередніх значеннях l . При $l = 23$ тенденція збільшення $\gamma_{1,l}$ перетинає біфуркаційний поріг, виникає нерівність $\gamma_{3,l}^t < \gamma_{1,l}^t \forall t$, протилежна до всіх попередніх (див. рис. 2 б). Цей сценарій є критичним, незважаючи на те, що траєкторія координати $p_{3,l}^t$ спочатку все ще зростає, але це триває лише до певного моменту. Починаючи з деякого t , величина $\gamma_{3,l}^t$ стає меншою за ξ_l^t , а $c_{3,l}^t < 1$ (див. рис. 3). Координата $p_{3,l}^t$ починає спадати. Повний пріоритет здобуває перша координата і вже вона збігається до одиниці.

5.2. Приклад 2. Чутливість динаміки до початкових статусів при наявності зовнішнього впливу. У цьому прикладі показано, як кардинально може змінюватися динаміка ДСК при навіть малій зміні координат початкового вектора $\mathbf{p}$, якщо існує постійний зовнішній вплив.

Розглянуто 3 варіанти розвитку процесу (див. рис. 4) з векторами $\mathbf{p}_l = \{p_{i,l}\}$, $l = \overline{1, 3}$, $i = \overline{1, 3}$, координати яких по-різному впорядковані:

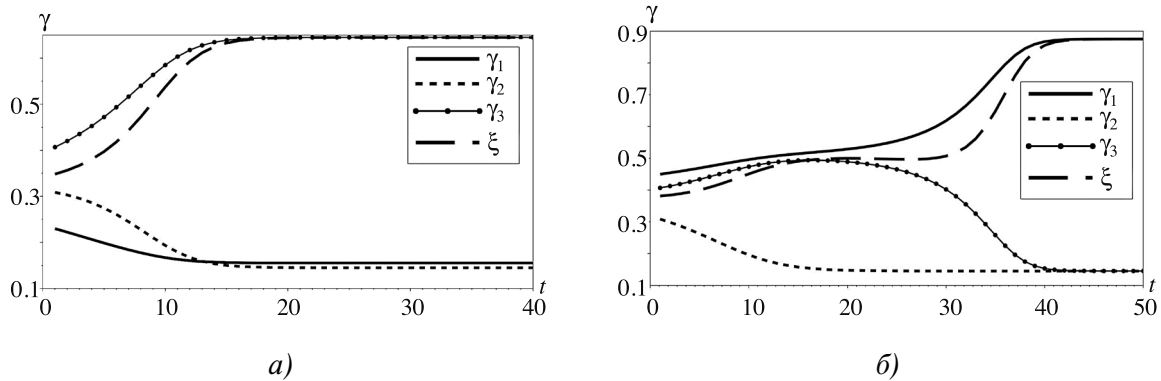


Рис. 2. Траскторії величин $\gamma_{i,1}^t$, $\gamma_{i,23}^t$, ξ_1^t , ξ_{23}^t ; а) домінує $\gamma_{3,1}^t$, б) домінує $\gamma_{1,23}^t$.

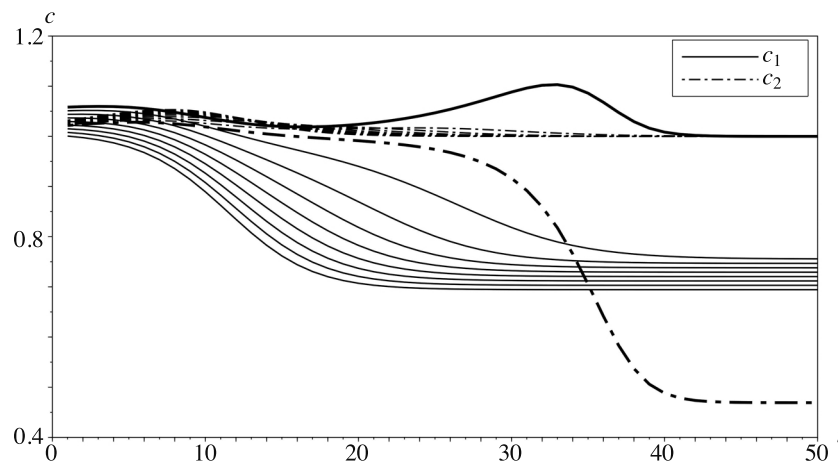


Рис. 3. Поведінка коефіцієнтів c_1^t (суцільна лінія) та c_3^t (пунктирна лінія) у 9 сценаріях, $l \in \overline{15, 23}$. При $l = 23$ відбувається біфуркаційний стрибок, нерівність $c_1^t < c_3^t$, $c_3^t \rightarrow 1$, змінюється на $c_1^t > c_3^t$, $c_1^t \rightarrow 1$.

$$p_{1,1} < p_{1,2} < p_{1,3}, \quad p_{2,1} < p_{2,2} < p_{2,3}, \quad p_{3,1} > p_{3,2} > p_{3,3},$$

а вектор зсувів $\mathbf{b}$ такий, що $b_1 > b_2 > b_3$.

У першому варіанті найбільше значення має координата $p_{3,1}$ і завдяки фіксованим співвідношенням між іншими координатами векторів $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{b}$ забезпечується повне домінування цієї координати, $p_{3,1}^t \rightarrow 1$. У кожному наступному варіанті початкове значення третьої координати зменшується, хоча й залишається на початок більшим за інші координати. Але за рахунок змін у співвідношеннях між векторами $\mathbf{p}_l$, $\mathbf{b}$ при $l = 2$ динаміка стає такою, що домінування переходить до найменшої координати $p_{1,2}^t$. Нарешті третій варіант, $l = 3$, демонструє перемогу середньої координати, $p_{2,3}^t \rightarrow 1$.

Варто пояснити, що всі значення величин $\gamma_{i,l}$ дуже близькі до ξ_l і тому поведінка досить чутлива до співвідношень між $\mathbf{p}_l$ та $\mathbf{b}$. Так, у першому варіанті при початкових значеннях часу виконуються нерівності $\gamma_{1,1}^t > \gamma_{3,1}^t > \xi_1^t$. Але внаслідок нелінійності динаміки величина $\gamma_{3,1}^t$ буде зростати швидше, ніж $\gamma_{1,1}^t$ і зрештою залишиться єдиною більшою за ξ_1^t . У другому варіанті для вектора $\mathbf{p}_2$ величина $\gamma_{3,2}$ є меншою за ξ_2 і з часом спадає, тому $\gamma_{1,2}^t$ стає єдиною, яка зростає. Нарешті, у третьому варіанті єдиною постійно зростаючою величиною буде $\gamma_{2,3}^t$ (див. рис. 5).

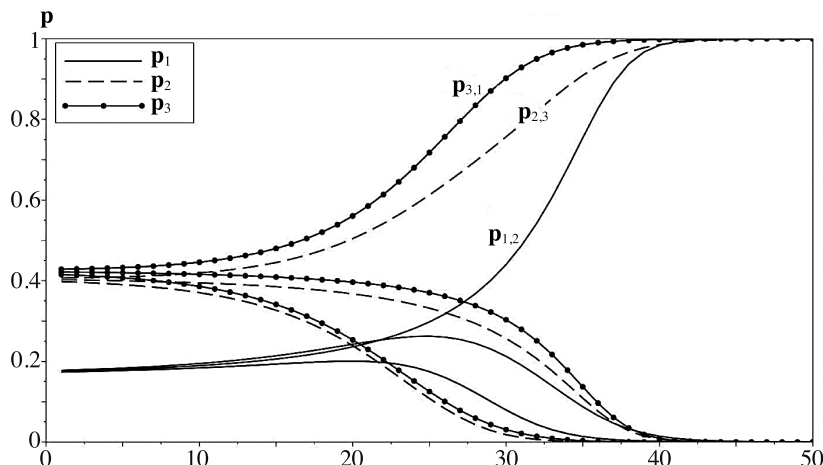


Рис. 4. $m = 3$. Наяність постійного зовнішнього зсуву, $\mathbf{b} = (0,1444, 0,024, 0,014535)$, істотно впливає на визначення переможця навіть при невеликій зміні однієї з координат початкового вектора $\mathbf{p} = (0,1572, 0,3599, 0,3874 - (l - 1)0,01)$, $l = \overline{1, 3}$.

5.3. Приклад 3. Ефект зміни переможця. Тут проілюстровано ефект зміни переможця в моделі ДСК з трьома індивідами при поступовому й однаковому збільшенні значень усіх координат вектора зовнішнього впливу. Розглянуто шість варіантів поведінки системи при поступовому збільшенні всіх координат початкового вектора зсувів на сталу величину Δb при кожному значенні параметра $l = \overline{1, 6}$ (див. рис. 6).

При $l = 1$ перемагає найменша координата, оскільки завдяки достатньо великому зовнішньому впливу (найбільше значення має $b_{1,l=1}$) виконуються нерівності

$$\gamma_1 > \gamma_3 > \gamma_2, \quad c_1 > c_3 > 1 > c_2,$$

а також $\gamma_1^t > \xi^t$, $t > 0$, що є вирішальним:

$$p_1^t \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Такий результат виникає, незважаючи на лише тимчасове зростання найбільшої на початок процесу координати p_3 . Це відбувається завдяки нерівностям $\gamma_3^t > \xi^t$, $c_3^t > 1$ при малих значеннях часу. Аналогічна поведінка повторюється для всіх $l < 6$. Але динаміка зростання p_1^t та спадання p_3^t затримується та сповільнюється на кожному наступному кроці $l = \overline{2, 5}$. А саме, координата $p_{1,l}^t$ зростає пізніше й повільніше, а $p_{3,l}^t$ навпаки спадає також пізніше та повільніше. Нарешті, при $l = 6$ завдяки збільшенню зовнішнього впливу коефіцієнт $c_{1,6}^t$ з деякого моменту починає монотонно спадати і стає меншим за 1, що викликає спадання $p_{1,6}^t$, у той час як $c_{3,6}^t$ є завжди більшим 1, що спричиняє зростання $p_{3,6}^t$. Цікаво відзначити, що при $l = 6$ коефіцієнт зростання $c_{1,6}^t$ першої координати спочатку є навіть більшим за $c_{3,6}^t$, але ця перевага тимчасова. Досить швидко коефіцієнт $c_{3,6}^t$ стає найбільшим і для нього виконується нерівність $c_{3,6}^t > c_{1,6}^t$. Тому $p_3^t \rightarrow 1$, $p_1^t \rightarrow 0$, $p_2^t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

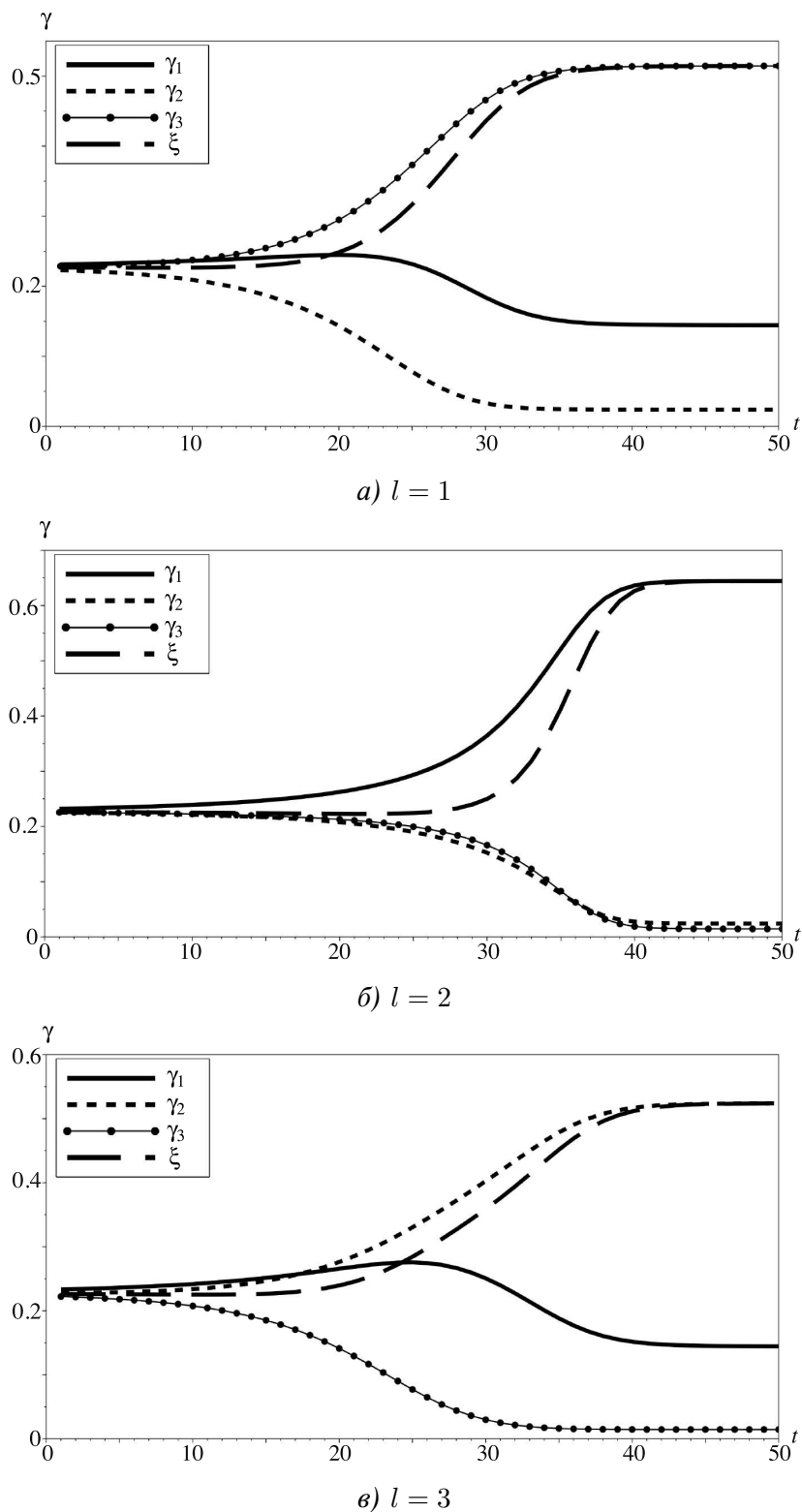


Рис. 5. Зміна взаємного розташування графіків величин $\gamma_{i,l}^t$, $i = \overline{1,3}$, відносно ξ_l^t . У кожному з випадків єдиною постійно зростаючою величиною серед $\gamma_{i,l}^t$ є: а) $\gamma_{3,l=1}^t$; б) $\gamma_{1,l=2}^t$; в) $\gamma_{2,l=3}^t$.

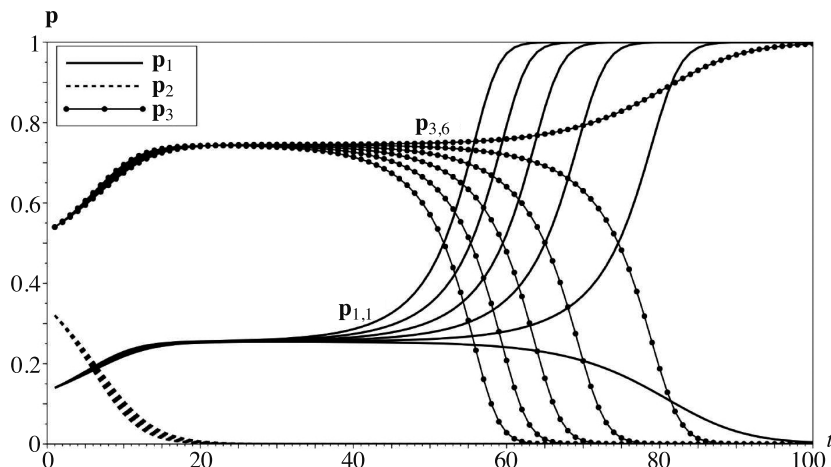


Рис. 6. $m = 3$. Графіки координат вектора $\mathbf{p}^t$ у кожному з $l = \overline{1,6}$ варіантів при початкових $\mathbf{p} = (0,1572, 0,36, 0,607)$ та $\mathbf{b} = (0,2906, 0,045, 0,0454)$, коли всі координати вектора зсувів $\mathbf{b}$ збільшуються згідно з формулою $b_{i,l} = b_{i,1} + (l-1)\Delta b$, $i = 1, 2, 3$, $l = \overline{1,6}$, $\Delta b = 0,04$. При $l = 1$ перемагає найменша координата, при $l = 6$ — найбільша.

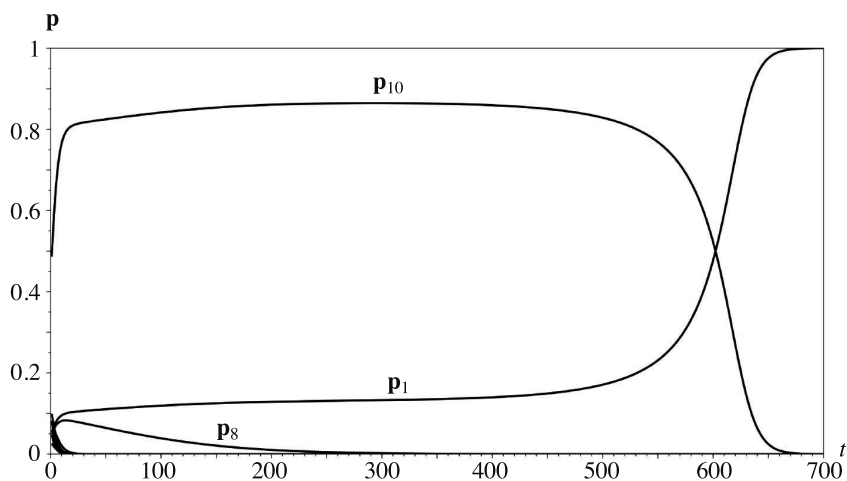


Рис. 7. $m = 10$. $\mathbf{p} = (0,05548, 0,0481, 0,0824, 0,0543, 0,0730, 0,0992, 0,0234, 0,0511, 0,0263, 0,4868)$, $\mathbf{b} = (0,933, 0,3126, 0,2922, 0,4826, 0,5935, 0,4369, 0,6326, 0,9185, 0,4819, 0,8511)$. Графіки координат p_1^t та p_{10}^t демонструють тривалий період невизначеності перемоги. Зрештою $p_1^t \rightarrow 1$ завдяки великому зовнішньому впливу, $b_1 = 0,933$.

5.4. Приклад 4. Проблема невизначеності перемоги. У цьому модельному прикладі виявлено проблему тривалої невизначеності перемоги з $m = 10$ гравцями. На перших кроках конфліктної боротьби, $t < 10$, енергія найсильнішого елемента, координата $p_{10} = 0,487$, істотно перевищує енергію інших дев'яти, $p_i < 0,1 \forall i \neq 10$.

Тому траєкторія p_{10}^t одразу стрімко зростає, а траєкторії усіх інших координат, окрім p_1 , p_8 , спадають до нуля (див. рис. (7)). Зростання координат p_1 , p_8 на початку (при малих t) пояснюється досить великими значеннями відповідних величин вектора зовнішнього впливу $b_1 = 0,933$, $b_8 = 0,9185$. Але виявляється, що величина b_8 не є достатньою для подальшого зростання координати p_8 і тому її тимчасове зростання швидко змінюється на спадання. Зовсім інша картина поведінки відбувається для найбільшої

координати вектора $\mathbf{p}$. Її різке зростання сповільнюється і тривалий час (до 450 кроків конфліктної боротьби) встановлюється своєрідна рівновага: траєкторії p_1^t , p_{10}^t майже паралельні. Відбувається повільне накопичення енергії індивідом a_1 . Динаміка конфлікту поступово змінюється на перевагу для гравця з найбільшою зовнішньою допомогою. Траєкторія p_{10}^t за наступні 200 кроків спадає до нуля, а p_1^t зростає до одиничного значення.

Отже, стрімке початкове зростання координати p_{10} не забезпечує перемоги індивіда a_{10} . Зростання сповільнюється і довгий період у конфліктній боротьбі триває невизначеність переможця. Зовнішній вплив у цьому випадку відіграє вирішальну роль. Перемогу здобуває координата з невеликим початковим значенням $p_1 = 0,05548$, але з потужною зовнішньою підтримкою, $b_1 = 0,933$.

Треба відзначити, що тривалість невизначеності переможця (в даному прикладі вона доходить до $t = 600$) чутливо залежить як від початкових значень координат вектора $\mathbf{p}$, так і від розподілу значень b_i зовнішнього впливу. У цьому прикладі навіть незначне зменшення b_1 веде не тільки до скорочення періоду невизначеності, а й до швидкої перемоги гравця a_{10} з найбільшою початковою енергією.

6. Заклучні зауваження. З огляду можливих застосувань варто наголосити на деяких висновках із одержаних результатів.

Наявність зовнішнього впливу істотно змінює динаміку систем із лише внутрішньою конфліктною взаємодією. Зовнішнє втручання ускладнює закони розвитку автономної системи, а при достатньо великих значеннях параметрів b_i зовнішнього впливу відбуваються біфуркаційні зміни (деякі з них продемонстровані в прикладах). Окрім того, розширюється множина нерухомих станів, як притягальних, так і відштовхувальних. Хоча в загальному випадку еволюційна траєкторія системи, що описує модель конфліктного суспільства, асимптотично наближається до стану з єдиним, як правило, переможцем (існує лише одна координата, яка збігається до одиниці). При цьому істотно змінюється форма басейнів притягання до нерухомих точок: із правильних многовидів (при відсутності впливів) на топологічно зв'язні многовиди (при наявності впливів), які визначаються співвідношеннями між векторами $\mathbf{p}^t$ та $\mathbf{b}$. Біфуркаційний ефект означає можливість зміни переможного індивіда. Хоча передбачити, хто саме стане переможцем, — взагалі дуже складно, ця задача стає нетривіальною.

При фіксованих початкових статусах індивідів абстрактного суспільства завдяки нелінійності еволюційного закону навіть незначні зміни зовнішнього впливу здатні кардинально змінити результат конкурентної боротьби.

Чутливість до незначних змін статусів індивідів при постійних зовнішніх впливах також є характерною властивістю нашої моделі. Цей факт істотно впливає на визначення переможця.

У випадку, коли зовнішній вплив забезпечував переможну еволюцію для індивіда з початково не найсильнішим статусом, пропорційне збільшення зовнішнього впливу для всіх індивідів веде до нівелювання такої перемоги, тому що зрештою перемогу одержує початково найсильніший. Якщо зовнішній вплив інтерпретувати як прогресивний технологічний розвиток усього суспільства, то зазначений ефект демонструє найбільшу вигідність розвитку для індивідів з початково вищим статусом.

Нарешті ще один цікавий нюанс. Індивід із безперечно високим переможним статусом, який явно проявляється швидкою динамікою зростання відповідної координати до одиниці, може бути приреченим на дуже тривалу невизначеність своєї остаточної перемоги і

навіть на поразку, якщо деякий індивід із початково посереднім (і навіть малим) статусом постійно одержує достатню зовнішню підтримку. Цей ефект припускає економічну та політичну інтерпретацію.

Література

1. T. V. Karataeva, V. D. Koshmanenko, *Society, mathematical model of a dynamical system of conflict*, J. Math. Sci., **247**, 291–313 (2020); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04803-3>.
2. V. Koshmanenko, T. Karataeva, N. Kharchenko, I. Verygina, *Models of the conflict redistribution of vital resources*, Social Simulation Conference, Italy, Rome (2016).
3. V. Koshmanenko, E. Pugacheva, *Conflict interactions with external intervention*, Social Simulation Conference, Italy, Rome (2016).
4. V. D. Koshmanenko, T. V. Karataeva, *On personal strategies in conflict socium*, Econophysics Colloquium, Warsaw, 5–7 July, p. 32 (2017).
5. I. V. Veryhina, V. D. Koshmanenko, *Problem of optimal strategy in the models of conflict redistribution of the resource space*, Ukr. Math. J., **69**, № 7, 1051–1059 (2017); DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1414-7>.
6. V. D. Koshmanenko, O. R. Satur, *Sure event problem in multicomponent dynamical systems with attractive interaction*, J. Math. Sci., **249**, № 4, 629–646 (2020); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04962-3>.
7. T. Karataeva, V. Koshmanenko, M. J. Krawczyk, K. Kulakowski, *Mean field model of a game for power*, Phys. A, **525**, 535–547 (2019); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110>.
8. S. Alberverio, M. Bodnarchyk, V. Koshmanenko, *Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent*, Methods Funct. Anal. Topology, **11**, № 4, 309–319 (2005).
9. S. Alberverio, V. Koshmanenko, I. Samoilenko, *The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration*, J. Interdiscip. Math., **11**, № 2, 163–185 (2008).
10. V. D. Koshmanenko, I. V. Samoilenko, *A dynamical system model for a conflict triad*, Nonlinear Oscil., **14**, № 1, 55–75 (2011).
11. R. Axelrod, *The dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization*, J. Conflict Resolut., **41**, № 2, 203–226 (1997); DOI: 10.1177/0022002797041002001.
12. N. Bellomo, M. Herrero, A. Tosin, *On the dynamics of social conflicts: looking for the black swan*, Kinet. Relat. Models, **6**, № 3, 459–479 (2013).
13. N. Bellomo, J. Soler, *On the mathematical theory of the dynamics of swarms viewed as complex systems*, Math. Models Methods Appl. Sci., **22**, 29 p. (2012).
14. N. Bellomo, F. Brezzi, M. Pulvirenti, *Modeling behavioral social systems*, Math. Models Methods Appl. Sci., **27**, № 1, 1–11 (2017); DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218202517020018>.
15. G. I. Bischi, F. Tramontana, *Three-dimensional discrete-time Lotka–Volterra models with an application to industrial clusters*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **15**, 3000–3014 (2010).
16. P. T. Coleman, R. Vallacher, A. Nowak, L. Bui-Wrzosinska, *Interactable conflict as an attractor: presenting a dynamical-systems approach to conflict, escalation, and interactability*, IACM Meeting Paper (2007).
17. J. M. Epstein, *Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science*, Addison-Wesley Publ. Co., Advanced Book Program, Reading, MA (1997).
18. J. M. Epstein, *Modeling civil violence: An agent-based computational approach*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **99**, № 3, 7243–7250 (2002).
19. J. M. Epstein, *Why model?*, J. Artif. Soc. Soc. Simul., **11**, № 412 (2008).
20. A. Flache, M. Mäs, T. Feliciani, E. Chattoe-Brown, G. Deffuant, S. Huet, J. Lorenz, *Models of social influence: towards the next frontiers*, J. Artif. Soc. Soc. Simul., **20(4)**, 2JASSS (2017); DOI: <https://doi.org/10.18564/jasss.3521>.
21. N. E. Friedkin, E. C. Johnsen, *Social influence network theory*, Cambridge Univ. Press, New York (2011); DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976735>.
22. Hu Haibo, *Competing opinion diffusion on social networks*, R. Soc. Open Sci., **4**, 171160 (2017); DOI: <https://doi.org/dx.doi.org/10.1098/rsos.171160>.

23. Hu Hai-Bo, Wang Xiao-Fan, *Discrete opinion dynamics on networks based on social influence*, J. Phys. A, **42**, № 225005 (2009); DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/22/225005>.
24. M. Jalili, *Social power and opinion formation in complex networks*, Phys. A, **392**, 959–966 (2013); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.10.013>.
25. K. I. Takahashi, K. Md. M. Salam, *Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent*, J. Interdiscip. Math., **9**, № 3, 459–473 (2006).
26. S. Md. M. Khan, K. I. Takahashi, *Segregation through conflict*, Adv. Appl. Sociol., **3**, № 8, 315–319 (2013).
27. V. D. Koshmanenko, *Theorem on conflict for a pair of stochastic vectors*, Ukr. Math. J., **55**, № 4, 671–678 (2003).
28. V. Koshmanenko, *Theorem of conflicts for a pair of probability measures*, Math. Methods Oper. Res., **59**, № 2, 303–313 (2004).
29. В. Д. Кошманенко, *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*, Наук. думка, Київ (2016).
30. S. A. Marvel, H. Hong, A. Papush, S. H. Strogatz, *Encouraging moderation: clues from a simple model of ideological conflict*, Phys. Rev. Lett., **109**, 118702 (2012); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.118702>.
31. S. Thurner, R. Hanel, P. Klimek, *Introduction to the theory of complex systems*, Oxford Univ. Press, Oxford (2018).
32. T. C. Schelling, *The strategy of conflict*, Harvard Univ. Press, Cambridge (1980).
33. В. Кошманенко, *Формула конфліктної динаміки*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **17**, № 2, 113–149 (2020).
34. P. Ashwin, C. Bick, O. Burylko, *Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling*, Front. Appl. Math. Stat., **2**, № 7 (2016).
35. O. Burylko, *Collective dynamics and bifurcations in symmetric networks of phase oscillators. I*, J. Math. Sci., **249**, № 4, 573–600 (2020).
36. O. Burylko, *Collective dynamics and bifurcations in symmetric networks of phase oscillators. II*, J. Math. Sci., **253**, 204–229 (2021); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05223-7>.

Одержано 05.07.21,
після доопрацювання — 09.07.21