

УДК 517.9

## ВІЗУАЛІЗАЦІЯ НАЙПРОСТИШІХ СЦЕНАРІЇВ ІДЕАЛЬНОЇ ТУРБULEНТНОСТІ

А. А. Акбергенов, О. Ю. Романенко

Ін-т математики НАН України  
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна  
e-mail: abdivali.akbergenov@gmail.com,  
eromanenko@bigmir.net

We give a brief description and computer visualization of different scenarios for ideal turbulence, which is a species of spatio-temporal chaos in idealized models of mathematical physics.

Наведено короткий опис та комп'ютерну візуалізацію різних сценаріїв ідеальної турбулентності — різновидності просторово-часового хаосу в ідеалізованих моделях математичної фізики.

**1. Стисло про ідеальну турбулентність.** Назва статті містить термін “турбулентність”, який, взагалі кажучи, допускає різні тлумачення. Тут турбулентність розуміємо у найширшому сенсі: як просторово-часовий хаос у детермінованих системах будь-якої природи. Більшість таких систем описується нелінійними диференціальними рівняннями. Коли мова йде про рівняння з частинними похідними, то “точками” фазового простору є функції (просторових змінних), і тоді говорити слід не тільки про часову динаміку станів системи, як у випадку звичайних диференціальних рівнянь, а й про еволюцію з часом внутрішньої, просторової, структури самих станів.

Дослідження в цьому напрямку, що проводилися в Інституті математики НАН України, привели до оформлення концепції *ідеальної турбулентності* — математичного явища, яке характерне для ряду нескінченновимірних динамічних систем на просторах гладких функцій і полягає в тому, що *атрактор системи лежить не в фазовому просторі, а в більш широкому функціональному просторі, що містить фрактальні або навіть випадкові функції* (при цьому атрактор може бути зовсім простим: складатися з циклів і нерухомих точок). Сьогодні поняття “ідеальна турбулентність” починає входити в термінологію теорії хаосу, зокрема, його включено в Енциклопедію нелінійної науки [1], видану в США у 2005 р. Точні аналітичні результати показали, що ідеальна турбулентність спостерігається вже в найпростіших нелінійних крайових задачах для гіперболічних рівнянь, у тому числі для рівнянь переносу та хвильового (див. [2–4] та наведені там посилання). З фізичної точки зору такого роду крайові задачі описують ідеалізовані системи без внутрішнього опору — звідси й назва “ідеальна турбулентність” — і є спрощеними моделями еволюційних систем, що вивчаються в електродинаміці, акустиці, радіофізиці та навіть у медицині. Перехід до хаотичної динаміки завжди пов’язаний з формуванням каскадів просторових структур, мінімальний масштаб яких в природних системах зумовлюється внутрішнім опором. Ідеальні системи не перешкоджають утворенню структур аж до як завгодно малих масштабів, що, власне, і призводить до формування в границі (при нескінченно великому часі) фрактальних структур або й випадкових структур: коли гранична поведінка детермінованої задачі описується випадковими процесами. Типову поведінку розв’язків крайових

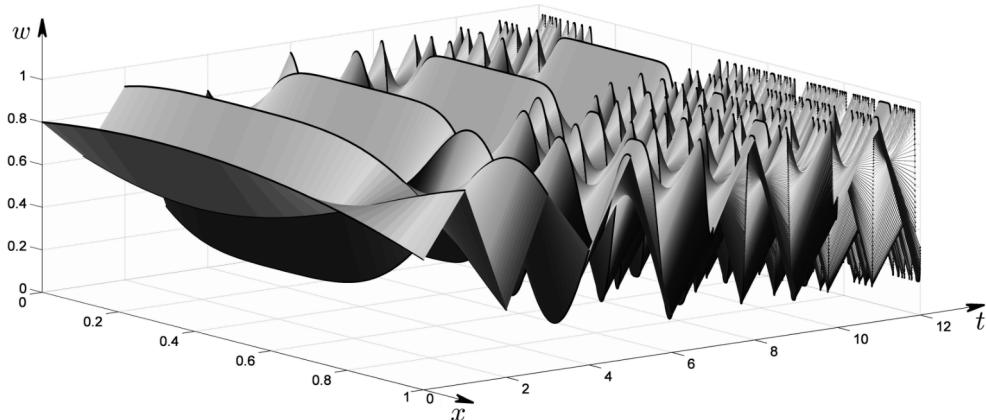


Рис. 1. Каскад градієнтних катастроф. Типовий розв'язок крайової задачі  $\partial w / \partial t = \partial w / \partial x$ ,  $w(x, 1) = \lambda w(x, 0)(1 - w(x, 0))$ ,  $\lambda > 3,58$ .

задач із ідеальною турбулентністю продемонстровано на рис. 1. Крайові задачі з ідеальною турбулентністю можуть розглядатися як базові при вивчені хаосу в більш реалістичних системах (звичайно, в певних просторово-часових межах, які визначаються величиною їх внутрішнього опору), зокрема, можуть скласти основу теорії збурень для крайових задач, що описують системи з невеликим внутрішнім опором.

Наведене визначення ідеальної турбулентності має лише попередній характер і потребує конкретизації: що розуміється під атрактором, як визначаються простори фрактальних і випадкових функцій, якими є метрики в цих просторах? Якщо не поглиблюватися в подroбici, то концепція ідеальної турбулентності характеризується таким чином. Просторово-часова еволюція початкових станів крайової задачі — гладких або кусково-гладких функцій — супроводжується наростиючим ускладненням їхньої просторової структури, і внаслідок цього граничний стан уже неможливо описати в термінах гладких або хоча б неперервних функцій. Тому для побудови атрактора задачі необхідно перейти до ширшого функціонального простору. Вельми придатними виявилися простір фрактальних функцій і простір випадкових функцій, кожний зі спеціальною метрикою (яка допускає вкладення вихідного фазового простору). Тут слід уточнити, що під фрактальними розуміються напівнеперервні зверху функції з нескінченим числом розривів (їхні графіки являють собою замкнені підмножини евклідового простору, які в багатьох випадках є локально самоподібними й фрактальними). Встановлено, що певні крайові задачі мають атрактор в одному з цих розширеніх просторів, або навіть в обох, і відповідно, “точки” такого атрактора є фрактальними або випадковими функціями. Це й призводить до каскадного ускладнення розв'язків зі зростанням часу та формування у них низки властивостей, типових для турбулентності.

Мета даної статті — наочно, за допомогою комп’ютерної графіки, на простому прикладі й обмежуючись мінімумом теоретичних міркувань продемонструвати описану вище схему розвитку ідеальної турбулентності та пояснити використані при цьому математичні механізми хаотизації.

**2. Теоретичні відомості.** В концепції ідеальної турбулентності особливе місце посідають нелінійні крайові задачі, просторово-часова динаміка яких керується одновимірним відображенням (див, зокрема, [5]). Розглянемо найпростішу таку задачу:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

$$w|_{x=1} = f(w)|_{x=0}, \quad f \in C^1(I, I), \quad I — \text{замкнений інтервал.} \quad (2)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою

$$w(x, t) = u(x + t), \quad u — \text{довільна } C^1\text{-функція.} \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (2), одержуємо для  $u$  різницеве рівняння (з неперервним аргументом)

$$u(\tau + 1) = f(u(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R}^+. \quad (4)$$

Окрім того, з (3) виводимо, що будь-яка початкова умова

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad \text{з } C^1\text{-функцією } \varphi: [0, 1] \rightarrow I \quad (5)$$

індукує для різницевого рівняння (4) початкову умову

$$u(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (6)$$

Таким чином, для розв'язку  $w_\varphi(x, t)$ , що відповідає умові (5), отримуємо формулу

$$w_\varphi(x, t) = u_\varphi(x + t), \quad (7)$$

де  $u_\varphi$  — розв'язок рівняння (4), що відповідає умові (6).  $C^1$ -гладким розв'язок  $w_\varphi(x, t)$  буде лише тоді, коли виконуються умови гладкого узгодження

$$\varphi(1) = f(\varphi(0)), \quad \varphi'(1) = f'(\varphi(0))\varphi'(0). \quad (8)$$

Перше із співвідношень (8) забезпечує лише неперервність розв'язку, його виконання за звичай передбачається при постановці задачі. Недотримання ж другого із співвідношень (8) часто допускається. При цьому відбувається порушення гладкості розв'язку на характеристиках  $x + t = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Те, якою буде поведінка розв'язків задачі (1), (2) при великих значеннях  $t$ , визначається атрактором динамічної системи зсувів  $S^t: \varphi(x) \mapsto w_\varphi(x, t)$ , яку задача індукує на просторі початкових гладких функцій  $\varphi: [0, 1] \rightarrow I$ . Згідно з (4) маємо

$$u_\varphi(\tau) = f^n(\varphi(\tau - n)), \quad n \leq \tau < n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

де  $f^n$  —  $n$ -та ітерація функції  $f$  (тобто  $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$ ,  $f^0(z) = z$ ). Тому  $S^t$  можна записати у вигляді

$$S^t: \varphi(x) \mapsto f^{[x+t]}(\varphi(\{x + t\})), \quad (10)$$

де  $[\cdot]$  і  $\{\cdot\}$  — ціла та дробова частини числа, зокрема,  $S^n: \varphi(x) \mapsto f^n(\varphi(x))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Таким чином, для задачі (1), (2) будова атрактора визначається насамкінець асимптотичною динамікою одновимірного відображення  $f$ , і це істотно спрощує дослідження. Зазначимо, що розглядувана задача не є винятковою, існує багато інших класів одно- та багатовимірних крайових задач, які також зводяться до різницевих рівнянь із неперервним аргументом (див, наприклад, [3]).

Нехай у крайовій задачі (1), (2) має місце ідеальна турбулентність. На питанні, чому і як це відбувається, зупинимося дещо пізніше, а зараз будемо міркувати чисто формально (і з певною часткою вільності). Введемо такі позначення:

$C^1$  — фазовий простір динамічної системи (10), що складається з  $C^1$ -гладких функцій  $\varphi: [0, 1] \rightarrow I$ ,  $S^t[\varphi]$  — траєкторія цієї системи, породжувана початковим станом  $\varphi \in C^1$ ;

$C^\Delta, C^\#$  — розширені простори, одержані поповненням простору  $C^1$  фрактальними та, відповідно, випадковими функціями (в яких саме метриках, зараз не важливо);

$\mathcal{A}^\Delta, \mathcal{A}^\#$  — атрактори динамічної системи (10) у просторах  $C^\Delta$  та  $C^\#$  (точні визначення, що розуміються під атракторами, також залишаємо поза увагою, зазначимо тільки, що  $\mathcal{A}^\Delta$  існує завжди, а існування  $\mathcal{A}^\#$  залежить від  $f$ );

$\omega^\Delta[\varphi], \omega^\#[\varphi]$  —  $\omega$ -граничні множини траєкторії  $S^t[\varphi]$  в просторах  $C^\Delta$  і  $C^\#$ .

Згідно з визначенням наявність ідеальної турбулентності означає, що атрактор динамічної системи (10) не міститься повністю (або навіть не існує) у фазовому просторі  $C^1$ , але система має атрактор у ширшому функціональному просторі  $C^\Delta$  та, можливо, і в просторі  $C^\#$ . Наявність турбулентної динаміки в окремої траєкторії  $S^t[\varphi]$ , а отже, і у розв'язку  $w_\varphi(x, t)$ , можемо формалізувати таким чином:

$$\omega^\Delta[\varphi] \cap (C^\Delta \setminus C^1) \neq \emptyset, \quad \omega^\#[\varphi] \cap (C^\# \setminus C^1) \neq \emptyset. \quad (11)$$

Ці співвідношення говорять про ускладнення в багато разів геометрії розв'язку  $w_\varphi(x, t)$  при зростанні часу (наприклад, як на рис. 1) і продукують такі сценарії ідеальної турбулентності. З першого співвідношення випливає, що

(\*)  $\omega^\Delta[\varphi]$  містить фрактальну функцію; при цьому її графік має фрактальну розмірність  $r \geq 1$ , а саме, гіпотетично здійсні такі якісно відмінні ситуації:  $r = 1$ ,  $1 < r < 2$ ,  $r = 2$ .

Також слід виокремити сценарій, що описується другим співвідношенням, коли задача допускає існування атрактора  $\mathcal{A}^\#$  і

(\*\*)  $\omega^\#[\varphi]$  містить випадкову функцію.

Якщо для деякого  $\varphi \in C^1$  має місце хоча б одне із співвідношень (11), то скажемо, що *початковий стан генерує ідеальну турбулентність*. Говорити про *ідеальну турбулентність* у *крайовій задачі* в цілому доцільно тільки тоді, коли таких початкових станів багато (в тому чи іншому сенсі). Реалізація цієї вимоги забезпечується тим, щоб саме атрактори  $\mathcal{A}^\Delta$  та  $\mathcal{A}^\#$  (а не просто  $\omega$ -граничні множини окремих траєкторій) містили фрактальні або, відповідно, випадкові функції<sup>1</sup>. Тобто, повинні виконуватися співвідношення  $\mathcal{A}^\Delta \cap (C^\Delta \setminus C^1) \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A}^\# \cap (C^\# \setminus C^1) \neq \emptyset$ .

Основним фактором ідеальної турбулентності є складна топологічна структура множини, утвореної нестійкими точками відображення  $f$ . Ця множина зазвичай позначається  $\mathcal{D}(f)$  і носить називу *роздільника* відображення<sup>2</sup>. В околі точок з  $\mathcal{D}(f)$  має місце розбігання близьких траєкторій: для  $z \in \mathcal{D}(f)$  існує  $d(z) > 0$  таке, що при будь-якому  $\varepsilon > 0$  знайдуться  $z_* \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$  і  $m > 0$  з властивістю  $|f^m(z) - f^m(z_*)| > d(z)$ . Коли  $\mathcal{D}(f)$  містить підмножину позитивної міри, на якій  $\inf_z d(z) > 0$ , тоді відображення  $f$

<sup>1</sup> Адже кожен елемент атрактора притягує “визначальну більшість” траєкторій, а те, що реально стоїть за “визначальною більшістю” залежить від конкретної задачі. В нашому випадку цей термін природно розуміти як множину другої категорії Бера, а коли йдеться про випадкові функції, потрібно ще додатково залучати поняття несингуллярних функцій.

<sup>2</sup> Така назва пояснюється тим, що в більшості випадків точки з  $\mathcal{D}(f)$  розділяють басейни притягувальних циклів відображення  $f$ .

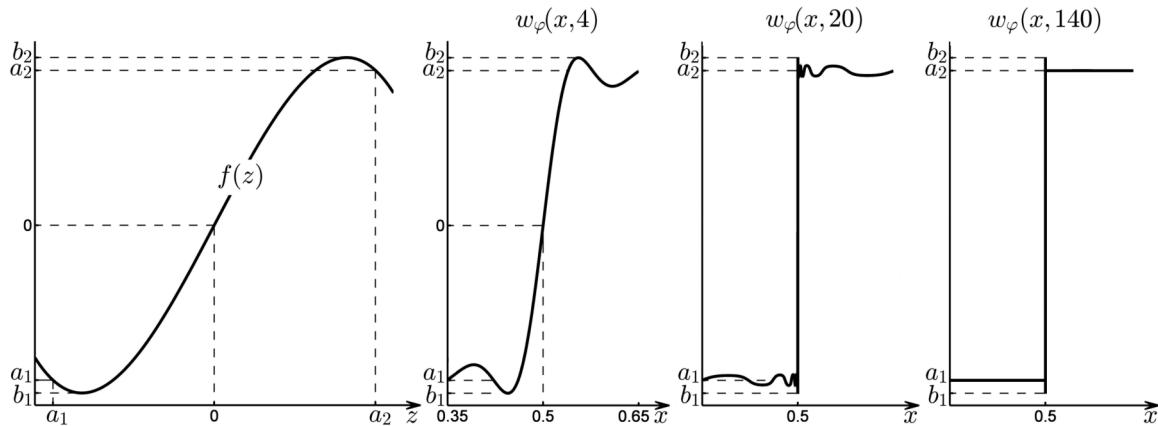


Рис. 2. Градієнтна катастрофа і явище Гібса.  $f(z) = -z^3 + 1.98z$ ,  $\varphi(x) = 2x - 1$ ,  $x \in [0, 0.75]$  і  $\varphi(x) = -1.92x + 1.94$ ,  $x \in (0.75, 1]$ .

є чутливо залежним від початкових даних: як завгодно малі збурення початкових станів призводять до значних і непередбачуваних відхилень кінцевих станів.

Яким чином це відбувається на розв'язках крайової задачі (1), (2), стає зрозумілим із формули  $w_\varphi(x, t) = f^{[x+t]}(\varphi(\{x+t\}))$ . Нехай для спрощення викладок  $z_0 \in \mathcal{D}(f)$  — нерухома точка. Якщо  $\varphi(x_0) = z_0$  і  $\dot{\varphi}(x_0) \neq 0$ , то, хоч би яким малим був окіл  $V_n$  точки  $(x, t)$ , на характеристиці  $x + t = x_0 + n$  маємо  $\text{diam } w_\varphi(V_n) > d(z_0)$ , починаючи з деякого  $n$ . Це означає, що з розв'язком  $w_\varphi(x, t)$  відбувається *градієнтна катастрофа*: коливання розв'язку в околі точок, що лежать на характеристиці  $x + t = x_0 + n$ , стає із зростанням  $n$  майже рівним  $d(z_0)$ , а його графік — все більшим до вертикального відрізка довжини  $\approx d(z_0)$ . Аналогічна ситуація має місце для кожної сім'ї характеристик  $x + t = \tilde{x} + n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , якщо тільки  $\tilde{x}$  належить множині

$$\mathcal{D}(f, \varphi) = \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)). \quad (12)$$

Саме тому функції з  $\omega^\Delta[\varphi]$ , що характеризують поведінку розв'язку  $w_\varphi(x, t)$  при великих  $t$ , “втрачають” неперервність і є багатозначними на  $\mathcal{D}(f, \varphi)$ . Наближення розв'язків до відповідних розривних багатозначних функцій часто супроводжується в околі точок розриву ”викидами”, які зі зростанням часу стабілізуються. Амплітуда усталених ”викидів” визначається відображенням  $f$  і не залежить від початкового стану  $\varphi$ . Звичайно, тоді відповідні граничні функції також мають ”викиди” в точках розриву (багатозначності). Такий тип наближення неперервних функцій до розривних носить назву *явища Гібса* і у випадку задачі (1), (2) обумовлений від’ємністю мультиплікатора притягувального циклу відображення  $f$ . Сказане ілюструє рис. 2, на якому зображене найпростішу ситуацію, коли початковий стан лінійний (кусково) і відображення  $f(z)$  має лише нерухомі точки, а саме, притягувальні точки  $z = a_1$  і  $z = a_2$  (з мультиплікаторами, меншими від нуля) та відштовхувальну точку  $z = 0$ . Як бачимо, в процесі еволюції навіть лінійний початковий стан досить швидко стає майже розривним. Хоча взятий початковий стан не задоволяє другу з умов гладкого узгодження, він демонструє динаміку, типову для будь-якого початкового стану  $\varphi(x)$  (незалежно від виконання умов узгодження), аби тільки інтервал  $\varphi([0, 1])$  накривав точку  $z = 0$ .

Акуратний виклад описаних вище математичних конструкцій можна знайти в [6, 7].

**3. Приклад і комп’ютерна графіка.** Продемонструємо розглянуті вище сценарії ідеальної турбулентності на прикладі крайової задачі (1), (2). Щоб остаточно її спростити, візьмемо за  $f$  в крайових умовах найпростішу нелінійну необоротну функцію — квадратичну, а саме, вельми популярну логістичну параболу:

$$f_\lambda: z \mapsto \lambda z(1 - z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0 \text{ — параметр.} \quad (13)$$

Динамічні властивості відображення (13) добре вивчені і широко відомі (див., зокрема, [8]), так що будемо використовувати їх без пояснень.

Відображення  $f_\lambda$  має нерухомі точки  $z = 0$  та  $z = 1 - 1/\lambda$ , які збігаються при  $\lambda = 1$ . Відповідно, крайова задача має не більше двох сталих розв’язків:  $w(x, t) = 0$  та  $w(x, t) = 1 - 1/\lambda$ . При  $\lambda > 4$  у відображення  $f_\lambda$  немає обмежених інваріантних інтервалів, а при  $0 < \lambda \leq 4$  є один максимальний (за включенням) інваріантний інтервал  $[0, 1]$ . Тому відмінні від сталих обмежені розв’язки існують тільки за умови, що  $\lambda \in (0, 4]$ , причому такі розв’язки породжуються тільки тими початковими станами  $\varphi \in C^1$ , для яких  $\varphi([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ . Надалі будемо вважати ці умови виконаними в дещо посиленому варіанті:

$$\lambda \in (0, 4] \quad \text{i} \quad \varphi([0, 1]) \subseteq (0, 1), \quad \varphi(x) \not\equiv \text{const} \quad \text{на будь-якому інтервалі} \quad (14)$$

(додаткові обмеження на  $\varphi$  дозволяють уникнути певних негрубих ситуацій). Проаналізуємо, якою буде поведінка розв’язків  $w_\varphi(x, t)$  залежно від  $\lambda$ . Ми зможемо судити про наявність турбулентності не тільки в індивідуальних розв’язках, але й у крайовій задачі в цілому, оскільки умовам (14) відповідають майже всі  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

Властивості розв’язку  $w_\varphi(x, t)$  при великих значеннях часу можна охарактеризувати за допомогою  $\omega$ -граничної множини  $\omega^\Delta[\varphi] \subset C^\Delta$ ; тут не зайдо уточнити, що за метрику в просторі  $C^\Delta$  взято відстань Хаусдорфа між графіками. В типових ситуаціях  $\omega^\Delta[\varphi]$  складається з функцій  $\xi_t(x)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  (певні з яких співпадають), що мають такі властивості. Кожна функція  $\xi_t(x)$  переводить  $[0, 1]$  в себе і є розривною (багатозначною) при тих  $x$ , для яких  $\{x + t\} \in \mathcal{D}(f_\lambda, \varphi) := \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f_\lambda))$ , де  $\{\cdot\}$  — дробова частина числа і  $\mathcal{D}(f_\lambda)$  — роздільник відображення (13).

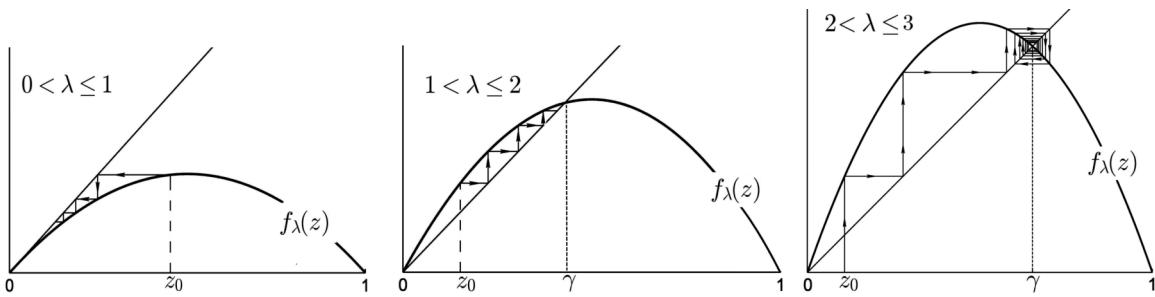
Таким чином, функція  $\xi_0(x)$  розривна на множині  $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$ , а інші функції  $\xi_t(x)$  розривні на відповідному “зсуві” множини  $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$ , а саме, на множині точок  $x = \{\tilde{x} - t\}$ ,  $\tilde{x} \in \mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$ . Щоб з’ясувати, коли в задачі має місце турбулентність, потрібно розібратися з тополого-геометричними властивостями функцій  $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$  при різних значеннях  $\lambda$ . Для відображення (13) і взагалі для квадратичних відображень ця задача значно спрощується з огляду на властивості “успадкування потужності” та “успадкування розмірності”: коли  $\mathcal{D}(f)$  має нескінченне число граничних точок, тоді

$$\text{card}\mathcal{D}(f, \varphi) = \text{card}\mathcal{D}(f), \quad (15)$$

$$\dim_{\text{frac}} \mathcal{D}(f, \varphi) = \dim_{\text{frac}} \mathcal{D}(f), \quad \dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi = \dim_{\text{frac}} \mathcal{D}(f, \varphi) + 1, \quad (16)$$

$\dim_{\text{frac}}$  — фрактальна розмірність,  $\text{gr } \xi$  — графік функції  $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$ .

Ці властивості мають місце для будь-якої функції  $\varphi \in C^1$ , що задовольняє умови (14) (див., зокрема, [7]), і саме такі функції ми розглядаємо.

Рис. 3. Сходи Ламеря (ітераційна діаграма) при  $0 < \lambda \leq 3$ .

Як бачимо, у даному контексті ключова роль належить роздільнику  $\mathcal{D}(f_\lambda)$ . Варто нагадати, що його структура визначається циклами відображення  $f_\lambda$ . Біфуркації циклів при зростанні  $\lambda$  відбуваються згідно з упорядкуванням Шарковського

$$\underbrace{1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec \dots}_{\text{фактор-блок}} \dots \prec \underbrace{\dots \prec 7 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec 3 \cdot 2^2}_{\text{базис-блок } \times 2} \prec \underbrace{\dots 7 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec 3 \cdot 2 \prec \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3}_{\text{базис-блок } \times 2} \quad (17)$$

(через  $\prec$  позначено відношення змущення для циклів неперервних відображень: наявність циклу з періодом  $p$  спричиняє наявність циклу з будь-яким періодом  $p' \prec p$ ). При цьому  $f_\lambda$ , як і всі квадратичні відображення, або має один притягувальний цикл, або взагалі не має притягувальних циклів.

Виходячи зі структури  $\mathcal{D}(f_\lambda)$  при різних значеннях  $\lambda$ , ми виокремимо типові для крайових задач сценарії ідеальної турбулентності і за допомогою комп’ютерної графіки проілюструємо їхній перебіг на прикладі розв’язку, що відповідає початковому стану  $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ , де числові значення коефіцієнтів обрані залежно від значення параметра  $\lambda$  таким чином, щоб виконувалися умови гладкого узгодження (і, отже, розв’язок  $w_\varphi(x, t)$  був  $C^1$ -гладким). Задля уникнення плутанини між областями, в яких змінюються  $x$  — просторова змінна крайової задачі, і  $z$  — незалежна змінна в (13), будемо у другому випадку позначати інтервал  $[0, 1]$  через  $I$ .

**1.** Труднощі можуть з’явитися тільки при  $\lambda > 3$ , оскільки в протилежному випадку динаміка відображення  $f_\lambda$  подібна до лінійної:  $f_\lambda$  має одну притягувальну нерухому точку  $z = \gamma$ , де  $\gamma = 0$  при  $0 < \lambda \leq 1$  і  $\gamma = 1 - 1/\lambda$  при  $1 < \lambda \leq 3$ ; у першому випадку ця точка притягує весь інтервал  $I$ , а в другому — внутрішність інтервалу  $I$  (рис. 3). Тому роздільник  $\mathcal{D}(f_\lambda)$  або порожній, або складається з двох точок: відштовхувальної нерухомої точки  $z = 0$  та її прообразу  $z = 1$ , і отже, в будь-якому випадку множини  $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$  будуть порожніми і, відповідно, розв’язки  $w_\varphi(x, t)$  будуть зі зростанням  $t$  рівномірно прямувати до стаціонарного розв’язку  $w(x, t) = \gamma$ . В термінах  $\omega$ -граничних множин це означає, що всі множини  $\omega^\Delta[\varphi]$  збігаються між собою і складаються з однієї функції  $\xi_\circ(x) = \gamma$ . Отже, атрактор задачі є теж зовсім простим — це точка  $\xi_\circ$ . При  $0 < \lambda \leq 3$  маємо той винятковий випадок, коли атрактор крайової задачі лежить в її рідиному фазовому просторі і про ідеальну турбулентність говорити не доводиться.

**2.** При переході параметра  $\lambda$  через значення, що дорівнює 3, відбувається біфуркація подвоєння періоду: нерухома точка  $z = \gamma$  стає відштовхувальною і від неї народжується

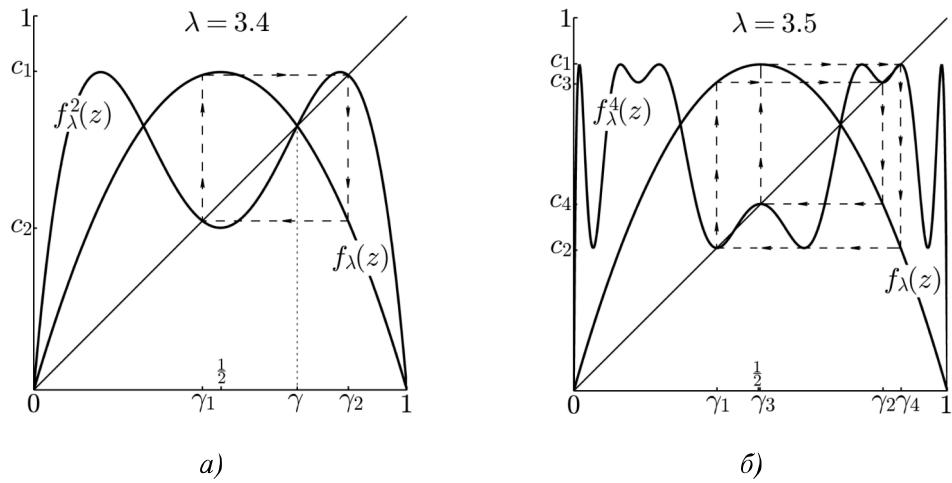


Рис. 4.  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  — притягувальний цикл;  $c_n = f_\lambda^n(1/2)$ ,  $m, n = 0, 1, \dots$

притягувальний цикл періоду 2. Цей цикл залишається притягувальним доти, доки  $\lambda \leq 1 + \sqrt{6}$ , і притягує всі точки з  $I$  окрім точок роздільника  $\mathcal{D}(f_\lambda)$ , який порівняно з попереднім випадком “збільшується” на прообрази точки  $z = \gamma$ , тобто  $\mathcal{D}(f_\lambda) = \bigcup_{n \geq 0} f_\lambda^{-n}(\gamma) \cup \{0\} \cup \{1\}$ . Тепер  $\mathcal{D}(f_\lambda)$  являє собою зліченну замкнену множину з двома граничними точками  $z = 0$  та  $z = 1$ . Тому множини  $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$  будуть непорожніми і скінченими, внаслідок чого множини  $\omega^\Delta[\varphi]$  складатимуться з (напівнеперервних зверху) функцій зі скінченим числом розривів. Звідси висновок: *при  $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$  атрактор крайової задачі знаходиться поза фазовим простором, але ідеальної турбулентності в задачі немає*. Візьмемо, наприклад,  $\lambda = 3.4$ . Вигляд  $f_\lambda$  в цьому випадку подано на рис. 4а. Відповідний перебіг еволюції розв’язків  $w_\varphi(x, t)$  продемонстровано на рис. 5, де для конкретного початкового стану  $\varphi(x)$  зображенено одну з функцій, що входять в  $\omega$ -граничну множину  $\omega^\Delta[\varphi]$ . Ситуація тут така: для будь-якого  $t_0$  послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 2k)$  прямує при  $k \rightarrow \infty$  до напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$ , яка має розрив у точці  $x_* \approx 0.5626625$ , що визнається умовою  $\varphi(\{x_* - t_0\}) = \gamma$ ; до того ж спостерігається явище Гібса. Зазначимо, що явище Гібса має місце при кожному  $\lambda$  з інтервалу  $(1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{6}]$  і відсутнє, коли  $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{5}$  (притягувальний цикл відображення  $f_\lambda$  в першому випадку має від’ємний мультиплікатор, а в другому — додатний).

3. З подальшим зростанням  $\lambda$  відбувається послідовне подвоєння періодів притягувальних циклів, яке триває аж до  $\lambda^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i \approx 3.57$ , де  $\lambda_i$  — біфуркаційне значення, при якому з циклу періоду  $2^{i-1}$  виникає цикл періоду  $2^i$  (зокрема,  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$ ). Якщо  $1 + \sqrt{6} < \lambda < \lambda^*$ , то  $f_\lambda$  має цикли тільки з періодами  $1, 2, 2^2, \dots, 2^m$ , де  $m = m(\lambda) \geq 2$  і  $m(\lambda) \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow \lambda^*$ . Цикл періоду  $2^m$  — єдиний притягувальний цикл, інші цикли — відштовхувальні. Роздільник  $\mathcal{D}(f_\lambda)$  знову складається з прообразів відштовхувальних циклів і, отже, є зліченною замкненою множиною, але тепер зі значно більшою кількістю граничних точок, якими є прообрази циклів з періодами  $< 2^{m-1}$ . Таким чином, починаючи з  $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ , “працює” співвідношення (15), з якого випливає, що всі множини  $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$  також будуть зліченними і, відповідно, множини  $\omega^\Delta[\varphi]$  складатимуться з функцій зі зліченним числом розривів. Типовий приклад маємо при  $\lambda = 3.5$ , коли період притягувального циклу дорівнює 4 (рис. 4б). Співвідносна динаміка розв’язку  $w_\varphi(x, t)$  подана на рис. 6. Цей випадок аналогічний до попереднього. Для будь-якого  $t_0$

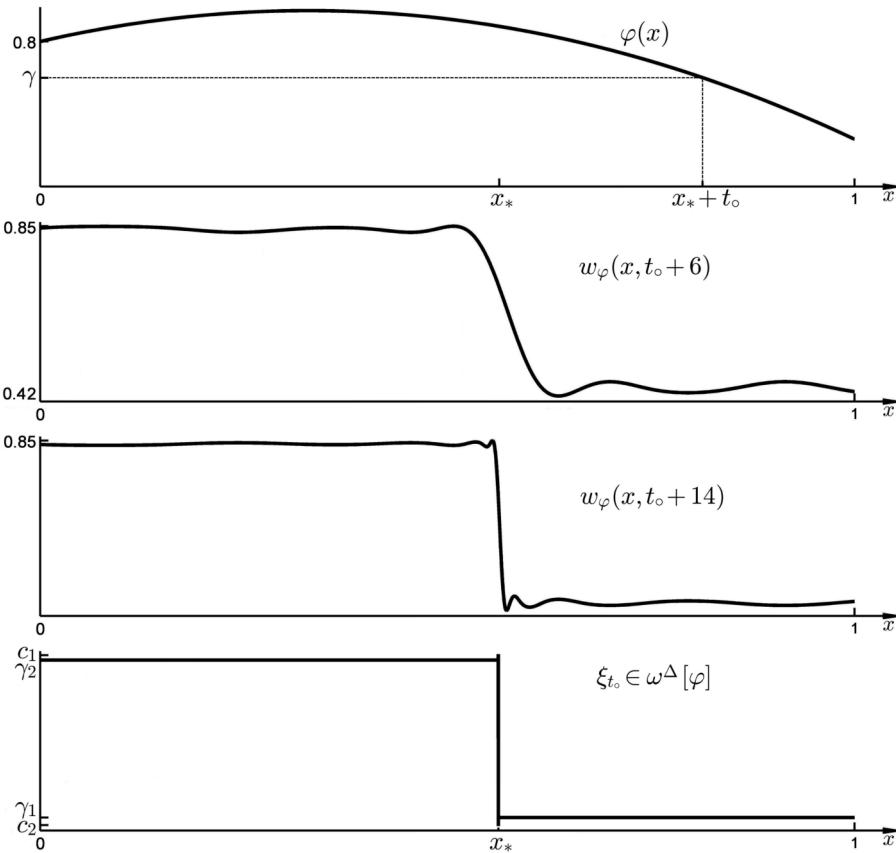


Рис. 5. Асимптотична динаміка розв'язків при  $\lambda = 3, 4$ . Послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 2k)$  збігається при  $k \rightarrow \infty$  до напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$  зі скінченим числом розривів. При цьому має місце явище Гібса ( $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a = -0,7483$ ,  $b = 0,4923$ ,  $c = 0,8$ ;  $t_0 = 0,25$ ;  $x_* = 0,5626625$ ).

послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 4k)$  прямує при  $k \rightarrow \infty$  до певної напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$ , але з тією відмінністю, що тепер  $\xi_{t_0}(x)$  має зліченне число розривів, проте набір амплітуд розривів залишається скінченим. Розриви відбуваються при тих  $x$ , для яких  $\varphi(\{x + t_0\})$  є прообразом циклу періоду 2, і скупчуються біля точки  $x_* \approx 0,5529829$ , для якої  $\varphi(\{x + t_0\}) = \gamma$ . Саме функції  $\xi_t(x)$ ,  $t \in [0, 4]$ , і утворюють  $\omega$ -граничну множину  $\omega^\Delta[\varphi]$ . Явище Гібса також відбувається, але на малюнку його можна відтворити тільки при достатньому збільшенні масштабування.

При  $\lambda = \lambda^*$  всі цикли відображення  $f_\lambda$  відштовхувальні, а їхні періоди пробігають всі ступені двійки  $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ . Роздільник  $\mathcal{D}(f_\lambda)$ , який знову складається з прообразів відштовхувальних циклів, є зліченою, але вже незамкненою множиною, а всі точки з  $I \setminus \mathcal{D}(f_\lambda)$  притягуються до канторової множини, утвореної граничними точками роздільника. В цьому випадку при фіксованих  $t$  збіжними виявляються послідовності  $w_\varphi(x, t + 2^k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Відповідні граничні функції  $\xi_t(x)$  складають  $\omega$ -граничну множину  $\omega^\Delta[\varphi]$  і мають зліченне число розривів, проте тепер вони влаштовані складніше: по-перше, дляожної функції  $\xi_{t_0}(x)$  точки скупчення розривів — це ті  $x$ , для яких  $\varphi(\{x + t_0\})$  є прообразом щойно згаданої канторової множини, і, по-друге, набір амплітуд розривів є нескінченим, а самі амплітуди спадають до нуля (зі швидкістю, що визначається константою Фейгенбаума  $\alpha \approx 2,5029$ ). Ілюстрацію наведено на рис. 7.

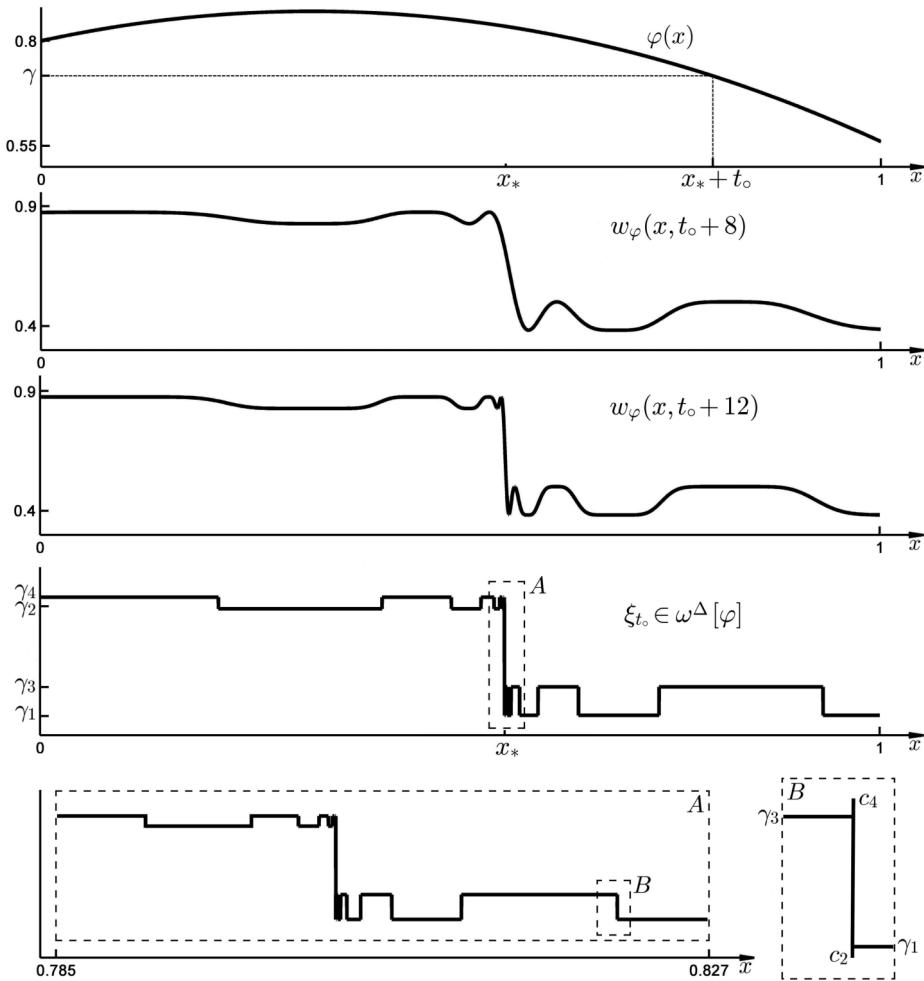


Рис. 6. Слабка турбулентність при  $\lambda = 3.5$ . Послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 4k)$  збігається при  $k \rightarrow \infty$  до напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$  зі зліченим числом розривів, при цьому має місце явище Гібса ( $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a = -0,6764$ ,  $b = 0,4364$ ,  $c = 0,8$ ;  $t_0 = 0,25$ ;  $x_* = 0,5529829$ ).

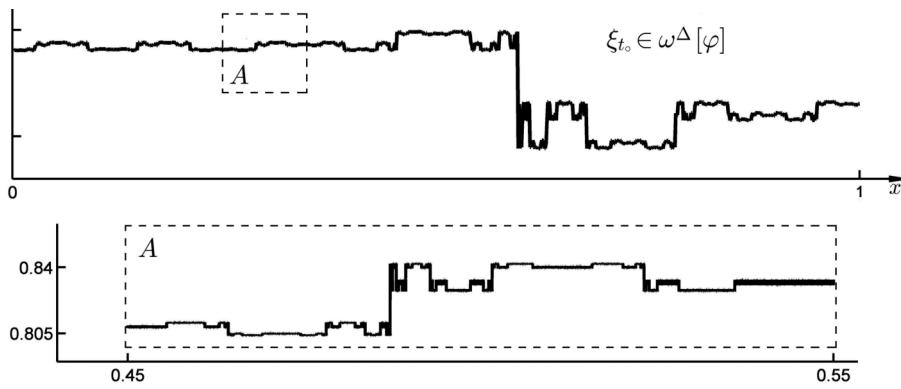


Рис. 7. Слабка турбулентність при  $\lambda = \lambda^* \approx 3,57$ . Послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 2^k)$  збігається при  $k \rightarrow \infty$  до напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$  зі зліченим числом розривів ( $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a = -0,6295$ ,  $b = 0,4007$ ,  $c = 0,8$ ;  $t_0 = 0,2$ ).

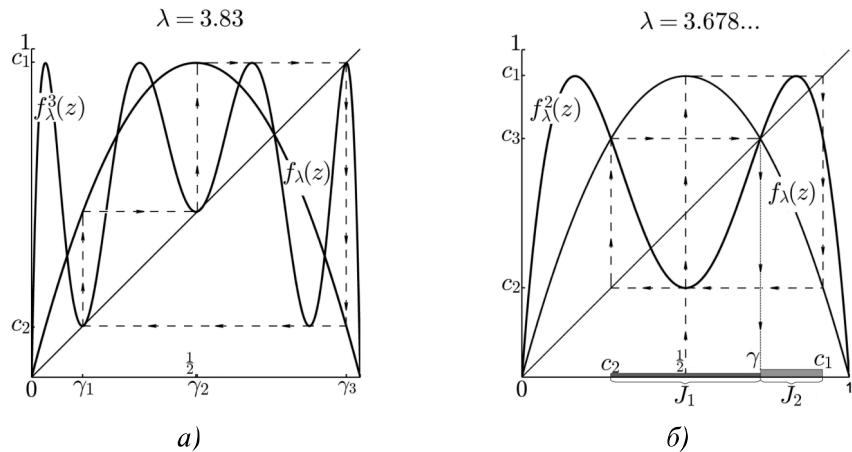


Рис. 8.  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  — притягувальний цикл,  $\{J_1, J_2\}$  — “поглинальний” цикл інтервалів,  $c_n = f_\lambda^n(1/2)$ .

Функції зі зліченним числом розривів належать до фрактальних, звідки випливає, що і при  $1 + \sqrt{6} < \lambda < \lambda^*$ , і при  $\lambda = \lambda^*$  в задачі має місце ідеальнотурбулентність. Щоб зрозуміти, наскільки розвиненою вона є, з'ясуємо, яку фрактальну розмірність мають графіки функцій  $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$ . Для цього використовуються співвідношення (16), з яких випливає, що в обох випадках  $\dim_{\text{frac}} \mathcal{D}(\varphi, f_\lambda) = 0$ , і отже,  $\dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi = 1$ . Така хаотизація дісталася назву *слабкої ідеальної турбулентності*. В результаті констатуємо, що при  $1 + \sqrt{6} < \lambda \leq \lambda^*$  крайова задача демонструє слабку турбулентність.

**4.** Якщо продовжувати збільшувати  $\lambda$ , то з'являтимуться все нові й нові цикли, і отже (завдяки (17)) при  $\lambda > \lambda^*$  у  $f_\lambda$  будуть цикли з періодами, відмінними від ступеня двійки, а тому будуть і цикли як завгодно великого періоду. Внаслідок цього роздільник  $\mathcal{D}(f_\lambda)$  істотно “збільшується”: до множини прообразів відштовхувальних циклів “додається” її граничні точки, і тепер  $\mathcal{D}(f_\lambda)$  стає незліченою множиною. З (15) випливає, що множини  $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$  також будуть незліченими і, відповідно,  $\omega$ -граничні множини  $\omega^\Delta[\varphi]$  складатимуться з фрактальних функцій з незліченим числом розривів.

Отже, при  $\lambda > \lambda^*$  в крайовій задачі знову маємо ідеальну турбулентність, але при цьому для всіх  $\varphi$  та  $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$ , як побачимо далі,  $\dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi > 1$ . Таку хаотизацію названо *сильною ідеальною турбулентністю* і вона більш розвинута за слабку. Розглянемо дві типові ситуації.

**4a.** На інтервалі  $(\lambda^*, 4]$  існує відкрита щільна множина  $\Lambda_a$  значень параметра, при яких  $f_\lambda$  має (притому єдиний) притягувальний цикл. При кожному  $\lambda \in \Lambda_a$  період цього циклу відрізняється від ступеня двійки, а сам цикл притягує всі точки з  $I$  за винятком роздільника  $\mathcal{D}(f_\lambda)$ , який  $\epsilon$ , як свідчить теорія, канторовою множиною позитивної фрактальної розмірності  $r = r(\lambda) < 1$ . З цього, зважаючи на (16), виводимо:  $\dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi = r + 1$  для  $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$ . Отже, при  $\lambda \in \Lambda_a$  крайова задача демонструє сильну турбулентність. Для прикладу візьмемо  $\lambda = 3.83$ , коли  $f_\lambda$  має притягувальний цикл періоду 3. Цю ситуацію ілюструють рис. 8а та 9. При цьому для будь-якого  $t_0$  послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 3k)$  прямує при  $k \rightarrow \infty$  до певної напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$ . Отже,  $\omega$ -гранична множина  $\omega^\Delta[\varphi]$  складається з функцій  $\xi_t(x)$ ,  $t \in [0, 3]$ ; кожна така функція має розриви на фрактальній множині (причому між будь-якими двома точками розриву знайдеться інтервал неперервності) і всі розриви мають одну й ту саму амплітуду. В результаті,  $1 < \dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi_{t_0} < 2$ . Окрім то-

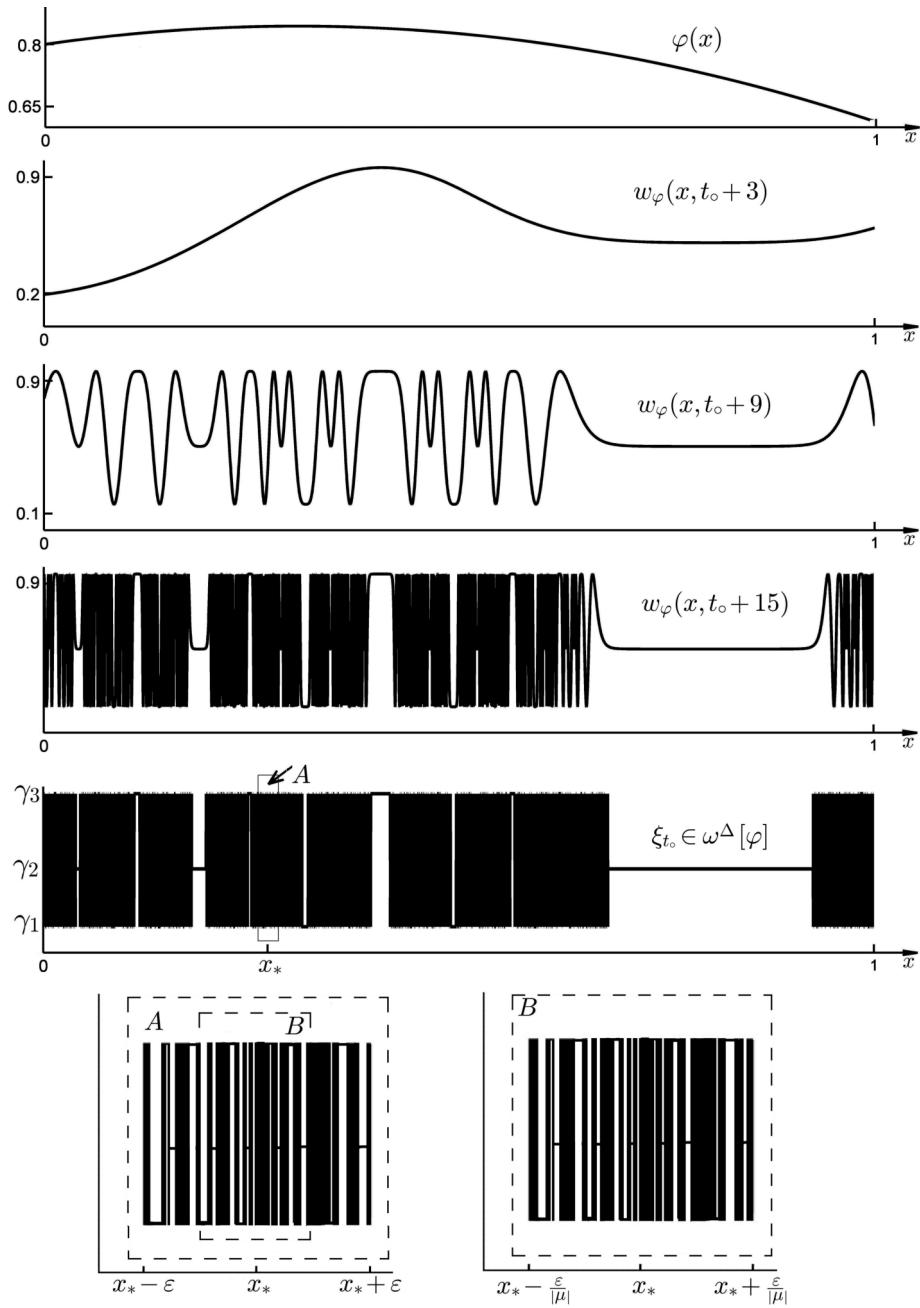


Рис. 9. Сильна турбулентність при  $\lambda = 3,83$ . Послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 3k)$  збігається при  $k \rightarrow \infty$  до напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$  з незліченним числом розривів, при цьому має місце явище Гібса; графік  $\xi_{t_0}(x)$  є локально самоподібним в точках розриву і має фрактальну розмірність, більшу за 1 і меншу за 2 ( $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a = -0,4756$ ,  $b = 0,2884$ ,  $c = 0,8$ ;  $t_0 = 0,5$ ;  $x_* = 0,27267$ ,  $\varepsilon = 0,00001$ ,  $\mu = -1,83$ ).

го, графік  $\text{gr } \xi_{t_0}(x)$  є локально самоподібним у точках розриву. На рис. 9 цю властивість продемонстровано на прикладі точки  $x_* \approx 0,27267$ , для якої  $\varphi(\{x_* + t_0\}) = \gamma$ . Графік функції  $\xi_{t_0}(x)$ , розташований в області  $B$ , є майже копією того ж графіку, розташованого

в області  $A$ , при цьому коефіцієнт подібності визначається мультиплікатором  $\mu = -1,83$  точки  $z = \gamma$ . Якщо поглянути на область  $B$  “під лугою”, збільшивши масштаб по осі  $x$  в  $|\mu|$  разів, то побачимо в областях  $A$  і  $B$  дуже схожі картини. Явище Гібса також має місце, але відповідні “викиди” настільки малі, що не відображаються на рис. 9.

**4b.** Разом з  $\Lambda_a$  інтервал  $(\lambda^*, 4]$  містить ніде не щільну множину  $\Lambda_b$  позитивної лебегової міри, що складається з тих значень параметра, при яких  $f_\lambda$  має (притому єдиний) “поглинальний” цикл інтервалів — скінчений набір замкнених інтервалів, які попарно не мають спільноЯ внутрішності, циклічно переставляються під дією  $f_\lambda$  і є такими, що кожна точка з  $I$  за скінченне число ітерацій потрапляє в один з них. На “поглинальному” циклі інтервалів існує всюди щільна траекторія (всі цикли є відштовхувальними). Це означає, що кожна точка  $z \in I$  є нестійкою, і отже,  $\mathcal{D}(f_\lambda) = I$ . Тому  $\dim_{\text{frac}} \mathcal{D}(f_\lambda) = 1$ , і згідно з (16) маємо  $\dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi = 2$  для  $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$ . Як бачимо, при  $\lambda \in \Lambda_b$  крайова задача знову демонструє сильну турбулентність, але в цьому разі спостерігаємо в певному сенсі екстремальну картину, адже  $\dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi = \dim \text{gr } \varphi + 1$ . Дамо пояснення на прикладі, коли  $\lambda = \lambda_* \approx 3,678$ , де  $\lambda_*$  — дійсний корінь рівняння  $f_\lambda^3(1/2) = 1 - 1/\lambda$  (тобто  $\lambda_*$  — це те значення параметра, при якому точка екстремуму  $z = 1/2$  за три ітерації потрапляє в нерухому точку  $z = \gamma$ ). Відображення  $f_{\lambda_*}$  має “поглинальний” цикл інтервалів, що складається з двох суміжних інтервалів (див рис. 8б). Відповідна еволюція розв’язків зображена на рис. 10: для будь-якого  $t_o$  послідовність  $w_\varphi(x, t_o + 2k)$  прямує при  $k \rightarrow \infty$  до певної функції  $\xi_{t_o}(x)$ , розривної при кожному  $x \in [0, 1]$ . В результаті множину  $\omega^\Delta[\varphi]$  складають з функції  $\xi_t(x)$ ,  $t \in [0, 2)$ , для яких  $\dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi_t = 2$ . З геометричної точки зору це означає, що розв’язок  $w_\varphi(x, t)$  визначає на площині  $(y, x)$  гладку криву  $y = w_\varphi(x, t_o + 2k)$ , яка стає при великих  $k$  подібною до плоскої *space-filling кривої* — неперервної 2-вимірної кривої, що проходить через кожну точку деякого квадрата.

**4c.** Решта значень  $\lambda$  з інтервалу  $(\lambda^*, 4]$  складають незліченну ніде не щільну множину  $\Lambda_c$  нульової лебегової міри. Ми не будемо докладно зупинятися на цій нетиповій ситуації. Тут мають місце випадки двох типів: або такі ж, як для  $\lambda \in \Lambda_a$ , або подібні до випадку  $\lambda = \lambda_*$ , та з тією різницею, що існують цикли періодів, відмінних від ступеня двійки, і тому роздільник є незліченною множиною. Отже, турбулентність в крайовій задачі при  $\lambda \in \Lambda_c$  знову буде сильною.

**5.** Ми проілюстрували перебіг сценаріїв групи (\*). Тепер кілька слів про сценарій (\*\*). Типову ситуацію, коли цей сценарій відбувається, маємо при  $\lambda \in \Lambda_b$ . Наявність space-filling властивості, наприклад, як на рис. 10, приводить до того, що розв’язки  $w_\varphi(x, t)$  при великих  $t$  потрапляють за горизонт передбачуваності і стає неможливим обчислити їхнє значення достовірно: наближене значення (навіть при як завгодно високій точності обчислень) може виявитися відмінним від справжнього значення на величину порядку 1. Тому природно постає питання про сценарій (\*\*), пов’язаний з імовірнісним описом розв’язків. Як показує теорія (див., наприклад, [9, 10]), цей сценарій реалізується за умови, що  $f_\lambda$  має гладку інваріантну міру, скажімо,  $\mu$ . Тоді асимптотична динаміка розв’язку  $w_\varphi(x, t)$  описується випадковими функціями з  $\omega$ -граничною множиною  $\omega^\#[\varphi]$ , а розподіл цих функцій задається мірою  $\mu$ . Такого роду хаотизацію названо *стохастичною ідеальною турбулентністю*. Добре відомо, що при кожному  $\lambda \in \Lambda_b$  гладка інваріантна міра у  $f_\lambda$  існує (і зосереджена на “поглинальному” циклі інтервалів). Отже, коли  $\lambda \in \Lambda_b$ , тоді сильна турбулентність у крайовій задачі одночасно є стохастичною, до того ж стохастична турбулентність не є чимось виключним, це явище фізично реалізовне в тому сенсі, що спостерігається на множині значень параметра позитивної міри Лебега.

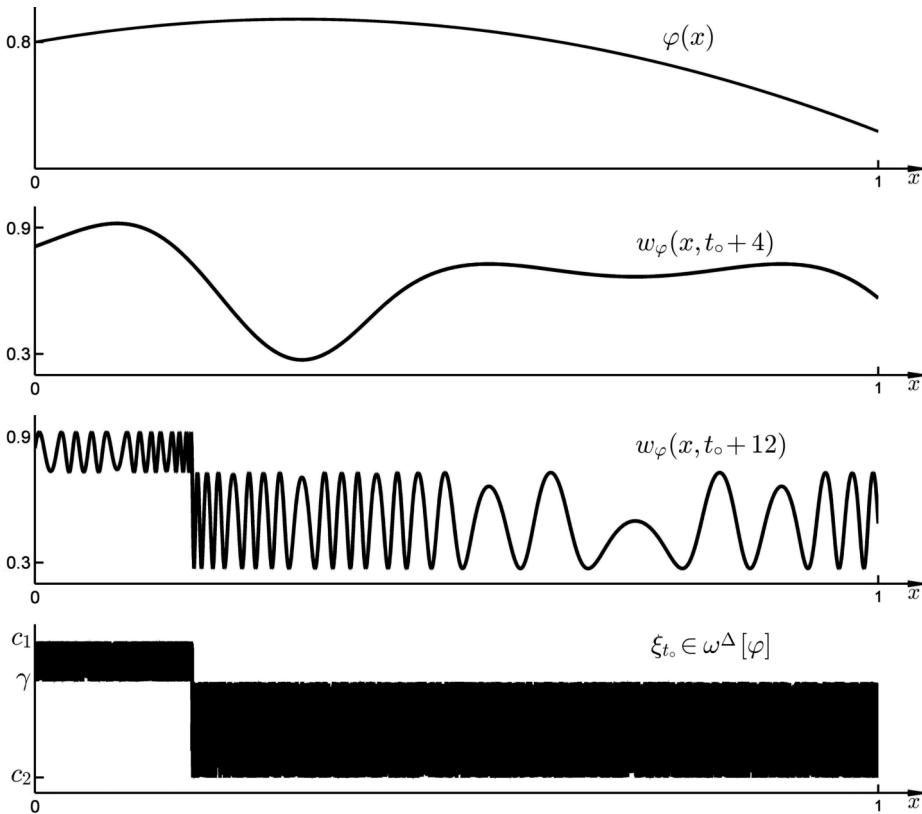


Рис. 10. Сильна турбулентність при  $\lambda = \lambda_* \approx 3,678$ . Послідовність  $w_\varphi(x, t_0 + 2k)$  збігається при  $k \rightarrow \infty$  до напівнеперервної зверху функції  $\xi_{t_0}(x)$ , розривної в кожній точці; фрактальна розмірність графіка  $\xi_{t_0}(x)$  дорівнює 2 ( $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a = -0,5621$ ,  $b = 0,3505$ ,  $c = 0,8$ ;  $t_0 = 0,6$ ).

**4. Про атрактор.** Ми простежили трансформації хаотичної динаміки розв'язків при зміні  $\lambda$  в інтервалі турбулентності  $(1 + \sqrt{6}, 4]$ . Тепер побіжно зупинимося на питанні: що являє собою атрактор задачі, наскільки складно він влаштований? Нагадаємо, що під атрактором крайової задачі розуміється глобальний атрактор динамічної системи зсувів (10) в розширених просторах  $C^\Delta$  і  $C^\#$ . Як і раніше, для загального розуміння не обов'язково залучати точні математичні формулювання, достатньо буде спрощеного погляду, і в цьому плані аргументальною ілюстрацією буде наведена вище візуалізація різних типів перебігу ідеальної турбулентності.

Атрактор в  $C^\Delta$  завжди існує; коротко кажучи, він визначається як найменша замкнена множина  $\mathcal{A}^\Delta \subset C^\Delta$ , що притягує (в метриці простору  $C^\Delta$ ) майже всі траєкторії, що починяються в фазовому просторі  $C^1$ . Динамічна система (10) задає (за неперервністю) рух на атракторі, а саме:  $\xi(x) \mapsto f(\xi(x))$ ,  $\xi \in \mathcal{A}^\Delta$ .

При  $\lambda \in (1 + \sqrt{6}, \lambda^*) \cup \Lambda_a$  майже всі траєкторії відображення  $f_\lambda$  притягуються до циклу, а при  $\lambda \in \Lambda_b$  притягуються до циклу інтервалів. Ця періодичність “спадкується” динамічною системою (10). Для майже кожної траєкторії  $S^t[\varphi](x)$  відповідна  $\omega$ -гранична множина  $\omega^\Delta[\varphi]$  складається з фрактальних функцій і є циклом. Так, якщо  $\lambda = 3,83$ , то для майже всіх  $\varphi \in C^1$  множину  $\omega^\Delta[\varphi]$  складають функції  $\xi_t(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_\varphi(x, t + 3k)$ ,  $t \in [0, 3]$ , де  $\lim$  — операція граничного переходу в  $C^\Delta$ . З цієї формули для  $\xi_t(x)$  та з (7) і

(9) виводимо, що  $f(\xi_t(x)) = \xi_{t+1(\text{mod } 3)}(x)$ , тобто множина  $\omega^\Delta[\varphi]$  є циклом періоду 3. Отже, атрактор  $\mathcal{A}^\Delta$  складається з циклів періоду 3. При інших значеннях  $\lambda$  з інтервалу  $(1+\sqrt{6}, 4]$  атрактор  $\mathcal{A}^\Delta$  складається або з циклів, або з майже періодичних траекторій. Зокрема, при  $\lambda = \lambda^* \approx 3,57$  атрактор  $\mathcal{A}^\Delta$  утворюють траекторії з майже періодами 1, 2,  $2^2, 2^3, \dots$

При  $\lambda \in \Lambda_b$  крайова задача має атрактор також і в просторі  $C^\#$ , і цей атрактор  $\mathcal{A}^\#$  також складається з циклів. Наприклад, при  $\lambda = \lambda_* \approx 3,678$  обидва атрактори  $\mathcal{A}^\Delta$  і  $\mathcal{A}^\#$  утворюються циклами періоду 2.

Таким чином, *при всіх розглянутих типах хаотизації розв'язків фазова (некінченновимірна) динаміка на атракторі є регулярною — періодичною або майже періодичною.*

Насамкінець важливо підкреслити, що розглянуті сценарії ідеальної турбулентності є характерними для широких класів крайових задач математичної фізики.

## Література

1. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu. Turbulence: ideal* // Encyclopedia of Nonlinear Science (ed. Alwyn Scott). – New York; London: Routledge, 2005. – P. 955–957.
2. Романенко Е. Ю., Шарковський А. Н. Динамические системы и моделирование турбулентности // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 2. – С. 217–230.
3. Шарковський О. М. Динамічні системи, породжувані крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп’ютерна турбулентність // Пр. Укр. мат. конгр. Секц. Динамічні системи. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 125–129.
4. *Sharkovsky A. N. Ideal turbulence* // Nonlinear Dyn. – 2006. – **44**. – P. 15–27.
5. Шарковський А. Н., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2004. – **244**. – С. 281–296; *English translation*: Proc. Steklov Inst. Math. – 2004. – **244**. – P. 264–279.
6. Шарковський А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения // Київ: Наук. думка, 1986. – 280 с. (*English translation*: *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu. Difference equations and their applications* // Math. Appl. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – Vol. 250. – 358 p.)
7. Романенко О. Ю. Різницеві рівняння з неперервним аргументом // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **100**. – 346 с.
8. Шарковський А. Н., Коляда С. Ф., Сівак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерних отображений. – Київ: Наук. думка, 1989. – 216 с. (*English translation*: *Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Fedorenko V. V. Dynamics of one-dimensional mappings* // Math. Appl. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – Vol. 407. – 262 p.)
9. Романенко О. Ю. Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевими рівняннями з неперервним аргументом // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 954–975.
10. *Romanenko E. Yu. Randomness in deterministic continuous time difference equations* // J. Difference Equ. Appl. – 2010. – **16**, № 2-3. – P. 243–268.

Одержано 17.12.2018