

**О ПОСТРОЕНИИ КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МЕТОДА РИТЦА ПРИ РАСЧЕТЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ В ФОРМЕ КУПОЛА**

**Ю. В. Троценко**

*Ин-т математики НАН Украины  
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина  
e-mail: trots@imath.kiev.ua*

*We propose a system of coordinate functions for a use of the Riesz method to find eigen forms and eigen frequencies of axis nonsymmetric oscillations of a thin rotation shell of a dome form. The construction of basis functions is carried out accounting for particularities of the spectral problem, which provides uniform convergence of the calculation process. As an example, we calculate dynamical characteristics for a shell in the form of a spherical dome.*

*Запропоновано системи координатних функцій при застосуванні методу Ритца для знаходження власних форм та частот неосесиметричних коливань тонкостінних куполоподібних оболонок обертання. Побудову базисних функцій здійснено з урахуванням індивідуальних особливостей спектральної задачі, що забезпечує рівномірну збіжність обчислювального процесу. Як приклад наведено розрахунки динамічних характеристик для оболонки у формі сферичного купола.*

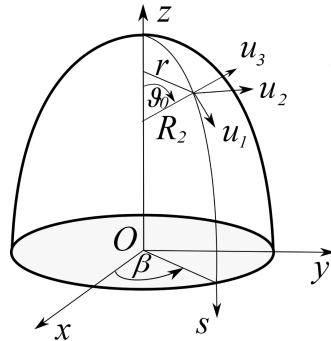
**Введение.** Разработке аналитических и численных методов для решения задач о собственных и вынужденных колебаниях оболочек вращения посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [1 – 7]).

Несмотря на привлекательность получения приближенного решения задач в аналитической форме, метод Ритца не нашел достаточного применения для решения спектральных задач теории тонкостенных оболочек. Это связано, в первую очередь, с проблемой выбора базисных функций, которые бы гарантированно обеспечивали сходимость решений, а при необходимости исследования динамической прочности — поточечную сходимость и их первых трех производных при достаточно малых значениях толщины оболочки. Это объясняется тем, что при существенном уменьшении толщины оболочки исходная задача переходит в разряд сингулярно возмущенных краевых задач, для которых характерно наличие высоких градиентов в решениях и их производных, локализованных в малой окрестности граничных точек. Аппроксимация таких решений известными конечными рядами, без учета этих особенностей, не приводит к положительному результату.

Возникает задача разработки такого метода решения краевых задач для уравнений с параметром при старшей производной, который бы имел одинаковую скорость сходимости как при малых, так и средних его значениях. Такие методы в литературе называют равномерно сходящимися методами по параметру [8].

Настоящая работа посвящена развитию метода Ритца для построения решения спектральной задачи о свободных неосесимметричных колебаниях куполообразных оболочек вращения, имеющего равномерную сходимость как по малому параметру при старшей производной в исходных уравнениях, так и по независимой переменной. При этом

предварительно учитывается формальная структура фундаментальных решений исходной системы уравнений для оболочек вращения в форме купола, полученная с использованием элементов аналитической теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных и уравнений с регулярной особой точкой. На этой основе построены системы базисных функций для аппроксимации искомых решений. Разработан способ формирования алгебраических уравнений в методе Рунге с использованием вариации исходного функционала, который в дальнейшем значительно упрощает процедуру программирования предложенного здесь алгоритма расчета динамических характеристик рассматриваемой оболочки. Эффективность подхода проанализирована на задаче о неосесимметричных колебаниях сферического купола. Решение задачи об осесимметричных колебаниях рассматриваемой оболочки приведено в работе [6].



Основные параметры механической системы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим тонкостенную упругую оболочку, срединная поверхность которой является поверхностью вращения. Предполагается, что оболочка ограничена одной параллелью и имеет вершину. В качестве ортогональных криволинейных координат выберем длину дуги образующей  $s$  ( $0 \leq s \leq s_1$ ) и угол в окружном направлении  $\beta$ . Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки, а через  $r = r(s)$  расстояние от точки меридиана до оси вращения. Проекции перемещения точек срединной поверхности оболочки на направления образующей, параллели и внешней нормали обозначим соответственно через  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  (см. рисунок).

Рассмотрим установившиеся свободные неосесимметричные колебания оболочки с частотой  $\omega$  и  $n$  волнами в окружном направлении. Перемещения оболочки можно представить в виде

$$u_1 = u(s) \cos n\beta \sin \omega t, \quad u_2 = v(s) \sin n\beta \sin \omega t, \quad u_3 = w(s) \cos n\beta \sin \omega t, \quad n > 0.$$

Обозначим через  $R_0$  какой-либо характерный линейный размер оболочки. Тогда после перехода к безразмерным величинам уравнения для определения вектор-функции  $\vec{u} = \{u, v, w\}$  и частоты колебаний  $\omega$  можно представить в виде [9]

$$A\vec{u} - \lambda\vec{u} = 0, \quad (1)$$

где

$$A = \mu^4 K + L, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \lambda = \frac{(1 - \nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

$h$  — толщина оболочки,  $E$ ,  $\nu$  и  $\rho$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки.

Дифференциальные выражения, входящие в матрицы  $L$  и  $K$ , имеют вид

$$L_{11} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{n^2}{r^2} - \frac{2}{R_1 R_2} \right), \quad L_{12} = -n \frac{d}{ds} \frac{1}{r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r,$$

$$L_{13} = \frac{1-\nu}{R_2} \frac{d}{ds} - \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad L_{21} = \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r - \frac{(1-\nu)n}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r},$$

$$L_{22} = \left( \frac{n^2}{r^2} - \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \right) - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r, \quad L_{23} = \frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$L_{31} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d}{ds} r - \frac{1-\nu}{r} \frac{d}{ds} \frac{r}{R_2}, \quad L_{32} = \frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$L_{33} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}, \quad \Delta_n = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r^2},$$

$$K_{33} = \Delta_n \Delta_n + \frac{1-\nu}{r} \left( \frac{d}{ds} \frac{r}{R_1 R_2} \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r R_1 R_2} \right), \quad K_{ij} = 0 \quad \text{при } i+j < 6.$$

При выводе уравнений (1) в формулах для изменения кривизны и кручения поверхности деформированной оболочки были удержаны члены, содержащие только компоненту перемещения  $w(s)$ . Такие уравнения получили название уравнений Муштари–Донелла–Власова, которые нашли широкое применение при расчете оболочечных конструкций.

Безразмерные усилия и моменты, действующие в срединной поверхности оболочки, связаны с ее деформациями по формулам

$$T_1 = \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, \quad T_2 = \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1, \quad S = \frac{1-\nu}{2} \gamma_{12}, \quad c^2 = \mu^4,$$

$$M_1 = c^2(\varkappa_1 + \nu \varkappa_2), \quad M_2 = c^2(\varkappa_2 + \nu \varkappa_1), \quad H = (1-\nu)c^2 \tau.$$

Формулы, выражающие зависимость деформаций срединной поверхности и параметров изменения ее кривизны от компонент перемещения, имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{n}{r} v + \frac{r'}{r} u + \frac{w}{R_2}, \\ \gamma_{12} &= -\frac{n}{r} u + \frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r} v, \quad \varkappa_1 = -\frac{d^2 w}{ds^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{n^2}{r^2} w - \frac{r'}{r} \frac{dw}{ds}, \\ \tau &= \frac{n}{r} \frac{dw}{ds} - \frac{r' n}{r^2} w. \end{aligned} \quad (2)$$

Решения системы уравнений (1), имеющей восьмой порядок, должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Граничные условия накладываются либо на перемещения оболочки, либо на соответствующие им силы. Например, для абсолютно жесткого закрепления края оболочки при  $s = s_1$  эти условия имеют вид

$$\left[ u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0 \right]_{s=s_1}. \quad (3)$$

При свободном перемещении края оболочки имеют место следующие силовые граничные условия:

$$\left[ T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0 \right]_{s=s_1}. \quad (4)$$

Здесь  $\tilde{Q}_1$  — обобщенная поперечная сила, которая в безразмерных величинах выражается через нормальное перемещение точек оболочки по формулам

$$\tilde{Q}_1 = -c^2 \left[ \frac{d}{ds} \Delta w + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \frac{dw}{ds} - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left( \frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r} w \right) \right],$$

$$\Delta w = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left( r \frac{dw}{ds} \right) - \frac{n^2}{r^2} w. \quad (5)$$

Следует отметить, что формулы (5) справедливы для оболочек вращения с постоянной толщиной стенки  $h$ .

В других случаях крепления края оболочки используется комбинация условий (3) и (5).

Эквивалентную вариационную формулировку исходной спектральной задачи можно получить из принципа возможных перемещений, согласно которому

$$\delta \Pi = \delta A.$$

Здесь  $\delta \Pi$  — вариация потенциальной энергии деформации оболочки,  $\delta A$  — работа внешних сил, приложенных к оболочке на ее возможных перемещениях, которые могут быть представлены в виде [10]

$$\delta \Pi = \int_0^{s_1} (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S \delta \gamma_{12} + M_1 \delta \varkappa_1 + M_2 \delta \varkappa_2 + 2H \delta \tau) r ds,$$

$$\delta A = \int_0^{s_1} \vec{Q} \cdot \delta \vec{u} r ds. \quad (6)$$

В соответствии с принципом Даламбера заменим действующую на оболочку нагрузку  $\vec{Q}$  соответствующими силами инерции. Тогда  $\delta A$  будет иметь вид

$$\delta A = \lambda \int_0^{s_1} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) r ds.$$

Таким образом, исходная спектральная задача сведена к отысканию стационарных значений для функционала  $I$ :

$$I(\vec{u}) = \int_0^{s_1} \Phi(\vec{u})r ds. \quad (7)$$

Выражение для функции  $\Phi(\vec{u})$  здесь не приводится вследствие его громоздкости. С помощью обычных средств вариационного исчисления можно показать, что уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями для функционала (7) являются соответственно уравнения (1) и граничные условия (4).

**2. Формальная структура интегралов исходных уравнений для оболочек в форме купола.** Под куполообразными будем понимать такие оболочки, для которых в вершине имеется горизонтальная касательная плоскость и для радиусов кривизны выполняются соотношения

$$(R_1)_{s=0} = (R_2)_{s=0} = R.$$

Для таких оболочек  $r(s)$  будет аналитической и нечетной функцией, которую в окрестности точки  $s = 0$  можно представить в виде разложения

$$r(s) = s \left( 1 - \frac{1}{6R^2} s^2 + a_4 s^4 + \dots \right). \quad (8)$$

При решении краевых задач на основе метода Ритца выбор аппроксимирующих выражений для искомым функций существенно влияет на конечный результат и объем вычислений, необходимый для его получения. Поэтому в дальнейшем построение систем координатных функций будем осуществлять на основе максимального учета особенностей задачи, порождающих медленную сходимость вычислительного процесса.

Одной из особенностей рассматриваемых уравнений является вырождение некоторых их коэффициентов при  $s$ , стремящемся к нулю. При численном интегрировании этих уравнений в литературе имеются различные рекомендации приближенного характера, позволяющие обойти эту трудность. Так, в работе [11] предлагается считать, что в полюсе оболочки имеется отверстие малого радиуса  $r_0$  с некоторыми граничными условиями на его контуре. В работе [12] предлагается малую окрестность вблизи полюса оболочки заменить круглой упругой пластинкой с использованием для нее имеющихся точных решений. Такие подходы позволяют с определенной точностью вычислять частоты колебаний оболочки и не дают возможности определения ее напряженно-деформированного состояния.

Второй характерной особенностью задачи является наличие параметра  $s^2$  при старшей производной в исходных уравнениях, который для тонкостенных оболочек может принимать малые значения. В этом случае для решений характерно наличие медленно меняющейся части и части решения с большими производными, которая локализована в окрестности края оболочки. Эта часть плохо аппроксимируется полиномиальным базисом. В связи с этим выясним структуру фундаментальных интегралов исходных уравнений, используя аналитическую теорию дифференциальных уравнений [13, 14].

Первые интегралы уравнений (1), которые принимают ограниченные значения при  $s = 0$ , будем искать в виде прямого разложения по параметру  $\mu$ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} u_k(s), \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} v_k(s), \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} w_k(s). \quad (9)$$

Для определения функций  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  и  $w_k(s)$  подставим разложения (9) в уравнения (1) и приравняем к нулю коэффициенты при различных степенях параметра  $\mu$ . При  $\mu = 0$  получим систему дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций  $u_0(s)$ ,  $v_0(s)$  и  $w_0(s)$ , которую можно привести к виду

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{du_0}{ds} + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 v_0 + \alpha_4 w_0 &= 0, \\ \beta_1 \frac{d^2 v_0}{ds^2} + \beta_2 \frac{dv_0}{ds} + \beta_3 v_0 + \beta_4 \frac{du_0}{ds} + \beta_5 u_0 + \beta_6 w_0 &= 0, \\ \gamma_1 \frac{dw_0}{ds} + \gamma_2 w_0 + \gamma_3 u_0 + \gamma_4 \frac{dv_0}{ds} + \gamma_5 v_0 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Переменные коэффициенты уравнений (10) определяются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}, \quad \alpha_2 = \frac{r'}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \alpha_3 = \frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ \alpha_4 &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \lambda, \quad \beta_1 = \frac{1-\nu}{2}, \quad \beta_2 = \beta_1 \frac{r'}{r}, \\ \beta_3 &= \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)' - \frac{n^2}{r^2} + \lambda, \quad \beta_4 = -\frac{n(1+\nu)}{2r}, \\ \beta_5 &= -\frac{(3-\nu)nr'}{2r^2}, \quad \beta_6 = -\frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \gamma_1 = -\alpha_1 \left( \lambda - \frac{1-\nu^2}{R_2^2} \right), \\ \gamma_2 &= (1-\nu^2) \left[ \frac{1}{R_2^2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)' + \frac{2}{R_1 R_2} \left( \frac{1}{R_2} \right)' \right] + \\ &\quad + \lambda \left[ \left( \frac{1}{R_1} \right)' + (2\nu-1) \left( \frac{1}{R_2} \right)' \right], \\ \gamma_3 &= (\nu-1) \left( \frac{r'}{r} \right)' \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{\nu-1}{R_1 R_2} - \frac{\nu}{R_2^2} \right) + (\nu^2-1) \frac{r'}{r} \left[ \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{R_1} \right)' - \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{R_2} \right)' \right] + \\ &\quad + (1-\nu) \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \left( \frac{\nu}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_2^2} \right) - \alpha_1^2 \left( \lambda + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} - \beta_1 \frac{n^2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1^2\beta_4, \quad \gamma_5 = \alpha_1\alpha'_3 - \beta_5\alpha_1^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha'_1\alpha_3 + \frac{r'}{r}\alpha_1\alpha_3.$$

Очевидно, что функции  $u_0(s)$ ,  $v_0(s)$  и  $w_0(s)$  определяют решения для уравнений безмоментной теории оболочек вращения.

Определение последующих членов разложений (9) сводится к интегрированию системы уравнений (10), правые части которой содержат некоторые операторы от решений, найденных на предыдущем приближении. Поскольку высшие приближения в разложениях (9) не влияют на структуру решений нулевого приближения, ниже установим поведение интегралов уравнений (10) в окрестности точки  $s = 0$ . Для этого сведем исходную систему уравнений к нормальному виду, коэффициенты которой являются аналитическими функциями при  $s \in [0, s_1]$ . Заметим при этом, что с учетом разложения (8) коэффициенты  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_4$ ,  $\beta_6$  и  $\gamma_4$  имеют полюсы первого порядка, а коэффициенты  $\beta_3$ ,  $\beta_5$ ,  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$  — полюсы второго порядка при  $s \rightarrow 0$ . Остальные коэффициенты являются аналитическими функциями.

Введем в рассмотрение новые функции

$$y_1 = u_0, \quad y_2 = v_0, \quad y_3 = sw_0, \quad y_4 = s \frac{dv_0}{ds}.$$

Тогда систему уравнений (10) можно свести к системе четырех уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. В векторно-матричной форме эта система примет вид

$$s \frac{d\vec{y}}{ds} = F(s, \lambda)\vec{y}. \quad (11)$$

Здесь  $\vec{y}$  — вектор с компонентами  $y_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , а элементы матрицы  $F(s, \lambda)$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}s, & f_{12} &= -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}s, & f_{13} &= -\frac{\alpha_4}{\alpha_1}, & f_{14} &= 0, \\ f_{21} &= f_{22} = f_{23} = 0, & f_{24} &= 1, & f_{31} &= -\frac{\gamma_3}{\gamma_1}s^2, & f_{32} &= -\frac{\gamma_5}{\gamma_1}s^2, \\ f_{33} &= 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}s, & f_{34} &= -\frac{\gamma_4}{\gamma_1}s, & f_{41} &= \left(\frac{\alpha_2\beta_4}{\alpha_1\beta_1} - \frac{\beta_5}{\beta_1}\right)s^2, \\ f_{42} &= \left(\frac{\alpha_3\beta_4}{\alpha_1\beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1}\right)s^2, & f_{43} &= \left(\frac{\alpha_4\beta_4}{\alpha_1\beta_1} - \frac{\beta_6}{\beta_1}\right)s, & f_{44} &= 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}s. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в таком представлении исходной системы дифференциальных уравнений все функции  $f_{pq}(s)$  являются аналитическими функциями при  $s \in [0, s_1]$  и не обращаются одновременно в нуль в точке  $s = 0$ . Из вида уравнений (11) следует, что точка  $s = 0$  является регулярной особой точкой для этих уравнений [13]. Для построения интегралов уравнений (11) будем пользоваться обобщенным методом степенных рядов.

С учетом разложения (8) матрицу  $F(s, \lambda)$  можно представить в виде ряда, расположенного по четным степеням независимой переменной  $s$ :

$$F(s, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i}s^{2i}.$$

Здесь матрицы  $F_{2i}$  имеют следующую структуру:

$$F_0 = \begin{vmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} & f_{13}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{31}^{(0)} & f_{32}^{(0)} & f_{33}^{(0)} & f_{34}^{(0)} \\ f_{41}^{(0)} & f_{42}^{(0)} & f_{43}^{(0)} & 0 \end{vmatrix}, \quad F_{2i} = \begin{vmatrix} f_{11}^{(2i)} & f_{12}^{(2i)} & f_{13}^{(2i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31}^{(2i)} & f_{32}^{(2i)} & f_{33}^{(2i)} & f_{34}^{(2i)} \\ f_{41}^{(2i)} & f_{42}^{(2i)} & f_{43}^{(2i)} & f_{44}^{(2i)} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} f_{11}^{(0)} &= -1, & f_{12}^{(0)} &= -n, & f_{13}^{(0)} &= \frac{\lambda R}{1 + \nu} - \frac{2}{R}, & f_{31}^{(0)} &= \frac{n^2(1 - \nu^2)}{2Rb_0^{(0)}}, \\ f_{32}^{(0)} &= \frac{n(1 - \nu^2)}{2Rb_0^{(0)}}, & b_0^{(0)} &= \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R^2}, & f_{33}^{(0)} &= 1, & f_{34}^{(0)} &= f_{32}^{(0)}, \\ f_{41}^{(0)} &= 2n, & f_{42}^{(0)} &= 1 + n^2, & f_{43}^{(0)} &= \frac{n\lambda R}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

Выражения для последующих элементов матриц  $F_{2i}$  здесь не приводятся вследствие их громоздкости.

Решение системы (11) будем искать в виде

$$y_i = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} g_{i,k} s^k, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (12)$$

В этих разложениях  $\sigma$  и  $g_{i,k}$  — неопределенные постоянные. Воспользовавшись далее формулой Коши для умножения степенных рядов, получим

$$f_{p,q} y_q = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k g_{q,j} f_{p,q}^{(k-j)} s^k, \quad p, q = \overline{1, 4}. \quad (13)$$

Подстановка рядов (12) и (13) в уравнения (11) и приравнение коэффициентов при  $s^\sigma$  в обеих частях полученного равенства приводят к однородной алгебраической системе относительно первых коэффициентов разложений (12), которая в матричном представлении будет иметь вид

$$(F_0 - \sigma E) \vec{g}_0 = 0, \quad (14)$$

где  $E$  — единичная матрица,  $\vec{g}_0$  — вектор с компонентами  $g_{i,0}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Приравнение коэффициентов при  $s^{\sigma+k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , приводит к неоднородным алгебраическим системам вида

$$[F_0 - (\sigma + k)] \vec{g}_k = \vec{d}_k. \quad (15)$$



Здесь  $\vec{g}_k$  — векторы с компонентами  $g_{i,k}$ , а  $\vec{d}_k$  — векторы с компонентами  $d_i^{(k)}$ , которые определяются по формулам

$$d_i^{(k)} = - \sum_{q=1}^4 \sum_{j=0}^{k-1} g_{q,j} f_{i,q}^{(k-j)}.$$

Таким образом, определение показателя  $\sigma$  и коэффициентов разложений (12) свелось к решению однородной алгебраической системы (14) относительно вектора  $\vec{g}_0$  и последовательности неоднородных систем (15) относительно векторов  $\vec{g}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , правые части которых линейно выражаются через  $k - 1$  решение предыдущих алгебраических систем.

Из условия существования нетривиального решения системы (14) получаем характеристическое уравнение четвертого порядка относительно показателя  $\sigma$ :

$$a_4 \sigma^4 + a_3 \sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + a_0 = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} a_4 &= 1, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = -1 - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)} - f_{42}^{(0)}, \\ a_1 &= -f_{13}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)}, \\ a_0 &= -f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} + f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{42}^{(0)} + f_{12}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{41}^{(0)} + f_{42}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{43}^{(0)}. \end{aligned}$$

С учетом выражений для коэффициентов  $f_{ij}^{(0)}$  после ряда преобразований можно показать, что корни уравнения (16), расположенные в порядке их убывания, принимают следующие целочисленные значения:

$$\sigma_1 = n + 1, \quad \sigma_2 = n - 1, \quad \sigma_3 = -(n - 1), \quad \sigma_4 = -(n + 1).$$

Полагая в уравнениях (14) и (15)  $\sigma = \sigma_1$  и решая последовательности алгебраических уравнений, можно убедиться в том, что первое решение системы уравнений (11) для функций  $y_i^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , принимает вид

$$y_1^{(1)} = s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} s^{2k}, \quad y_2^{(1)} = s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} s^{2k}, \quad y_3^{(1)} = s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(1)} s^{2k}. \quad (17)$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс при  $y_i$  и  $g_{i,k}$  будет обозначать номер найденного частного решения.

Заметим, что ряды (17) будут сходящимися рядами в области сходимости для рядов элементов матрицы  $F(s, \lambda)$ .

Для получения других интегралов уравнений, когда корни характеристического уравнения отличаются от наибольшего корня на целое число, в общем случае необходимо понизить порядок исходной системы с помощью одного найденного ее решения, а затем для получения решения этой новой системы применить опять описанный выше прием.

На этом пути получаются решения, которые будут иметь логарифмические члены. Так можно действовать лишь только тогда, когда удастся убедиться в том, что для случая  $\sigma = \sigma_2$  решений неоднородных систем (15) не существует. В противном случае возникает опасность потери ограниченного в точке  $s = 0$  интеграла, что приведет к ошибочному представлению общего решения системы (11) в окрестности полюса оболочки.

Положим в уравнениях (14) и (15)  $\sigma = \sigma_2$  и покажем, что в этом случае существует ограниченный в точке  $s = 0$  интеграл системы (11). Поскольку при  $\sigma = \sigma_2$  определитель системы (14) равен нулю, ее нетривиальное решение существует. При этом получим

$$g_{1,0}^{(2)} = -g_{2,0}^{(2)}, \quad g_{3,0}^{(2)} = 0. \quad (18)$$

При  $k = 1$  система (15) будет однородной системой уравнений, определитель которой не равен нулю. Поэтому

$$g_{1,1}^{(2)} = g_{2,1}^{(2)}, \quad g_{3,1}^{(2)} = 0.$$

Для случая  $k = 2$  имеем неоднородную алгебраическую систему четвертого порядка, определитель которой равен нулю, так как  $\sigma_2 + 2$  является корнем характеристического уравнения. После несложных, но довольно громоздких вычислений можно показать, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов уравнений при неизвестных, равен трем и совпадает с рангом расширенной матрицы. Следовательно, полученная система является совместной и допускает существование нетривиального решения.

При  $k = 3$  имеем однородную систему с неравным нулю определителем. Следовательно,

$$g_{1,3}^{(2)} = g_{2,3}^{(2)} = g_{3,3}^{(2)} = 0.$$

Воспользовавшись методом математической индукции, можно показать, что второе регулярное решение для функций  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  будет иметь следующую структуру:

$$y_1^{(2)} = s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(2)} s^{2k}, \quad y_2^{(2)} = s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(2)} s^{2k}, \quad y_3^{(2)} = s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(2)} s^{2k}. \quad (19)$$

При этом первые коэффициенты этих разложений должны подчиняться условиям (18).

Решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, которые соответствуют корням характеристического уравнения  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$ , будут неограниченными при  $s = 0$ .

Таким образом, с помощью прямого разложения решений по малому параметру (9) получены асимптотические представления (17) и (19) двух регулярных решений уравнений неосесимметричных колебаний тонкой упругой оболочки в окрестности вершины купола. В соответствии с теорией сингулярно возмущенных уравнений [13, 14] два остальных интеграла исходных уравнений должны включать в себя экспоненциальный множитель. При этом можно показать, что эти решения имеют следующее формальное

представление [15]:

$$\begin{aligned} u^{(j)}(s) &= \mu \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} u_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \\ v^{(j)}(s) &= \mu^2 \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} v_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \\ w^{(j)}(s) &= \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \quad j = 3, 4. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $u_{k,i}^{(j)}$ ,  $v_{k,i}^{(j)}$ ,  $w_{k,i}^{(j)}$  — неизвестные коэффициенты разложений,  $j$  — индекс, указывающий на номер найденного частного решения,

$$\gamma^{(j)}(s) = \begin{cases} e^{\beta(s)} \cos(\beta(s)) & \text{при } j = 3, \\ e^{\beta(s)} \sin(\beta(s)) & \text{при } j = 4, \end{cases}$$

$$\beta(s) = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_1}^s |b_0(t)|^{1/4} dt, \quad b_0(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s)}, \quad b_0(s) < 0 \quad \text{при } s \in [0, s_1].$$

Последнее неравенство означает, что будем рассматривать низшую часть спектра частот.

Эти решения при малых значениях параметра  $\mu$  являются сильно осциллирующими и экспоненциально затухающими при удалении от края оболочки. Поэтому нельзя рассчитывать на то, что классические методы решения данной спектральной задачи будут одинаково хорошо работать во всей области изменения параметра  $\mu$ . Их использование аналогично аппроксимации экспоненциальной функции отрезком ряда Тейлора или рациональной аппроксимации Паде.

В случае оболочек вращения, для которых интеграл в выражении для  $\beta(s)$  не вычисляется в элементарных функциях, функции  $\gamma^{(j)}(s)$  в соответствии с работой [14] можно представить в виде

$$\gamma^{(j)}(s) = \gamma_0^{(j)} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P_k^{(j)}(\eta), \quad (21)$$

где

$$\gamma_0^{(j)} = \gamma^{(j)}(\beta(s) = \beta_0(s)), \quad \beta_0(s) = p(s - s_1), \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}\mu} \sqrt[4]{|b_0(s_1)|}, \quad \eta = \frac{s - s_1}{\mu},$$

$P_k^{(j)}(\eta)$  — полином с постоянными коэффициентами, зависящими от коэффициентов уравнений (1) и их производных в точке  $s = s_1$ .

При построении интегралов (20) предполагалось, что область имеет такие геометрические параметры, при которых можно пренебречь влиянием функций погранслоя на поведение решений в окрестности ее полюса. Для тех оболочек, для которых это условие

не выполняется, пользоваться формулами (20) нельзя. В этом случае необходимо строить два ограниченных интеграла в окрестности точки  $s = 0$  с большой изменчивостью, которые растут при удалении от полюса оболочки. Поскольку точка  $s = 0$  является регулярной особой точкой для исходных уравнений, такие интегралы должны иметь установленную асимптотику в окрестности этой точки. Поэтому интегралы с большой изменчивостью вместо экспоненциального множителя должны содержать множитель другой структуры, обеспечивающий асимптотику решений при  $s \rightarrow 0$  и аналитичность функций  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  и  $w_k(s)$ , стоящих при этом множителе. В силу этого асимптотическое интегрирование исходных уравнений в этом случае существенно усложняется.

Полученные выше результаты качественного характера о поведении интегралов уравнений, описывающих собственные колебания тонкостенной оболочки вращения в форме купола, могут быть использованы для построения систем базисных функций при решении исходной задачи методом Ритца.

**3. Применение метода Ритца к построению приближенного решения.** Для нахождения структуры общего решения системы (1) составим линейную комбинацию интегралов (17), (19) и (20). Учитывая представление погранслойных функций Вышика – Люстерника (21), общее решение после перегруппировки членов в выражениях (20) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 [u, v, w] = & R[u, v, w] + \exp^{\beta_0(s)} \cos \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,1}, v_{i,1}, w_{i,1}](s - s_1)^i + \\
 & + \exp^{\beta_0(s)} \sin \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,2}, v_{i,2}, w_{i,2}](s - s_1)^i.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь в квадратных скобках указаны функции и соответствующие им неизвестные коэффициенты, включающие в себя также параметр  $\mu$ ,  $R[u, v, w]$  – регулярная часть общего решения, структуру которой можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 u &= s^{n-1}(a_1 + a_2 s^2 + a_3 s^4 + \dots), \\
 v &= s^{n-1}(b_1 + b_2 s^2 + b_3 s^4 + \dots), \\
 w &= s^n(c_1 + c_2 s^2 + c_3 s^4 + \dots).
 \end{aligned} \tag{23}$$

При этом первые коэффициенты при  $s^{(n-1)}$  подчинены условию

$$b_1 = -a_1. \tag{24}$$

Представления (23) показывают, что вырождение некоторых коэффициентов уравнений (1) при  $s \rightarrow 0$  порождает вполне определенную асимптотику искомых решений, зависящую от числа волн  $n$  оболочки в окружном направлении. Эта асимптотика с учетом зависимости (24) обеспечивает конечность перемещений и деформаций оболочки (2) в ее полюсе. Следует отметить, что асимптотика решений (23) совпадает с асимптотикой из работы [16], которая получена на основе использования упрощенного варианта метода Фробениуса.

По сути, представления решений в форме (22) включают в себя все последовательные приближения при асимптотическом интегрировании сингулярно возмущенных уравнений. В дальнейшем неопределенные коэффициенты в разложениях (22) и (23) будем находить из главных граничных условий задачи и условий стационарности соответствующего квадратичного функционала.

Заметим, что если решения искать в виде разложения в степенные ряды (за исключением первых членов ряда для обеспечения конечности деформаций при  $s \rightarrow 0$ ), то построенные на такой основе базисы для аппроксимации решений в соответствии с представлением (23) будут неполными. Это приводит к медленной сходимости рядов для искомых функций.

Построение систем координатных функций осуществляется на основе подчинения общего решения (22) главным граничным условиям исходной спектральной задачи. Исходя из этих условий получим некоторые дополнительные соотношения между коэффициентами в разложениях для искомых функций. Подставляя эти соотношения в общий вид решения, после ряда преобразований находим системы базисных функций для аппроксимации решений.

Оценка влияния погранслойных координатных функций на определение решений с помощью метода Ритца была выполнена в работах [6, 15]. При этом было показано, что предложенный алгоритм решения рассматриваемой спектральной задачи имеет равномерную сходимость по малому параметру  $\mu$ . Кроме этого он позволяет вычислять перерезывающие силы и моменты в любой точке срединной поверхности оболочки, значения которых необходимы при анализе динамической прочности конструкции. В связи с этим оценим возможности регулярного базиса, построенного на основе установленного выше асимптотического поведения исходных уравнений в окрестности полюса оболочки.

В соответствии с изложенным выше, функции  $u(s)$ ,  $v(s)$  и  $w(s)$  можно представить в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$u = \sum_{j=1}^N x_j U_j(s), \quad v = \sum_{j=1}^N x_{N+j} V_j(s), \quad w = \sum_{j=1}^N x_{2N+j} W_j(s), \quad (25)$$

где

$$U_1(s) = (s^2 - s_1^2)s^{n-1}, \quad W_1(s) = (s^2 - s_1^2)^2 s^n, \\ U_{j+1}(s) = U_j(s)s^2, \quad W_{j+1}(s) = W_j(s)s^2, \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Здесь  $x_j$  — неопределенные постоянные,  $U_j(s)$ ,  $V_j(s)$ ,  $W_j(s)$  — системы координатных функций, удовлетворяющие лишь кинематическим граничным условиям задачи при  $s = s_1$ . Кроме того, в соответствии с асимптотикой (23) в разложениях (25) следует положить

$$x_{N+1} = -x_1.$$

Поскольку граничные условия для  $u(s)$  и  $v(s)$  имеют одинаковый вид, то

$$V_j(s) = U_j(s), \quad j = \overline{1, N}.$$

Приведенные системы координатных функций оказываются пригодными лишь для тех случаев, когда в разложениях (25) можно удерживать небольшое количество чле-

нов  $N$ , так как при больших значениях  $N$  наблюдается потеря устойчивости вычислений. Поэтому в дальнейшем, не нарушая полноты представления решений, степенные функции заменим соответствующими полиномами Лежандра, которые являются линейными комбинациями степенных функций. Построенные таким образом системы базисных функций позволяют существенно увеличить количество членов в разложениях (25) по отношению к степенному базису и тем самым расширить диапазон входных параметров задачи, при которых можно проводить расчеты с заданной точностью.

Эти системы координатных функций можно представить в виде

$$u_1(s) = s^{n-1}(s^2 - s_1^2), \quad U_i(s) = u_1(s) \left[ P_{2i-2} \left( \frac{s}{s_1} \right) - P_{2i-2}(0) \right],$$

$$w_1(s) = s^n(s^2 - s_1^2)^2, \quad W_i(s) = w_1(s) \left[ P_{2i-2} \left( \frac{s}{s_1} \right) - P_{2i-2}(0) \right], \quad i = 2, 3, \dots,$$

где  $P_j(s)$  — многочлены Лежандра.

Подставим разложения (25) в функционал (7). Из необходимых условий стационарности этого функционала получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \lambda B)\vec{X}^T = 0, \quad (26)$$

в которой вектор  $\vec{X}$  имеет коэффициенты

$$\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N, -x_1, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots, x_{2N}, x_{2N+1}, x_{2N+2}, \dots, x_{3N}\}.$$

Определение элементов матрицы  $A$  с использованием выражения (6) для вариации потенциальной энергии деформации оболочки приводит к достаточно громоздким формулам. Эту задачу можно существенно упростить, если представить вариацию функционала  $I$  в виде

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta v, u) + \Psi_{22}(v, \delta v) + \\ & + \Psi_{23}(w, \delta v) + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \Psi_{33}(w, \delta w)] r ds - \\ & - \lambda \int_0^{s_1} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) r ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Введенные здесь операторы  $\Psi_{ij}(p, q)$  определяются по формулам

$$\Psi_{11}(p, q) = \left( \frac{dp}{ds} + \frac{\nu r'}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \left[ \nu \frac{r'}{r} \frac{dp}{ds} + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 p + \frac{n^2 \nu_1}{r^2} p \right] q,$$

$$\Psi_{12}(p, q) = \frac{n r'}{r^2} (1 + \nu_1) p q + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\begin{aligned} \Psi_{13}(p, q) &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) p \frac{dq}{ds} + \frac{r'}{r} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right) pq, \\ \Psi_{22}(p, q) &= \left[ \frac{n^2}{r^2} + \nu_1 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \right] pq + \nu_1 \left( \frac{dp}{ds} - \frac{r'}{r} p \right) \frac{dq}{ds} - \nu_1 \frac{r'}{r} \frac{dp}{ds} q, \\ \Psi_{23}(p, q) &= \frac{n}{r} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right) pq, \quad \Psi_{33}(p, q) = \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) pq + \\ &+ c^2 \left\{ \frac{n^4 + 4\nu_1 n^2 (r')^2}{r^4} pq + \frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \left[ \frac{\nu r'}{r} \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{(r')^2 + 4\nu_1 n^2}{r^2} \frac{dp}{ds} - \right. \right. \\ &- \left. \frac{n^2 r'}{r^3} (1 + 4\nu_1) p \right] \frac{dq}{ds} - \left[ \frac{\nu n^2}{r^2} \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{n^2 r'}{r^3} (1 + 4\nu_1) \frac{dp}{ds} \right] q + \\ &+ \left. \left[ \frac{\nu r'}{r} \frac{dp}{ds} - \frac{\nu n^2}{r^2} p \right] \frac{d^2 q}{ds^2} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\nu_1 = \frac{1-\nu}{2}$ ,  $p$  и  $q$  — произвольные, достаточное число раз дифференцируемые функции.

Используя выражение (27), для элементов матрицы  $A$  можно получить компактные и удобные для программирования формулы. Так, элементы  $\alpha_{i,j}$  верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы  $A$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_1, U_1) - 2\Psi_{12}(U_1, U_1) + \Psi_{22}(U_1, U_1)] r ds, \\ \alpha_{1,j} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_j, U_1) - \Psi_{12}(U_1, U_j)] r ds, \\ \alpha_{1,j+N-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{12}(V_j, U_1) - \Psi_{22}(V_j, U_1)] r ds, \quad j = \overline{2, N}, \\ \alpha_{1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{13}(W_j, U_1) - \Psi_{23}(W_j, U_1)] r ds, \quad j = \overline{1, N}, \\ \alpha_{i,j} &= \int_0^{s_1} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, \quad i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{i, N}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\alpha_{i,j+2N-1} = \int_0^{s_1} \Psi_{12}(V_j, U_i) r ds, \quad i, j = \overline{2, N},$$

$$\alpha_{i,j+2N-1} = \int_0^{s_1} \Psi_{13}(W_j, U_i) r ds, \quad i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\alpha_{i+N-1,j+N-1} = \int_0^{s_1} \Psi_{22}(V_j, V_i) r ds, \quad i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{i, N},$$

$$\alpha_{i+N-1,j+2N-1} = \int_0^{s_1} \Psi_{23}(W_j, V_i) r ds, \quad i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\alpha_{i+2N-1,j+2N-1} = \int_0^{s_1} \Psi_{33}(W_j, W_i) r ds, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{i, N}.$$

Симметричность матрицы  $A$  следует из симметричности исходного оператора, порожденного дифференциальным уравнением (1) и определенного на классе функций, подчиненных граничным условиям задачи и установленным выше свойствам поведения решений в окрестности полюса оболочки.

В свою очередь ненулевые элементы  $\beta_{i,j}$  верхней симметричной части матрицы  $B$  вычисляются по формулам

$$\beta_{1,1} = 2 \int_0^{s_1} U_1^2 r ds, \quad \beta_{1,j} = \int_0^{s_1} U_j U_1 r ds, \quad \beta_{1,j+N-1} = - \int_0^{s_1} V_j V_1 r ds, \quad j = \overline{2, N},$$

$$\beta_{i,j} = \int_0^{s_1} U_i U_j r ds, \quad \beta_{i+N-1,j+N-1} = \int_0^{s_1} V_j V_i r ds, \quad i = \overline{2, N}, \quad j = \overline{i, N}, \quad (29)$$

$$\beta_{i+2N-1,j+2N-1} = \int_0^{s_1} W_i W_j r ds, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{i, N}.$$

Поскольку координатные функции в выражениях (28) и (29) являются многочленами, при вычислении интегралов целесообразно пользоваться квадратурной формулой Гаусса.

**4. Некоторые результаты расчетов.** Ниже представлены результаты расчета по предложенному выше алгоритму частот и форм колебаний сферического купола с жестко закрепленным краем. В качестве характерного линейного размера оболочки выберем ее радиус. Отношение радиуса оболочки к ее толщине обозначим через  $\delta$ , угол между осью симметрии оболочки и нормалью к ее срединной поверхности — через  $\vartheta$ , а значение этого угла для закрепленной нормали оболочки — через  $\vartheta_0$ . Во всех приведенных расчетах коэффициент Пуассона  $\nu$  полагался равным 0,3.



В табл. 1 представлены значения первых пяти безразмерных частот  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , неосесимметричных колебаний ( $n = 1$ ) рассматриваемой оболочки в зависимости от числа членов  $N$  в разложениях (25) при  $\vartheta_0 = 90^\circ$  для трех значений параметра  $\delta$ . Приведенные результаты показывают, что регулярные координатные функции, построенные с учетом асимптотического поведения искомых решений в окрестности полюса оболочки, позволяют рассчитывать с высокой степенью точности низшие частоты колебаний как для оболочек средней толщины, так и для весьма тонких оболочек.

Значения нормального прогиба для первой формы колебаний оболочки и его первых двух производных в точке  $\vartheta = 80^\circ$  в зависимости от числа членов  $N$  в разложениях (25) приведены в табл. 2 при различных значениях параметра  $\delta$ . Нормировка собственных форм колебаний оболочки здесь выбиралась из условия  $w(\vartheta_0/2 = 1)$ .

Данные табл. 2 свидетельствуют о том, что для оболочек средней толщины ( $\delta \leq 400$ ) предложенный выше алгоритм решения исходной спектральной задачи имеет поточечную сходимость как для самой функции  $w(s)$ , так и для ее первых двух производных. С уменьшением относительной толщины оболочки эта сходимость существенно замедляется.

Таблица 1. Значения первых пяти частот колебаний оболочки ( $n = 1$ ) в зависимости от числа членов  $N$  в разложениях (25) при  $\vartheta_0 = 90^\circ$ .

$N$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$\delta = 100$					
8	0,5417556	0,8525449	0,9215523	0,9564843	1,0048565
10	0,5417536	0,8525446	0,9215523	0,9564067	0,9969224
12	0,5417535	0,8525446	0,9215523	0,9564067	0,9968500
14	0,5417535	0,8525446	0,9215523	0,9564067	0,9968499
16	0,5417535	0,8525446	0,9215523	0,9564067	0,9968499
$\delta = 1000$					
8	0,5337277	0,8414342	0,9090418	0,9302792	0,9400686
10	0,5326600	0,8405728	0,9087909	0,9302271	0,9397110
12	0,5323757	0,8404612	0,9087818	0,9302265	0,9397103
14	0,5323457	0,8404580	0,9087811	0,9302262	0,9397103
16	0,5323436	0,8404572	0,9087810	0,9302262	0,9397103
18	0,5323431	0,8404572	0,9087810	0,9302262	0,9397103
20	0,5323430	0,8404572	0,9087810	0,9302262	0,9397103
$\delta = 2000$					
12	0,5314705	0,8391282	0,9079635	0,9295781	0,9389937
14	0,5312517	0,8390431	0,9079570	0,9295777	0,9389934
16	0,5312150	0,8390396	0,9079563	0,9295774	0,9389934
18	0,5312125	0,8390385	0,9079561	0,9295774	0,9389934
20	0,5312116	0,8390383	0,9079561	0,9295774	0,9389934
22	0,5312114	0,8390383	0,9079561	0,9295774	0,9389934

Таблица 2. Значения  $w_1$ ,  $w_1'$  и  $w_1''$  в точке  $\vartheta = 80^\circ$  для первой формы колебаний в зависимости от числа членов  $N$  в разложениях (25).

$w_1, w_1', w_1''$	$N$					
	8	10	12	14	16	18
$\delta = 100$						
$w_1$	0,8544	0,8527	0,8525	0,8525	0,8525	0,8525
$w_1'$	-3,1329	-3,0925	-3,0889	-3,0889	-3,0889	-3,0889
$w_1''$	-38,2459	-37,9901	-38,0512	-38,0529	-38,0529	-38,0529
$\delta = 300$						
$w_1$	0,9735	0,9528	0,9514	0,9513	0,9514	0,9514
$w_1'$	-0,5723	-0,4685	-0,5449	-0,5542	-0,5585	-0,5586
$w_1''$	-24,1190	-17,1345	-13,4682	-13,3579	-13,3318	-13,3251
$\delta = 600$						
$w_1$	0,9676	0,9213	0,9266	0,9304	0,9312	0,9312
$w_1'$	0,4812	-0,1412	-0,4686	-0,5894	-0,5772	-0,5738
$w_1''$	-4,5266	15,0868	14,4900	9,7187	8,5375	8,0980
$\delta = 1000$						
$w_1$	0,9625	0,8968	0,9201	0,9289	0,9297	0,9290
$w_1'$	0,8117	0,3595	-1,0541	-1,0456	-0,9095	-0,8735
$w_1''$	2,5390	32,0210	11,9583	1,9427	-1,6608	-0,2282

Таблица 3. Значения низших частот первой формы колебаний защемленного сферического купола, вычисленные по предлагаемому алгоритму (верхняя строка), и соответствующие значения работы [16] (нижняя строка).

$\vartheta_0$	$n$	$\delta$			
		25	50	100	200
$45^\circ$	1	0,9944	0,9424	0,9270	0,9210
		0,9905	0,9414	0,9269	0,9211
	2	1,1657	1,0207	0,9704	0,9469
		1,1635	1,0201	0,9703	0,9470
	3	1,3752	1,0892	0,9974	0,9606
		1,3670	1,0868	0,9968	0,9606
$90^\circ$	1	0,5600	0,5485	0,5418	0,5375
		0,5594	0,5483	0,5417	0,5373
	2	0,8749	0,8636	0,8599	0,8583
		0,8736	0,8633	0,8598	0,8583
	3	0,9471	0,9155	0,9044	0,9003
		0,9434	0,9145	0,9041	0,9002

Повышения точности вычислений можно достичь за счет увеличения числа приближений  $N$  в методе Рунге. При этом число  $N$  ограничено сверху таким его значением  $N^*$ , при котором алгебраическая система (26) является плохо обусловленной и нарушается устойчивость вычислительного процесса. С целью вычисления производных от функции  $w(s)$  вплоть до третьего порядка с одновременным уменьшением размерности алгебраической системы (26) необходимо расширить класс допустимых функций функциями по-

грансля (22), которые локализованы в окрестности закрепленного торца оболочки [6, 15].

Собственные частоты, полученные предложенным методом, сравниваются в табл. 3 с частотами, приведенными в работе [16], которые получены с помощью модифицированного численного метода решения исходной граничной задачи. По заключению авторов работы [16] предложенный ими алгоритм позволяет с высокой точностью определять частоты и формы колебаний сферической оболочки. Однако этот алгоритм существенно усложняется с уменьшением относительной толщины оболочки и при  $\delta > 1000$  он неприменим.

Как видно из таблицы, приведенные частоты колебаний достаточно хорошо согласуются между собой. Наибольшее расхождение в частотах табл. 3 наблюдается для небольших значений  $\delta$ . Это расхождение объясняется тем, что в работе [16] использованы общие уравнения теории тонких оболочек, тогда как в настоящей работе — упрощенные уравнения в форме Муштари – Донелла – Власова.

**Заключение.** В работе на основе метода Ритца разработан алгоритм расчета частот и форм неосесимметричных колебаний оболочки вращения в форме купола. Системы базисных функций строятся с учетом установленного асимптотического поведения искомых решений в полюсе оболочки (регулярная часть базиса), а также с учетом пограничных функций, локализованных в окрестности закрепленного края оболочки.

Использование только регулярной части базиса позволяет вычислять частоты и формы колебаний оболочки для достаточно широкого диапазона входных данных задачи.

При необходимости вычисления моментов и перерезывающих сил в каждой точке срединной поверхности оболочки регулярный базис должен быть дополнен координатными функциями, позволяющими аппроксимировать пограничную составляющую искомых решений.

Расчеты, приведенные для оболочки в форме сферического купола, подтверждают эффективность предложенного подхода к построению приближенного аналитического решения рассматриваемой спектральной задачи.

1. *Leissa A. W.* Vibration of shells. — New York: Acoust. Soc. Amer., 1993. — 428 p.
2. *Anderson G. L.* On Gegenbauer transforms and forced torsional vibrations of thin spherical shells // J. Sound and Vibr. — 1970. — **12**. — P. 265–267.
3. *Goller B.* Dynamic deformations of thin spherical shells based on analytical solutions // J. Sound and Vibr. — 1980. — **73**. — P. 585–596.
4. *Mukherjee K., Chakraborty S. K.* Exact solution for larger amplitude free and forced oscillation of a thin spherical shell // J. Sound and Vibr. — 1985. — **100**. — P. 339–342.
5. *Al-Jumaily A. M., Najim F. M.* An approximation to the vibrations of oblate spheroidal shells // J. Sound and Vibr. — 1997. — **207**. — P. 561–574.
6. *Gavrilyuk I., Hermann M., Trotsenko V., Trotsenko Yu., Timokha A.* Axisymmetric oscillations of a cupola-shaped shell // J. Eng. Math. — 2010. — **68**. — P. 165–178.
7. *Gavrilyuk I., Hermann M., Trotsenko V., Trotsenko Yu., Timokha A.* Eigenoscillations of a thin-walled azimuthally closed, axially open shell of revolution // J. Eng. Math. — 2014. — **85**. — P. 83–97.
8. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983. — 200 с.
9. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1974. — 156 с.

10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. — Л.: Судостроение, 1962. — 431 с.
11. *Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. — М.: Машиностроение, 1975. — 376 с.
12. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. — М.: Машиностроение, 1976. — 278 с.
13. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
14. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, вып. 5(77). — С. 3–122.
15. *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 415–432.
16. *Zarghamee M. S., Robinson H. R.* A numerical method for analysis of free vibration of spherical shell // AIAA Journal. — 1967. — **5**, № 7. — P. 1256–1261.

*Получено 02.12.14,  
после доработки — 29.12.14*