В.И.Фущич, А.Г.Никитин

СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Излагаются основы нового подхода к исследованию симметрии уравнений математической и теоретической физики. - Систематически изучаются симметрийные свойства основных уравнений движения релятивистской и нерелятивистской квантовой физики, описывается как классическая симметрия этих уравнений, так и новые операторы симметрии и интегралы движения.

Исследуются релятивистские и галилеевски инвариантные уравнения движения частицы произвольного спина во внешнем электромагнитном поле, получены точные решения ряда задач о движении таких частиц в полях специальных конфигураций.

Подробно излагается теория представлений групп Галилея и Пуанкаре, а также обобщенных групп Пуанкаре P(1,n), рассматриваются различные физические приложения этих представлений.

Для научных работников в области математики и физики, а также аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Содержание

Предисловие 3

Введение 5

Глава 1. Локальная симметрия основных уравнений релятивистской квантовой теории 7

§ 1.1. Локальная симметрия уравнения Клейна — Гордона — Фока 7

1.1.1. Введение (7). 1.1.2. Алгебра инвариантности уравнения КГФ (10). 1.1.3. Симметрия уравнения КГФ для безмассового поля (12). 1.1.4. Преобразования Лоренца (13). 1.1.5. Группа Пуанкаре (16). 1.1.6. Конформные преобразования (19). 1.1.7. Дискретные преобразования симметрии (21).

§ 1.2. Локальная симметрия уравнения Дирака 22

1.2.1. Уравнение Дирака (22). 1.2.2. Различные представления уравнения Дирака (23). 1.2.3. Алгебра матриц Дирака (25). 1.2.4. Операторы симметрии и алгебра инвариантности (25). 1.2.5. Алгебра инвариантности уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов первого порядка (26). 1.2.6. Операторы массы и спина (29). 1.2.7. Явно эрмитова форма базиса а. и. уравнения Дирака (30). 1.2.8. Симметрия безмассового уравнения Дирака (31). 1.2.9. Преобразования Лоренца и конформные преобразования решений уравнения Дирака (32). 1.2.10. Преобразования P, T и C (34).

§ 1.3. Уравнения Максвелла 36

1.3.1. Введение (36). 1.3.2. Различные формулировки уравнений Максвелла (37). 1.3.3. Уравнение для вектор-потенциала (39). 1.3.4. Алгебра инвариантности уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_1$ (40). 1.3.5. Преобразования Лоренца и конформные преобразования векторов **E**, **H** и четырехвектора тока (42). 1.3.6. Симметрия относительно

преобразований P, Г и C (45).
§ 1.4. Алгебра Ли конформной группы 46
1.4.1. Конформная алгебра и алгебра AO(2, 4) (46). 1.4.2. Представление конформной алгебры на множестве решений уравнения Вейля (47). 1.4.3. Представление конформной алгебры, соответствующее полю с произвольным дискретным спином (49). 1.4.4. Ковариантные представления алгебры AP(1, 3) (50). 1.4.5. Ковариантные представления конформной алгебры (51). 1.4.6. Конформные преобразования для поля произвольного спина (53).
Глава 2. Представления алгебры Пуанкаре и волновые уравнения для произвольного спина **54**
§ 2.1. Неприводимые представления алгебры Пуанкаре 54
2.1.1. Введение (54). 2.1.2. Операторы Казимира (54). 2.1.3. Базис неприводимого представления (57). 2.1.4. Определение общего вида вектора Любанского — Паули (58). 2.1.5. Представления алгебры $A(c_1,\mathbf{n})$ (60). 2.1.6. Неприводимость представления алгебры Пуанкаре (63). 2.1.7. Связь с каноническими реализациями Широкова — Фолди — Мозеса (65). 2.1.8. Ковариантные представления (68).
§ 2.2. Представления операторов дискретной симметрии 70
2.2.1. Введение (70). 2.2.2. Неэквивалентные мультипликаторы группы G_8 (72). 2.2.3, Общий вид операторов дискретной симметрии (74). 2.2.4. Операторы P, T и C в пространстве представлений I класса (76). 2.2.5. Представления II класса (79). 2.2.6. Представления III — V классов (80).
§ 2.3. Пуанкаре-инвариантные уравнения первого порядка 84
2.3.1. Введение (84). 2.3.2. Условия релятивистской инвариантности уравнения (2.3.2) (85). 2.3.3. Явный вид матриц β_μ (87). 2.3.4. Дополнительные ограничения для матриц β_μ (88). 2.3.5. Уравнение Кеммера — Деффина — Петье (КДП) (90). 2.3.6. Уравнение Дирака — Фирца — Паули для спина 3/2 (91). 2.3.7. Преобразование к форме Шредингера (93).
§ 2.4. Пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент 97
2.4.1. Введение (97). 2.4.2. Постановка задачи (97). 2.4.3. Явный вид гамильтонианов H^{I}_s и H^{II}_s (101). 2.4.4. Дифференциальные уравнения движения для спиновых частиц (105). 2.4.5. Связь с каноническим представлением Ю. М. Широкова (107).
§ 2.5. Уравнения для частиц произвольного спина в форме Дирака 110
2.5.1. Ковариантные уравнения с коэффициентами, образующими алгебру Клиффорда (110). 2.5.2. Уравнения с минимальным числом компонент (111). 2.5.3. Связь с уравнениями без лишних компонент (113). 2.5.4. Лагранжева формулировка (114). 2.5.5. Уравнения в форме Дирака как универсальная модель частицы произвольного спина (115).

§ 2.6. Уравнения для безмассовых полей 118
2.6.1. Основные определения (118). 2J5.2. Теоретико-групповой вывод уравнений Максвелла (119). 2.6.3. Конформно-инвариантные уравнения для полей произвольного спина (121). 2.6.4. Уравнения типа Вейля (122). 2.6.5. 0 других типах уравнений для безмассового поля (125).

Глава 3. Негеометрическая симметрия 127

§ 3.1. Негеометрическая симметрия уравнения Дирака 127
3.1.1. Основные определения (127). 3.1.2. Алгебра инвариантности уравнения Дирака в классе $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ (129). 3.1.3. Симметрия уравнения Дирака в классе интегро-дифференциальных операторов (133). 3.1.4. Восьмикомпонентное уравнение Дирака (135). 3.1.5. Симметрия уравнения (3.1.34) (136). 3.1.6. Симметрия уравнения Дирака относительно линейных и антилинейных преобразований (137). 3.1.7. Полный набор операторов симметрии уравнения Дирака в классе $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ (140). 3.1.8. Симметрия уравнения Дирака для безмассовой частицы (144).

§ 3.2. Симметрия релятивистских уравнений для частиц произвольного спина 149
3.2.1. Симметрия уравнения Кеммера — Деффина — Петье (149). 3.2.2. Симметрия уравнений типа Дирака для произвольного спина (153). 3.2.3. О дополнительной симметрии релятивистских волновых уравнений в произвольной формулировке (156).

§ 3.3. Негеометрическая симметрия уравнений Максвелла 159
3.3.1. Инвариантность относительно алгебры AGL(2, *C*) (159). 3.3.2. Другое доказательство теоремы 3.16 (161). 3.3.3. Группа негеометрической симметрии уравнений Максвелла (162). 3.3.4, Симметрия уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов второго порядка (164).

§ 3.4. Негеометричсская симметрия релятивистских уравнений для частиц, взаимодействующих с внешним полем 170
3.4.1. Введение (170). 3.4.2. Уравнение Дирака для частицы во внешнем поле (171). 3.4.3. Уравнения Максвелла с токами и зарядами (173). 3.4.4. Релятивистские уравнения для частиц произвольного спина (175). 3.4.5. Операторы симметрии уравнений для упругих волн (177).

§ 3.5. Законы сохранения и интегралы движения 179
3.5.1. Введение (179). 3.5.2. Законы сохранения для поля Дирака (182). 3.5.3. Законы сохранения для безмассового спинорного поля (183). 3.5.4. Классические интегралы движения электромагнитного поля (184). 3.5.5. Интегралы движения, обусловленные скрытой симметрией уравнений Максвелла (186).

Глава 4. Уравнения для взаимодействующих частиц произвольного 193

спина
§ 4.1. Релятивистская частица произвольного спина во внешнем электромагнитном поле 193
4.1.1. Принцип минимального взаимодействия (193). 4.1.2. Введение взаимодействия в уравнения первого порядка (195). 4.1.3. Введение взаимодействия в уравнения типа Дирака (196). 4.1.4. Четырехкомпонентное уравнение для бесспиновых частиц (197). 4.1.5. Введение взаимодействия в уравнения без лишних компонент (198). 4.1.6. Разложение по степеням $1/m$ (199). 4.1.7. Причинность и волновые уравнения для частиц произвольного спина (202). 4.1.8. Уравнения для системы с переменным спином (204).
§ 4.2. Решение релятивистских волновых уравнений для частиц произвольного спина 206
4.2.1. Введение (206). 4.2.2. Свободное движение частиц (206). 4.2.3. Релятивистская частица с произвольным спином в однородном магнитном поле (211). 4.2.4. Частица с произвольным спином в поле плоской электромагнитной волны (214).
§ 4.3. Частица произвольного спина в поле Кулона 216
4.3.1. Разделение переменных в центральном поле (216) 432 Решение уравнений для радиальных функций (218). 4.3.3. Уровни энергии релятивистской частицы с произвольным спином в поле Кулона (220). 4.3.4. Шаровые спиноры (223). 4.3.5. Явный вид $O(3)$-инвариантных матриц в базисе шаровых спиноров (226).
Глава 5. Обобщенные группы Пуанкаре 232
§ 5.1. Группа $P(1, 4)$ 232
5.1.1. Введение (232). 5.1.2. Алгебра Ли группы $P(1, n)$. Операторы Казимира (233). 5.1.3. Неэквивалентные представления тензора $W_{\mu\nu}$ (234). 5.1.4. Базис неприводимого представления (237). 5.1.5. Явный вид базисных элементов алгебры AP(1, 4) (238). 5.1.6. Связь с другими реализациями (239).
§ 5.2. Представления алгебры AP(1, 4) в пуанкаре-базисе 243
5.2.1. Подгрупповая структура группы P(1, 4) (243). 5,2.2. Пуанкаре-базис (243). 5.2.3. Редукция P(1, 4) -> P(1, 3) для представлений I класса (244). 5.2.4. Редукция P(1, 4)-> P(1, 2) (247). 5.2.5. Редукция представлений с c_1=0 (249). 5.2.6. Редукция представлений IV класса (251). 5.2.7. Редукция P(1, n) ->P(1, 3) (252).
§ 5.3. Представления алгебры AP(1, 4) в $G(1, 3)$- и $E(4)$ -базисах 256-
5.3.1. $G(1, 3)$-базис (256). 5.3.2. Представления с $P_n P_n$>0 (257). 5.3.3. Представления II — IV классов (260). 5.3.4. Ковариантные представления алгебры AP(1, 4) (261). 5.3.5. $E(4)$-базис (263). 5.3.6. Представления алгебры Пуанкаре в базисе $G(l, 2)$ (264).
§ 5.4. Уравнения, инвариантные относительно обобщенных групп Пуанкаре 266
5.4.1. Вводные замечания (266). 5.4.2. Обобщенное уравнение Дирака

(267). 5.4.3. Обобщенное уравнение Кеммера — Деффина — Петье (270). 5.4.4. Ковариантные системы уравнений (271).

Глава 6. Представления алгебры Галилея и волновые уравнения для нерелятивистских частиц **274**

§ 6.1. Симметрия уравнений Шредингера 274

6.1.1. Уравнение Шредингера (274). 6.1.2. Алгебра инвариантности уравнения Шредингера (275). 6.1.3. Алгебра Шредингера и алгебра Галилея (277). 6.1.4. Группа Шредингера (279). 6.1.5. Группа Галилея (281). 6.1.6. Преобразования Р и Т (283). 6.1.17. Симметрия квазирелятивистского уравнения эволюции (283).

§ 6.2. Представления алгебры Ли группы Галилея 285

6.2.1. Принцип относительности Галилея и уравнения квантовой механики (285). 6.2.2. Классификация неприводимых представлений (286). 6.2.3. Явный вид базисных элементов алгебры AG(1, 3) (287). 6.2.4. Связь с другими реализациями (299). 6.2.5. Копариантные представления (292). 6.2.6. Конечномерные представления алгебры Ли однородной группы Галилея (293).

§ 6.3. Галилеевски инвариантные волновые уравнения 298-

6.3.1. Введение (298). 6.3.2. Условия галилеевской инвариантности уравнений (298). 6.3.3. Дополнительные ограничения на матрицы β_k (300). 6.3.4. Общий вид матриц β_μ и β_4 в базисе $|\lambda, l, m>$ (301). 6.3.5. Уравнения минимальной размерности (303). 6.3.6. Уравнения для представлений с произвольным индексом нильпотентности (306).

§ 6.4. Уравнения в форме Шредингера, инвариантные относительно группы Галилея 308

6.4.1. Постановка задачи (308). 6.4.2. Гамильтониан нерелятивистской частицы произвольного спина (310). 6.4.3. Лагранжева формулировка (313).

§ 6.5. Нерелятивистская частица произвольного спина во внешнем электромагнитном поле- 315

6.5.1. Уравнение Шредингера для спиновой частицы во внешнем электромагнитном поле (315). 6.5.2. Преобразование уравнений (6.5.1) к квазидиагональной форме (317). 6.5.3. Введение минимального взаимодействия в уравнения первого порядка (318). 6.5.4. Уравнения для ($2s$ + 1) -компонентной волновой функции (320). 6.5.5. Аномальное воздействие (323).

§ 6.6. Точные решения галилеевски инвариантных волновых уравнений 327

6.6.1. Вводные замечания (327). 6.6.2. Нерелятивистская частица в постоянном и однородном магнитном поле (327). 6.6.3. Нерелятивистская частица произвольного спина в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях (329). 6.6.4. Нерелятивистская частица произвольного спина в поле Кулона (331).

Глава 7. Двухчастичные уравнения **335**

§ 7.1. Двухчастичные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея 335
7.1.1. Предварительные замечания (335). 7.1.2. Уравнения для бесспиновых частиц (336). 7.1.3. Уравнения для системы частиц с произвольным спином (340). 7.1.4. Двухчастичные уравнения первого порядка (341). 7.1.5. Уравнения для взаимодействующих частиц произвольного спина (343).
§ 7.2. Квазирелятивистские и пуанкаре-инвариантные двухчастичные уравнения 346
7.2.1. Предварительные замечания (346). 7.2.2. Уравнение Брейта (347). 7.2.3. Преобразование гамильтониана Брейта к квазидиагональной форме (348). 7.2.4. Уравнение Брейта для частиц равной массы (350). 7.2.5. Двухчастичные уравнения, инвариантные относительно группы $P(1, 6)$ (352).
§ 7.3. Точно решаемые модели двухчастичных систем 354
7.3.1. Нерелятивистская модель (354). 7.3.2. Релятивистская двухчастичная модель (355). 7.3.3. Решение двухчастичных уравнений (357). 7.3.4. Обсуждение спектра энергий двухчастичных моделей (359).
.Дополнение 365
Список литературы 381

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уже более ста лет, начиная с работ Е. С. Федорова по симметрии кристаллов, наблюдается непрерывный и все ускоряющийся рост числа исследований с использованием методов дискретных, а затем непрерывных групп, алгебр и супералгебр в самых различных областях теоретического естествознания. Эти методы носят достаточно универсальный характер и могут служить основой для глубокого понимания принципов относительности Галилея и Пуанкаре — Эйнштейна, периодического закона Д. И. Менделеева, принципов классификации элементарных частиц и биологических структур, законов сохранения в классической и квантовой механике и т. д.

Основы теории непрерывных групп были заложены еще в прошлом веке Софусом Ли, который предложил, в частности, эффективные алгоритмы для вычисления групп симметрии линейных и нелинейных уравнений в частных производных. В настоящее время классические методы Ли, дополненные теорией представлений групп и алгебр Ли, находят самое широкое применение в теоретической и математической физике.

Наша книга посвящена анализу старых (классических) и новых (нелокальных) симметрий основных уравнений квантовой механики и классической теории поля, классификации и теоретико-алгебраическому выводу уравнений движения для частиц (полей) произвольного спина как в нерелятивистской, так и релятивистской теории. В книге довольно подробно представлен материал по теории представлений групп Галилея, Пуанкаре и их возможных обобщений. Излагается новый подход к исследованию симметрийных свойств уравнений в частных производных, позволивший найти неизвестные ранее алгебры и группы инвариантности уравнений Дирака, Максвелла и др. Приведены решения ряда задач о движении частицы произвольного спина во внешнем электромагнитном поле. Большинство результатов публикуется в монографической литературе впервые.

В основу книги положены главным образом работы авторов. Ссылки на литературные источники ни в коем случае не претендуют на полноту. Более того, мы отчетливо осознаем, что многие важные работы по теории волновых уравнений и представлений групп движений квантовой механики в библиографии не приведены. Цитировались, как правило, только те работы, которые непосредственно использовались нами.

Авторы пользуются случаем выразить глубокую благодарность академикам Н. Н. Боголюбову и Ю. А. Митропольскому, нашему учителю академику АН УССР О. С. Парасюку, профессорам А. А. Боргардту, В. Г. Кадышевскому, М. К. Поливанову за существенную и постоянную поддержку наших исследований по разработке теоретико-алгебраических методов в теоретической и математической физике. Мы очень признательны Л. Ф. Баранчику, Н. И. Серову, Р. З. Жданову и И. А. Егорченко за помощь при работе над рукописью, а также И. В. Тараненко за техническое оформление рукописи.

Скрытая гармония сильнее явной

Гераклит

ВВЕДЕНИЕ

В современных исследованиях по математической и теоретической физике всевозрастающую роль играет принцип симметрии. Это связано прежде всего с тем, что основные физические законы, уравнения движения, различные математические модели обладают явной или скрытой, геометрической или негеометрической, локальной или нелокальной симметриями. Все основные уравнения математической физики — Ньютона, Лапласа, Даламбера, Эйлера — Лагранжа, Ламе, Гамильтона — Якоби, Максвелла, Шредингера и т. д.— обладают высокой симметрией. Именно это свойство выделяет их из множества других дифференциальных уравнений, рассматриваемых в математике.

Построение конструктивного математического аппарата, способного выявлять разнообразные виды симметрий,— одна из важнейших задач математической физики. Не менее важной является задача, в определенном смысле обратная к сформулированной выше: по заданной группе построить математические модели (уравнения), обладающие определенной симметрией. Обе эти проблемы подробно обсуждаются в книге.

Принцип симметрии, как нам представляется, должен играть роль правила отбора, выделяющего из множества допустимых математических моделей только такие, которые обладают соответствующими свойствами инвариантности. Этот принцип в явном или неявном виде используется при построении современных физических теорий, но, к сожалению, еще мало используется в прикладной математике.

В некоторых случаях требование инвариантности уравнений движения относительно той или иной группы позволяет однозначно выбрать его из достаточно широкого класса допустимых уравнений. Так, например, среди множества систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для двух вектор-функций $\mathbf{E}(x_0, \mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(x_0, \mathbf{x})$ существует единственная система, инвариантная относительно группы Пуанкаре, а именно уравнения Максвелла. Аналогичным образом можно определить уравнения Дирака, Шредингера и другие.

Главная тема этой книги — симметрийный анализ основных уравнений квантовой физики и вывод уравнений для частиц с произвольным спином с различными группами симметрии. Рассматриваются также уравнения для двух частиц с произвольным спином и точно решаемые модели взаимодействия таких частиц с внешним электромагнитным полем.

Локальные группы инвариантности основных уравнений квантовой механики (Шредингера, Дирака и других) хорошо известны. Однако доказательства того факта, что эти группы являются максимальными (в смысле Ли), имеются только в специальной журнальной литературе ввиду их сложности и громоздкости. По нашему мнению, эти доказательства заслуживают того, чтобы быть изложенными в доступной широкому кругу читателей форме, и безусловно являются полезными для более глубокого понимания математической природы симметрии этих уравнений. Описанию максимальной в смысле Ли симметрии квантовой физики посвящены гл. 1 и § 6.1.

Хорошо известно, что классический метод Ли не позволяет обнаружить многие важные свойства симметрии дифференциальных уравнений. Скрытая (нелиевская) симметрия основных уравнений квантовой механики описана в гл. 3, где найдены также новые интегралы движения уравнений Дирака, Максвелла и Ламе.

В книге подробно изложена теория представлений алгебр Ли основных групп движений четырехмерного пространства-времени (групп Пуанкаре и Галилея), а также обобщенных групп Пуанкаре $P(1, n)$. Найдены различные реализации этих представлений в базисах, удобных для физических приложений (гл. 2, 4, § 6.2). Детально рассмотрены представления операторов дискретных преобразований P, T и C и найдены их неэквивалентные реализации в пространствах представлений группы Пуанкаре.

Подробное оглавление дает достаточно полную информацию о содержании книги, поэтому мы ограничимся приведенными выше предварительными замечаниями.

Сравнительно небольшой объем книги не дал нам возможности подробно остановиться на анализе систем нелинейных уравнений в частных производных, инвариантных относительно групп Пуанкаре, Галилея и конформной группы. В последние годы достигнут значительный прогресс в построении частных решений таких уравнений и в изучении их симметрии. Эти вопросы изложены в работах [214—217] и в статьях, приведенных в дополнительном списке литературы, и являются предметом отдельной монографии [13*]*). Краткий обзор основных результатов по этой тематике приведен в дополнении.

---

*) Звездочка означает ссылку на дополнительный список литературы, приведенный после дополнения в самом конце книги.

ГЛАВА 1

ЛОКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Эта глава посвящена исследованию симметрии уравнений Клейна — Гордона — Фока (КГФ), Дирака и Максвелла. Найдены максимальные алгебры инвариантности этих уравнений в классе дифференциальных операторов первого порядка и построены представления соответствующих групп симметрии, приведены в явном виде законы преобразования зависимых и независимых переменных. При этом преследуется двоякая цель: изложить на относительно простых примерах основные идеи и принципы теоретико-алгебраического подхода к анализу дифференциальных уравнений, а также дать четкую формулировку свойств симметрии основных уравнений квантовой физики.

§ 1.1. Локальная симметрия уравнения Клейна — Гордона — Фока

1.1.1. Введение. Одним из основных уравнений релятивистской квантовой физики является уравнение КГФ, которое мы будем записывать в виде

$$L\psi \equiv (p^\mu p_\mu - m^2)\psi = 0, \qquad (1.1.1)$$

где p_μ — операторы дифференцирования: $p_0 = p^0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}$, $p_a = p^a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, m^2 — положительный параметр. Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам подразумевается ковариантное суммирование, $p_\mu p^\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$, и используется система единиц Хевисайда, в которой $\hbar = c = 1$.

Уравнение (1.1.1) является релятивистским аналогом уравнения Шредингера. В современной физической литературе его обычно называют уравнением Клейна — Гордона, хотя оно впервые было предложено, по-видимому, Шредингером [138], а затем Фоком [186], Клейном [250] и рядом других авторов (см. [2]). Мы будем пользоваться термином «уравнение КГФ», или «волновое уравнение».

Настоящий параграф посвящен исследованию симметрии уравнения (1.1.1). Анализ симметрийных свойств уравнения КГФ позволит нам естественным путем подойти к таким важнейшим понятиям современной физики, как релятивистская и конформная инвариантность, а в дальнейшем сформулировать задачу нахождения релятивистских уравнений движения для частиц произвольного спина. Будет показано также, что инвариантность относительно группы Пуанкаре (а в случае $m=0$ — относительно конформной группы) определяет в некотором смысле максимальную симметрию уравнения (1.1.1).

Сформулируем задачу исследования симметрии уравнения КГФ. Основным понятием, которое будем использовать при изучении инвариантных свойств этого уравнения (как и других уравнений квантовой физики), является понятие оператора симметрии. В широком смысле оператором симметрии считается произвольный (линейный, нелинейный, дифференциальный, интегральный и т. д.) оператор Q, переводящий решения уравнения (1.1.1) в решения, т. е. удовлетворяющий условию

$$L(Q\psi)=0 \tag{1.1.2}$$

для каждого ψ, принадлежащего множеству решений уравнения (1.1.1). Однако, если исходить только из определения (1.1.2), то представляется невозможным эффективно найти все неэквивалентные операторы симметрии заданного уравнения, так как наряду с Q условиям (1.1.2) удовлетворяют также Q^2, Q^3, ..., т. е. число операторов симметрии для каждого дифференциального уравнения, вообще говоря, бесконечно. Поэтому на практике обычно предполагается, что операторы Q принадлежат некоторому сравнительно узкому классу $\mathfrak{M}$ (например, классу линейных дифференциальных операторов, включающих производные не выше n-го порядка), а затем находят все возможные (с точностью до эквивалентности) операторы симметрии $Q\in\mathfrak{M}$. При этом особый интерес представляют операторы симметрии, принадлежащие классу линейных дифференциальных операторов первого порядка, которые могут рассматриваться как производные Ли, или генераторы непрерывных групп преобразований. Именно симметрия такого типа и будет рассматриваться в настоящем параграфе.

Перейдем к определениям. Рассмотрим только такие решения уравнения (1.1.1), которые определены на некотором открытом множестве D четырехмерного многообразия R_4, состоящего из точек с координатами (x_0, x_1, x_2, x_3), и аналитичны относительно вещественных переменных x_0, x_1, x_2, x_3. Множество всех таких решений образует комплексное векторное пространство, которое мы будем обозначать символом $\mathcal{F}_0$. Действительно, если $\psi_1, \psi_2\in\mathcal{F}_0$ и $\alpha_1, \alpha_2\in\mathbb{C}$, то, очевидно, $\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2\in\mathcal{F}_0$. Фиксируя D (например, предполагая, что D совпадает с R_4), будем называть $\mathcal{F}_0$ пространством решений уравнения КГФ.

Обозначим символом $\mathcal{F}$ векторное пространство всех комплекснозначных функций, которые определены на D и являются вещественно-аналитическими, а символом L — линейный дифференциальный оператор, определенный на $\mathcal{F}$:

$$L=p_\mu p^\mu-m^2. \tag{1.1.3}$$

Тогда $L\psi \in \mathscr{F}$, если $\psi \in \mathscr{F}$. При этом $\mathscr{F}_0$ является таким подпространством векторного пространства $\mathscr{F}$, которое совпадает с нуль-пространством (ядром) оператора L (1.1.3).

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — множество (класс) дифференциальных операторов первого порядка, определенных на $\mathscr{F}$. Понятие оператора симметрии в классе $\mathfrak{M}_1$ может быть сформулировано следующим образом.

Определение 1.1. Линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$Q = A^{\mu} p_{\mu} + B, \qquad A_{\mu},\ B \in \mathscr{F}, \tag{1.1.4}$$

называется *оператором симметрии* уравнения КГФ в классе $\mathfrak{M}_1$, если

$$[Q,\ L] = \alpha_Q L, \qquad \alpha_Q \in \mathscr{F}, \tag{1.1.5}$$

где $[Q,\ L] = QL - LQ$ — коммутатор операторов Q и L.

Соотношение (1.1.5) следует понимать в том смысле, что операторы, стоящие в левой и правой частях, дают один и тот же результат при действии на произвольную функцию $\psi \in \mathscr{F}$.

Нетрудно убедиться, что так определенные операторы симметрии удовлетворяют условию (1.1.2) для любого $\psi \in \mathscr{F}_0$. Действительно, согласно (1.1.5) $LQ\psi = (Q - \alpha_Q)L\psi = 0$, если $\psi \in \mathscr{F}_0$. Справедливо и обратное утверждение: если оператор Q (1.1.4) удовлетворяет (1.1.2) для произвольного $\psi \in \mathscr{F}_0$, то для него выполняется также соотношение (1.1.5) с некоторой функцией $\alpha_Q \in \mathscr{F}$.

Используя приведенные определения, мы вычислим ниже в явном виде все возможные операторы симметрии уравнения КГФ. Оказывается, что любой оператор симметрии вида (1.1.4) может быть представлен в виде линейной комбинации некоторых базисных элементов, к нахождению которых и сводится задача исследования симметрии уравнения (1.1.1). Этот факт вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Множество S операторов симметрии уравнения КГФ в классе $\mathfrak{M}_1$ образует комплексную алгебру Ли, т. е. если $Q_1,\ Q_2 \in S$, то*

1) $a_1 Q_1 + a_2 Q_2 \in S$ *для всех* $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$;

2) $[Q_1,\ Q_2] \in S$.

Доказательство. По определению, операторы Q_i $(i = 1,\ 2)$ удовлетворяют условиям $[Q_i, L] = \alpha_{Q_i} L$, где L — оператор (1.1.3), $\alpha_{Q_i} \in \mathscr{F}$. Прямым вычислением получаем, что операторы $Q_3 = a_1 Q_1 + a_2 Q_2$ и $Q_4 = [Q_1,\ Q_2]$ принадлежат $\mathfrak{M}_1$ и удовлетворяют соотношению (1.1.5) при $\alpha_{Q_3} = a_1 \alpha_{Q_1} + a_2 \alpha_{Q_2}$ и $\alpha_{Q_4} = [Q_1,\ \alpha_{Q_2}] - [Q_2,\ \alpha_{Q_1}]$, $\alpha_{Q_3}, \alpha_{Q_4} \in \mathscr{F}$. ■

Таким образом, исследуя симметрию уравнения КГФ (или другого линейного дифференциального уравнения) в классе дифференциальных операторов первого порядка, мы всегда будем иметь дело с алгеброй Ли, которая может быть как конечномерной (что имеет место в действительности для уравнения (1.1.1)), так и бесконечномерной. Поэтому, говоря о такой симметрии, будем использовать термин «алгебра инвариантности» (а. и.).

Определение 1.2. Пусть $\{Q_A\}$ $(A = 1, 2, 3, \ldots)$ — некоторая совокупность линейных дифференциальных операторов вида (1.1.4), образующих базис конечномерной алгебры Ли G. Будем говорить, что G является *а. и. уравнения* (1.1.1), если каждый из операторов Q_A удовлетворяет условию (1.1.5), т. е. является оператором симметрии этого уравнения.

В силу теоремы 1.1 задача отыскания всех возможных операторов симметрии уравнения КГФ эквивалентна нахождению базиса максимально широкой а. и. уравнения (1.1.1) в классе $\mathfrak{M}_1$. Как будет показано ниже (см. гл. 3), многие уравнения квантовой механики обладают а. и. в классе дифференциальных операторов второго, третьего и т. д. порядков и даже в классе интегро-дифференциальных операторов, хотя операторы симметрии высших порядков в общем случае не образуют конечномерной алгебры Ли.

1.1.2. А. и. уравнения КГФ. В этом пункте мы найдем а. и. уравнения КГФ в классе $\mathfrak{M}_1$ — классе дифференциальных операторов первого порядка. Это позволит с привлечением относительно несложных математических выкладок доказать релятивистскую (а в случае $m = 0$ — и конформную) инвариантность уравнения (1.1.1) и в то же время показать, что эта симметрия является в некотором смысле максимальной.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Уравнение КГФ инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой могут быть выбраны в виде*

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a = 1, 2, 3,$$
$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.1.6}$$

Алгебра Ли, натянутая на базис (1.1.6), *является максимальной а. и. уравнения КГФ в классе* $\mathfrak{M}_1$.

Доказательство. Исходя из определения 1.1 на с. 9, найдем общий вид оператора симметрии в классе $\mathfrak{M}_1$ для уравнения КГФ. Подставляя (1.1.4), (1.1.3) в (1.1.5) и перенося операторы дифференцирования вправо, приходим к уравнению

$$-2iA^\mu_\lambda p^\lambda p_\mu + (\Box A^\mu)\, p_\mu - 2iB_\lambda p^\lambda + \Box B = \alpha(x)\,(p^\sigma p_\sigma - m^2), \tag{1.1.7}$$

где $A^\mu_\lambda = \dfrac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}$, $B_\lambda = \dfrac{\partial B}{\partial x^\lambda}$, $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial}{\partial x_3^2}$ — оператор Даламбера.

Уравнение (1.1.7) следует понимать в том смысле, что оператор слева и оператор справа должны давать одинаковый результат при действии на произвольную фукцию $\psi \in \mathcal{F}$. Иными словами, необходимым и достаточным условием справедливости этого уравнения является равенство коэффициентов при одинаковых операторах дифференцирования в левой и правой частях, откуда получаем следующую систему:

$$A^{\mu}_{\mu} = A^{\nu}_{\nu}, \quad A^{\nu}_{\mu} = -A^{\mu}_{\nu}, \quad \mu \neq \nu, \tag{1.1.8}$$

$$\alpha = -2iA^{\nu}_{\nu}, \quad \Box B = -\alpha m^2, \quad 2i \frac{\partial B}{\partial x_{\mu}} = \Box A^{\mu}, \tag{1.1.9}$$

где суммирование по повторяющимся индексам не подразумевается.

Уравнения (1.1.8), (1.1.9) легко интегрируются. Соотношения (1.1.8) определяют систему уравнений Киллинга для A_{μ}, общее решение которой имеет вид [38]

$$A^{\mu} = 2x^{\mu}x_{\nu}f^{\nu} - f^{\mu}x_{\nu}x^{\nu} + c^{\mu\nu}x_{\nu} + dx^{\mu} + e^{\mu}, \tag{1.1.10}$$

где f^{ν}, d, e^{μ}, $c^{\mu\nu} = -c^{\nu\mu}$ — произвольные числа. Подставив (1.1.10) в (1.1.9), получаем следующие условия для f^{μ}, d, α, B (которые совместно с (1.1.10) являются необходимыми и достаточными для справедливости (1.1.8), (1.1.9)):

$$\alpha = d = f^{\mu} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x_{\mu}} = 0. \tag{1.1.11}$$

Таким образом, согласно (1.1.4), (1.1.10), (1.1.11) общее выражение для оператора симметрии уравнения КГФ в классе $\mathfrak{M}_1$ может быть записано в виде

$$Q = c^{\mu\nu}x_{\mu}p_{\nu} + e^{\mu}p_{\mu} + B, \tag{1.1.12}$$

где $c^{\mu\nu} = -c^{\nu\mu}$, e^{μ} и B — произвольные комплексные параметры. Нетрудно убедиться, что оператор (1.1.12) представляет собой линейную комбинацию единичного оператора и операторов P_{μ}, $J_{\mu\nu}$, заданных формулами (1.1.6). Единичный оператор симметрии не представляет интереса и поэтому может быть отброшен, а операторы (1.1.6) образуют базис 10-мерной алгебры Ли, удовлетворяя следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \quad [P_{\mu}, J_{\nu\sigma}] = i(g_{\mu\nu}P_{\sigma} - g_{\mu\sigma}P_{\nu}), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(-g_{\mu\lambda}J_{\lambda\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma}),\end{gathered} \tag{1.1.13}$$

где

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad g_{\mu\nu} = 0, \ \mu \neq \nu. \tag{1.1.14}$$

Итак, операторы (1.1.5) действительно образуют а. и. уравнения КГФ. Эта алгебра является максимальной в классе $\mathfrak{M}_1$, так как по доказанному произвольный оператор симметрии вида (1.1.4) является линейной комбинацией базисных операторов (1.1.6) (и тривиального единичного оператора симметрии). ■

Соотношения (1.1.13), которым удовлетворяют базисные элементы а. и. уравнения КГФ, определяют алгебру Ли группы Пуанкаре — группы движений релятивистской квантовой механики. Ниже мы будем называть эту алгебру алгеброй Пуанкаре и обозначать символом AP (1, 3).

Симметрия относительно алгебры Пуанкаре имеет глубочайшие физические следствия и содержит в неявном виде информацию о всех основных законах релятивистской кинематики (преобразованиях Лоренца, релятивистском правиле сложения скоростей и т. д.). Эти вопросы обсуждаются ниже в пп. 1.1.4, 1.1.5. А в следующем пункте мы исследуем симметрию уравнения КГФ в специальном случае, когда $m=0$ (т. е. когда (1.1.1) сводится к четырехмерному уравнению Даламбера).

1.1.3. Симметрия уравнения КГФ для безмассового поля. До сих пор мы предполагали, что параметр m в уравнении (1.1.1) отличен от нуля. Однако это уравнение имеет явный физический смысл и в случае $m=0$, описывая свободное безмассовое скалярное поле. Симметрия уравнения КГФ с $m=0$ оказывается более широкой, чем в случае отличной от нуля массы.

Теорема 1.3. *Максимальной а. и. уравнения Даламбера*

$$p_\mu p^\mu \psi \equiv -\Box\,\psi = 0 \tag{1.1.15}$$

является пятнадцатимерная алгебра Ли. Базисные элементы этой алгебры задаются формулами (1.1.6) *и* (1.1.16):

$$\begin{aligned} D &= x^\mu p_\mu + i,\\ K_\mu &= 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu. \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Доказательство. Повторяя дословно рассуждения из доказательства теоремы 1.2, приходим к выводу, что общий вид оператора симметрии $Q \in \mathfrak{M}_1$ для уравнения (1.1.15) задается формулами (1.1.4), (1.1.10), где f^μ, $c^{\mu\nu}$, e^μ, d — произвольные постоянные, а функции B и α удовлетворяют следующим условиям (совпадающим с (1.1.9) при $m=0$):

$$\begin{aligned} &\Box\, B = 0, \qquad 2i\,\frac{\partial B}{\partial x_\mu} = \Box\, A^\mu \equiv -4f^\mu,\\ &\alpha = -2i\,\frac{\partial A^0}{\partial x_0} \equiv -(4ix_\nu f^\nu + 2id). \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Согласно (1.1.17) $B = 2if^\mu x_\mu + ib$, где b — произвольная постоянная, которую, не умаляя общности, можно приравнять параметру d (оператор симметрии при $b \neq d$ будет иметь несущественный дополнительный член, пропорциональный единичному оператору). В результате приходим к оператору симметрии следующего вида:

$$Q = 2f^\nu x_\nu x^\mu p_\mu - f^\nu x_\mu x^\mu p_\nu + c^{\mu\nu} x_\mu p_\nu + d x_\mu p^\mu + \varphi^\mu p_\mu + 2if^\nu x_\nu + 2id. \tag{1.1.18}$$

Оператор (1.1.18) представляет собой не что иное, как линейную комбинацию операторов (1.1.6) и (1.1.16). Действительно,

$$Q = P_{\mu_0}, \quad \text{если} \quad f^\nu = c^{\mu\nu} = d = 0, \quad e^\mu = g^{\mu\mu_0};$$

$$Q = J_{\mu_0\nu_0}, \quad \text{если} \quad f^\nu = e^\mu = d = 0, \qquad c^{\mu\nu} = g^{\mu\mu_0} g^{\nu\nu_0} - g^{\mu\nu_0} g^{\nu\mu_0};$$

$$Q = K_{\mu_0}, \quad \text{если} \quad c^{\mu\nu} = e^{\mu} = d = 0, \quad f^{\mu} = g^{\mu\mu_0};$$
$$Q = D, \quad \text{если} \quad c^{\mu\nu} = e^{\mu} = f^{\mu} = 0, \quad d = 1,$$

где P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ, D — операторы (1.1.6), (1.1.16). Эти операторы образуют базис 15-мерной алгебры Ли, удовлетворяя следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} [J_{\mu\nu}, K_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}K_\mu - g_{\mu\lambda}K_\nu), \\ [K_\mu, P_\nu] = -2i(g_{\mu\nu}D + J_{\mu\nu}), \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \\ [D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, K_\mu] = iK_\mu, \quad [J_{\mu\nu}, D] = 0 \end{gathered} \tag{1.1.19}$$

и коммутационным соотношениям (1.1.13). Соотношения (1.1.13) и (1.1.19) определяют алгебру Ли конформной группы $C(1, 3)$. ■

Таким образом, мы убедились, что безмассовое уравнение КГФ (1.1.15) инвариантно относительно 15-мерной алгебры Ли конформной группы (называемой ниже конформной алгеброй). Конформная симметрия наряду с релятивистской инвариантностью играет очень важную роль в современной теоретической физике.

1.1.4. Преобразования Лоренца. Итак, мы нашли максимальную а. и. уравнения КГФ в классе $\mathfrak{M}_1$. Возникает естественный вопрос: зачем нам нужно знать эту а. и., какую информацию несет она о свойствах уравнения и его решениях?

Оказывается, эта информация весьма существенна. Во-первых, зная а. и. того или иного дифференциального уравнения, обычно бывает нетрудно найти соответствующие интегралы движения, не прибегая к решению этого уравнения. Во-вторых, используя а. и., можно в принципе описать все системы координат, в которых это уравнение допускает решения с разделяющимися переменными [50]. Наконец, каждой а. и. в классе дифференциальных операторов первого порядка можно сопоставить локальную группу преобразований симметрии данного уравнения.

Большинство задач, связанных с исследованием или использованием симметрии дифференциальных уравнений, может быть успешно решено в терминах а. и., без использования понятия группы преобразований. Так, именно а. и. уравнения КГФ и ее представления будут служить основным инструментом при исследовании уравнений движения релятивистских частиц произвольного спина, проводимом ниже в гл. 2. Однако знание группы симметрии безусловно приводит к более глубокому пониманию природы инвариантных свойств уравнения. Особенно это касается нелинейных уравнений.

Здесь мы построим в явном виде группы инвариантности уравнения КГФ, соответствующие найденным выше а. и. Для этого воспользуемся одним классическим результатом теории групп и алгебр Ли, установленным еще в прошлом веке Софусом Ли. Суть этого результата применительно к задаче исследования симметрии дифференциальных уравнений может быть сформулирована следующим образом: если уравнение обладает а. и. в классе $\mathfrak{M}_1$, то оно локально инвариантно относительно группы непрерывных преобразований зависимых и независимых переменных (строгая формулировка этого утверждения имеется во многих книгах по теории групп; см., например, [4, 32]).

Алгоритм восстановления группы симметрии по заданной а. и. состоит в том, что каждому базисному элементу а. и. ставится в соответствие однопараметрическая подгруппа преобразований

$$x \to x' = g_\theta(x),$$

$$\psi(x) \to \psi'(x') = T_{g_\theta}(\psi(x)) = \widehat{D}(\theta, x)\,\psi(x), \tag{1.1.20}$$

где θ — в общем случае комплексный параметр преобразования (для уравнения КГФ, как будет показано ниже, все такие параметры вещественны), g_θ и $\widehat{D}$ — аналитические функции от θ и x, T_{g_θ} — линейные операторы, определенные в пространстве $\mathcal{F}$. Явные выражения для функций g_θ и $\widehat{D}$ могут быть получены с помощью интегрирования уравнений Ли

$$\frac{dx'^\mu}{d\theta} = A^\mu(x'), \qquad x^{\mu\prime}|_{\theta=0} = x^\mu, \tag{1.1.21}$$

$$\frac{d\psi'}{d\theta} = i\,B(x')\,\psi', \quad \psi'|_{\theta=0} = \psi. \tag{1.1.22}$$

Здесь A^μ и B — функции, входящие в определение (1.1.4) оператора симметрии.

Каждая из формул (1.1.21), (1.1.22) определяет систему обыкновенных дифференциальных уравнений с заданным начальным условием, т. е. задачу Коши, имеющую единственное решение. Для операторов симметрии (1.1.6) уравнения (1.1.21), (1.1.22) легко интегрируются. Сравнивая (1.1.4) и (1.1.6), заключаем, что для всех базисных элементов (1.1.3) $B \equiv 0$ и решения уравнения (1.1.22) принимают вид

$$\psi'(x') = \psi(x), \quad \text{или} \quad \psi'(x) = \psi\left(g_\theta^{-1}(x)\right). \tag{1.1.23}$$

Решая уравнения (1.1.21), нетрудно найти закон преобразования независимых переменных x^μ. Из (1.1.4), (1.1.6) получаем

$$A^\mu = 1, \quad \text{если} \quad Q = P_\mu; \tag{1.1.24}$$

$$A^\mu = x_a g_b^\mu - x_b g_a^\mu, \quad \text{если} \quad Q = J_{ab}; \tag{1.1.25}$$

$$A^\mu = x_0 g_a^\mu - x_a g_0^\mu, \quad \text{если} \quad Q = J_{0a}, \tag{1.1.26}$$

где g_ν^μ — компоненты метрического тензора (1.1.14). Обозначив $\theta = b_\mu$ для $Q = P_\mu$ и подставив (1.1.24) в (1.1.22), приходим к уравнению

$$\frac{dx'^\mu}{db^\mu} = 1, \qquad x'^\mu|_{b_\mu=0} = x^\mu \tag{1.1.27}$$

(суммы по μ нет), откуда

$$x'^\mu = x^\mu + b^\mu. \tag{1.1.28}$$

Используя (1.1.25), (1.1.26), аналогично находим преобразования, генерируемые операторами J_{ab} и J_{0a}:

$$
\begin{aligned}
x'^{\mu} &= x^{\mu}, \qquad \mu \neq a, b,\\
x'^{a} &= x^{a}\cos\theta_{ab} + x^{b}\sin\theta_{ab},\\
x'^{b} &= x^{b}\cos\theta_{ab} - x^{a}\sin\theta_{ab};
\end{aligned}
\tag{1.1.29}
$$

$$
\begin{aligned}
x'^{\mu} &= x^{\mu}, \qquad \mu \neq 0, a,\\
x'^{a} &= x^{a}\,\mathrm{ch}\,\theta_{0a} - x^{0}\,\mathrm{sh}\,\theta_{0a},\\
x'^{0} &= x^{0}\,\mathrm{ch}\,\theta_{0a} - x^{a}\,\mathrm{sh}\,\theta_{0a},
\end{aligned}
\tag{1.1.30}
$$

где θ_{ab}, θ_{0a} — параметры преобразования.

Итак, мы получили окончательно, что уравнение КГФ инвариантно относительно совокупности преобразований зависимых и независимых переменных, задаваемых формулами (1.1.23), (1.1.28)—(1.1.30). Преобразования (1.1.28)—(1.1.30) (которые впервые в 1905 г. А. Пуанкаре назвал именем Лоренца), как нетрудно убедиться, удовлетворяют групповому закону и сохраняют длину интервала в четырехмерном пространстве-времени

$$S(x^{(1)} - x^{(2)}) = S(x'^{(1)} - x'^{(2)}), \tag{1.1.31}$$

где $S(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, а $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — две произвольные точки пространственно-временного континуума.

Совокупность преобразований, удовлетворяющих условию (1.1.31), образует группу, которую в современной физической и математической литературе по предложению Вигнера называют группой Пуанкаре.

Преобразования (1.1.28)—(1.1.30) имеют ясную физическую интерпретацию. Соотношения (1.1.28) и (1.1.29) определяют сдвиг системы отсчета на величину b^{μ} по μ-й координате и поворот на угол θ_{ab} в плоскости $a - b$. Что же касается преобразования (1.1.30), то с помощью замены $\theta_{0a} = \mathrm{arth}\, v_a/c$, где v_a/c — безразмерный параметр, c — скорость света *), его можно записать в форме, допускающей очевидную интерпретацию как переход к новой системе отсчета, движущейся со скоростью v_a (по оси a) по отношению к исходной:

$$
\begin{aligned}
x'_a &= (x_a - v_a x_0)\beta, \qquad x'_0 = (x_0 - v_a x_a)\beta,\\
x'_\mu &= x_\mu,\ \mu \neq 0, a, \qquad \beta = \left(1 - v_a^2/c^2\right)^{-1/2}
\end{aligned}
\tag{1.1.32}
$$

(суммы по a нет).

Из (1.1.32) нетрудно получить релятивистский закон сложения скоростей

$$V'_a = \left(\frac{dx_a}{dx_0}\right)' = \frac{dx'_a}{dx'_0} = \frac{V_a - v_a}{1 - \dfrac{V_a v_a}{c^2}}, \tag{1.1.33}$$

где снова суммирование по a не подразумевается.

---

*) Для наглядности мы временно (в формулах (1.1.32) и (1.1.33)) отказались от соглашения $c = 1$.

Мы видим, что а. и. простейшего уравнения движения релятивистской квантовой физики — уравнения КГФ — содержит в неявном виде информацию об основных законах релятивистской кинематики.

1.1.5. Группа Пуанкаре. Рассмотрим несколько подробнее процедуру восстановления группы Ли по заданной алгебре Ли, используемую в предыдущем пункте.

Прежде всего установим в явном виде изоморфизм алгебры, натянутой на базисные элементы (1.1.6), и алгебры Ли группы Пуанкаре.

Группу Пуанкаре образуют преобразования координат x_μ, сохраняющих длину интервала (1.1.31), т. е. преобразования вида

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu + b_\mu, \tag{1.1.34}$$

где $a_{\mu\nu}$, b_μ — вещественные параметры, удовлетворяющие условиям

$$a_{\mu\nu}a^{\lambda\mu} = g^\lambda_\nu. \tag{1.1.35}$$

Из (1.1.35) вытекает, что

$$(\det\|a_{\mu\nu}\|)^2 = 1, \qquad a^2_{00} \geqslant 1,$$

или

$$\det\|a_{\mu\nu}\| = \pm 1, \quad |a_{00}| \geqslant 1. \tag{1.1.36}$$

Группу линейных преобразований (1.1.34), удовлетворяющих условиям (1.1.35), будем называть полной группой Пуанкаре и обозначать символом $\tilde{P}(1, 3)$. В группе $\tilde{P}(1, 3)$ можно выделить подгруппу $P(1, 3)$, для которой

$$\det\|a_{\mu\nu}\| = 1, \qquad a_{00} \geqslant 1. \tag{1.1.37}$$

Совокупность преобразований (1.1.34), удовлетворяющих (1.1.35) и (1.1.37), называется собственной ортохронной группой Пуанкаре (или просто собственной группой Пуанкаре). Группа $P(1, 3)$ является группой Ли, в то время как полная группа Пуанкаре таковой не является, поскольку детерминант матрицы $\|a_{\mu\nu}\|$ для группы $\tilde{P}(1, 3)$ скачкообразно изменяется от -1 до $+1$.

Преобразования из группы $P(1, 3)$ удобно записывать в матричной форме

$$\hat{x} \to \hat{x}' = A\hat{x}, \tag{1.1.38}$$

где

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{x}' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.1.39}$$

$$A = A(a, b) = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & b_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (1.1.40)$$

символами a и b обозначены матрица с матричными элементами $a_{\mu\nu}$ и вектор-столбец с компонентами b_μ. Последняя координата 1 в (1.1.39) введена для удобства и остается инвариантной при преобразованиях.

Поскольку каждое преобразование (1.1.32) может быть представлено в виде (1.1.38)—(1.1.40), то группа $P(1, 3)$ изоморфна группе матриц вида (1.1.40) (обозначаемой далее символом $\mathscr{P}(1, 3)$), где $a_{\mu\nu}$ и b_μ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям (1.1.35), (1.1.37). Групповое произведение в группе $\mathscr{P}(1, 3)$ задается как произведение матриц, причем

$$A(a^{(1)}, b^{(1)})A(a^{(2)}, b^{(2)}) = A(a^{(1)}a^{(2)}, b^{(1)} + a^{(1)}b^{(2)}). \qquad (1.1.41)$$

Единичный элемент группы $\mathscr{P}(1, 3)$ совпадает с единичной матрицей размерности 5×5, а элемент, обратный к $A(a, b)$, имеет вид

$$[A(a, b)]^{-1} = A(a^{-1}, -a^{-1}b). \qquad (1.1.42)$$

Общее решение соотношений (1.1.35), (1.1.37) можно представить в виде

$$a_{00} = \cos x \cos^2 \varphi + \operatorname{ch} y \sin^2 \varphi - \frac{\lambda^2}{R^2} (\cos x - \operatorname{ch} y),$$

$$a_{0b} = \frac{1}{R} [\sin x \operatorname{ch} y (\lambda_b \cos \varphi - \theta_b \sin \varphi) -$$

$$- \cos x \operatorname{sh} y (\lambda_b \sin \varphi + \theta_b \cos \varphi)] + \frac{1}{R^2} \varepsilon_{bcd} \lambda_c \theta_d (\cos x - \operatorname{ch} y),$$

$$a_{b0} = a_{0b} - \frac{2}{R^2} \varepsilon_{bcd} \lambda_c \theta_d (\cos x - \operatorname{ch} y),$$

$$a_{bc} = \frac{1}{R} \varepsilon_{abc} \theta_a (\sin x \operatorname{ch} y \cos \varphi - \cos x \operatorname{sh} y \sin \varphi) -$$

$$- (\lambda_b \lambda_c + \theta_b \theta_c - \theta^2 \delta_{bc}) (\cos x - \operatorname{ch} y) +$$

$$+ \delta_{bc} (\cos x \cos^2 \varphi + \operatorname{ch} y \sin^2 \varphi), \qquad (1.1.43)$$

где θ_a и λ_a ($a = 1, 2, 3$) — произвольные вещественные параметры, $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}$, $\lambda = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2}$, $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda_a \theta_a}{\theta^2 - \lambda^2}$, $R = [(\theta^2 - \lambda^2)^2 + 4(\lambda_a \theta_a)^2]$. Из (1.1.43) заключаем, что каждая матрица (1.1.43) непрерывно зависит от десяти вещественных параметров b_μ, θ_a и λ_a. Иными словами, группа $\mathscr{P}(1, 3)$ является десятипараметрической группой Ли.

Определим алгебру Ли, соответствующую группе $\mathscr{P}(1, 3)$. Базисные элементы этой алгебры по определению (см. [4]) могут быть выбраны в виде

$$
\begin{aligned}
-i\widehat{P}_\mu &= \left.\frac{\partial A(a, b)}{\partial b_\mu}\right|_{b_\mu=\theta_a=\lambda_a=0},\\
-i\widehat{J}_{ab} &= \varepsilon_{abc}\left.\frac{\partial A(a, b)}{\partial \theta_c}\right|_{b_\mu=\theta_a=\lambda_a=0},\\
-i\widehat{J}_{0a} &= -\widehat{J}_{a0} = \left.\frac{\partial A(a, b)}{\partial \lambda_a}\right|_{b_\mu=\theta_a=\lambda_a=0}.
\end{aligned}
\tag{1.1.44}
$$

Дифференцируя матрицы (1.1.40), (1.1.43) по соответствующим параметрам, получаем

$$
-i\widehat{P}_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad
-i\widehat{P}_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},
$$

$$
-i\widehat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad
-i\widehat{P}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},
$$

$$
\widehat{J}_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&-i&0&0\\ 0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad
\widehat{J}_{31} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&-i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad
\widehat{J}_{23} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-i&0\\ 0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},
$$

$$
\widehat{J}_{01} = \begin{pmatrix} 0&i&0&0&0\\ i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad
\widehat{J}_{02} = \begin{pmatrix} 0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad
\widehat{J}_{03} = \begin{pmatrix} 0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.
\tag{1.1.45}
$$

Нетрудно убедиться прямой проверкой, что матрицы (1.1.45) удовлетворяют соотношениям (1.1.13). Таким же соотношениям коммутации удовлетворяют базисные элементы а. и. уравнения КГФ, и, следовательно, эта а. и. изоморфна матричной алгебре, натянутой на базис (1.1.45). Произвольная матрица из группы $\mathscr{P}(1, 3)$ может быть построена из базисных элементов (1.1.45) с помощью экспоненциального отображения

$$
A(a, b) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\widehat{J}_{\mu\nu}\right)\exp\left(i\widehat{P}_\mu b^\mu\right), \tag{1.1.46}
$$

где

$$
\exp B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B^n, \qquad B^0 = E_m \tag{1.1.47}
$$

для любой матрицы размерности $m \times m$ (здесь E_m — единичная $(m \times m)$-матрица), $\theta_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\theta_c$, $\theta_{0a} = \lambda_a$, а θ_a, λ_a, b_μ — параметры, входящие в (1.1.40), (1.1.37).

Найденная в п. 1.1.3 а. и. уравнения КГФ реализует представление алгебры Ли матричной группы $\mathscr{P}(1, 3)$ в векторном пространстве $\mathscr{F}$. Это представление может быть расширено до локального представления группы $P(1, 3)$, задаваемого соотношениями (1.1.23), (1.1.28) — (1.1.30). По аналогии с (1.1.46) преобразования (1.1.23), (1.1.28) — (1.1.30) могут быть представлены как экспоненциальное отображение базисных элементов а. и.

$$\psi \to \psi'(x) = T(a, b)\,\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{2} J_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)\exp\left(iP_\mu b^\mu\right)\psi(x) =$$
$$= \psi\left(A^{-1}(a, b)\,\widehat{x}\right), \quad (1.1.48)$$

где от нуля отличен только один из параметров $\theta_{\mu\nu}$, b_μ. Экспоненты, входящие в (1.1.42), определяются согласно

$$\exp(\theta Q)\,\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}Q^n\psi(x), \qquad \psi \in \mathscr{F}, \qquad (1.1.49)$$

где Q — произвольный базисный элемент а. и., θ — соответствующий параметр.

Преобразования (1.1.48) определены и для произвольных значений $\theta^{\mu\nu}$, b^μ, причем для операторов $T(a, b)$ выполняется

$$T(a, b)\,T(a', b') = T(aa', b + ab'). \qquad (1.1.50)$$

Если Q принадлежит а. и. уравнения КГФ в классе $\mathfrak{M}_1$, т. е. если Q отображает решения в решения, то Q^n также отображает решения в решения для каждого $n = 2, 3, \ldots$ Таким же свойством, согласно (1.1.43), обладает и оператор $\exp(\theta Q)$. Отсюда заключаем, что если $\psi(x)$ — аналитическое решение уравнения (1.1.1), то $\psi'(x)$ из (1.1.48) также будет аналитическим решением в $\mathscr{F}$. Поэтому мы называем группу преобразований (1.1.48) группой симметрии уравнения КГФ.

Таким образом, исходя из а. и. уравнения КГФ (1.1.1), мы построили группу симметрии этого уравнения — группу Пуанкаре. Эта группа состоит из преобразований вида (1.1.23), (1.1.34), (1.1.35), (1.1.37), т. е. таких преобразований, при которых функция ψ не изменяется, а для независимых переменных производятся всевозможные переносы и повороты четырехмерного пространства. Требование симметрии относительно группы Пуанкаре является основным постулатом релятивисткой квантовой теории и будет неоднократно использоваться ниже.

1.1.6. Конформные преобразования. Найдем теперь явный вид преобразований из группы симметрии безмассового уравнения КГФ (1.1.15). А. и. этого уравнения определяется 15 базисными элементами (1.1.6) и (1.1.16). Очевидно, достаточно ограничиться построением подгруппы симметрии, порождаемой генераторами (1.1.16), так как группа, соответствующая алгебре Ли, натянутой на базис (1.1.6), уже рассматривалась выше в пп. 1.1.4 и 1.1.5.

Для нахождения однопараметрических подгрупп преобразований, которым соответствуют инфинитезимальные операторы (1.1.16), решим соответствующие уравнения Ли (1.1.21), (1.1.22). Сравнивая (1.1.4) и (1.1.16), заключаем, что для оператора D $A^\mu = x^\mu$, $B = 1$, а уравнения (1.1.21), (1.1.22) принимают вид

$$\frac{dx'^\mu}{d\theta} = x'^\mu, \qquad x'^\mu\big|_{\theta=0} = x^\mu,$$
$$\frac{d\psi'}{d\theta} = -\psi', \qquad \psi'\big|_{\theta=0} = \psi. \tag{1.1.51}$$

Решения уравнений (1.1.51) задаются формулами

$$\psi' = e^{-\theta}\psi, \qquad x' = e^\theta x. \tag{1.1.52}$$

Преобразования (1.1.52) носят название преобразований дилатации и сводятся к изменению масштаба (каждая независимая переменная умножается на одинаковое вещественное число).

Для операторов K (1.1.16) уравнения Ли принимают вид

$$\frac{dx'^\mu}{db^\nu} = 2x'^\mu x'_\nu - x'_\lambda x'^\lambda g^\mu_\nu, \qquad x'^\mu\big|_{b_\nu=0} = x^\mu,$$
$$\frac{d\psi'}{db^\nu} = -2x'_\mu\psi, \qquad \psi'\big|_{b^\nu=0} = \psi, \tag{1.1.53}$$

где через b^ν обозначены параметры преобразований, порождаемых генераторами K_ν. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что решения задач Коши, приведенных в (1.1.53), задаются формулами

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - g^\mu_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda}{1 - 2x_\nu b^\nu + b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda},$$
$$\psi' = \left(1 - 2x_\nu b^\nu + b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda\right)\psi \tag{1.1.54}$$

(суммы по ν нет).

Формулы (1.1.54) задают семейство преобразований, зависящих от одного параметра b^ν (при фиксированном значении ν). Последовательное применение этих формул для $\nu = 0, 1, 2, 3$ приводит нас к преобразованию общего вида для x^μ:

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x_\lambda x^\lambda}{1 - 2x_\nu b^\nu + b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda} \tag{1.1.55}$$

и преобразованию для ψ в форме (1.1.54), где под ν подразумевается ковариантное суммирование.

Преобразования (1.1.54), (1.1.55) называются конформными преобразованиями и могут быть представлены как произведение инверсии

$$x^\mu \to x'''^\mu = \frac{x^\mu}{x_\lambda x^\lambda}, \tag{1.1.56}$$

сдвига

$$x'''^\mu \to x''^\mu = x'''^\mu - b^\mu \tag{1.1.57}$$

и вторичной инверсии

$$x''^\mu \to x'^\mu = \frac{x''_\mu}{x''_\lambda x''^\lambda}. \tag{1.1.58}$$

Мы видим, что безмассовое уравнение КГФ наряду с симметрией относительно преобразований Лоренца инвариантно также относительно изменения масштаба (1.1.52) и комбинированной инверсии (1.1.56) — (1.1.58). Совокупность преобразований Лоренца (1.1.32) дилатации (1.1.52) и конформных преобразований (1.1.55) образует 15-параметрическую группу Ли, называемую конформной группой. Как будет показано ниже в § 1.4, инвариантность относительно конформной группы присуща всем без исключения релятивистским уравнениям для безмассовых полей.

Следует отметить, что найденные здесь и в §§ 1.3 и 1.4 преобразования можно рассматривать только как локальное представление группы $C(1, 3)$, поскольку мы сталкиваемся здесь не только с проблемой задания области определения функции $\psi'(x)$, но и с тем фактом, что выражение (1.1.55) теряет смысл при $1 - 2b_\nu x^\nu + b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda = 0$.

1.1.7. Дискретные преобразования симметрии. Хотя найденная выше в п. 1.1.2 а. и. уравнения КГФ является в некотором смысле максимально широкой, инвариантность относительно этой алгебры (и порождаемой ею группы преобразований) не исчерпывает всех свойств симметрии этого уравнения. Оказывается, что уравнение КГФ (как легко убедиться непосредственной проверкой) инвариантно также относительно следующих дискретных преобразований:

$$\begin{gathered} x_0 \to x_0' = x_0, \qquad x_a \to -x_a = x_a', \\ \psi(x) \to P\psi(x) = r_1\psi(x'), \end{gathered} \tag{1.1.59}$$

$$\begin{gathered} x_0 \to x_0'' = -x_0, \qquad x_a \to x_a'' = x_a, \\ \psi(x) \to T\psi(x) = r_2\psi(x''), \end{gathered} \tag{1.1.60}$$

$$x \to x, \quad \psi(x) \to C\psi(x) = r_3\psi^*(x) \tag{1.1.61}$$

(где $r_a^2 = 1$, так что $r_1 = \pm 1$, $r_2 = \pm 1$, $r_3 = \pm 1$), т. е. относительно изменения знака всех пространственных координат (P), обращения времени (T) и антиунитарной операции (C), носящей название зарядового сопряжения.

Определители матриц преобразования координат из (1.1.59) и (1.1.60) равны -1, так что эти преобразования не принадлежат группе $P(1, 3)$, но входят в расширенную группу Пуанкаре $\tilde{P}(1, 3)$. Что же касается преобразования (1.1.61), то оно никак не связано с группой Пуанкаре, но отражает симметрию уравнения КГФ относительно операции комплексного сопряжения.

Операторы P, C и T удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям совместно с базисными элементами а. и. уравнения КГФ (1.1.6):

$$\begin{gathered}
[P, P_0] = [P, P_a]_+ = [P, J_{ab}] = [P, J_{0a}]_+ = 0,\\
[T, P_0]_+ = [T, P_a] = [T, J_{ab}] = [T, J_{0a}]_+ = 0,\\
[C, P_\mu]_+ = [C, J_{\mu\nu}]_+ = 0, \quad T^2 = P^2 = C^2 = 1,\\
[P, T] = [C, T] = [P, C] = 0,
\end{gathered} \tag{1.1.62}$$

где символ $[A, B]_+$ означает антикоммутатор, $[A, B]_+\psi = (AB + BA)\psi$. Коммутационные и антикоммутационные соотношения (1.1.62) с заданными операторами (1.1.6) могут служить абстрактным определением операторов P, T и C.

Итак а. и. уравнения КГФ, найденная в п. 1.1.3, может быть расширена до множества операторов симметрии $\{J_{\mu\nu}, P_\mu, C, P, T\}$. Эти операторы удовлетворяют условию инвариантности (1.1.5) и алгебре (1.1.13), (1.1.62) (но, как легко видеть, не образуют алгебры Ли и не могут быть пополнены до конечномерной алгебры Ли).

§ 1.2. Локальная симметрия уравнения Дирака

1.2.1. Уравнение Дирака. В 1928 г. Дирак открыл релятивистское квантовомеханическое уравнение для электрона, сыгравшее революционную роль в современной физике. Это уравнение может быть записано в виде

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0, \tag{1.2.1}$$

где Ψ — четырехкомпонентная комплексная функция (матрица-столбец)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}, \tag{1.2.2}$$

γ_μ — четырехрядные квадратные матрицы, удовлетворяющие алгебре

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \tag{1.2.3}$$

где $g_{\mu\nu}$ — компоненты метрического тензора (1.1.14).

Для большинства практических целей явный вид матриц γ_μ несуществен, поскольку соотношения (1.2.3) определяют эти матрицы с точностью до унитарной эквивалентности. Мы выберем для конкретности следующее представление:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \widehat{0} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_a = \begin{pmatrix} \widehat{0} & -\sigma_a \\ \sigma_a & \widehat{0} \end{pmatrix}, \tag{1.2.4}$$

где $\widehat{0}$ и I — нулевые и единичные матрицы размерности 2×2, σ_a — матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1.2.5)$$

Уравнение (1.2.1) является простейшим квантовомеханическим уравнением, описывающим свободную частицу, обладающую спином. Исследование свойств симметрии этого уравнения, проводимое ниже, в принципе ничем не отличается от проведенного в § 1.1 анализа уравнения КГФ. Тем не менее, принимая во внимание исключительно важную роль, которую уравнение Дирака играет в современной теоретической физике, а также то обстоятельство, что при исследовании его свойств симметрии возникает ряд существенно новых моментов, связанных с многокомпонентностью функции Ψ, мы рассмотрим эти вопросы детально.

Отметим, что каждая компонента функции Ψ (1.2.2) удовлетворяет также уравнению КГФ. Действительно, умножив (1.2.1) слева на $\gamma_\mu p^\mu + m$ и приняв во внимание соотношения (1.2.3), получаем

$$(p_\mu p^\mu - m^2)\Psi = 0. \qquad (1.2.6)$$

Мы видим, что уравнение КГФ является следствием системы уравнений первого порядка (1.2.1). Обратное заключение, конечно, неверно, так как существует бесконечно много систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, решения которых покомпонентно удовлетворяют (1.2.6). Уравнение Дирака является простейшим примером такой системы.

1.2.2. Различные представления уравнения Дирака. Рассмотрим другие (т. е. отличающиеся от (1.2.1)) представления уравнения Дирака, встречающиеся в литературе. Все эти представления эквивалентны, но позволяют получить принципиально различные обобщения уравнения (1.2.1) на случай полей произвольного спина.

Исходя из (1.2.1), нетрудно получить уравнение для комплексно сопряженной функции Ψ^*. Обозначив

$$\Psi^\dagger = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*), \qquad \overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0, \qquad (1.2.7)$$

переходя в (1.2.1) к комплексно сопряженным величинам и используя (1.2.3), получаем

$$\overline{\Psi}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0, \qquad (1.2.8)$$

где подразумевается, что операторы дифференцирования действуют на стоящую от них слева функцию $\overline{\Psi}$. Используя представление (1.2.4), уравнение (1.2.8) можно записать также в следующей форме:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi^c = 0, \qquad \Psi^c = i\gamma_2\Psi^*. \qquad (1.2.9)$$

Действительно, используя (1.2.4), нетрудно убедиться, что уравнения (1.2.8) и (1.2.9) совпадают.

Уравнение Дирака в форме (1.2.8) наряду с (1.2.1) широко используется в квантовой теории поля.

Умножив (1.2.1) слева на γ_0 и учитывая, что $\gamma_0^2 = 1$, приходим к уравнению в форме Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi, \tag{1.2.10}$$

где гамильтониан H имеет вид

$$H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m. \tag{1.2.11}$$

Именно в таком виде это уравнение было найдено Дираком, который исходил из требований симметрии пространственных и временной координат и релятивистского соотношения между массой и четырехимпульсом (1.2.6). И именно формулировка (1.2.10) будет служить основой для обобщения уравнения Дирака на случай произвольного спина, осуществленного ниже в § 2.5.

Еще одну, так называемую ковариантную формулировку уравнения Дирака получаем, умножая (1.2.1) последовательно на γ_0, γ_1, γ_2, γ_3:

$$p_\mu\Psi = P_\mu\Psi, \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{1.2.12}$$

где

$$P_\mu = \gamma_\mu\gamma_\nu p^\nu + \gamma_\mu m, \quad \nu \neq \mu.$$

В уравнениях (1.2.12), как и в (1.2.1), все переменные играют совершенно равноправную роль, в то время как в (1.2.10) время $t = x_0$ выделено. Уравнения в форме (1.2.12) также допускают очень интересные обобщения [102, 147]. В частности, такой вид имеет бесконечнокомпонентное уравнение Дирака для частиц с положительной энергией [178, 76].

В заключение этого пункта отметим, что матрицы γ_μ могут быть выбраны таким образом, чтобы все коэффициенты уравнения (1.2.1) были вещественными. А именно, полагая

$$\gamma_0' = \gamma_0\gamma_2, \quad \gamma_1' = -\gamma_1\gamma_2, \quad \gamma_3' = \gamma_3\gamma_2, \quad \gamma_2' = -\gamma_2, \tag{1.2.13}$$

где γ_μ — матрицы (1.2.4), приходим к уравнению вида

$$(\gamma'^\mu p_\mu - m)\Psi' = 0, \tag{1.2.13'}$$

где γ_μ' и Ψ' связаны с γ_μ и Ψ преобразованием эквивалентности

$$\Psi' = U\Psi, \quad \gamma_\mu' = U\gamma_\mu U^{-1}, \quad U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_2)\gamma_0. \tag{1.2.14}$$

Используя (1.2.4), нетрудно убедиться, что уравнение (1.2.13) содержит только вещественые коэффициенты и, следовательно, распадается на две независимые системы уравнений для вещественной и мнимой частей функции Ψ' [5].

Применяя для преобразований (1.2.14) другие (не совпадающие с U) невырожденные матрицы, можно получить бесконечно много иных реализаций уравнения Дирака, эквивалентных (1.2.1).

1.2.3. Алгебра матриц Дирака. Как уже отмечалось, при вычислениях, связанных с использованием γ-матриц, обычно бывает достаточно принять во внимание соотношения (1.2.3), не конкретизируя явного вида этих матриц. Приведем ряд вытекающих из (1.2.3) полезных соотношений, используемых ниже.

Сначала заметим, что наряду с γ_0, γ_1, γ_2 и γ_3 существует еще одна матрица — γ_4, удовлетворяющая (1.2.3):

$$\gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \qquad (1.2.15)$$

Действительно, согласно (1.2.3), (1.2.15) $\gamma_4^2 = -1$ и $\gamma_\mu\gamma_4 + \gamma_4\gamma_\mu = 0$. В представлении (1.2.4)

$$\gamma_4 = i\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & -\mathrm{I} \end{pmatrix}. \qquad (1.2.16)$$

Далее, из (1.2.3) нетрудно получить следующие полезные соотношения:

$$\begin{gathered} \gamma_\mu\gamma_\nu = g_{\mu\nu} - 2iS_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ S_{\mu\nu}\gamma_4 = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma}, \quad S_{\mu\nu}\gamma_\lambda = \frac{i}{2}\left(g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - g_{\mu\lambda}\gamma_\nu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma}\gamma_4\gamma_\sigma\right), \\ \gamma_\mu\gamma^\mu = 4, \quad \gamma_\mu\gamma_\nu a^\lambda\gamma_\lambda b^\nu\gamma^\mu = 4a_\nu b^\nu, \end{gathered} \qquad (1.2.17)$$

где a_ν, b_ν — произвольные числа.

Наконец, можно показать, что все возможные произведения матриц γ_μ образуют базис в пространстве матриц размерности 4×4. Все такие произведения исчерпываются следующими шестнадцатью комбинациями:

$$\begin{gathered} \mathrm{I}, \quad \gamma_0, \quad i\gamma_1, \quad i\gamma_2, \quad i\gamma_3, \quad i\gamma_4, \quad \gamma_4\gamma_0, \quad i\gamma_4\gamma_1, \quad i\gamma_4\gamma_2, \quad i\gamma_4\gamma_3, \\ \gamma_0\gamma_1, \quad \gamma_0\gamma_2, \quad \gamma_0\gamma_3, \quad i\gamma_1\gamma_2, \quad i\gamma_3\gamma_1, \quad i\gamma_2\gamma_3. \end{gathered} \qquad (1.2.18)$$

Используя (1.2.3), нетрудно показать, что матрицы (1.2.18) линейно независимы и, следовательно, произвольная матрица размерности 4×4 может быть представлена в виде линейной комбинации базисных элементов (1.2.18).

1.2.4. Операторы симметрии и алгебра инвариантности. Важнейшим свойством уравнения Дирака является релятивистская инвариантность, или симметрия относительно преобразований из группы Пуанкаре. Здесь мы докажем существование этой симметрии и покажем, что она является в некотором смысле максимальной, т. е. что не существует более широкой группы Ли (преобразований пространственно-временного континуума), относительно которой уравнение Дирака инвариантно.

Как и в случае уравнения КГФ, мы опишем симметрию уравнения Дирака на языке алгебр Ли, который, во-первых, позволяет добиться ясности и строгости изложения с использованием относительно несложных математических выкладок, а во-вторых, пригоден также для описания скрытой (негеометрической) симметрии, не связанной с преобразованиями пространства-времени (см. гл. 3).

Задача исследования симметрии уравнения Дирака в классе $\mathfrak{M}_1$ может быть сформулирована в полной аналогии с соответствующей задачей для уравнения КГФ. При этом, однако, соответствующие определения необходимо обобщить на случай системы дифференциальных уравнений в частных производных, каковой является уравнение Дирака.

Обозначим символом $\mathcal{F}^4$ векторное пространство всех комплекснозначных функций вида (1.2.2), которые определены на некотором открытом связном множестве D четырехмерного вещественного пространства R и являются вещественно-аналитическими. Иными словами, $\Psi \in \mathcal{F}^4$, если каждая компонента $\Psi_k \in \mathcal{F}$ (см. п. 1.1.1). Тогда линейный дифференциальный оператор

$$L = \gamma^\mu p_\mu - m, \tag{1.2.19}$$

определенный на D, обладает следующим свойством: $L\Psi \in \mathcal{F}_4$, если $\Psi \in \mathcal{F}^4$. Ядро оператора (1.2.19) будем обозначать символом $\mathcal{F}_4^0$: $\Psi \in \mathcal{F}_4^0$, если $\Psi \in \mathcal{F}^4$ и $L\Psi = 0$. Наконец, символом $\mathcal{G}^4$ будем обозначать множество матриц размерности 4×4, матричные элементы которых принадлежат $\mathcal{F}$.

Естественным обобщением определения 1.1 из п. 1.1.1 является следующее

Определение 1.3. Линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$Q = \mathrm{I}A^\mu p_\mu + D, \quad A^\mu \in \mathcal{F}, \quad D \in \mathcal{G}^4, \tag{1.2.20}$$

где I — единичная матрица размерности 4×4, называется *оператором симметрии для уравнения Дирака, если*

$$[Q, L] = \beta_Q L, \quad \beta_Q \in \mathcal{G}^4. \tag{1.2.21}$$

Равенство в (1.2.21) понимается в том смысле, что оператор слева и оператор справа дают один и тот же результат при действии на произвольную функцию $\Psi \in \mathcal{F}^4$.

Как и в случае уравнения КГФ, оператор симметрии переводит решения уравнений Дирака в решения: для любого $\Psi \in \mathcal{F}$ выполняется $Q\Psi \in \mathcal{F}_0^4$ и, кроме того, множество операторов симметрии образует алгебру Ли. Поэтому, говоря об операторах симметрии уравнения Дирака, мы будем пользоваться термином «алгебра инвариантности» (а. и.).

1.2.5. Алгебра инвариантности уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов первого порядка. Сформулируем и докажем основное утверждение относительно свойств симметрии уравнения Дирака. Как будет показано ниже, это утверждение содержит всю информацию о релятивистской кинематике частиц, описываемых уравнением (1.2.1).

Теорема 1.4. *Уравнение Дирака инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли, изоморфной алгебре Ли группы Пуанкаре.*

Базисные элементы этой а. и. могут быть выбраны в виде

$$P_\mu = p_\mu \equiv i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{1.2.22}$$

где

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{1.2.23}$$

Алгебра Ли, натянутая на базис (1.2.22), *является максимальной а. и. уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов первого порядка.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы легко проверить непосредственно, вычисляя коммутаторы оператора L (1.2.19) и P_μ, $J_{\mu\nu}$ (1.2.22). Используя (1.2.3), получаем $[P_\mu, L] = [J_{\mu\nu}, L] = 0$, т. е. для операторов (1.2.22) выполняется условие инвариантности (1.2.21) (при $\beta_Q \equiv 0$). Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.2.13) и, следовательно, образуют базис алгебры Ли, изоморфной алгебре Ли группы Пуанкаре.

Несколько больших усилий потребует доказательство того, что алгебра Ли с базисными элементами (1.2.22) исчерпывает операторы симметрии первого порядка для уравнения Дирака. Согласно определению 1.3 множество таких операторов состоит из операторов вида (1.2.20), удовлетворяющих условиям (1.2.21). Представим произвольный оператор Q (1.2.20) и матрицу β_Q, входящую в уравнение (1.2.21), в виде разложения по базисным матрицам (1.2.18):

$$\begin{aligned} Q &= \mathrm{I}(A^\mu p_\mu + a^0) + i\gamma_4 a^1 + \gamma_\mu b^\mu + S_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \gamma_4\gamma_\mu d^\mu, \\ \beta_Q &= \mathrm{I}e^0 + i\gamma_4 e^1 + \gamma_\mu q^\mu + \gamma_4\gamma_\mu h^\mu + S_{\mu\nu} k^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

где a^0, a^1, b^μ, d^μ, $f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}$, e^0, e^1, q^μ, h^μ, $k^{\mu\nu} = -k^{\nu\mu}$ — неизвестные функции из пространства $\mathcal{F}$. Наша задача состоит в том, чтобы найти явный вид этих функций, используя условие (1.2.21).

Вычисляя с использованием (1.2.3), (1.2.17) матричный коммутатор операторов Q (1.2.24) и L (1.2.19) и перенося в каждом слагаемом оператор дифференцирования вправо, получаем

$$\begin{aligned} [Q, L] = &- i\gamma^\lambda A^\mu_\lambda p_\mu - i\gamma^\lambda a^0_\lambda + 2i\gamma_4\gamma^\lambda a^1 p_\lambda - \gamma_4\gamma^\lambda a^1_\lambda - ib^\lambda_\lambda - \\ &- 4iS_\mu{}^\lambda b^\mu p_\lambda + 2S_\mu{}^\lambda b^\mu_\lambda + \gamma_4\left(2d^\lambda p_\lambda + id^\lambda_\lambda\right) + \varepsilon^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} S^{\nu\sigma} d^\mu_\lambda + \\ &+ 2i\gamma_\mu f^{\mu\lambda} p_\lambda + \gamma_\mu f^{\mu\nu}_\nu + \varepsilon^\sigma{}_{\mu\nu}{}^\lambda f^{\mu\nu}_\lambda \gamma_4\gamma_\sigma, \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

где $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}$ — абсолютно антисимметричный тензор четвертого ранга, а нижний индекс обозначает производную по соответствующей переменной: $B_\nu = \dfrac{\partial B}{\partial x_\nu}$. С другой стороны, перемножая соответствующие матрицы и принимая во внимание соотношения (1.2.17), нетрудно вычислить произведение $\beta_Q L$:

$$\beta_Q L = e^0\gamma^\mu p_\mu + I(-e^0 m + q^\mu p_\mu) - m\gamma_\mu q^\mu - 2iS_\mu{}^\lambda q^\mu p_\lambda -$$
$$- i\gamma_4 m e^1 + i\gamma_4\gamma^\mu e^1 p_\mu - m\gamma_4\gamma_\mu h^\mu + \gamma_4 h^\mu p_\mu - i\varepsilon_\mu{}^\nu{}_{\lambda\sigma} S^{\lambda\sigma} h^\mu p_\nu -$$
$$- mS_{\mu\nu}k^{\mu\nu} + \gamma_\mu k^{\mu\nu} p_\nu + \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}\gamma_4\gamma_\sigma k^{\mu\nu} p_\lambda. \qquad (1.2.26)$$

Согласно (1.2.21) операторы (1.2.25) и (1.2.26) должны давать одинаковый результат при действии на произвольный вектор $\Psi \in \mathcal{F}^4$. Это означает, что должны быть равны коэффициенты, стоящие в (1.2.25) и (1.2.26) при линейно независимых матрицах (1.2.18), при операторах дифференцирования по одинаковым переменным и при членах, не содержащих p_μ. Отсюда получаем следующую систему уравнений:

$$- iA^\mu_\lambda + 2iq_{\lambda\sigma} f^{\sigma\mu} = e^0 q^\mu_\lambda, \qquad (1.2.27)$$

$$- ia^0_\lambda + q_{\lambda\sigma} f^{\sigma\nu}_\nu = 0, \qquad (1.2.28)$$

$$a^1_\lambda + i\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} f^{\mu\nu}_\sigma = 0, \qquad (1.2.29)$$

$$2a^1 = e^1, \quad me^1 = 0, \quad me^0 = 0, \qquad (1.2.30)$$

$$f^\mu = q^\mu = h^\mu = k^{\mu\nu} = d^\mu = 0, \qquad (1.2.31)$$

где $q_{\lambda\sigma}$ — метрический тензор (1.1.14).

Система (1.2.27)—(1.2.31) легко интегрируется. Действительно, уравнение (1.2.27), принимая во внимание антисимметричность $f^{\sigma\mu}$ и симметричность q^μ_λ относительно перестановки индексов, можно переписать в виде

$$A^\mu_\mu = A^\nu_\nu, \quad A^\nu_\mu = - A^\mu_\nu, \quad \mu \neq \nu, \quad f^{\sigma\mu} = \frac{1}{2} q^{\sigma\lambda} A^\mu_\lambda, \qquad (1.2.32)$$

$$e^0 = - iA^\nu_\nu \quad \text{(суммы по } \mu, \nu \text{ нет)}. \qquad (1.2.33)$$

Уравнения (1.2.32) совпадают с уравнениями Киллинга (1.1.8), уже рассмотренными нами ранее. Общее решение этих уравнений задается формулой (1.1.10). Подставив (1.1.10) в (1.2.33), получаем

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} c^{\mu\nu} + f^\nu x^\mu - f^\mu x^\nu, \quad e^0 = - 2ix^\nu f_\nu - id. \qquad (1.2.34)$$

Но из (1.2.30) для $m \neq 0$ следует, что $e^0 = e^1 = a^1 = 0$ и уравнения (1.2.34) принимают вид

$$f^\nu = 0, \quad f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} c^{\mu\nu}, \quad d = 0. \qquad (1.2.35)$$

Подставив (1.1.10), (1.2.31), (1.2.35) в (1.2.24), получаем общий вид оператора симметрии первого порядка для уравнения Дирака:

$$Q = I\left(a_0 + c^{\mu\nu} x_\mu p_\nu + \varphi^\mu p_\mu\right) + \frac{1}{2} c^{\mu\nu} S_{\mu\nu}, \qquad (1.2.36)$$

где $c^{\mu\nu} = -c^{\nu\mu}$, φ^μ, a^0 — произвольные комплексные числа. Как легко заметить, оператор (1.2.36) представляет собой линейную комбинацию операторов (1.2.22) (и тривиального единичного оператора симметрии), которые, таким образом, образуют базис максимально широкой а. и. уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов первого порядка.

Мы видим, что симметрия уравнения Дирака определяется а. и. с базисными элементами (1.2.22), которая изоморфна а. и. уравнения КГФ, исследованной в § 1. Существенно новым моментом является включение в операторы $J_{\mu\nu}$ (1.2.22) матричных членов, которые отражают наличие у поля, описываемого уравнением (1.2.1), дополнительной степени свободы, не зависящей от пространственно-временных переменных (спина). Ниже мы убедимся, что благодаря наличию спиновой степени свободы электронно-позитронного поля уравнение Дирака обладает дополнительной симметрией в классе дифференциальных операторов более высокого порядка (см. гл. 3).

1.2.6. Операторы массы и спина. Как хорошо известно, уравнение Дирака описывает релятивистскую частицу с массой m и спином $s = 1/2$. Такая интерпретация этого уравнения допускает четкую формулировку на языке теории представлений групп и алгебр Ли с использованием найденной выше а. и.

А. и. уравнения Дирака, натянутая на базисные элементы (1.2.22), имеет два основных инвариантных оператора (операторы Казимира; см. ниже § 2.1):

$$C_1 = P_\mu P^\mu \quad \text{и} \quad C_2 = W_\mu W^\mu, \tag{1.2.37}$$

где W_μ — вектор Любанского — Паули

$$W_\mu = \frac{1}{2!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma. \tag{1.2.38}$$

Напомним, что инвариантным оператором называют оператор, входящий в обертывающую алгебру алгебры Ли и коммутирующий со всеми элементами этой алгебры Ли.

Один из основных результатов теории представлений алгебр Ли гласит, что в пространстве неприводимого представления операторы Казимира кратны единичному. При этом собственные значения инвариантных операторов могут быть использованы для нумерации неприводимых представлений, так как различным собственным значениям соответствуют различные представления.

Таким образом, для ответа на вопрос, какое представление алгебры Пуанкаре реализуется на множестве решений уравнения Дирака, необходимо определить собственные значения операторов (1.2.37). Подставляя в (1.2.37) явные выражения для P_μ, $J_{\mu\nu}$ из (1.2.22), получаем после несложных выкладок с использованием (1.2.3), (1.2.6), (1.2.17):

$$\begin{aligned} &C_1\Psi = P_\mu P^\mu \Psi = p_\mu p^\mu \Psi = m^2\Psi, \\ &C_2\Psi = W_\mu W^\mu \Psi = -p_\mu p^\mu S^2 \Psi = -m^2 s(s+1)\Psi, \quad s = 1/2, \end{aligned} \tag{1.2.39}$$

где $S = (S_1, S_2, S_3)$, $S_a = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c$, $\Psi \in \mathscr{F}_0^4$.

В релятивистской квантовой теории пространству состояний частицы с массой m и спином s ставится в соответствие пространство представления алгебры Пуанкаре, соответствующего собственным значениям операторов Казимира (1.2.37), равным m^2 и $-m^2s(s+1)$. Поскольку множество решений уравнения Дирака является пространством представления алгебры $P(1,3)$, соответствующего $c_1=m^2$ и $c_2=-\frac{3}{4}m^2$, то его можно интерпретировать как уравнение движения частицы с массой m и спином $s=1/2$.

1.2.7. Явно эрмитова форма базиса а. и. уравнения Дирака. До сих пор мы рассматривали только такие решения уравнения Дирака, которые принадлежат пространству $\mathscr{F}^4$. Однако и оператор L (1.2.19), и операторы симметрии (1.2.22) могут быть определены также на множестве финитных функций $(C_0^\infty)^4$, всюду плотном в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций со скалярным произведением

$$\left(\Psi^{(1)},\Psi^{(2)}\right)=\int d^3x\ \Psi^{(1)\dagger}\Psi^{(2)}, \tag{1.2.40}$$

где, согласно определениям (1.2.2), (1.2.7),

$$\Psi^{(1)\dagger}\Psi^{(2)}=\Psi_1^{(1)*}\Psi_1^{(2)}+\Psi_2^{(1)*}\Psi_2^{(2)}+\Psi_3^{(1)*}\Psi_3^{(2)}+\Psi_4^{(1)*}\Psi_4^{(2)}. \tag{1.2.41}$$

При этом $\Psi\in L_2^4$, если $(\Psi,\ \Psi)<\infty$, что, очевидно, эквивалентно требованию $\int d^3x\Psi_k^*\Psi_k<\infty$ для $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Нетрудно убедиться, что базисные элементы а. и. уравнения Дирака, задаваемые формулами (1.2.22), являются эрмитовыми операторами относительно скалярного произведения (1.2.40), где $\Psi^{(\alpha)}$ принадлежит множеству решений уравнения (1.2.1). Для этого достаточно заметить, что эти операторы можно представить в следующей форме:

$$P_0=H=\gamma_0\gamma_ap_a+\gamma_0m,\qquad P_a=p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{1.2.42}$$

$$J_{ab}=x_ap_b-x_bp_a+S_{ab},\qquad J_{0a}=x_0p_a-\frac{1}{2}[x_a,H]_+.$$

Легко видеть, что на множестве решений уравнения Дирака операторы (1.2.22) и (1.2.42) совпадают, так как

$$[x_a,\ H]_+\equiv2(x_aH-S_{0a}). \tag{1.2.43}$$

Операторы (1.2.42) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1.13) и, в отличие от (1.2.22), записаны в форме, делающей очевидной их формальную эрмитовость относительно скалярного произведения (1.2.41). Следовательно, операторы (1.2.22) также эрмитовы относительно (1.2.41), где $\Psi^{(\alpha)}$ принадлежат множеству решений уравнений Дирака. Отсюда вытекает, в частности, что конечные преобразования из группы Пуанкаре, порождаемые операторами (1.2.22) (см. п. 1.2.9), унитарны, т. е. сохраняют норму, определяемую с помощью скалярного произведения (1.2.41).

1.2.8. Симметрия безмассового уравнения Дирака. Уравнение (1.2.1) имеет физический смысл и в случае $m=0$, описывая безмассовое поле со спиральностью $\pm 1/2$. Симметрия уравнения Дирака с $m=0$ оказывается более широкой, чем в случае отличной от нуля массы.

Теорема 1.5. *Максимальной а. и. уравнения*

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi = 0 \tag{1.2.44}$$

в классе $\mathfrak{M}_1$ *является 16-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются формулами* (1.2.22) *и* (1.2.45):

$$\begin{gathered} D = x^\mu p_\mu + Ki \quad (K = 3/2), \quad \Sigma = i\gamma_4, \\ K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu. \end{gathered} \tag{1.2.45}$$

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству предыдущей теоремы. Общий вид оператора симметрии первого порядка для уравнения (1.2.44), так же как и для уравнения (1.2.1), задается форулой (1.2.24). Во всех рассуждениях и выкладках, начиная с формулы (1.2.24) и вплоть до формулы (1.2.34), мы нигде не пользовались условием $m \neq 0$, поэтому они справедливы и по отношению к оператору симметрии для уравнения (1.2.44). Однако при $m=0$ из (1.2.30) уже не следует, что $e^0 = e^1 = a^1 = 0$ и функции $f^{\mu\nu}$, e^0 задаются не формулами (1.2.35), но более общими соотношениями (1.2.34).

Из (1.2.32), используя уравнения (1.2.28)—(1.2.30), нетрудно найти общий вид функции a^0, a^1, e^1:

$$\begin{aligned} a^0 &= -i\int q_{\lambda\sigma} f^{\sigma\nu}_{\nu} dx^\lambda + a^{0\prime} = 3if^\lambda x_\lambda + a^{0\prime}, \\ a^1 &= \frac{1}{2}e^1 = \text{const}, \end{aligned} \tag{1.2.46}$$

где $a^{0\prime}$ — произвольная постоянная. Подставляя (1.1.10), (1.2.34), (1.2.46), получаем явный вид оператора симметрии для уравнения (1.2.44):

$$\begin{aligned} Q = \mathrm{I}\big(&2x_\nu f^\nu x^\mu p_\mu - f^\mu x_\nu x^\nu p_\mu\big) + c^{\mu\nu}x_\mu p_\nu + dx^\mu p_\mu + \\ &+ \varphi^\mu p_\mu + 3if^\lambda x_\lambda + a^{0\prime}\big) + i\gamma_4 a^1 + S_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}c^{\mu\nu} + 2f^\mu x^\nu\right). \end{aligned} \tag{1.2.47}$$

Нетрудно убедиться, что оператор (1.2.47) представляет собой не что иное, как линейную комбинацию операторов (1.2.22), (1.2.45) и единичного оператора, которые, таким образом, являются базисом а. и. уравнения (1.2.44) в классе $\mathfrak{M}_1$. ■

Итак, а. и. безмассового уравнения Дирака является линейной оболочкой базисных элементов (1.2.22), (1.2.45). Базисные операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ, D удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1.13) и (1.1.19) (определяющим алгебру Ли конформной группы), а оператор $\Sigma = i\gamma_4$ коммутирует со всеми элементами а. и. уравнения (1.2.44). Иными словами, а. и. уравнения (1.2.44) включает 15-мерную алгебру Ли, изоморфную а. и. безмассового уравнения КГФ, и дополнительный матричный оператор Σ, являющийся центром этой а. и. Как будет показано в § 1.4, конформная симметрия является общим свойством всех без исключения релятивистских уравнений, описывающих безмассовые поля.

Отметим, что безмассовое уравнение Дирака при выборе γ-матриц в форме (1.2.4) распадается на два незацепляющихся двухкомпонентных уравнения:

$$p_0\varphi_\pm = \pm\sigma_a p_a \varphi_\pm, \tag{1.2.48}$$

где σ_a — матрицы Паули (1.2.5). Соотношения (1.2.48) называются уравнениями Вейля и являются простейшим примером пуанкаре-инвариантной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Операторы, образующие а. и. уравнений (1.2.44), (1.2.4), разлагаются в прямую сумму операторов, определенных на подпространствах $\varphi\pm = \frac{1}{2}(1 \mp i\gamma_4)\Psi$. Явный вид базисных элементов конформной алгебры на множествах решений уравнений (1.2.48) может быть получен из (1.2.22), (1.2.45) с помощью замены $S_{ab} \to \frac{i}{4}[\sigma_a, \sigma_b]$, $S_{0a} \to \pm\frac{i}{2}\sigma_a$. Что же касается оператора Σ, то на подпространствах $\varphi_\pm$ он становится кратным единичному оператору.

1.2.9. Преобразования Лоренца и конформные преобразования решений уравнения Дирака. Как уже упоминалось в § 1, важнейшим следствием симметрии дифференциального уравнения относительно алгебры дифференциальных операторов первого порядка является то, что такое уравнение является инвариантным относительно группы Ли, инфинитезимальные операторы которой совпадают с заданным базисом а. и. Иными словами, доказав выше инвариантность уравнения Дирака относительно алгебры AP(1, 3) и (в случае $m = 0$) относительно конформной алгебры, мы фактически установили симметрию этого уравнения относительно преобразований из группы Пуанкаре и конформной группы.

В этом пункте по аналогии с тем, как это делалось в § 1, мы найдем в явном виде преобразования из групп инвариантности уравнения Дирака с нулевой и отличной от нуля массой.

Общее преобразование из группы симметрии уравнения (1.2.1) можно записать в виде (ср. (1.1.48))

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\left(\frac{i}{2} J_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)\exp\left(iP_\mu b^\mu\right)\Psi(x),$$

где $J_{\mu\nu}$ и P_μ — операторы (1.2.22), $\theta_{\mu\nu}$ и b_μ — вещественные параметры. Используя тот факт, что матрицы $S_{\mu\nu}$ из (1.2.22) коммутируют с $x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$, представим это преобразование в виде

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\left(\frac{i}{2} S_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)\Psi''(x), \tag{1.2.49}$$

где

$$\Psi''(x) = \exp\left(iJ'_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)\exp\left(ip_\mu b^\mu\right)\Psi(x), \tag{1.2.50}$$

а $J'_{\mu\nu}$ — операторы (1.1.3).

Но преобразования (1.2.55) фактически уже найдены ранее в п. 1.1.5. Действительно, оператор в правой части (1.2.50) кратен единичной матрице (т. е. одинаково действует на каждую компоненту Ψ_k функции Ψ (1.2.2)). А действие этого оператора на однокомпонентную функцию определяется согласно формуле (1.1.48). Отсюда заключаем, что

$$\Psi''(x)=\Psi(x''), \tag{1.2.51}$$

где x'' связан с x преобразованием Лоренца, обратным к (1.1.34), (1.1.43). Подставив (1.2.50), (1.2.51) в (1.2.49), получаем окончательно

$$\Psi(x)\to\Psi'(x)=\exp\left(\frac{1}{2}S_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)\Psi(x''), \tag{1.2.52}$$

или

$$\Psi(x)\to\Psi'(x')=\exp\left(\frac{i}{2}S_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)\Psi(x). \tag{1.2.53}$$

Формула (1.2.53) (совместно с соотношениями (1.1.34), (1.1.43), определяющими преобразования независимых переменных $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$) задает общий вид преобразований Лоренца для решений уравнения Дирака. По сравнению с законом преобразования *скалярного поля*, задаваемого соотношением (1.1.48), существенно новым элементом является наличие в (1.2.58) матричного множителя $\exp(iS_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu})$, который перемешивает компоненты вектор-функции (1.2.2).

Для удобства пользования формулой (1.2.53) желательно представить входящую в нее экспоненту в виде полинома от матриц $S_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}$. Исходя из определения (1.1.47) и используя соотношения (1.2.3), (1.2.17), можно доказать следующее тождество:

$$\exp\left(\frac{i}{2}S_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)=\Lambda_+\left(\cos\theta^+ +\frac{i}{2\theta^+}\gamma_\mu\gamma_\nu\theta^{\mu\nu}\sin\theta^+\right)+$$
$$+\Lambda_-\left(\cos\theta^- +\frac{i}{2\theta^-}\gamma_\mu\gamma_\nu\theta^{\mu\nu}\sin\theta^-\right), \tag{1.2.54}$$

где $\Lambda_\pm=\frac{1}{2}(1\pm i\gamma_4)$, $\theta^\pm=2\left[(\theta_1^\pm)^2+(\theta_2^\pm)^2+(\theta_3^\pm)^2\right]^{1/2}$, $\theta_a^\pm=$ $=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\theta_{bc}\pm i\theta_{0a}$.

Итак, мы получили закон преобразований решений уравнения Дирака при переходе к новой инерциальной системе координат (1.1.34), (1.1.43) в виде (1.2.53), (1.2.54). Выбирая конкретные значения параметров $\theta_{\mu\nu}$, b_ν, нетрудно получить из (1.2.53) различные частные случаи преобразований Лоренца для $\Psi(x)$. Например, если от нуля отличен только параметр θ_{12}, что соответствует вращению системы координат в плоскости 1—2 на угол θ_{12}, то, согласно (1.2.54),

$$\exp\left(\frac{i}{2}S_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\theta_{12}\right)-\gamma_1\gamma_2\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{12}\right). \tag{1.2.55}$$

Если же не равен нулю только параметр θ_{01}, то

$$\exp\left(\frac{i}{2}S_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\theta_{01}\right)-\gamma_0\gamma_1\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\theta_{01}\right). \qquad (1.2.56)$$

Преобразование (1.2.53), (1.2.56) соответствует собственному преобразованию Лоренца (1.1.30) при $a=1$.

Приведем еще явный вид преобразований группы симметрии безмассового уравнения Дирака. Базис а. и. этого уравнения образуют операторы, задаваемые формулами (1.2.22) и (1.2.45). Преобразования, генерируемые операторами (1.2.22), как и в случае уравнения (1.2.1) с отличной от нуля массой, имеют вид (1.2.53), (1.2.54). Что же касается преобразований, порождаемых операторами D и K_μ (1.2.45), то они могут быть записаны в форме

$$\Psi(x)\to\Psi'(x')=\exp\left(-\frac{3}{2}\theta\right)\Psi(x) \qquad (1.2.57)$$

и

$$\Psi(x)\to\Psi'(x')=(1-2b_\mu x^\mu+b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda)(1-\gamma_\mu\gamma_\nu b^\mu x^\nu)\Psi(x), \qquad (1.2.58)$$

где x' задаются соотношениями (1.1.52) и (1.1.54). К формулам (1.2.57) и (1.2.58) можно прийти, решая соответствующие уравнения Ли для операторов D и K_μ (1.2.43). В § 1.4 приведены решения этих уравнений и найдены конформные преобразования для полей с произвольными значениями спина.

1.2.10. Преобразования P, T и C. Исследуем симметрию уравнения Дирака относительно преобразований обращения времени и изменения знака пространственных координат, которые расширяют собственную группу Пуанкаре до полной группы (см. п. 1.1.5). По аналогии с (1.2.53) будем искать операторы этих преобразований в виде

$$\begin{aligned}\Psi(x_0,\ \mathbf{x})&\to P\Psi(x_0,\ \mathbf{x})=r_1\Psi(x_0,\ -\mathbf{x}),\\ \Psi(x_0,\ \mathbf{x})&\to T\Psi(x_0,\ \mathbf{x})=r_2\Psi(-x_0,\ \mathbf{x}),\end{aligned} \qquad (1.2.59)$$

где r_1 и r_2 — некоторые числовые матрицы.

Операторы P и T (1.2.64) удовлетворяют следующим очевидным перестановочным соотношениям с операторами дифференцирования:

$$Pp_0=p_0P,\quad Pp_a=-p_aP,\quad Tp_0=-p_0T,\quad Tp_a=p_aT, \qquad (1.2.60)$$

поэтому условие инвариантности (1.2.1) относительно преобразований (1.2.59) может быть записано в виде (ср. (1.2.21))

$$\begin{aligned}&r_1L(p_0,\ \mathbf{p})-L(p_0,\ -\mathbf{p})r_1=\alpha_1L(p_0,\ \mathbf{p}),\\ &r_2L(p_0,\ \mathbf{p})-L(-p_0,\ \mathbf{p})r_2=\alpha_2L(p_0,\ \mathbf{p}),\quad \alpha_1,\ \alpha_2\in\mathcal{G}^4,\end{aligned} \qquad (1.2.61)$$

где $L(p_0,\ \mathbf{p})$ — оператор Дирака (1.2.19). Подставляя (1.2.19) в (1.2.61), приходим к следующим уравнениям для r_1, r_2, α_1, α_2:

$$[r_1,\ \gamma_0]=[r_1,\ \gamma_a]_+=[r_2,\ \gamma_0]_+=[r_2,\ \gamma_a]\equiv0,\quad \alpha_1=\alpha_2=0. \qquad (1.2.62)$$

Используя тот факт, что r_1 и r_2 можно представить в виде линейных комбинаций матриц (1.2.18), нетрудно найти общее решение соотношений (1.2.62):

$$r_1 = \eta_1\gamma_0, \quad r_2 = \eta_2\gamma_0\gamma_4, \tag{1.2.63}$$

где η_1 и η_2 — комплексные параметры. Требование унитарности преобразований (1.2.59) относительно скалярного произведения (1.2.41) сводит эти параметры к фазовым множителям

$$\eta_1 = \exp(i\varphi_1), \quad \eta_2 = \exp(i\varphi_2), \quad \varphi_1,\ \varphi_2 \in R. \tag{1.2.64}$$

Но двойное отражение пространственных координат может быть эквивалентно либо тождественному преобразованию, либо вращению на угол 2π. В первом случае $\eta_1^2 = 1$, $\varphi_1 = 0,\ \pi$, а во втором, согласно (1.2.53), (1.2.54), $\eta_1^2 = -1$, $\varphi_1 = \pm\pi/2$. Иными словами, имеются две возможности: $\eta_1 = \pm 1$ или $\eta_1 = \pm i$. Ниже мы приведем соображения в пользу выбора второй возможности.

Итак, уравнение Дирака инвариантно относительно дискретных преобразований (1.2.59), (1.2.63), пополняющих представление собственной ортохронной группы Пуанкаре, описанное в предыдущем пункте, до представления полной группы Пуанкаре. Еще одно преобразование симметрии уравнения Дирака может быть задано с помощью антилинейного оператора

$$\Psi(x_0,\ \mathbf{x}) \to C\Psi(x_0,\ \mathbf{x}) = r_3\Psi^*(x_0,\ \mathbf{x}), \tag{1.2.65}$$

где матрица r_3 должна удовлетворять следующим условиям (ср. (1.2.61)):

$$r_3L(p_0,\ \mathbf{p}) - L^*(p_0,\ \mathbf{p})r_3 = \alpha_3L(p_0,\ \mathbf{p}), \tag{1.2.66}$$

где звездочка означает, что в соответствующем операторе все величины должны быть заменены на комплексно сопряженные.

Из (1.2.66), (1.2.19) нетрудно найти общий вид r_3 и α_3, если воспользоваться представлением (1.2.4) для γ-матриц:

$$\alpha_3 \equiv 0, \quad r_3 = \eta_3 i\gamma_2, \quad \eta_3 = \exp(i\varphi_3). \tag{1.2.67}$$

В дальнейшем мы будем полагать $\varphi_3 = 0$, что не будет умалять общности рассуждений. Преобразование (1.2.65) носит название зарядового сопряжения, смысл которого будет пояснен позднее, при рассмотрении взаимодействия частицы спина 1/2 с внешним электромагнитным полем.

Потребуем, чтобы зарядово-сопряженная функция (1.2.65) имела такие же трансформационные свойства относительно преобразований P и T, как и функция $\Psi(x_0,\ \mathbf{x})$. Это требование накладывает следующие условия на η_1, η_2: $\operatorname{Re}\eta_1 = \operatorname{Im}\eta_2 = 0$, откуда и из (1.2.65) получаем

$$\eta_1 = \pm i, \quad \eta_2 = \pm 1. \tag{1.2.68}$$

Таким образом, как и уравнение КГФ, уравнение Дирака инвариантно относительно преобразований P, T и C, задаваемых соотношениями (1.2.59), (1.2.67), (1.2.68). Эти преобразования совместно с найденными в п. 1.2.9 преобразованиями (1.2.58) образуют группу, изоморфную полной группе симметрии уравнения КГФ $\tilde{\mathscr{P}}(1, 3)$. Проективные представления группы $\tilde{\mathscr{P}}(1, 3)$ описываются ниже в § 2.2.

§ 1.3. Уравнения Максвелла

1.3.1. Введение. Уравнения Максвелла являются одним из краеугольных камней современной теоретической физики. Описывая очень широкую область физических явлений, эти уравнения в то же время отличаются исключительной простотой и изяществом формы. А истоки этой простоты и изящества лежат в удивительно богатой симметрии уравнений Максвелла.

Исследование симметрии уравнений Максвелла имеет долгую и славную историю. В 1893 г. Хевисайд [236], записав эти уравнения в векторных обозначениях, обратил внимание на то, что они инвариантны относительно замены

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}, \tag{1.3.1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей. Позднее Лармор [258] и Райнич [297] обнаружили, что эту симметрию можно обобщить до семейства однопараметрических преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\to \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{H}\sin\theta, \\ \mathbf{H} &\to \mathbf{H}\cos\theta - \mathbf{E}\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Основной результат относительно симметрии уравнений Максвелла, сыгравший поистине революционную роль в физике, был получен Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном. Именно Лоренц нашел все возможные линейные преобразования координат и времени (и соответствующие преобразования для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$), оставляющие инвариантными уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

Пуанкаре показал, что уравнения Максвелла остаются инвариантными относительно преобразований Лоренца и при наличии токов и зарядов. Пуанкаре впервые установил важнейшее свойство этих преобразований — их групповую структуру [78, 79]. В знаменитой работе Эйнштейна [140], сыгравшей выдающуюся роль в истории современного естествознания, также было установлено, что уравнения Максвелла с токами и зарядами инвариантны относительно преобразований, найденных Лоренцем. На основе свойств симметрии уравнения Максвелла Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном были созданы основы релятивистской теории.

Следующий важнейший шаг в исследовании симметрии уравнений Максвелла сделали Бейтмен [151] и Канингхем [172], которые обнаружили, что эти уравнения инвариантны относительно преобразований инверсии $x_\mu \to \dfrac{x_\mu}{x_\lambda x^\lambda}$, откуда следует инвариантность относительно конформных преобразований (1.1.49). Бейтмен по существу доказал, что инвариантность относительно конформной группы определяет максимальную симметрию уравнений Максвелла с токами и зарядами [151].

Сравнительно недавно был проведен групповой анализ уравнений Максвелла в рамках классического подхода Ли [36]. При этом было строго доказано, что максимальной локальной группой инвариантности уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме является 16-параметрическая группа $C(1, 3)\otimes H$, где H — однопараметрическая подгруппа преобразований Хевисайда — Лармора — Райнича (1.3.2).

Однако перечисленные выше преобразования не исчерпывают всех свойств симметрии уравнений Максвелла. Оказывается, эти уравнения обладают скрытой (негеометрической) симметрией, не связанной с преобразованиями независимых переменных [116]. Отличительной чертой этой «новой» симметрии является то обстоятельство, что базисные элементы соответствующей а. и. не принадлежат (как это постулируется в классическом подходе Ли) классу $\mathfrak{M}_1$, но задаются нелокальными интегро-дифференциальными операторами (см. ниже гл. 3).

Классическая (локальная) симметрия уравнений Максвелла обсуждается в настоящем параграфе.

1.3.2. Различные формулировки уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме обычно записываются в следующей форме:

$$\mathbf{p}\times\mathbf{E} = i\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \mathbf{p}\times\mathbf{H} = -i\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1.3.3}$$

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{H} = 0, \tag{1.3.4}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, а символ $\mathbf{p}$, как и ранее, обозначает оператор $-i\nabla$: $p_a = -i\nabla_a = -i\dfrac{\partial}{\partial x_a}$.

При наличии токов и зарядов система уравнений Максвелла принимает вид

$$i\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\mathbf{p}\times\mathbf{H} + i\mathbf{j}, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = -ij_0, \tag{1.3.5}$$

$$i\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{H} = 0, \tag{1.3.6}$$

где $j = (j_0, \mathbf{j})$ — четырехвектор электрического тока, константа электромагнитного взаимодействия выбрана равной единице.

Формулировка уравнений Максвелла в векторных обозначениях, приведенная выше, была предложена Герцем и Хевисайдом. Мы рассмотрим наряду с (1.3.3) — (1.3.6) также другие возможные формы записи этих уравнений, более удобные с точки зрения исследования их симметрии.

Обозначим символом φ вектор-функцию

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \text{столбец } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3), \tag{1.3.7}$$

где E_a и H_a ($a = 1, 2, 3$) — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей. Тогда уравнения (1.3.3), (1.3.4) могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} &\widehat{L}_1\varphi = 0, \qquad \widehat{L}_1 = i\,\frac{\partial}{\partial t} - H \equiv i\,\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}, \\ &\widehat{L}_2^a\varphi = 0, \qquad \widehat{L}_2^a = (\delta_{ab} - S_b S_a)\,p_b, \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

где S_a — матрицы, реализующие представление $D(1)\otimes D(1)$ алгебры $AO(3)$:

$$S_a = \begin{pmatrix} \widehat{S}_a & 0 \\ 0 & \widehat{S}_a \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3.9}$$

а σ_2 — коммутирующая с S_a матрица Паули (1.2.5).

Нетрудно убедиться, что уравнения (1.3.7), (1.3.8), будучи записаны покомпонентно, совпадают с (1.3.1), (1.3.2) при любом значении индекса $a = 1$, 2 или 3.

Именно формулировка (1.3.8) в основном будет использована ниже при анализе негеометрической (т. е. не связанной с преобразованиями пространства-времени) симметрии уравнений Максвелла.

Систему уравнений Максвелла можно записать в форме ковариантного уравнения первого порядка

$$(\beta_\mu p^\mu - \beta\varkappa)\,\widetilde{\Psi} = 0, \tag{1.3.10}$$

где β_μ — 10-рядные неприводимые матрицы Кеммера — Деффина — Петье в представлении (2.3.25), $\beta = \beta_5^2$, $\beta_5 = \frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho\beta^\sigma$, а $\widetilde{\Psi}$ — 10-компонентная функция:

$$\widetilde{\Psi}\text{-столбец } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, A_1, A_2, A_3, A_0). \tag{1.3.11}$$

Подставив (2.3.25), (1.3.11) в (1.3.10), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_b}{\partial x_0} + \frac{\partial A_0}{\partial x_b} = -\varkappa E_b, \qquad \varkappa\mathbf{H} = -i\mathbf{p}\times\mathbf{A}, \\ &i\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mathbf{p}\times\mathbf{H}, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = 0, \end{aligned}$$

из которой вытекают уравнения (1.3.3), (1.3.4) для **E** и **H**.

Уравнения Максвелла в форме (1.3.10), (2.3.25) изучались Ф. И. Федоровым [97].

Уравнения Максвелла с токами и зарядами также могут быть записаны в общековариантной форме (1.3.10). Сделать это можно по крайней мере двумя способами. Обозначив

$$\Psi = \text{столбец } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, j_1, j_2, j_3, j_0), \tag{1.3.12}$$

представим уравнения (1.3.5), (1.3.6) в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} &L_1\Psi = 0, \quad L_1 = (1-\beta_5^2)(\beta_\mu p^\mu + 1), \\ &L_2\Psi = 0, \quad L_2 = \beta_\mu p^\mu \beta_5, \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

где β_μ — матрицы Кеммера — Деффина — Петье (2.3.25). Другая возможность состоит в использовании 16-компонентной волновой функции и 16-рядных матриц Кеммера — Деффина — Петье, что позволяет записать уравнения Максвелла с токами в виде единого ковариантного уравнения (1.3.10) [126, 221].

1.3.3. Уравнение для вектор-потенциала. Рассмотрим еще одну формулировку уравнений Максвелла, которая предполагает использование четырехкомпонентной функции (вектор-потенциала) $A_0 = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, следующим образом связанной с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = i\mathbf{p}\times\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_0} - i\mathbf{p}A_0. \tag{1.3.14}$$

Подставив эти выражения в уравнения Максвелла, получаем следующую систему уравнений для A_μ:

$$p_\mu p^\mu A_\nu - p_\nu p_\mu A^\mu = j_\mu. \tag{1.3.15}$$

Таким образом, вместо восьми уравнений для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно решать систему (1.3.15) для A_μ, а затем находить векторы напряженности электрического и магнитного полей по формулам (1.3.14). Систему (1.3.15) можно значительно упростить, используя имеющийся произвол в выборе A_μ. В самом деле, соотношения (1.3.14) инвариантны относительно замены

$$A_\mu \to A_\mu + ip_\mu\chi, \tag{1.3.16}$$

где χ — произвольная функция. Поэтому на A_μ обычно накладывают дополнительное условие (называемое калибровкой Лоренца)

$$p_\mu A^\mu = 0, \tag{1.3.17}$$

которое позволяет свести (1.3.15) к системе незацепляющихся уравнений

$$p_\mu p^\mu A_\nu = j_\nu. \tag{1.3.18}$$

Уравнения (1.3.17), (1.3.18) по-прежнему определяют вектор-потенциал только с точностью до преобразований (1.3.16), где χ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению $p_\mu p^\mu\chi = 0$. Используя эти преобразования (называемые калибровочными преобразованиями второго рода), можно добиться выполнения равенств

$$A_0 = 0, \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{1.3.19}$$

Условия (1.3.19) (которые не являются релятивистски инвариантными и могут рассматриваться только в фиксированной системе отсчета) называются калибровкой Кулона.

В заключение этого пункта отметим, что, используя связь векторов **E**, **H** и четырехвектора A_μ, задаваемую соотношениями (1.3.17), уравнения Максвелла можно записать в тензорной форме

$$p_\mu F^{\mu\nu} = ij^\nu, \qquad p_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{1.3.20}$$

где $F^{\mu\nu} = i(p^\mu A^\nu - p^\nu A^\mu)$, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.

1.3.4. Алгебра инвариантности уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_1$. Для исследования локальной симметрии уравнений Максвелла воспользуемся ковариантной формулировкой этих уравнений, задаваемой формулами (1.3.13).

Задача нахождения а. и. уравнений (1.3.13) в классе $\mathfrak{M}_1$ может быть сформулирована в полной аналогии с соответствующей задачей для уравнения Дирака, рассматриваемой в § 1.2. Единственное непринципиальное отличие состоит в том, что уравнение Максвелла в формулировке (1.3.13) задается как результат действия двух линейных операторов на вектор Ψ, в то время как уравнение Дирака определяется единственным оператором $L = \gamma_\mu p^\mu - m$.

По аналогии с § 1.2 сформулируем определение оператора симметрии $Q \in \mathfrak{M}_1$ для системы уравнений Максвелла.

Определение 1.4. Линейный дифференциальный оператор

$$Q = A^\mu p_\mu + B, \qquad A^\mu \in \mathscr{F}, \qquad B \in G^{10}, \tag{1.3.21}$$

называется *оператором симметрии уравнений Максвелла* (1.3.13) *в классе* $\mathfrak{M}_1$, если

$$\begin{aligned} &[Q, L_1] = \beta_Q^1 L_1 + \beta_Q^2 L_2, \qquad \beta_Q^\alpha \in G^{10}, \qquad \alpha = 1, 2,\\ &[Q, L_2] = \lambda_Q^1 L_1 + \lambda_Q^2 L_2, \qquad \lambda^\alpha \in G^{10}, \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

где L_1, L_2 — операторы (1.3.13), а символом G^{10} обозначено линейное пространство матриц размерности 10×10, матричные элементы которых принадлежат $\mathscr{F}$ (см. п. 1.1.1).

Как и в случае уравнения Дирака, операторы симметрии переводят решения уравнений Максвелла в решения и множество операторов симметрии образует алгебру Ли.

Основное утверждение относительно симметрии уравнений Максвелла можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.6. *Уравнения Максвелла* (1.3.13) *инвариантны относительно 15-мерной алгебры Ли, изоморфной алгебре Ли конформной группы. Базисные элементы этой а. и. могут быть выбраны в виде* (1.2.22), (1.2.45), *где*

$$S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu), \qquad K = 3 - \beta_5^2. \tag{1.3.23}$$

Алгебра Ли, натянутая на базис (1.2.22), (1.2.45), *является максимальной а. и. уравнений Максвелла в классе* $\mathfrak{M}_1$.

Доказательство. Используя соотношения

$$\beta_5^3 = \beta_5, \quad (1 - \beta_5^2)\beta_\mu = \beta_\mu\beta_5^2, \quad \beta_\mu\beta^\mu = 3 - \beta_5^2, \tag{1.3.24}$$
$$[\beta_\mu, S_{\nu\lambda}] = i(g_{\mu\lambda}\beta_\nu - g_{\mu\nu}\beta_\lambda)$$

(которые следуют из (2.3.23)), прямой проверкой убеждаемся, что операторы (1.3.13), (1.2.22), (1.2.45) удовлетворяют условиям инвариантности

$$[P_\mu,\ L_\alpha]=[J_{\mu\nu},\ L_\alpha]=[D,\ L_\alpha]=[K_\mu,\ L_\alpha]=0,\qquad \alpha=1,\ 2,\tag{1.3.25}$$

которые совпадают с (1.3.22) при $\beta_Q^\alpha=\lambda_Q^\alpha=0$.

Проверка соотношений (1.3.25) несложна, определенные трудности возникают лишь при вычислении последних коммутаторов. Приведем подробные выкладки для самого сложного случая:

$$[K_\mu, L_1]=\left[2x_\mu D-x_\nu x^\nu p_\mu+2S_{\mu\nu}x^\nu,\quad \left(1-\beta_5^2\right)\left(\beta_\lambda p^\lambda+1\right)\right]=$$
$$=2\left[x_\mu,\left(1-\beta_5^2\right)\beta_\lambda p^\lambda\right]D-\left[x_\nu x^\nu,\left(1-\beta_5^2\right)\beta_\lambda p^\lambda\right]p_\mu+$$
$$+2\left[S_{\mu\nu}x^\nu,\left(1-\beta_5^2\right)\beta_\lambda p^\lambda\right]=2i\left(1-\beta_5^2\right)\left[-\beta_\mu D+\beta_\nu x^\nu p_\mu+\beta^\nu S_{\mu\nu}-\right.$$
$$\left.-\left(g_{\mu\lambda}\beta_\nu-g_{\nu\lambda}\beta_\mu\right)x_\lambda p^\lambda\right]=2i\left(1-\beta_5^2\right)\left\{-\beta_\mu\left[x_\lambda p^\lambda+i\left(3-\beta_5^2\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\beta_\nu x^\nu p_\mu-i\beta^\nu\left(\beta_\mu\beta_\nu-\beta_\nu\beta_\mu\right)+\beta_\mu x_\nu p^\nu-\beta_\nu x^\nu p_\mu\right\}=$$
$$=2i\left(1-\beta_5^2\right)\left[-i\beta_\mu\left(3-\beta_5^2\right)-\left(\beta_\nu\beta^\nu-1\right)i\beta_\mu\right]=4\left(1-\beta_5^2\right)\beta_5^2\beta_\mu\equiv 0,$$

что и требовалось.

С помощью соотношений (1.3.24) нетрудно убедиться, что операторы (1.2.22), (1.2.45), (1.3.23) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1.13), (1.1.19), которые характеризуют алгебру Ли конформной группы $C(1,\ 3)$.

Мы видим, что операторы (1.2.22), (1.2.45) действительно образуют а. и. уравнений Максвелла. Доказательство того факта, что эта а. и. является максимальной в классе $\mathfrak{M}_1$ (которое может быть проведено по аналогии с соответствующим доказательством для уравнения Дирака; см. п. 1.2.8, но требует гораздо более громоздких выкладок), мы опускаем. ■

Сформулируем два следствия из теоремы 1.6, первое из которых почти очевидно, а второе потребует несложного доказательства.

Следствие 1. *Каждое из уравнений* (1.3.13) *инвариантно относительно алгебры* AC(1, 3).

Это утверждение вытекает из того факта, что оба оператора — L_1 и L_2, входящие в систему (1.3.13), коммутируют с базисными элементами алгебры AC(1, 3).

Следствие 2. *Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме инвариантны относительно 16-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами* (1.2.22), (1.2.45) *и формулой*

$$F=\beta_5.\tag{1.3.26}$$

Действительно, уравнения Максвелла без токов и зарядов можно представить в виде системы (1.3.13) с дополнительным условием

$$L_3\Psi\equiv\left(1-\beta_5^2\right)\Psi=0.\tag{1.3.27}$$

Но матрица $1-\beta_5^2$ коммутирует со всеми операторами (1.2.22), (1.2.45) и (1.3.26), кроме того, выполняется $[L_1, F]=-iL_2$, $[L_2, F]=L_1-L_3-FL_2$, откуда видно, что генераторы группы $C(1, 3)$ и оператор (1.3.26) являются операторами симметрии системы (1.3.13), (1.3.27).

Итак, симметрия уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме оказывается более широкой, чем при наличии токов и зарядов. Это связано с тем обстоятельством, что уравнения Максвелла включают ток несимметричным образом (из-за отсутствия магнитного заряда). В результате теряется симметрия относительно преобразований Хевисайда — Лармора — Райнича (которые, как будет показано ниже, генерируются именно оператором (1.3.26)).

1.3.5. Преобразования Лоренца и конформные преобразования векторов E, H и четырехвектора тока. Прямым следствием симметрии уравнений Максвелла относительно найденной выше а. и. является инвариантность относительно группы конформных преобразований. Здесь мы приведем явный вид этих преобразований, а в дальнейшем (см. § 1.4) осуществим интегрирование представлений алгебры $AC(1, 3)$, задающих симметрию безмассового поля произвольного спина.

Вывод формул преобразований Лоренца и конформных преобразований для электромагнитного поля аналогичен приведенному в п. 1.2.9, где найдены соответствующие преобразования для решений уравнений Дирака, поэтому мы опустим детали и будем останавливаться только на существенно новых моментах.

Подобно тому, как это делалось в § 1.2, легко показать, что преобразования независимых переменных, порождаемые операторами (1.2.22), (1.2.45), (1.3.23), имеют вид

$$\mathbf{x}\to\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\mathbf{a},\qquad x_0\to x_0'=x_0+a_0, \tag{1.3.28}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{x}\to\mathbf{x}''=\mathbf{x}\cos\theta-\frac{\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{x}}{\theta}\sin\theta+\frac{\boldsymbol{\theta}\,(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{x})}{\theta^2}(1-\cos\theta),\\ x_0\to x_0''=x_0,\end{gathered} \tag{1.3.29}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{x}\to\mathbf{x}'''=\mathbf{x}-\frac{\boldsymbol{\lambda}x_0}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda+\frac{\boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x})}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda-1),\\ x_0\to x_0'''=x_0\operatorname{ch}\lambda-\frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda,\end{gathered} \tag{1.3.30}$$

$$x_\mu\to x_\mu^{\mathrm{IV}}=\exp(-\lambda_0)\,x_\mu, \tag{1.3.31}$$

$$x_\mu\to x_\mu^{\mathrm{V}}=\frac{x_\mu-b_\mu x_\nu x^\nu}{1-2b_\nu x^\nu+b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda}, \tag{1.3.32}$$

где $\theta=\left(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2\right)^{1/2}$, $\lambda=\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)^{1/2}$, θ_a, b_μ, λ_a и a_μ — вещественные параметры.

Формулы (1.3.28)—(1.3.32) задают преобразования сдвига по пространственным и временной переменным, поворота на угол θ вокруг оси θ/θ, собственные преобразования Лоренца (1.3.30), а также преобразования дилатации (растяжения) координат (1.3.31) и чисто конформные преобразования (1.3.32). Преобразования (1.3.28)—(1.3.32) совпадают с (1.2.28)—(1.2.30), если в последних выделить сдвиги, повороты и собственно преобразования Лоренца, положив $a_{\mu\nu}=0$, затем $b_\mu=\theta_{a0}=0$ и, наконец, $b_\mu=\theta_{ab}=0$.

Уравнения Максвелла остаются инвариантными относительно преобразований (1.3.28)—(1.3.32), если вектор-функция Ψ (1.3.12) одновременно преобразуется по следующему закону:

$$\Psi(x)\to\Psi'(x')=\Psi(x), \tag{1.3.33}$$

$$\Psi(x)\to\Psi''(x'')=\exp\left(\frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\theta_a S_{bc}\right)\Psi(x), \tag{1.3.34}$$

$$\Psi(x)\to\Psi'''(x''')=\exp(iS_{0a}\lambda_a)\Psi(x), \tag{1.3.35}$$

$$\Psi(x)\to\Psi^{\mathrm{IV}}(x^{\mathrm{IV}})=\exp(-K\lambda_0)\Psi(x), \tag{1.3.36}$$

$$\Psi(x)\to\Psi^{\mathrm{V}}\left(x^{\mathrm{V}}\right)=[\varphi(x,b)]^K\exp\left(\frac{2iS_{\mu\nu}b^\mu x^\nu}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{b_\mu x^\mu-1}\right)\Psi(x), \tag{1.3.37}$$

где $S_{\mu\nu}$ и K — матрицы (1.3.23),

$$\begin{gathered}\varphi(x,b)=1-2b_\mu x^\mu+b_\nu b^\nu x_\mu x^\mu,\\ a=[b_\mu b^\mu x_\nu x^\nu-(b_\mu x^\mu)^2]^{1/2}.\end{gathered} \tag{1.3.38}$$

Формулы (1.3.33)—(1.3.35) отличаются от соответствующих формул преобразований решений уравнений Дирака только тем, что функция $\Psi(x)$ имеет больше компонент, а матрицы $S_{\mu\nu}$ реализуют другое представление алгебры AO(1, 3) (ср. (1.2.53)). Можно убедиться также, что преобразования дилатации и конформные преобразования для дираковских спиноров, приведенные в (1.2.57), (1.2.58), имеют вид (1.3.36), (1.3.37), где $K=3/2$, $S_{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma_\mu\gamma_\nu]$, γ_μ — матрицы Дирака.

Используя соотношения (1.3.33)—(1.3.37), уже нетрудно получить в явном виде закон преобразования векторов **E**, **H** и четырехвектора тока j. В самом деле, принимая во внимание тождества (вытекающие из определений (1.3.23), (2.3.25))

$$(S_{\mu\nu}d^{\mu\nu})^3=(d_{\lambda\sigma}d^{\lambda\sigma}-d_{\lambda\sigma}d^{\sigma\lambda})S_{\mu\nu}d^{\mu\nu},$$

где $d_{\mu\nu}$ — произвольные параметры, каждую из экспонент, входящую в (1.3.34), (1.3.35), (1.3.37), можно представить в виде конечной суммы по степеням спиновых матриц $S_{\mu\nu}$:

$$\exp\left(\frac{i}{2}\varepsilon_{abc}S_{ab}\theta_c\right)=1+i\frac{S\cdot\theta}{\theta}\sin\theta+\left(\frac{S\cdot\theta}{\theta}\right)^2(\cos\theta-1),$$

$$S_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc},$$

$$\exp(iS_{0a}\lambda_a) = 1 + i\frac{S_{0a}\lambda_a}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda + \left(\frac{S_{0a}\lambda_a}{\lambda}\right)^2(\operatorname{ch}\lambda - 1), \quad (1.3.39)$$

$$\exp\left(2i\frac{S_{\mu\nu}b^\mu x^\nu}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{b_\mu x^\mu - 1}\right) =$$
$$= \varphi(x, b)^{-1}\left[\varphi(x, b) + 2iS_{\mu\nu}x^\mu b^\nu\left(b_\lambda x^\lambda - 1\right) - 2\left(S_{\mu\nu}x^\mu b^\nu\right)^2\right].$$

Что же касается оператора $[\varphi(x, b]^K$ (где $K = 3 - \beta_5^2$ — эрмитова матрица), то, по определению,

$$[\varphi(x, b)]^K = \sum_\nu [\varphi(x, b)]^\nu \Lambda_\nu, \quad (1.3.40)$$

где ν — собственные значения матрицы K (равные, как нетрудно убедиться, 3 или 2), а Λ_ν — проекторы на подпространства, соответствующие этим собственным значениям:

$$\Lambda_3 = \beta_5^2, \qquad \Lambda_2 = 1 - \beta_5^2. \quad (1.3.41)$$

Далее, воспользовавшись явными выражениями для матриц $S_{\mu\nu}$, K и β_μ, задаваемыми формулами (1.3.23), (1.3.25), получаем

$$S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc} = i\varepsilon_{abc}\beta_b\beta_c = \begin{pmatrix} \widehat{S}_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \widehat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \widehat{S}_a & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$S_{0a} = i[\beta_0, \beta_a] = \begin{pmatrix} \cdot & -\widehat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \widehat{S}_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \eta_a \\ \cdot & \cdot & -\eta_a^+ & \end{pmatrix}, \quad (1.3.42)$$

$$K = 3 - \beta_5^2 = \begin{pmatrix} 3\mathrm{I} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3\mathrm{I} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2\mathrm{I} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_5^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathrm{I} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

где I — трехрядные единичные матрицы $\widehat{S}_a$ и η_a — матрицы размерности 3×3 и 3×1 соответственно, явный вид которых приведен в (2.3.21), (2.3.26), а точками обозначены нулевые матрицы соответствующей размерности.

Подставив (1.3.12), (1.3.39)—(1.3.42) в (1.3.33)—(1.3.37), получаем преобразования для **E**, **H** и j в виде

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}' = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{H} \to \mathbf{H}' = \mathbf{H}, \qquad j \to j' = j,$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{j}) \to (\mathbf{E}'', \mathbf{H}'', \mathbf{j}'') =$$
$$= (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{j})\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{j})\frac{\sin\theta}{\theta} + \boldsymbol{\theta}\cdot(\boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{j}))\frac{1-\cos\theta}{\theta^2},$$

$$j_0 \to j_0'' = j_0,$$

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}''' = \mathbf{E}\operatorname{ch}\lambda - \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{H}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{E})\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda},$$

$$\mathbf{H} \to \mathbf{H}''' = \mathbf{H}\operatorname{ch}\lambda + \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{E}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{H})\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda},$$

$$\mathbf{j} \to \mathbf{j}''' = \mathbf{j} - \boldsymbol{\lambda} j_0\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{j})\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda},$$

$$j_0 \to j_0''' = j_0\operatorname{ch}\lambda - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{j}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda},$$

$$(\mathbf{E},\ \mathbf{H}) \to (\mathbf{E}^{\mathrm{IV}},\ \mathbf{H}^{\mathrm{IV}}) = \exp(-2\lambda_0)(\mathbf{E},\ \mathbf{H}),$$

$$j \to j^{\mathrm{IV}} = \exp(-3\lambda_0) j, \tag{1.3.43}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{\mathrm{V}} = \varphi\big[&(b^{\mu}x_{\mu}^{\mathrm{V}}-1)^2\mathbf{E} + 2(b^{\mu}x_{\mu}^{\mathrm{V}}-1)\big(b_0\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\times\mathbf{H} - x_0^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\times\mathbf{H} -\\ &- \mathbf{b}\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{x}^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}\big) + \mathbf{b}\times\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\big(x_0^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{H} - b_0\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{b}\times\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{E}\big) +\\ &+ \big(\mathbf{b}x_0^{\mathrm{V}} - \mathbf{x}^{\mathrm{V}}b_0\big)\big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\times\mathbf{H} - x_0^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{E} + b_0\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{E}\big)\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \to \mathbf{H}^{\mathrm{V}} = \varphi\big[&(b^{\mu}x_{\mu}^{\mathrm{V}}-1)^2\mathbf{H} + 2(b^{\mu}x_{\mu}^{\mathrm{V}}-1)\big(x_0^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\times\mathbf{E} - b_0\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\times\mathbf{E} -\\ &- \mathbf{b}\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{x}^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{H}\big) + \mathbf{b}\times\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\big(\mathbf{b}\times\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{H} + b_0\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{E} - x_0^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}\big) +\\ &+ \big(\mathbf{b}x_0^{\mathrm{V}} - \mathbf{x}^{\mathrm{V}}b_0\big)\big(b_0\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{H} - x_0^{\mathrm{V}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{b}\times\mathbf{x}^{\mathrm{V}}\cdot\mathbf{E}\big)\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j_{\lambda} \to j_{\lambda}^{\mathrm{V}} = \varphi^2\{&\varphi j_{\lambda} - 2\big[b_{\lambda}(1-2x_{\lambda}^{\mathrm{V}}b^{\lambda}) + x_{\lambda}^{\mathrm{V}}b_{\nu}b^{\nu}\big]x_{\mu}^{\mathrm{V}}j^{\mu} +\\ &+ 2\big(x_{\lambda}^{\mathrm{V}} - b_{\lambda}x_{\nu}^{\mathrm{V}}x^{\mathrm{V}\nu}\big)b_{\mu}j^{\mu}\}.\end{aligned}$$

Формулы (1.3.43) задают в явном виде преобразования из конформной группы векторов напряженности электромагнитного поля и четырехвектора тока, соответствующие преобразованиям независимых переменных, перечисленных в (1.3.28)—(1.3.32). Эти формулы имеют достаточно сложный вид, который, однако, заметно упрощается, если только один из параметров a_b, b_{μ}, θ_a, λ_a отличен от нуля. В частности, полагая в преобразовании $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{\mathrm{V}}$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_0 = b$, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathrm{V}} = &(1 - 2bx_0 + b^2x_{\mu}x^{\mu})\times\\ &\times\left[(1-bx_0)^2\mathbf{E} - b^2\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}) + 2b(1-bx_0)\mathbf{x}\times\mathbf{H}\right].\end{aligned} \tag{1.3.44}$$

Аналогичные преобразования для $\mathbf{H}$ могут быть получены из (1.3.44) заменой $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$.

Формулы (1.3.43), (1.3.44) могут быть полезны для самых различных приложений — например, при построении нелинейных обобщений уравнений Максвелла, инвариантных относительно конформной группы.

1.3.6. Симметрия относительно преобразований *P*, *T* и *C*. Инвариантность относительно рассмотренных выше преобразований не исчерпывает всех свойств симметрии уравнений Максвелла. Мы увидим ниже, что эти уравнения инвариантны также относительно нелокальных преобразований, которые не связаны с геометрической симметрией пространства-времени.

Однако существуют дискретные преобразования зависимых и независимых переменных, которые оставляют уравнения Максвелла инвариантными и не входят в число тех, которые рассматривались в предыдущем пункте. Это преобразования пространственной инверсии и обращения времени. Действительно, как нетрудно убедиться, уравнения Максвелла не изменяют своего вида при заменах

$$x_0 \to x_0, \quad \mathbf{x} \to -\mathbf{x}, \quad \mathbf{E} \to -\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} \to -\mathbf{j}, \quad j_0 \to j_0,$$
$$x_0 \to -x_0, \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} \to -\mathbf{j}, \quad j_0 \to j_0. \tag{1.3.45}$$

Имеется еще одно преобразование симметрии, которое для уравнений Максвелла (описывающих вещественные величины) тривиально, но далеко не всегда выполняется для других безмассовых полей. Это преобразование зарядового сопряжения

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}^*, \qquad \mathbf{H} \to \mathbf{H}^*, \qquad j \to j^*. \tag{1.3.46}$$

Используя вектор-функцию (1.3.12), преобразования (1.3.45), (1.3.46) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\Psi(x_0, \mathbf{x}) \to P\Psi(x_0, \mathbf{x}) = r_1\Psi(x_0, -\mathbf{x}), \\
\Psi(x_0, \mathbf{x}) \to T\Psi(x_0, \mathbf{x}) = r_2\Psi(-x_0, \mathbf{x}), \\
\Psi(x_0, \mathbf{x}) \to C\Psi(x_0, \mathbf{x}) = r_3\Psi^*(x_0, \mathbf{x}),
\end{gathered} \tag{1.3.47}$$

где $r_1 = 1 - 2\beta_0^2$, $r_2 = \left(1 - 2\beta_0^2\right)\left(1 - 2\beta_5^2\right)$, $r_3 = 1$. Инвариантность уравнений (1.3.13) относительно приведенных выше преобразований вытекает из соотношений

$$[P,\ L_1] = [P,\ L_2]_+ = [T,\ L_1]_+ = [T,\ L_2] = [C,\ L_1]_+ = [C,\ L_2]_+ = 0,$$

где L_1 и L_2 — операторы (1.3.13). Операторы P, T, C удовлетворяют соотношениям (1.1.62) с генераторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, заданными формулами (1.2.22), (1.3.23). Отсюда заключаем, что на множестве решений уравнений Максвелла реализуется представление группы $\tilde{\mathcal{P}}(1, 3)$.

§ 1.4. Алгебра Ли конформной группы

1.4.1. Конформная алгебра и алгебра AO(2, 4). Мы показали выше, что а. и. уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_1$ является 15-мерная алгебра Ли конформной группы $C(1, 3)$. Эта алгебра и ее представления играют фундаментальную роль в современной теоретической физике.

В этом параграфе будет продолжено обсуждение конформной симметрии уравнений Максвелла и других релятивистских уравнений для безмассовых полей. Будет показано, что на множестве решений таких уравнений генераторы конформной группы K_μ и D являются функциями от генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ группы Пуанкаре $P(1, 3)$.

Хорошо известно, что алгебра AC(1, 3) изоморфна алгебре Ли группы $O(2, 4)$ — группы псевдоортогональных матриц, сохраняющих длину вектора в $(4+2)$-мерном пространстве Минковского. Этот изоморфизм может быть задан с помощью следующих соотношений:

$$J_{\mu\nu} \leftrightarrow S_{\mu\nu}, \quad P_\mu \leftrightarrow S_{5\mu}+S_{4\mu}, \quad K_\mu \leftrightarrow S_{5\mu}-S_{4\mu}, \quad D \leftrightarrow S_{45}, \quad (1.4.1)$$

где P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ, D — базисные элементы алгебры АС(1, 3), удовлетворяющие перестановочным соотношениям (1.1.13), (1.1.19), а S_{mn} — генераторы группы $O(2, 4)$, удовлетворяющие алгебре

$$[S_{kl}, S_{mn}] = i(g_{kn}S_{lm} + g_{lm}S_{kn} - g_{km}S_{ln} - g_{ln}S_{km}), \quad (1.4.2)$$

где $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = g_{55} = 0$, $g_{mn} = 0$, $m \neq n$.

Существование указанного выше изоморфизма означает, что задача описания представлений алгебры АС(1, 3) сводится к описанию представлений алгебры Ли группы $O(2, 4)$. Такие представления рассматриваются в монографиях [4, 18].

Алгебра АС(1, 3) содержит подалгебру Пуанкаре, натянутую на базисные элементы P_μ, $J_{\mu\nu}$. При этом операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$, принадлежащие неприводимому представлению конформной алгебры, образуют в общем случае приводимое представление алгебры АР(1, 3) II класса [278] (т. е. такое представление, которое соответствует нулевой массе и дискретному спину; см. § 2.1).

Мы покажем ниже, что любое представление алгебры Пуанкаре II класса может быть пополнено до представления конформной алгебры добавлением операторов K_μ и D, которые являются функциями от P_μ и $J_{\mu\nu}$. Это означает, что каждое линейное пуанкаре-инвариантное уравнение, описывающее поле с нулевой массой покоя и конечным спином, обязательно обладает более широкой симметрией — симметрией относительно конформной группы $C(1, 3)$.

1.4.2. Представление конформной алгебры на множестве решений уравнения Вейля. Прежде чем точно сформулировать приведенное выше утверждение для произвольного безмассового поля, рассмотрим простейший пример такого поля, описываемого уравнением Вейля

$$(p_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi = 0. \quad (1.4.3)$$

Как показано в п. 1.2.8, это уравнение инвариантно относительно конформной алгебры, базисные элементы которой на множестве его решений имеют вид (1.2.22), (1.2.45), где

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\sigma_\mu, \sigma_\nu], \qquad \sigma_0 = I. \quad (1.4.4)$$

В этом пункте мы продемонстрируем, что операторы (1.2.22), (1.2.45), (1.4.4) могут быть представлены в явно эрмитовой форме и что операторы D и K_μ можно аналитически выразить через P_μ и $J_{\mu\nu}$.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем рассматривать уравнение (1.4.3) и генераторы (1.2.22), (1.2.45), (1.4.4) в импульсном пространстве, в котором $x_a = i\dfrac{\partial}{\partial p_a}$, а p_a играют роль независимых переменных.

Покажем, что генераторы конформной группы на множестве решений уравнения (1.4.3) могут быть записаны в виде

$$P_0 = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \equiv H, \quad P_a = p_a, \quad J_{ab} = X_a p_b - X_b p_a + \varepsilon_{abc}\frac{p_c}{p}\Lambda,$$

$$J_{0a} = -\frac{1}{2}[X_a, H]_+, \quad K_0 = \frac{1}{2}[X_a, J_{0a}]_+ - \left(\Lambda^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{H}{p^2}, \tag{1.4.5}$$

$$K_a = i[K_0, J_{0a}] \equiv [J_{ab}, X_b]_+ + \frac{1}{2}[P_a, \mathbf{X}^2] - \left(\Lambda^2 + \frac{1}{4}\right)\frac{p_a}{p^2},$$

$$D = \frac{1}{2}[P_a, X_a]_+,$$

где $\Lambda = \frac{1}{2p}\varepsilon_{abc}J_{bc}$ — оператор спиральности, а X_a — операторы следующего вида:

$$X_a = x_a + \frac{S_{ab}p_b}{p^2} - \frac{x_0 p_a H}{p^2}, \tag{1.4.6}$$

или

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}\times\boldsymbol{\sigma}}{2p^2} - \frac{x_0\mathbf{p}H}{p^2}. \tag{1.4.6}$$

Для операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ и D совпадение представлений (1.2.22), (1.2.45), (1.4.4) и (1.4.5) почти очевидно. При этом J_{ab} (1.4.5) сводится к соответствующему выражению (1.2.22), (1.4.4) просто в силу определения (1.4.6), а для J_{0a} (1.4.5) получаем

$$J_{0a} \equiv -\frac{1}{2}[X_a, H]_+ \equiv x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}]_+ = x_0 p_a - x_a P_0 + \frac{i}{2}\sigma_a, \tag{1.4.7}$$

поскольку

$$[X_a, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}]_+ \equiv [x_a, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}]_+ - 2x_0 p_a. \tag{1.4.8}$$

Аналогично, с использованием соотношения (1.4.8) и следующих тождеств:

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{x}^2 + \frac{1}{p^2}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{2}\right) + x_0^2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{p}x_0\left[\frac{p_a}{p}, x_a\right]_+,$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{2}, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right]_+ = [\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}, S_{ab}p_b]_+ = 0,$$

$$\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3), \quad J_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}$$

убеждаемся в справедливости остальных формул (1.4.5).

В представлении (1.4.5) базисные элементы конформной алгебры выражаются через восемь операторов — P_0, P_a, X_a и Λ, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}[P_\mu, P_\nu] = [P_\mu, \Lambda] = [\Lambda, X_a] = 0, \quad [P_0, X_a] = -iP_0P_aP^{-2},\\ [P_a, X_b] = i\delta_{ab}, \quad [X_a, X_b] = \varepsilon_{abc}P_c\Lambda.\end{gathered} \tag{1.4.9}$$

Нетрудно доказать, что операторы (1.4.5) удовлетворяют коммутационным соотношениям, характеризующим алгебру АС(1, 3) (см. (1.1.13), (1.1.19)) уже в силу уравнений (1.4.9), независимо от явной реализации операторов P_μ, X_a и Λ. Отметим также, что операторы (1.4.5) записаны в явно эрмитовой форме.

Используя представление (1.4.5), нетрудно выразить операторы D и K_μ через P_μ и $J_{\mu\nu}$. Действительно, используя тождество $P_0^2 = \mathbf{P}^2$, легко показать, что выражение для J_{0a} можно обратить:

$$X_a = \frac{1}{2}\left[\frac{P_0}{P^2}, J_{0a}\right]_+. \qquad (1.4.10)$$

Подставив (1.4.10) в формулы (1.4.5), определяющие D и K_μ, получаем

$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{P_0 P_a}{P^2}, J_{0a}\right]_+, \qquad K_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{P_0}{P^2}, J_{0a}J_{0a} + \Lambda^2 - \frac{1}{2}\right]_+, \qquad (1.4.11)$$

$$K_a = i\,[K_0, J_{0a}]_-.$$

Таким образом, на множестве решений уравнений Вейля генераторы конформных преобразований K_μ и дилатации D выражаются через базисные элементы алгебры Пуанкаре с помощью соотношений (1.4.11). В следующем пункте мы покажем, что аналогичная ситуация имеет место для всех релятивистских уравнений, описывающих безмассовые поля.

1.4.3. Представление конформной алгебры, соответствующее полю с произвольным дискретным спином. Результаты предыдущего пункта могут быть обобщены на случай безмассового поля произвольной спиральности (произвольного дискретного спина), которое определяется следующим образом.

Определение 1.5. Будем говорить, что уравнение

$$L\Psi = 0, \qquad (1.4.12)$$

где L — линейный дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор, *пункаре-инвариантно и описывает безмассовое поле с дискретным спином*, если на множестве его решений реализуется представление алгебры Пуанкаре, соответствующее нулевым значениям основных операторов Казимира (1.2.37):

$$P_\mu P^\mu \Psi = 0, \qquad W_\mu W^\mu \Psi = 0. \qquad (1.4.13)$$

Иными словами, если а. и. некоторого уравнения определяется операторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, образующими представление II класса алгебры Пуанкаре (т. е. удовлетворяющими условиям (1.4.13)), то мы называем его уравнением для безмассового поля с дискретным спином. Оказывается, такое уравнение с необходимостью будет инвариантно также относительно более широкой конформной алгебры, как это устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1.7 [207]. *Каждое пуанкаре-инвариантное уравнение для безмассового поля с дискретным спином инвариантно относительно конформной алгебры, базисные элементы которой задаются операторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, образующими алгебру* AP(1, 3), *и операторами D, K_μ, которые выражаются через P_μ, $J_{\mu\nu}$ посредством соотношений* (1.4.11).

Доказательство. Поскольку операторы P_μ и $J_{\mu\nu}$, по определению, образуют а. и. уравнения (1.4.12), то операторы (1.4.11), которые выражаются через P_μ и $J_{\mu\nu}$, также входят в эту а. и. Поэтому доказательство теоремы сводится к проверке того факта, что операторы D и K_μ удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1.19) в предположении, что P_μ и $J_{\mu\nu}$ удовлетворяют алгебре Пуанкаре (1.1.13). Соотношения (1.1.13), (1.1.19) определяют алгебру Ли конформной группы.

Проверка справедливости соотношений (1.1.19) для операторов (1.4.11) требует довольно громоздких вычислений, которые несложно осуществить, используя соотношения

$$P_0^2 = P^2, \quad W_\mu = \frac{P_0}{P} \Lambda P_\mu, \quad [\Lambda, J_{\mu\nu}] = [\Lambda, P_\mu] = 0, \tag{1.4.14}$$

$$\left[\frac{1}{P^2}, J_{ab}\right] = 0, \quad \left[\frac{1}{P^2}, J_{0a}\right] = -2i\,\frac{P_0 P_a}{P^4}. \ \blacksquare \tag{1.4.15}$$

Итак, мы видим, что произвольное (в общем случае приводимое) представление II класса алгебры Пуанкаре может быть пополнено до представления конформной алгебры по формулам (1.4.11). При этом генераторы D и K_μ являются функциями от базисных элементов алгебры Пуанкаре.

Приведенная выше теорема имеет конструктивный характер, так как дает возможность находить явный вид генераторов D и K_μ по заданным базисным элементам алгебры Пуанкаре. В предыдущем пункте было показано, что таким образом можно получить генераторы группы $C(1, 3)$ для множества решений уравнения Вейля. Исходя из генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ в представлении Ломонта — Мозеса (см. ниже (2.1.50) для $n_1 = n_2 = 0$), получаем по формулам (1.4.11) генераторы конформной группы в представлении Бозе — Паркера [158]. Другие представления рассматриваются в § 2.1 и в следующем пункте.

1.4.4. Ковариантные представления алгебры AP(1, 3). Особый интерес вызывает применение изложенного в теореме алгоритма построения представлений конформной алгебры, когда генераторы группы Пуанкаре имеют ковариантную форму (1.2.22), так как именно такие представления обычно используются при описании реальных физических полей.

Здесь мы рассмотрим такие представления, ограничившись случаем, когда матрицы $S_{\mu\nu}$ реализуют конечномерное неприводимое представление $D(j\tau)$ алгебры AO(1, 3) (см. § 2.1). Для упрощения дальнейших рассуждений рассмотрим реализацию операторов (1.2.22) в импульсном пространстве, где p_μ — независимые переменные, $x_\mu = -i\,\dfrac{\partial}{\partial p_\mu}$.

Пусть Ψ — произвольное решение уравнения (1.4.12) для поля с нулевой массой и нулевой спиральностью, инвариантного относительно представления алгебры Пуанкаре вида (1.2.22). Тогда, по определению 1.5, для Ψ должны выполняться условия (1.4.13), которые в нашем случае принимают вид

$$\left(p_0^2 - \mathbf{p}^2\right)\Psi = 0, \tag{1.4.16}$$

$$W_\mu W^\mu \Psi = S_{\mu\nu} S^{\nu\lambda} p_\lambda p^\mu \Psi = 0. \tag{1.4.17}$$

Уравнение (1.4.17) удобнее записать в следующей эквивалентной форме (см. (2.1.53)):

$$W_\mu \Psi \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu S^{\rho\sigma}\Psi = \frac{p_0}{p}\Lambda p_\mu \Psi, \tag{1.4.18}$$

где $\Lambda = \frac{1}{2p}\varepsilon_{abc} J_{ab} p_c \equiv \frac{1}{2p}\varepsilon_{abc} S_{ab} p_c$ — оператор спиральности. В случае $\mu = 0$ уравнение (1.4.18) обращается в тождество в силу условия (1.4.16), а для $\mu = a \neq 0$ это уравнение принимает вид

$$(p_0 S_{bc} - p_b S_{0c} + p_c S_{0b})\Psi = p_a \frac{p_0}{p}\Lambda\Psi, \tag{1.4.19}$$

где (a, b, c) — цикл $(1, 2, 3)$. Принимая во внимание соотношения (2.1.61) и (2.4.29), (2.4.30) для $\mathbf{S} \to \mathbf{j}$ и $\mathbf{S} \to \boldsymbol{\tau}$, заключаем, что уравнение (1.4.19) эквивалентно следующей системе:

$$S_{0a} p_a \Psi = i(j + \tau) p_0 \Psi, \tag{1.4.20}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{abc} S_{ab} p_c \Psi = (j - \tau) p_0 \Psi, \tag{1.4.21}$$

где j и τ — целые либо полуцелые неотрицательные числа, задающие неприводимое представление алгебры AO(1, 3).

Таким образом, если Ψ описывает ковариантное безмассовое поле с дискретным спином, то она с необходимостью удовлетворяет уравнениям (1.4.16), (1.4.20), (1.4.21). В случае $j = 0$, $\tau = 1/2$ (или $j = 1/2$, $\tau = 0$) уравнения (1.4.20), (1.4.21) совпадают и сводятся к уравнению Вейля, а при $j = 1$, $\tau = 0$ эти уравнения эквивалентны уравнениям Максвелла.

1.4.5. Ковариантные представления конформной алгебры. Операторы (1.2.22), заданные на множестве векторов Ψ, удовлетворяющих условиям (1.4.20), (1.4.21), образуют представление алгебры Пуанкаре, соответствующее нулевой массе и дискретному спину. В силу теоремы 1.6 такое представление можно пополнить до представления конформной алгебры.

Используя соотношения (1.4.11), найдем в явном виде соответствующие операторы D и K_μ, пополняющие представление (1.2.22) до представления алгебры AC(1, 3). По причинам, которые будут изложены ниже, ограничимся случаями, когда матрицы $S_{\mu\nu}$ принадлежат представлению $D(so)$ или $D(os)$.

Подставляя (1.2.22) в (1.4.11), после несложных вычислений получаем

$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{P_0 P_a}{P^2}, J_{0a}\right]_+ \equiv x_0 p_a - x_a p_0 + i(s+1) + \\ + A(p_0^2 - p^2) + B(S_{0a} p_a - isp_0), \quad s = j + \tau, \tag{1.4.22}$$

$$K_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{P_0}{P^2},\, J_{0a}J_{0a} + \Lambda^2 - \frac{1}{2}\right]_+ \equiv 2x_0D - x_\mu x^\mu p_0 -$$
$$- 2S_{0a}x_a + C_0\left(p_0^2 - p^2\right) + E_0\left(S_{0a}p_a - isp_0\right),$$
$$K_a = i\left[K_0, J_{0a}\right] = 2x_aD - x_\mu x^\mu p_a + 2S_{a\mu}x^\mu +$$
$$+ C_a\left(p_0^2 - p^2\right) + E_a\left(S_{0a}p_a - iSp_0\right), \quad (1.4.23)$$

где A, B, C_μ, E_μ — некоторые функции от p_μ, x_μ, явный вид которых для нас несуществен, поскольку соответствующие слагаемые равны нулю на множестве решений уравнений (1.4.16), (1.4.20). При этом, очевидно,

$$\begin{aligned} D\Psi &= (x_0p_0 - x_ap_a + ik)\,\Psi, \\ K_\mu\Psi &= (2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu)\,\Psi, \end{aligned} \qquad (1.4.24)$$

где $k = 1 + s$, если Ψ удовлетворяет (1.4.16), (1.4.20).

В случае, когда $S_{\mu\nu}$ принадлежат произвольному конечномерному представлению алгебры AO(1, 3), формулы (1.2.22), (1.4.24) задают явный вид генераторов конформной группы в ковариантном представлении Мака и Салама [274]. В частности, такую форму имеют базисные элементы алгебры AC(1, 3) на множествах решений уравнений Дирака (с $m = 0$), Вейля и Максвелла (ср. (1.2.22), (1.2.45), (1.4.4)).

Подведем итоги. Согласно теореме 1.7 любое пункаре-инвариантное уравнение для безмассового поля с дискретным спином автоматически оказывается инвариантным относительно конформной алгебры, которое, однако, в общем случае реализуется в классе нелокальных (интегро-дифференциальных) операторов. В этом параграфе мы убедились, что если исходить из ковариантного представления алгебры AP(1, 3), то изложенный в теореме алгоритм приводит к представлению конформной алгебры в ковариантной форме Мака и Салама. Тем самым установлено, что операторы D и K_μ в ковариантной реализации (1.4.21) могут быть выражены через базисные элементы алгебры AP(1, 3) с помощью соотношений (1.4.11). Разумеется, это утверждение справедливо только для представлений, удовлетворяющих определению 1.5, т. е. для таких представлений, которые заданы на множестве решений уравнений, описывающих безмассовое поле с дискретным спином. В частности, оно сохраняет свою силу для представления, которое реализуется на множестве решений уравнений Максвелла, т. е. *операторы дилатации и конформных преобразований D, K_μ могут быть выражены через генераторы группы Пуанкаре P_μ, $J_{\mu\nu}$ с помощью соотношений* (1.4.11). Этим, по-видимому, и объясняется тот факт, что конформная симметрия уравнений Максвелла не приводит к новым законам сохранения (т. е. дополнительным к тем, которые вытекают из их релятивистской инвариантности; см. [294]).

Поясним теперь, почему мы ограничились такими представлениями матриц $S_{\mu\nu}$, входящих в (1.2.22), которые имеют тип $D(0\tau)$ или $D(j0)$, и покажем, что это ограничение не умаляет общности наших рассуждений. Как было установлено Брейкеном [159, 160], операторы (1.2.22), (1.4.24) образуют а. и. уравнения Даламбера (1.4.17) только в том случае, если $j \cdot \tau = 0$, где j и τ — индексы, задающие представление матриц $S_{\mu\nu}$. Следовательно, только для представлений такого типа с помощью теоремы 1.7 можно получить ковариантную реализацию генераторов K_μ и D в форме Мака и Салама. Если же $j \neq 0$ и $\tau \neq 0$, то формулы (1.2.22), (1.4.11) по-прежнему определяют представление алгебры AC(1, 3), однако операторы D и K_μ уже не будут принадлежать классу $\mathfrak{M}_1$ (при реализации в x-пространстве).

1.4.6. *Конформные преобразования для поля произвольного спина.* В заключение этого параграфа отметим, что конечные преобразования из конформной группы, порождаемые операторами (1.2.22), (1.4.24), где $S_{\mu\nu}$ - произвольные матрицы, удовлетворяющие алгебре AO(1, 3), задаются формулами (1.3.28) — (1.3.38).

Каждый из операторов (1.2.22), (1.4.24) имеет следующий вид:

$$Q_l = A_l^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + B_l(x), \qquad l = 1, 2, \ldots, 15, \tag{1.4.25}$$

где $A_l^\mu(x)$ — функции от $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, а B_l — матрицы, также зависящие от x. Явный вид преобразований, порождаемых этими операторами, может быть найден с помощью интегрирования уравнений Ли (1.1.21), (1.1.22). Решение уравнений (1.1.22) представляет нетривиальную задачу ввиду сложной структуры матриц B_l. Однако проверка того факта, что преобразования (1.3.28) — (1.3.37) удовлетворяют уравнениям Ли при произвольных матрицах $S_{\mu\nu}$, не составляет особого труда. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши, определяемой соотношениями (1.1.21), (1.1.22), заключаем, что формулы (1.3.28) — (1.3.37) действительно задают конечные преобразования из конформной группы, порождаемые генераторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ и D в представлении Мака и Салама. Для каждого конкретного представления $D(j\tau)$ алгебры AO(1, 3) экспоненты от матриц $S_{\mu\nu} \in D(j\tau)$, входящие в соотношения (1.3.34) — (1.3.37), представляют собой конечную сумму по степеням этих матриц, поскольку $\prod\limits_{j+\tau \leqslant \lambda \leqslant -|j-\tau|} (S_{\mu\nu} - \lambda) = 0$, где λ — собственные числа матрицы $S_{\mu\nu}$, принимающие либо целые, либо полуцелые значения.

Подчеркнем, что формулы (1.3.28) — (1.3.38) определяют только локальное представление конформной группы, поскольку мы здесь сталкиваемся не только с проблемой задания области определения функций $\Psi'(x')$, $\Psi''(x'')$, ..., но и с тем обстоятельством, что выражения (1.3.22), (1.3.38) теряют смысл при $1 - 2b_\mu x^\mu + b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda = 0$.

ГЛАВА 2

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ПУАНКАРЕ И ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

Первые два параграфа этой главы содержат описание неприводимых представлений алгебры AP(1, 3) и операторов дискретной симметрии P, T, C. При этом используется базис, в котором генераторы группы Пуанкаре имеют единую форму для всех классов неприводимых представлений. В последующих параграфах излагаются элементы теории пуанкаре-инвариантных уравнений для частиц произвольного спина.

§ 2.1. Неприводимые представления алгебры Пуанкаре

2.1.1. Введение. Одним из важнейших инструментов теоретико-группового анализа уравнений квантовой механики являются представления алгебр Ли основных групп движений релятивистской и нерелятивистской физики — групп Пуанкаре и Галилея. Эти представления используются как для классификации и физической интерпретации известных уравнений математической и теоретической физики, так и для вывода новых уравнений движения, удовлетворяющих принципу относительности Галилея или Пуанкаре — Эйнштейна.

Неприводимые представления группы Пуанкаре были в основном описаны Вигнером еще в 1939 г. [315]. Затем результаты Вигнера были дополнены Ю. М. Широковым [137], который впервые указал явный вид базисных элементов алгебры AP(1, 3) для всех классов неприводимых представлений. В многочисленных публикациях, появившихся позднее, найдены представления алгебры AP(1, 3) в самых различных базисах, каждый из которых является наиболее удобным для некоторого круга физических задач (см., например, обзор [154]).

Реализация неприводимых представлений алгебры Пуанкаре, излагаемая в настоящем параграфе, отличается простой и симметричной формой базисных элементов, единой для всех классов неприводимых представлений. В следующих пунктах мы дадим классификацию неприводимых представлений алгебры AP(1, 3), найдем явный вид генераторов группы Пуанкаре, а затем установим связь полученных представлений с канонической реализацией Ю. М. Широкова [137].

2.1.2. Операторы Казимира. Абстрактным определением алгебры Пуанкаре служат коммутационные соотношения для базисных элементов P_μ, $J_{\mu\nu}$, задаваемые формулами (1.1.13). Наша задача состоит в том, чтобы конструктивно описать все неэквивалентные неприводимые представления коммутационных соотношений (1.1.13) с помощью эрмитовых операторов.

Напомним, что представлением алгебры Ли L называют гомоморфизм $x \to T(x)$ этой алгебры в множество линейных операторов T, определенных в некотором линейном пространстве H:

$$\begin{aligned} &ax + by \to aT(x) + bT(y), \quad x, y \in L, \\ &[x, y] \to [T(x), T(y)] = T(x)T(y) - T(y)T(x). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Если пространство представления H бесконечномерно, то дополнительно предполагается, что операторы $T(x)$ для всех $x \in L$ имеют общую инвариантную область определения, плотную в H.

Представление называют неприводимым, если H не имеет подпространств, инвариантных относительно операторов $T(x)$ для всех $x \in L$. Если пространство определения операторов $T(x)$ имеет инвариантные подпространства, то представление называют приводимым (а если все такие подпространства взаимно ортогональны — вполне приводимым).

В силу леммы Шура [137] классификация неприводимых представлений алгебры Ли L сводится к отысканию полного набора операторов, перестановочных со всеми базисными элементами $x \in L$ (мы будем называть такие операторы операторами Казимира для алгебры L), и вычислению спектра их собственных значений. Пусть C — оператор Казимира для алгебры L, тогда в пространство неприводимого представления L могут входить такие векторы, которые соответствуют одному и тому же собственному значению C. С другой стороны, если мы найдем все независимые операторы Казимира C_1, C_2, ... для алгебры L и определим представление L в пространстве собственных векторов операторов C_1, C_2, ..., относящихся к одному из собственных значений каждого из них, то такое представление будет неприводимым. Действительно, в этом случае все операторы, перестановочные с каждым элементом из представления алгебры L, являются единичными операторами. Иными словами, каждому набору собственных значений всех операторов Казимира соответствует одно и только одно неприводимое представление.

Для нахождения операторов Казимира алгебры AP(1, 3) мы используем метод, который допускает непосредственное обобщение на случай алгебр AP(1, n), т. е. алгебр Ли групп Пуанкаре в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского.

Операторы Казимира алгебры AP(1, 3) должны коммутировать как с P_μ, так и $J_{\mu\nu}$. Величины, коммутирующие с $J_{\mu\nu}$, мы будем называть скалярными операторами, или просто скалярами. Очевидно, среди базисных элементов алгебры AP(1, 3) нет ни одного скаляра, поэтому операторы Казимира будем искать в множестве, принадлежащем обвертывающей алгебре алгебры AP(1, 3), т. е. в множестве операторов вида Q_AQ_B, $Q_AQ_BQ_C$, ..., $Q_A \supset P_\mu$, $J_{\mu\nu}$. Для конструктивного нахождения всех возможных скаляров дадим определение вектора и тензора произвольного ранга.

Будем говорить, что совокупность операторов (A_0, A_1, A_2, A_3) является вектором, если для всех A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) выполняется соотношение

$$[J_{\lambda\nu}, A_\mu] = i(g_{\nu\mu}A_\lambda - g_{\lambda\mu}A_\nu), \tag{2.1.2}$$

где $J_{\mu\nu}$ — операторы, реализующие представление алгебры (1.1.13). Тензором второго ранга будем называть совокупность операторов $A_{\mu\nu}$, которые коммутируют с $J_{\mu\nu}$ как произведение компонент вектора $A_\mu A_\nu$. Аналогично определяется тензор произвольного ранга. Примером вектора и тензора второго ранга являются операторы P_μ и $J_{\mu\nu}$.

Хорошо известно, что скаляры могут быть получены из тензоров с помощью операции свертки индексов. Так, например, скаляром будет оператор $J_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы, используя генераторы P_μ и $J_{\mu\nu}$, построить все возможные независимые скаляры. Для этой цели удобно воспользоваться векторами W_μ и Γ_μ, определяемыми согласно равенствам

$$W_\mu = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma, \qquad \Gamma_\lambda = J_{\lambda\mu}P^\mu. \tag{2.1.3}$$

Операторы (2.1.3) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&W_\mu P^\mu = 0, \quad \Gamma_\mu P^\mu = 0,\\
&[P_\mu, W_\nu] = 0, \quad [W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho W^\sigma,\\
&[W_\mu, \Gamma_\sigma] = -iP_\mu W_\sigma, \quad [\Gamma_\mu, P_\nu] = i(\delta_{\mu\nu}P_\lambda P^\lambda - P_\mu P_\nu),\\
&[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = -iJ_{\mu\nu}P_\lambda P^\lambda.
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Используя (2.1.4), можно показать, что все независимые скаляры, которые можно построить из P_μ и $J_{\mu\nu}$, исчерпываются следующим набором:

$$P_\mu P^\mu, \qquad W_\mu W^\mu, \qquad \Gamma_\mu\Gamma^\mu, \qquad W_\mu\Gamma^\mu. \tag{2.1.5}$$

Все другие скаляры (представляющие собой всевозможные свертки векторов P_μ, Γ_μ, W_μ и тензора $J_{\mu\nu}$), согласно (2.1.4), могут быть выражены через операторы (2.1.5).

Используя (2.1.1), (2.1.4), нетрудно убедиться, что лишь два первых оператора из набора (2.1.5) коммутируют не только с $J_{\mu\nu}$, но и с P_μ. Именно эти операторы

$$C_1 = P_\mu P^\mu \quad \text{и} \quad C_2 = W_\mu W^\mu \tag{2.1.6}$$

являются основными операторами Казимира алгебры AP(1, 3).

Отметим, что для некоторых классов представлений существуют дополнительные операторы, коммутирующие со всеми элементами алгебры AP(1, 3). Например, в случае $P_\mu P^\mu \geqslant 0$ таковым является оператор знака энергии $C_3 = P_0/|P_0|$. При описании неприводимых представлений алгебры Пуанкаре необходимо учитывать также эти дополнительные операторы Казимира, которые будут перечислены в следующем пункте.

2.1.3. Базис неприводимого представления. Для того чтобы эффективно определить неприводимое представление алгебры AP(1, 3), необходимо задаться некоторым ортонормированным базисом в пространстве представления. В качестве такого базиса могут быть выбраны собственные векторы полного набора коммутирующих операторов. В этот набор обязательно должны входить все операторы Казимира, и, кроме того, могут войти базисные элементы алгебры AP(1, 3) или элементы из обертывающей алгебры.

Полный набор коммутирующих операторов выберем в виде

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ W_0;\ C_1,\ C_2,\ \ldots, \tag{2.1.7}$$

где W_0 — нулевая компонента вектора Любанского — Паули (2.1.3), а многоточием обозначены дополнительные операторы Казимира C_3, C_4, ..., возможность существования которых была оговорена выше. Ортонормированный набор общих собственных векторов операторов (2.1.7) будем обозначать символом $|c, \tilde{p}, \lambda\rangle$, где $c=(c_1, c_2, \ldots)$ — собственные значения операторов Казимира, $\tilde{p}=(p_0, p_1, p_2, p_3)$ — собственные значения операторов P_μ и λ — оператора W_0, так что

$$\begin{aligned} C_\alpha|c, \tilde{p}, \lambda\rangle &= c_\alpha|c, \tilde{p}, \lambda\rangle, \\ P_\mu|c, \tilde{p}, \lambda\rangle &= p_\mu|c, \tilde{p}, \lambda\rangle, \\ W_0|c, \tilde{p}, \lambda\rangle &= \lambda p|c, \tilde{p}, \lambda\rangle, \qquad p=\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

При этом собственные значения операторов P_μ (как базисных элементов абелевой алгебры) и оператора C_1 лежат в интервале

$$-\infty < p_\mu < \infty, \qquad -\infty < c_1 < \infty, \tag{2.1.9}$$

а спектр остальных операторов (2.1.7) еще подлежит определению.

В неприводимом представлении числа c_1 и c_2 (собственные значения инвариантных операторов) принимают фиксированные значения. Следуя Вигнеру [315], будем различать пять качественно различных классов представлений, соответствующих следующим областям значений c_1, c_2 и p_μ:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & c_1>0. \\ \text{II.} & c_1=0, \quad c_2=0, \quad p_\mu \neq 0. \\ \text{III.} & c_1=0, \quad c_2 \neq 0. \\ \text{IV.} & c_1<0. \\ \text{V.} & p_\mu \equiv 0. \end{array} \tag{2.1.10}$$

Особый интерес с физической точки зрения вызывают представления I и II классов, так как пространству таких представлений обычно сопоставляется пространство состояний релятивистской частицы с массой $m>0$ и с нулевой массой. Однако представления III и IV классов также находят применение — например, для описания гипотетических частиц с бесконечным числом спиновых состояний [237, 283], нестабильных частиц и тахионов [247, 308]. Что же касается представлений V класса, то они являются неотъемлемым элементом любой физической теории, удовлетворяющей постулату релятивистской инвариантности. В этом параграфе мы опишем все возможные (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления алгебры AP(1, 3), принадлежащие первым четырем классам. Представления V класса, которые сводятся к представлениям однородной группы Лоренца $O(1, 3)$, с исчерпывающей полнотой описаны в монографиях [23, 53]. Необходимые сведения о конечномерных представлениях алгебры AO(1, 3) приведены ниже в п. 2.1.8.

Перечислим дополнительные операторы Казимира, имеющиеся в каждом классе неприводимых представлений, и укажем соответствующие области собственных значений c_1 и c_2:

$$\begin{aligned} &C_3 = P_0/|P_0|, \quad c_1 \geqslant 0, \\ &C_4 = W_0/P_0 = W_1/P_1 = W_2/P_2 = W_3/P_3, \quad c_1 = c_2 = 0, \\ &C_5 = W_0/|W_0|, \quad c_1 < 0, \quad c_2 = c_1 l(l+1), \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

где l — произвольное целое или полуцелое положительное число.

Для представлений V класса (в которых $p_\mu \equiv 0$ и алгебра AP(1, 3) сводится к алгебре Ли группы Лоренца) имеются два оператора Казимира:

$$C_6 = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, \qquad C_7 = \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} J^{\rho\sigma}.$$

Существует еще один универсальный оператор Казимира для всех классов неприводимых представлений:

$$C_8 = \exp(2i\pi J_{12}) = \exp(2i\pi J_{31}) = \exp(2i\pi J_{23}), \tag{2.1.12}$$

собственные значения которого равны ± 1. Верхний знак соответствует однозначным, а нижний — двузначным представлениям группы Пуанкаре.

2.1.4. Определение общего вида вектора Любанского — Паули. Найдем явный вид вектора W_μ в базисе $|c, \tilde{p}, \lambda\rangle$ для каждого из классов неприводимых представлений алгебры Пуанкаре, перечисленных в предыдущем пункте.

Используя (2.1.4), (2.1.8), нетрудно получить следующие коммутационные соотношения для компонент W_μ в базисе $|c, \tilde{p}, \lambda\rangle$:

$$\begin{aligned} &[W_a, W_b] = i\varepsilon_{abc}(p_0 W_c - W_0 p_c), \\ &[W_0, W_a] = -i\varepsilon_{abc} p_b W_c. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

При каждом фиксированном значении $\tilde{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ соотношения (2.1.13) определяют некоторую алгебру Ли $A_{\tilde{p}}$. При этом различным значениям $\tilde{p}$ соответствуют, вообще говоря, неэквивалентные алгебры.

Наша задача заключается в конструктивном описании представлений алгебры (2.1.13) для всех возможных значений $\tilde{p}$. С целью упрощения коммутационных соотношений (2.1.13) подвергнем векторы W_μ и p_μ неособенному линейному преобразованию

$$W_\mu \to W'_\mu = \widehat{R}_{\mu\nu} W^\nu, \quad p_\mu \to p'_\mu = \widehat{R}_{\mu\nu} p^\nu. \tag{2.1.14}$$

Обычно это преобразование выбирается таким, чтобы добиться максимального упрощения соотношений (2.1.13) для каждого конкретного класса векторов $\tilde{p}$. Например, если $p_\mu p^\mu > 0$, то делается преобразование, приводящее $\tilde{p}$ к виду $\tilde{p}' = (p_0', 0, 0, 0, 0)$; если $p_\mu p^\mu = 0$, то $\tilde{p}' = (p_0', 0, 0, p_3')$ и т. д. (см., например, [137]). В результате получаются такие реализации представлений алгебры (2.1.13), которые имеют существенно разную форму для различных значений инвариантного оператора $P_\mu P^\mu$. Кроме того, в случае $p_\mu p^\mu \leqslant 0$ одна из компонент вектора (скажем, p_3) играет выделенную роль, хотя в коммутационные соотношения (1.2.10) все эти компоненты входят совершенно на равных правах.

Выберем оператор преобразования (2.1.14) таким образом, чтобы он максимально упрощал коммутационные соотношения (2.1.13) и имел одинаковую форму для всех типов четырехвектора $\tilde{p}$. А именно, положим

$$\widehat{R}_{0a} = \widehat{R}_{a0} = 1, \quad \widehat{R}_{ab} = -R_{ab}, \tag{2.1.15}$$

где R_{ab} — матричные элементы оператора перехода к системе отсчета, в которой $p_a' = n_a p$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — произвольный единичный постоянный вектор,

$$\begin{gathered} R_{ab} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}\delta_{ab} - \varepsilon_{abc}\theta_c + \theta_a\theta_b(1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n})^{-1}, \\ \theta_a = \varepsilon_{abc}\hat{p}_b n_c, \quad \hat{p}_a = p_a/p. \end{gathered} \tag{2.1.16}$$

В результате преобразования (2.1.14)—(2.1.16) коммутационные соотношения (2.1.13) принимают вид

$$\begin{gathered} [W_a', W_b'] = i\varepsilon_{abc}(p_0 W_c' - n_c p W_0'), \\ [W_0', W_a'] = ip\varepsilon_{abc} n_b W_c'. \end{gathered} \tag{2.1.17}$$

Наконец, с помощью замены

$$W_0' = p\lambda_0, \qquad W_a' = n_a \lambda_0 p_0 + \lambda_a \tag{2.1.18}$$

получаем из (2.1.17) коммутационные соотношения для операторов λ_0, λ_a:

$$\begin{gathered} [\lambda_0, \lambda_a] = i\varepsilon_{abc} n_b \lambda_c, \\ [\lambda_a, \lambda_b] = ic_1 \varepsilon_{abc} n_c \lambda_0, \end{gathered} \tag{2.1.19}$$

где $c_1 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - p^2$.

В пространстве неприводимого представления алгебры AP(1, 3) c_1 принимает фиксированное значение (совпадающее с собственным значением оператора Казимира C_1), а коммутационные соотношения (2.1.19) определяют некоторую алгебру Ли $A(c_1, \mathbf{n})$, структурные константы которой зависят от $\mathbf{n}$ и c_1. Каждому представлению этой алгебры можно поставить в соответствие четырехвектор W_μ, удовлетворяющий условиям (2.1.13). В самом деле, принимая во внимание (2.1.18), с помощью преобразования, обратного к (2.1.14) — (2.1.16), нетрудно получить

$$W_0 = W_0' = p\lambda_0,$$
$$W_a = R_{ab}^{-1} W_b' = \lambda_a + \widehat{p}_a \lambda_0 p_0 - \frac{(\widehat{p}_a + n_a)\lambda_b \widehat{p}_b}{1 + \mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{p}}}. \tag{2.1.20}$$

Таким образом, мы получили аналитическое выражение вектора Любанского — Паули через компоненты четырехвектора $\tilde{p}$ и операторы λ_μ, реализующие представление алгебры (2.1.19). Следовательно, описание представлений вектора W сводится к описанию неэквивалентных представлений алгебры $A(c_1, \mathbf{n})$.

2.1.5. Представления алгебры $A(c_1, \mathbf{n})$. Исследуем структуру алгебры (2.1.19) и установим ее связь с другими, хорошо изученными алгебрами Ли.

Легко убедиться, что операторы

$$I_1 = \lambda_0^2 c_1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \qquad I_2 = \exp(2i\pi\lambda_0) \tag{2.1.21}$$

коммутируют с λ_0, λ_1, λ_2 и λ_3, т. е. являются операторами Казимира. Следовательно, в пространстве неприводимого представления операторы (2.1.22) кратны единичному, а их собственные значения могут быть использованы для нумерации неприводимых представлений. Нетрудно заметить, что необходимо положить $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0$, поскольку, согласно первому из соотношений (2.1.4), для операторов (2.1.19) должно выполняться условие $p_0 W_0' - n_a W_a' p = 0$. Отсюда вытекает, что алгебра (2.1.19) имеет только три линейно независимых элемента.

Структура алгебры $A(c_1, \mathbf{n})$ может быть описана следующим образом.

Теорема 2.1. *Алгебра $A(c_1, \mathbf{n})$, задаваемая коммутационными соотношениями (2.1.19), при $c_1 > 0$ изоморфна алгебре* AO(3), *при $c_1 = 0$ — алгебре* AE(2) *и при $c_1 < 0$ — алгебре* AO(2, 1)*).

Доказательство. Коммутационные соотношения (2.1.19), очевидно, инвариантны относительно преобразований $\lambda_a \to \lambda_a' = r_{ab}\lambda_b$, $n_a \to n_a' = r_{ab} n_b$, где r_{ab} — матричные элементы ортогональной матрицы: $r_{ab} r_{bc} = \delta_{ac}$. Выбирая r_{ab} такими, чтобы $\mathbf{n}' = (0, 0, 1)$, приходим к следующей эквивалентной алгебре:

$$[\lambda_0, \lambda_1'] = i\lambda_2', \qquad [\lambda_0, \lambda_2'] = -i\lambda_1',$$
$$[\lambda_1', \lambda_2'] = ic_1\lambda_0, \qquad \lambda_3' \equiv 0. \tag{2.1.22}$$

Полагая

$$\lambda_0 = S_3, \quad \lambda_1' = mS_1, \quad \lambda_2' = mS_2, \quad c_1^2 = m^2 > 0,$$
$$\lambda_0 = T_0, \quad \lambda_1' = T_1, \quad \lambda_2' = T_2, \quad c_1 = 0, \tag{2.1.23}$$
$$\lambda_0 = S_{12}, \quad \lambda_1 = \eta S_{01}, \quad \lambda_2 = \eta S_{02}, \quad c_1 = -\eta^2 < 0,$$

---

*) Символами АО (3), АЕ (2) и АО (2, 1) обозначаются алгебры Ли группы ортогональных матриц размерности 3×3, группы Евклида в двумерном пространстве и группы псевдоортогональных матриц в $(2+1)$-мерном пространстве Минковского.

получаем из (2.1.22) коммутационные соотношения для S_a, T_α, $S_{\alpha\beta}$:

$$[S_a,\ S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c, \tag{2.1.24}$$

$$[T_0,\ T_1] = iT_2, \quad [T_0,\ T_2] = -iT_1, \quad [T_1,\ T_2] = 0, \tag{2.1.25}$$

$$[S_{01},\ S_{02}] = -iS_{12}, \quad [S_{01},\ S_{12}] = -iS_{02}, \quad [S_{02},\ S_{12}] = iS_{01}, \tag{2.1.26}$$

которые характеризуют алгебры АО(3), АЕ(2) и АО(2, 1) соответственно.

Таким образом, сформулированный в теореме изоморфизм можно задать соотношениями

$$\lambda_0 = \lambda_0', \qquad \lambda_a = R_{ab}^{-1}\lambda_b', \tag{2.1.27}$$

где λ_μ' связаны с базисными элементами алгебр АО(3), АЕ(2) и АО(2, 1) согласно (2.1.23), R_{ab}^{-1} — матричные элементы оператора поворота, связывающего $n' = (0,\ 0,\ 1)$ с $n = (n_1,\ n_2,\ n_3)$. Явные выражения для R_{ab}^{-1} могут быть получены из (2.1.16) заменой $\widehat{p}_a \to n_a'$.

Доказанная теорема позволяет свести задачу описания представлений алгебры $A(c_1,\ \mathbf{n})$ к описанию представлений алгебр Ли, задаваемых перестановочными соотношениями (2.1.24) — (2.1.26). Представления этих алгебр хорошо известны (см., например, [137]), сводка основных результатов относительно таких представлений приведена ниже.

а) Алгебра АО(3). Неприводимые представления алгебры (2.1.24) нумеруются целыми или полуцелыми числами s и задаются квадратными матрицами размерности $(2s+1)\times(2s+1)$. Эта алгебра имеет два оператора Казимира:

$$I_1 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \qquad I_2 = \exp(2i\pi S_3). \tag{2.1.28}$$

Пусть $|s,\ s_3\rangle$ — собственный вектор полного набора коммутирующих матриц I_1 и S_3, тогда

$$I_1|s,\ s_3\rangle = s(s+1)|s,\ s_3\rangle, \qquad I_2|s,\ s_3\rangle = (-1)^{2s}|s,\ s_3\rangle, \tag{2.1.29}$$

где s — целые или полуцелые неотрицательные числа, которые в неприводимом представлении фиксированы. Явный вид матриц S_a в базисе $|s,\ s_3\rangle$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} &S_3|s,\ s_3\rangle = s_3|s,\ s_3\rangle, \\ &(S_1 \pm iS_2)|s,\ s_3\rangle = \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3 \pm 1)}\,|s,\ s_3 \pm 1\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

где $s_3 = -s,\ -s+1,\ \ldots,\ s$.

б) Алгебра АЕ(2), характеризуемая коммутационными соотношениями (2.1.25), имеет два оператора Казимира:

$$I_1 = T_1^2 + T_2^2, \qquad I_2 = \exp(2iT_0\pi). \tag{2.1.31}$$

Различаются два класса неприводимых представлений алгебры АЕ(2), соответствующих $I_1 = 0$ и $I_1 = r^2 > 0$. Если $I_1 = 0$, то

$$T_1 = T_2 = 0, \qquad T_0 = \widetilde{\lambda}, \qquad I_2 = (-1)^{2\widetilde{\lambda}}, \tag{2.1.32}$$

где $\tilde{\lambda}$ — целое или полуцелое число. Если же $I_1 = r^2 > 0$, то представление алгебры AE(2) реализуется бесконечными матрицами следующего вида:

$$T_0|r, n\rangle = n|r, n\rangle, \quad (T_1 \pm iT_2)|r, n\rangle = r|r, n \pm 1\rangle, \qquad (2.1.33)$$

где $|r, n\rangle$ — собственные векторы коммутирующих матриц I_1 и T_0. При этом

$$I_1|r, n\rangle = r^2|r, n\rangle, \quad I_2|r, n\rangle = (-1)^{2n}|r, n\rangle, \qquad (2.1.34)$$

$0 < r < \infty$, а n пробегает либо все целые, либо полуцелые значения.

в) Алгебра AO(2, 1) (2.1.26) имеет два основных оператора Казимира:

$$I_1 = S_{12}^2 - S_{01}^2 - S_{02}^2, \quad I_2 = \exp(2iS_{12}\pi). \qquad (2.1.35)$$

Обозначим символом $|\alpha, n, \varphi\rangle$ собственный вектор коммутирующих операторов I_1, I_2 и S_{12}:

$$\begin{aligned} &I_1|\alpha, n, \varphi\rangle = \alpha|\alpha, n, \varphi\rangle, \\ &I_2|\alpha, n, \varphi\rangle = \exp(2i\pi\varphi)|\alpha, n, \varphi\rangle, \\ &S_{12}|\alpha, n, \varphi\rangle = (n + \varphi)|\alpha, n, \varphi\rangle. \end{aligned} \qquad (2.1.36)$$

Все возможные комбинации значений α, φ и n, соответствующие унитарным представлениям группы $O(2, 1)$, задаются формулами:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \varphi = 0, \quad -\infty < \alpha < 0,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ &\text{б)}\ \varphi = 0, \quad \alpha = l(l+1),\ l = 0, 1, 2, \ldots,\ n = l+1, l+2, \ldots; \\ &\text{в)}\ \varphi = 0, \quad \alpha = l(l+1),\ l = 0, 1, 2, \ldots,\ n = -l-1, -l-2, \ldots; \\ &\text{г)}\ \varphi = 1/2,\ -\infty < \alpha < -1/4,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ &\text{д)}\ \varphi = 1/2,\ \alpha = l(l+1),\ l = -1/2, 1/2, 3/2, \ldots,\ n = l + 1/2, l + 3/2, \ldots; \\ &\text{е)}\ \varphi = 1/2,\ \alpha = l(l+1),\ l = -1/2, 1/2, 3/2, \ldots,\ n = -l - 1/2, -l - 3/2, \ldots \end{aligned} \qquad (2.1.37)$$

Таким образом, можно выделить шесть классов неприводимых представлений алгебры AO(2, 1), соответствующих перечисленным в (2.1.37) вариантам наборов собственных значений операторов Казимира. Представления типа б), в) и д), е) соответствуют одинаковым наборам собственных значений операторов (2.1.35), но различным значениям дополнительного инварианта — знака S_{12}. Явный вид матрицы S_{12} для всех представлений задается последней из формул (2.1.36), а матриц $S_{0\alpha}$ — следующими соотношениями:

$$(S_{01} \pm iS_{02})|\alpha, n, \varphi\rangle = i\sqrt{\alpha - (n+\varphi)(n+\varphi\pm 1)}\,|\alpha, n \pm 1, \varphi\rangle. \quad (2.1.38)$$

Используя приведенные выше результаты и принимая во внимание изоморфизм алгебр (2.1.24) — (2.1.26) и (2.1.19), установленный в теореме 2.1, нетрудно описать неприводимые представления алгебры $A(c_1, \mathbf{n})$. Базис для каждого из таких представлений выберем в виде полного набора собственных векторов коммутирующих операторов I_1 (2.1.21) и λ_0. Тогда явный вид операторов Казимира и всех неэквивалентных матриц λ_μ, реализующих неприводимые эрмитовы представления алгебры $A(c_1, \mathbf{n})$, может быть задан формулами

$$I_1|c_1, c_2, \lambda\rangle = -c_2|c_1, c_2, \lambda\rangle,$$

$$I_2|c_1, c_2, \lambda\rangle = (-1)^{2\lambda}|c_1, c_2, \lambda\rangle,$$

$$\lambda_0|c_1, c_2, \lambda\rangle = \lambda|c_1, c_2, \lambda\rangle,$$

$$(\lambda_1 \pm i\lambda_2)|c_1, c_2, \lambda\rangle = \frac{1}{2}(n_3 + 1)\sqrt{-c_2 - c_1\lambda(\lambda \pm 1)}\,|c_1, c_2, \lambda \pm 1\rangle +$$

$$+ \frac{(n_2 \mp in_1)^2}{2(n_3 + 1)}\sqrt{-c_2 - c_1\lambda(\lambda \mp 1)}\,|c_1, c_2, \lambda \mp 1\rangle, \quad (2.1.39)$$

$$n_3\lambda_3|c_1, c_2, \lambda\rangle = -(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2)|c_1, c_2, \lambda\rangle.$$

В неприводимом представлении параметры c_1 и c_2 принимают фиксированные значения из интервалов, перечисленных ниже в формулах (2.1.40)—(2.1.43), где указаны также соответствующие области значений λ:

$$c_1 = m^2 > 0, \quad -c_2 = c_1 s(s+1), \quad \lambda = -s, -s+1, \ldots, s, \qquad (2.1.40)$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \lambda = \tilde{\lambda}, \qquad (2.1.41)$$

$$c_1 = 0,\ -c_2 = r^2 > 0,\ \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ либо } \lambda = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, \qquad (2.1.42)$$

$$c_1 = -\eta^2 < 0,\ c_2 = \eta^2\alpha,\ \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ либо}$$
$$\lambda = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, -\infty < \alpha < -1/4,$$

$$c_1 = -\eta^2 < 0, \quad 0 < -c_2 < \frac{1}{4}\eta^2, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$c_1 = -\eta^2 < 0, \quad c_2 = \eta^2 l(l+1), \quad \lambda = l+1, l+2, \ldots,$$

$$c_1 = -\eta^2 < 0, \quad c_2 = \eta^2 l(l+1), \quad \lambda = -l-1, -l-2, \ldots, \qquad (2.1.43)$$

где $s > 0$ и $\tilde{\lambda}$ — произвольные целые или полуцелые числа, l — целые положительные либо полуцелые числа, удовлетворяющие условию $-1/2 \leqslant l < \infty$, значения которых в неприводимом представлении фиксированы.

Формулы (2.1.39)—(2.1.43) задают в явном виде все возможные (с точностью до эквивалентности) неприводимые эрмитовы представления коммутационных соотношений (2.1.19). Совместно с определением (2.1.20) эти формулы задают все неэквивалентные реализации вектора Любанского — Паули.

2.1.6. Неприводимые представления алгебры Пуанкаре. Итак, мы получили все неэквивалентные представления вектора W_μ в форме (2.1.20), (2.1.39)—(2.1.43). Для конструктивного описания всех возможных (с точностью до эквивалентности) неприводимых представлений алгебры AP(1, 3) достаточно указать явный вид операторов P_μ и $J_{\mu\nu}$, соответствующих найденным выше представлениям вектора Любанского — Паули. Как нетрудно убедиться прямой проверкой, такие операторы могут быть выбраны в форме

$$P_0 = p_0, \quad P_a = p_a, \quad \mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \lambda_0 \frac{\mathbf{n} + \widehat{\mathbf{p}}}{1 + \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{p}}},$$
$$\mathbf{N} = -\frac{1}{2} [p_0, \mathbf{x}]_+ + \frac{\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{p}}{p^2} - \frac{\widehat{\mathbf{p}} \times \mathbf{n} \, (\lambda_0 p_0 p - \boldsymbol{\lambda} \cdot \widehat{\mathbf{p}})}{p + \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}, \tag{2.1.44}$$

где $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$, $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$, $J_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} J_{bc}$, $N_a = J_{0a}$, p_0, p_a — вещественные переменные, связанные соотношением

$$p_0 = \varepsilon \sqrt{p^2 + c_1}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{2.1.45}$$

c_1 — произвольное вещественное число, $x_a = i \frac{\partial}{\partial p_a}$. Для неприводимых представлений I—III классов, соответствующих $c_1 \geqslant 0$, ε принимает одно из значений, а в случае $c_1 < 0$ знак энергии не фиксирован. Действительно, операторы (2.1.44) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1.13) и приводят к вектору Любанского — Паули в форме (2.1.20), что легко проверить, используя (2.1.19), (2.1.6). Поскольку формула (2.1.20) задает общий вид вектора W_μ (с точностью до эквивалентности) для всех классов неприводимых представлений алгебры AP(1, 3) (кроме V класса, соответствующего $p_\mu \equiv 0$), то операторы (2.1.44), (2.1.45) образуют базис для каждого из таких представлений. Представление алгебры AP(1, 3), реализуемое операторами (2.1.44), (2.1.45), неприводимо, так как соответствующие операторы Казимира (2.1.11), (2.1.12) кратны единичным.

Операторы (2.1.44) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \sum_{\lambda} \int d^3p \Phi_1^\dagger (\mathbf{p}, \lambda) \, \Phi_2 (\mathbf{p}, \lambda), \tag{2.1.46}$$

где Φ_α принадлежат пространству функций, достаточно быстро убывающих вдоль полупрямой $\widehat{\mathbf{p}} = -\mathbf{n}$, а λ принимает все возможные значения, совпадающие с собственными числами матрицы λ_0.

Приведенные выше результаты сформулированы в виде следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Неприводимые представления алгебры* AP(1, 3) *нумеруются наборами собственных значений* c_1, c_2, ..., *операторов Казимира* C_1, C_2 (2.1.6), *а также* C_3 (*если* $c_1 \geqslant 0$), C_4 (*если* $c_1 = c_2 = 0$), C_5 (*если* $c_1 < 0$, $c_2 < 0$) *и* C_8 (2.1.11), (2.1.12). *Все допустимые комбинации собственных значений* c_1, c_2 *и* $c_4 = \lambda$ *приведены в формулах* (2.1.40)—(2.1.43), *а собственные числа операторов* C_3, C_5, C_8 *равны* ± 1. *Явный вид соответствующих базисных* *элементов алгебры* AP(1, 3), *с точностью до эквивалентности, может быть выбран в форме* (2.1.44), *где* λ_μ — *матрицы* (2.1.39)—(2.1.43).

Итак, мы вычислили явные выражения базисных элементов неприводимых представлений алгебры AP(1,3). Операторы (2.1.44) имеют относительно простую форму, единую для всех классов неприводимых представлений, что выгодно отличает их от других известных реализаций алгебры Пуанкаре.

2.1.7. Связь с каноническими реализациями Широкова — Фолди — Мозеса. Рассмотрим несколько подробнее каждый из классов неприводимых представлений, перечисленных в (2.1.10).

1. Представления I класса, соответствующие $P_\mu P^\mu > 0$, имеют дополнительный оператор Казимира — оператор знака энергии (2.1.11) с собственными значениями, равными ±1. Пространство представления (2.1.44) разбивается на два инвариантных подпространства, в каждом из которых оператор p_0 (2.1.45) имеет один знак.

Таким образом, представления I класса характеризуются тремя числами m^2, s и ε (см. (2.1.40)) и реализуются в пространстве квадратично интегрируемых функций $\Phi(\mathbf{p}, \lambda)$, имеющих размерность $2s+1$ по индексу λ. При этом оператор Казимира (2.1.12) принимает значения $+1$ в случае целых s и -1 в случае s полуцелых.

С помощью унитарного преобразования

$$(P_\mu, \mathbf{J}, \mathbf{N}) \to (P'_\mu, \mathbf{J}', \mathbf{N}') = U(P_\mu, \mathbf{J}, \mathbf{N})U^\dagger, \tag{2.1.47}$$

где

$$U = \exp(-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{p}\times\mathbf{n}\theta_1)\exp(i\lambda_0\pi)\exp(i\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'\theta_2), \tag{2.1.48}$$
$$\theta_1 = \arccos\widehat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{n}, \qquad \theta_2 = \arccos n_3, \qquad \mathbf{n}' = (0,\ 0,\ 1),$$

операторы (2.1.44), реализующие представление I класса, могут быть приведены к канонической форме Фолди — Широкова [137, 189]

$$\begin{aligned} P'_0 &= \varepsilon E = \varepsilon\sqrt{p^2+m^2}, \qquad P_a = p_a, \\ \mathbf{J}' &= \mathbf{x}\times\mathbf{p} + \mathbf{S}, \\ \mathbf{N} &= -\frac{1}{2}[\mathbf{x}, E]_+ - \varepsilon\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{S}}{E+m}. \end{aligned} \tag{2.1.49}$$

Здесь $\mathbf{S}$ — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, явный вид которых приведен в формулах (2.1.30).

2. Обратимся теперь к случаю $c_1 = c_2 = 0$. Для представлений такого класса существуют два дополнительных оператора Казимира — оператор знака энергии C_3 и спиральности C_4 (2.1.11). Из (2.1.11), (2.1.20) получаем $C_4 = \varepsilon\lambda_0$, откуда и из (2.1.41) заключаем, что собственные значения оператора спиральности равны $\varepsilon\tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda}$ — произвольное целое или полуцелое число.

Итак, неприводимые представления II класса нумеруются двумя числами $\varepsilon = \pm1$ и целым либо полуцелым числом $\tilde{\lambda}$ и являются одномерными по индексу λ. Оператор Казимира (2.1.12) имеет собственные значения $+1$ для целых $\tilde{\lambda}$ и -1 для $\tilde{\lambda}$ полуцелых. При этом базисные элементы алгебры Пуанкаре, согласно (2.1.39), (2.1.41) и (2.1.44), могут быть выбраны в виде

$$P_0 = \varepsilon p, \quad P_a = p_a, \quad \mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \tilde{\lambda} \frac{\widehat{\mathbf{p}} + \mathbf{n}}{1 + \widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}},$$
$$\mathbf{N} = -\frac{1}{2} \varepsilon [p, \mathbf{x}]_+ - \varepsilon\lambda \frac{\widehat{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{1 + \widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}}. \tag{2.1.50}$$

Операторы (2.1.50) имеют симметричную и компактную форму, что выгодно отличает их от других известных реализаций неприводимых представлений алгебры AP(1, 3), принадлежащих II классу. Выбирая различные единичные векторы $\mathbf{n}$, получаем из (2.1.50) различные реализации представления алгебры AP(1, 3), которые унитарно эквивалентны друг другу. Полагая $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, приходим к представлению в форме Ломонта — Мозеса [273], а в случае $= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ формулы (2.1.50) задают реализацию представлений алгебры $P(1, 3)$, предложенную в [126] *).

Переход от представления, соответствующего вектору $\mathbf{n}$, к эквивалентному представлению, характеризуемому вектором $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}' \neq -\mathbf{n}$, можно осуществить с помощью унитарного преобразования (2.1.47), где

$$U = \exp\left(2i\lambda_0 \operatorname{arctg} \frac{\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{1 + \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{p}} + \mathbf{n}' \cdot \widehat{\mathbf{p}} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}\right). \tag{2.1.51}$$

Если же $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$, то соответствующий оператор преобразования задается формулой

$$U = \exp\left(2i\lambda_0 \operatorname{arctg} \frac{\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{n}''}{\widehat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{n}'' - (\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'')}\right), \tag{2.1.52}$$

где $\mathbf{n}'' \neq \pm\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор.

Отметим еще, что для представлений II класса справедливы следующие соотношения:

$$W_\mu = \frac{P_0}{P} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{P} P_\mu, \quad P = (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)^{1/2}, \tag{2.1.53}$$

которые для неприводимых представлений принимают вид

$$W_\mu = \varepsilon\lambda P_\mu. \tag{2.1.54}$$

Условие (2.1.55) является необходимым и достаточным для того, чтобы представление алгебры Пуанкаре принадлежало II классу. Как отмечалось в § 1.4, представления алгебры Пуанкаре II класса могут быть пополнены до представления алгебры AC(1, 3).

---

*) Представления, рассматриваемые в [126, 273], вместо антикоммутатора $\frac{1}{2}[p, \mathbf{x}]_+$ в $\mathbf{N}$ включают член $p\mathbf{x}$, что связано с другим выбором скалярного произведения.

Подставив (2.1.50) в (1.4.11), получаем соответствующие генераторы конформных преобразований K_μ и дилатации D в виде

$$D=\frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}),\qquad K_0=\frac{\varepsilon}{2}[p,\mathbf{x}^2]+2\lambda\varepsilon\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}{1+\mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{p}}},\qquad(2.1.55)$$
$$K_a=i[K_0,N_a].$$

Формулы (2.1.50), (2.1.55) задают базисные элементы представления конформной алгебры, которое при редукции по алгебре AP(1, 3) сводится к неприводимому представлению алгебры Пуанкаре. *В случае* $\mathbf{n}=(0,\ 0,\ 1)$ *эти формулы определяют представление* алгебры AC(1, 3) в реализации Бозе — Паркера [158].

3. Представления III класса имеют четыре оператора Казимира — C_1, C_2, C_3 и C_8, задаваемые формулами (2.1.6), (2.1.11), (2.1.12). При этом собственные значения C_1 тождественно равны нулю, а тройка собственных значений операторов C_2, C_3 и C_8:

$$-c_2=r^2>0,\quad c_3=\varepsilon=\pm 1,\quad c_8=\pm 1$$

однозначно (с точностью до эквивалентности) определяет неприводимое представление. Явный вид операторов, задающих базис представления алгебры Пуанкаре, может быть получен из (2.1.44) подстановкой $p_0=\varepsilon p$ и соответствующих выражений (2.1.39), (2.1.41) для матриц λ_μ. При этом представления с целыми значениями n соответствуют $c_8=1$, а с полуцелыми — $c_8=-1$. Представления III класса реализуются в пространстве функций $\Phi(\mathbf{p},\lambda)$, бесконечномерных по индексу λ (который принимает счетное число значений). В случае $\mathbf{n}=(0,\ 0,\ 1)$ формулы (2.1.44), (2.1.45) задают базисные элементы алгебры AP(1, 3) в форме Ломонта — Мозеса [273] (при этом $\lambda_0\to T_0$, $\lambda_1\to T_1$, $\lambda_2\to T_2$, $\lambda_3\to 0$, где T_1, T_2, T_3 — матрицы (2.1.33)).

4. Представления IV класса характеризуются набором собственных значений трех основных операторов Казимира C_1, C_2 и C_8. Собственные значения оператора C_8 равны ± 1, где верхний знак соответствует целым λ, а нижний — полуцелым. Возможные значения c_1, c_2 и λ приведены в (2.1.43).

В случае $c_2>0$ имеется дополнительный оператор Казимира $C_5=W_0/|W_0|=\operatorname{sign}\lambda_0$, поэтому пространство соответствующего представления разбивается на два инвариантных подпространства, в каждом из которых все λ (собственные числа матрицы λ_0) имеют один знак.

Все эрмитовы представления IV класса бесконечномерны по индексу λ. С помощью унитарного преобразования (2.1.47), где

$$U=\exp\left(i\frac{S_{0\alpha}p_\alpha}{|p|}\operatorname{arctg}\frac{p_0|p|}{(p_3+\eta)(p_0^2+\eta^2)}\right)U,\qquad(2.1.56)$$
$$|p|=(p_1^2+p_2^2)^{1/2},\qquad \alpha=1,\ 2,$$

где U — оператор (2.1.51) для $\mathbf{n}'=(0,\ 0,\ 1)$, $S_{\alpha\beta}$ — матрицы, связанные с λ_μ соотношениями (2.1.23) (явный вид их приведен в (2.1.36)—(2.1.38)), операторы (2.1.44), реализующие представление IV класса, могут быть приведены к канонической форме Ю. М. Широкова [137]. Явный вид преобразованных операторов не приводим из-за их громоздкости.

Таким образом, мы установили связь между представлениями в форме (2.1.44) и хорошо известными «каноническими» реализациями алгебры AP(1, 3). Относительно других реализаций неприводимых представлений алгебры Пуанкаре см. [158].

2.1.8. Ковариантные представления. Среди множества всех возможных реализаций представлений алгебры AP(1, 3) совершенно особая роль принадлежит так называемым ковариантным представлениям, которые характеризуются следующей формой базисных операторов P_μ и $J_{\mu\nu}$:

$$P_\mu = p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{2.1.57}$$

где $S_{\mu\nu}$ — числовые матрицы. Необходимым и достаточным условием того, чтобы операторы (2.1.57) реализовали представление алгебры Пуанкаре (т. е. удовлетворяли перестановочным соотношениям (2.1.1)), служат следующие коммутационные соотношения для матриц $S_{\mu\nu}$:

$$[S_{\mu\nu},\ S_{\lambda\sigma}] = i\,(g_{\mu\sigma}S_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}S_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}S_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}S_{\mu\lambda}). \tag{2.1.58}$$

Формулы (2.1.57) задают общий вид базисных элементов алгебры AP(1, 3), принадлежащих классу $\mathfrak{M}_1$. Операторы (2.1.57) генерируют локальные преобразования. Действительно, «спиновая» часть операторов $J_{\mu\nu}$ (т. е. матрицы $S_{\mu\nu}$) коммутирует с «орбитальной» частью $x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$, и поэтому преобразования из группы Пуанкаре, порождаемые генераторами (2.1.57), имеют вид

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = D(a)\,\Psi(x), \tag{2.1.59}$$

где $\Psi(x)$ — вектор из пространства представления (2.1.57), x' связан с x преобразованием Лоренца (1.1.38), $D(a)$ — числовая матрица, зависящая от параметров однородного преобразования Лоренца, $a = \|a_{\mu\nu}\|$ — матрица преобразований (1.1.38). К соотношению (2.1.62) нетрудно прийти с помощью интегрирования соответствующих уравнений Ли в полной аналогии с (1.2.53)—(1.2.58).

Отметим, что операторы (2.1.57), в отличие от (2.1.44), реализуют приводимое представление алгебры AP(1, 3), которое в случае конечномерных матриц $S_{\mu\nu}$, вообще говоря, не является эрмитовым.

Для описания всех неэквивалентных представлений вида (2.1.57) достаточно указать все неэквивалентные реализации матриц $S_{\mu\nu}$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (2.1.58). Мы ограничимся случаем конечномерных неприводимых представлений алгебры AO(1, 3) (2.1.58), которые будут непосредственно использоваться в дальнейшем.

Алгебра (2.1.58) имеет два оператора Казимира:

$$C_6 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \qquad C_7 = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} S^{\mu\nu} S^{\rho\sigma}, \tag{2.1.60}$$

собственные значения которых можно использовать для нумерации неприводимых представлений. Для того чтобы описать область изменения этих собственных значений, рассмотрим наряду с $S_{\mu\nu}$ операторы

$$j_a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} + i S_{0a}\right), \qquad \tau_a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} - i S_{0a}\right), \tag{2.1.61}$$

которые удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[j_a,\ j_b] = i\varepsilon_{abc} j_c, \qquad [\tau_a,\ \tau_b] = i\varepsilon_{abc}\tau_c, \qquad [j_a,\ \tau_b] = 0.$$

Мы видим, что алгебра АО(1, 3) распадается на две коммутирующие подалгебры, базис которых образуют операторы j_a и τ_a соответственно. Коммутационные соотношения между j_a (и между τ_a) совпадают с перестановочными соотношениями (2.1.24), характеризующими алгебру АО(3). Отсюда заключаем, что неприводимые представления алгебры АО(1, 3) нумеруются целыми либо полуцелыми положительными числами j и τ. Пространство конечномерного неприводимого представления алгебры АО(1, 3) может быть натянуто на совокупность $(2j+1)\times(2\tau+1)$ собственных векторов полного набора коммутирующих операторов $\mathbf{j}^2$, $\boldsymbol{\tau}^2$, j_3 и τ_3. Используя для этих векторов обозначение $|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle$, действие операторов j_a и τ_a можно представить в виде (ср. (2.1.30))

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^2|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle &= j(j+1)|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle, \\ j_3|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle &= m|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.62}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^2|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle &= \tau(\tau+1)|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle, \\ \tau_3|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle &= n|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.62'}$$

$$\begin{aligned} (j_1 \pm ij_2)|j,\ m;\ \ \tau,\ n\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j,\ m\pm 1,\ \tau,\ n\rangle, \\ (\tau_1 \pm i\tau_2)|j,\ m;\ \ \tau,\ n\rangle &= \sqrt{\tau(\tau+1) - n(n\pm 1)}\,|j,\ m;\ \tau,\ n\pm 1\rangle, \end{aligned}$$

где j, $m(\tau,\ n)$ — одновременно целые или полуцелые числа, причем $-j \leqslant m \leqslant j$, $-\tau \leqslant n \leqslant \tau$.

Итак, неприводимые конечномерные представления алгебры реализуются квадратными матрицами размерности $(2j+1)\cdot(2\tau+1)\times\times(2j+1)\cdot(2\tau+1)$, матричные элементы которых задаются соотношениями (2.1.61), (2.1.62). Мы будем обозначать эти представления символом $D(j\tau)$.

Иногда бывает удобнее пользоваться не базисом $|j,\ m;\ \tau,\ n\rangle$, а «$O(3)$-базисом» $|l_0,\ l_1;\ l,\ m\rangle$, в котором матрица $\mathbf{S}^2 = \dfrac{1}{2} S_{ab} S_{ab}$ диагональна. Числа l_0 и l_1 следующим образом связаны с j и τ:

$$\varepsilon j = (l_0 + l_1 - \varepsilon)/2,\ \varepsilon\tau = (l_1 - l_0 - \varepsilon)/2,\ \varepsilon = \operatorname{sign}(j - \tau) \tag{2.1.63}$$

и задают собственные значения операторов Казимира $\frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ и $\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}S^{\mu\nu}S^{\rho\sigma}$, так что

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\,|\,l_0, l_1; lm\rangle = (l_0^2 + l_1^2 - 1)\,|\,l_0, l_1; l, m\rangle,\\ \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}S^{\mu\nu}S^{\rho\sigma}\,|\,l_0, l_1; l, m\rangle = 2il_0l_1\,|\,l_0, l_1; l, m\rangle.\end{gathered} \tag{2.1.64}$$

Числа l и m определяют собственные значения $\mathbf{S}^2$ и S_{12}:

$$\begin{gathered}\mathbf{S}^2|l_0, l_1; l, m\rangle = l(l+1)\,|l_0, l_1; l, m\rangle,\\ S_{12}|l_0; l_1; l, m\rangle = m\,|l_0, l_1; l, m\rangle,\end{gathered} \tag{2.1.65}$$

где $l = l_0, l_0+1, \ldots, |l_1|-1$, $m = -l, -l+1, \ldots, l$.

Явные выражения матриц $S_{\mu\nu}$, реализующих неприводимое представление $D(l_0, l_1)$, задаются формулами

$$\begin{aligned}&S_{ab}\,|\,l_0, l_1; l, m\rangle = \varepsilon_{abc}\left(S_c^l\right)_{mm'}|\,l_0, l_1; l, m'\rangle,\\ &S_{0a}\,|\,l_0, l_1; l, m\rangle = \left[\delta_{l-1l'}C_l\left(K_a^l\right)_{mm'} + \right.\\ &\qquad \left. + \delta_{ll'}A_l\left(S_a^l\right)_{mm'} + \delta_{l+1l'}C_{l+1}\left(K_a^{l+1}\right)^*_{m'm}\right]|\,l_0, l_1; l', m'\rangle,\end{aligned} \tag{2.1.66}$$

где $A_l = \frac{il_0l_1}{l(l+1)}$, $C_l = \frac{i}{l}\sqrt{\frac{(l^2-l_0^2)(l^2-l_1^2)}{4l^2-1}}$, а матричные элементы $\left(S_a^l\right)_{mm'}$ и $\left(K_a^l\right)_{mm'}$ задаются следующими формулами:

$$\begin{gathered}\left(S_3^l\right)_{mm'} = m\delta_{mm'},\\ \left(S_1^l\right)_{mm'} \pm i\left(S_2^l\right)_{mm'} = \delta_{mm'\pm1}\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)},\end{gathered} \tag{2.1.67}$$

$$\begin{aligned}&\left(K_3^l\right)_{mm'} = \delta_{mm'}\sqrt{l^2 - m^2},\ \left(K_1^l\right)_{mm'} \pm i\left(K_2^l\right)_{mm'} =\\ &\qquad = \pm\delta_{m\pm1m'}\sqrt{l(l-1) \mp m(m\mp1) \pm 2ml}.\end{aligned} \tag{2.1.68}$$

Результат действия матрицы $\left(K_a^{l+1}\right)^\dagger$ на $|l_0, l_1; l, m\rangle$ получаем из (2.1.68), заменяя $l \to l+1$, $m \to -m$. Подробнее о матрицах K_a^l см. § 6.2.

Отметим, что в случае, когда l_1 — произвольное комплексное число (а l_0 — по-прежнему целое или полуцелое), формулы (2.1.66) — (2.1.68) определяют бесконечномерное представление алгебры AO(1, 3) [22, 23].

§ 2.2. Представления операторов дискретной симметрии

2.2.1. Введение. Как показано в § 1.1, группа симметрии простейшего уравнения релятивистской квантовой физики — уравнения КГФ — наряду с неоднородными преобразованиями Лоренца включает также дискретные преобразования P, T и C, задаваемые формулами (1.1.59) — (1.1.61).

Симметрия относительно преобразований пространственной инверсии P, обращения времени T и зарядового сопряжения C (или некоторых из этих преобразований и их произведений) является одним из важнейших требований, предъявляемых к любой физической теории наряду с лоренц-инвариантностью. При этом, как было видно на примере уравнений, исследуемых в гл. 1, операторы дискретной симметрии удается определить не однозначно, но только с точностью до множителя, равного по модулю единице.

Возникает естественный вопрос: в каком смысле различные определения операторов P, T и C могут считаться эквивалентными и сколько неэквивалентных операторов дискретной симметрии можно задать на множестве решений того или иного пуанкаре-инвариантного уравнения? Ответ на этот вопрос предполагает описание неэквивалентных реализаций операторов P, T и C в пространстве представления алгебры AP(1, 3).

Задача описания представлений «полной» группы Пуанкаре, включающей преобразования пространственной инверсии и обращения времени, впервые была сформулирована и решена в классической работе Вигнера [316]. Ю. М. Широков [137] дополнил результаты Вигнера, используя универсальную накрывающую группу группы Пуанкаре. Современное изложение представлений полной группы Пуанкаре имеется в [4].

Ниже рассматриваются представления всех трех операторов P, T и C. Перечислены неэквивалентные представления конечномерной группы, образуемой этими операторами и их произведениями, и найден их явный вид в пространстве «универсального» представления (2.1.44) алгебры AP(1, 3).

Будем исходить из реализации операторов дискретной симметрии на множестве решений уравнения КГФ, задаваемой соотношениями (1.1.59). Эти операторы и их всевозможные произведения образуют группу G_8, включающую восемь элементов:

$$G_8 \ni \{I, P, T, C, PT, PC, TC, CPT\}, \tag{2.2.1}$$

где I — тождественное преобразование. Закон группового умножения для g_1, $g_2 \in G_8$, согласно (1.1.59)—(1.1.61), может быть представлен в виде следующей таблицы:

Таблица 1

	I	P	T	C	PT	CT	CP	CPT
I	I	P	T	C	PT	CT	CP	CPT
P	P	I	PT	PC	T	CPT	C	CT
T	T	PT	I	CT	P	C	CPT	CP
C	C	CP	CT	I	CPT	T	P	PT
PT	PT	T	P	CPT	I	CP	CT	C
CT	CT	CPT	C	T	CP	I	PT	P
CP	CP	C	CPT	P	CT	PT	I	T
CPT	CPT	CT	CP	PT	C	P	T	I

Задача описания неэквивалентных операторов P, T и C, заданных в пространстве представления алгебры AP(1, 3), включает описание представлений группы G_8. Кроме того, эти операторы должны удовлетворять коммутационным и антикоммутационным соотношениям (1.1.62) совместно с базисными элементами алгебры AP(1, 3). Отсюда следуют, в частности, такие соотношения для операторов P, T, C и операторов Казимира (2.1.11), (2.1.12):

$$PC_1 = C_1P, \quad PC_2 = C_2P, \quad PC_3 = C_3P, \quad PC_4 = -C_4P,$$
$$PC_5 = -C_5P, \quad PC_6 = C_6P, \quad PC_7 = -C_7P, \quad PC_8 = C_8P; \tag{2.2.2}$$
$$TC_1 = C_1T, \quad TC_2 = C_2T, \quad TC_3 = -C_3T, \quad TC_4 = C_4T,$$
$$TC_5 = C_5T, \quad TC_6 = C_6T, \quad TC_7 = -C_7T, \quad TC_8 = C_8T; \tag{2.2.3}$$
$$CC_1 = C_1C, \quad CC_2 = C_2C, \quad CC_3 = -C_3C, \quad CC_4 = C_4C,$$
$$CC_5 = C_5C, \quad CC_6 = C_6C, \quad CC_7 = C_7C, \quad CC_8 = C_8C. \tag{2.2.4}$$

Согласно (2.2.2)—(2.2.4) операторы P, T и C могут быть заданы только в пространстве приводимого представления алгебры AP(1, 3) (поскольку они изменяют знаки собственных значений операторов Казимира).

Таким образом, описание неэквивалентных реализаций операторов дискретной симметрии сводится в нашей постановке к нахождению всех представлений группы G_8, характеризуемой групповым законом, заданным таблицей 1, причем операторы P, T и C должны дополнительно удовлетворять соотношениям (1.1.62), где P_μ и $J_{\mu\nu}$ — базисные элементы прямой суммы неприводимых представлений алгебры AP(1, 3).

2.2.2. Неэквивалентные мультипликаторы группы G_8. Как хорошо известно, вектор состояния физической системы в квантовой механике представляет собой луч в гильбертовом пространстве, будучи определен с точностью до фазового множителя $\exp(i\alpha)$, где α — c-число. Это обстоятельство предопределяет фундаментальную роль *проективных представлений* групп симметрии, т. е. таких представлений, для которых групповой закон выполняется только с точностью до множителя, равного по модулю единице.

Проективные представления собственной группы Пуанкаре всегда могут быть сведены к точным представлениям [4], поэтому никаких новых возможностей здесь не возникает. Однако уже в случае полной группы $\widetilde{P}(1, 3)$, включающей пространственно-временные отражения, существуют проективные представления, которые нельзя свести к точным и которые, таким образом, существенно расширяют класс обычных представлений.

Здесь мы рассмотрим проективные представления группы G_8, порождаемой операторами P, T и C. А именно, рассмотрим проективные унитарные и антиунитарные представления (сокращенно PUA-представления) этой группы, которые определяются следующим образом.

Обозначим символом $\mathbb{C}$ поле комплексных чисел, $U(\mathbb{C})$ — мультипликативную группу комплексных чисел, равных по модулю единице, R — поле вещественных чисел.

PUA-*представлением группы G в гильбертовом пространстве H* называется отображение $T\colon G \to UA(H)$ группы G в мультипликативную группу $UA(H)$ всех унитарных и антиунитарных операторов пространства H, удовлетворяющее условию

$$T_{g_1}T_{g_2} = \lambda(g_1, g_2)\, T_{g_1 g_2}, \tag{2.2.5}$$

где $g_1,\ g_2 \in G$, $\lambda(g_1, g_2) \in U(\mathbb{C})$, причем для $\lambda(g_1, g_2)$ выполняется

$$\lambda(g_1 g_2, g_3)\lambda(g_1, g_2 g_3) = \lambda(g_1, g_2 g_3)\widetilde{\lambda}(g_2, g_3), \tag{2.2.6}$$

где $\widetilde{\lambda}(g_2, g_3) = \lambda(g_2, g_3)$, если T_{g_1} — унитарный, и $\widetilde{\lambda}(g_2, g_3) = -\lambda(g_2, g_3)$, если T_{g_1} — антиунитарный оператор.

Система элементов $\lambda(g_1, g_2)$ называется мультипликатором представления T. В случае обыкновенных (точных) представлений $\lambda(g_1, g_2) \equiv 1$ для всех $g_1,\ g_2 \in G$.

PUA-представления T и T' считаются эквивалентными, если существует такой унитарный или антиунитарный оператор V и такая функция $\alpha(g) \in U(\mathbb{C})$, что

$$T'_g = \alpha(g)\, V T_g V^{-1} \tag{2.2.7}$$

для всех $g \in G$. Если $\alpha(g) \equiv 1$, то эквивалентность называется обыкновенной, а в противном случае — проективной. В случае, когда оператор V в (2.2.7) унитарный, мультипликаторы λ и λ' представлений T и T' связаны соотношением [4]

$$\lambda'(g_1, g_2) = \frac{\alpha(g_1)\,\widetilde{\alpha}(g_2)}{\alpha(g_1 g_2)}\,\lambda(g_1, g_2), \tag{2.2.8}$$

где $\widetilde{\alpha}(g_2) = \alpha(g_2)$, если T_{g_1} —унитарный оператор, и $\alpha(g_2) = \alpha^*(g_2)$, если T_{g_1} антиунитарен.

Если же оператор V из (2.2.7) является антиунитарным, то соотношению (2.2.8) удовлетворяют мультипликаторы λ' и λ^*.

Соотношения (2.2.6), (2.2.8) могут быть использованы для описания всех возможных неэквивалентных мультипликаторов, которые могут встречаться в представлениях заданной группы. Для группы G_8 такое описание дается следующей теоремой.

Теорема 2.3. *Полная система попарно неэквивалентных мультипликаторов группы G_8 исчерпывается мультипликаторами, задаваемыми следующей таблицей:*

Таблица 2

$\lambda(q_1, q_2)$	I	P	T	C	PT	CT	CP	CPT
I	1	1	1	1	1	1	1	1
P	1	1	1	μ_2	1	μ_2	μ_2	μ_2
T	1	μ_3	1	μ_1	μ_3	μ_1	$\mu_1\mu_3$	$\mu_1\mu_3$
C	1	1	1	μ_4	1	μ_4	μ_4	μ_4
PT	1	μ_3	1	$\mu_1\mu_2$	μ_3	$\mu_1\mu_2$	$\mu_1\mu_2\mu_3$	$\mu_1\mu_2\mu_3$
CT	1	μ_3	1	$\mu_1\mu_4$	μ_3	$\mu_1\mu_4$	$\mu_1\mu_3\mu_4$	$\mu_1\mu_3\mu_4$
CP	1	1	1	$\mu_2\mu_4$	1	$\mu_2\mu_4$	$\mu_2\mu_4$	$\mu_2\mu_4$
CPT	1	μ_3	1	$\mu_1\mu_2\mu_4$	μ_3	$\mu_1\mu_2\mu_4$	$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$	$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$ независимо принимают значения ± 1.

Доказательства теоремы мы не приводим (см. [3]). ■

Согласно теореме 2.3 группа G_8 имеет 16 неэквивалентных мультипликаторов $\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, соответствующих всем возможным комбинациям значений μ_k, $k = 1, 2, 3, 4$.

Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ — базисные элементы PUA-представления группы G_8 с мультипликатором $\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$. Тогда, как нетрудно убедиться, для операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ справедливы следующие перестановочные и антиперестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} &\widehat{P}^2 = I, && \widehat{T}^2 = I, && \widehat{C}^2 = \mu_4 I, \\ &\widehat{C}\widehat{P} = \mu_2 PC, && \widehat{C}\widehat{T} = \mu_1 \widehat{T}\widehat{C}, && \widehat{P}\widehat{T} = \mu_3 \widehat{T}\widehat{P}. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Соотношения (2.2.9) вытекают из правил перемножения операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$, $\widehat{C}$, определяемых формулой (2.2.5) и таблицей 2. С другой стороны, эти соотношения однозначно определяют неэквивалентные мультипликаторы $\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, приведенные в таблице 2.

Совокупность операторов $\widehat{P}$, $\widehat{C}$, $\widehat{T}$ и их всевозможных произведений образует конечномерную мультипликативную группу $G(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, размерность которой равна 8, если $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1$, или 16, если хотя бы один из μ_k равен -1. Всего имеются 16 таких групп, соответствующих различным наборам значений параметров μ_k. Описание PUA-представлений группы G_8 сводится, таким образом, к описанию представлений групп $G(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$.

2.2.3. Общий вид операторов дискретной симметрии. Помимо соотношений (2.2.9), операторы P, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ должны удовлетворять условиям (см. (1.1.62))

$$\begin{aligned} &\widehat{P}\mathbf{J} = \mathbf{J}\widehat{P}, && \widehat{P}P_0 = P_0\widehat{P}, && \widehat{P}P_a = -P_a\widehat{P}, && \widehat{P}\mathbf{N} = -\mathbf{N}\widehat{P}, \\ &\widehat{T}P_0 = -P_0\widehat{T}, && \widehat{T}\mathbf{P} = \mathbf{P}\widehat{T}, && \widehat{T}\mathbf{J} = \mathbf{J}\widehat{T}, && T\mathbf{N} = -\mathbf{N}T, \\ &\widehat{C}P_0 = -P_0\widehat{C}, && \widehat{C}\mathbf{P} = -\mathbf{P}\widehat{C}, && \widehat{C}\mathbf{J} = -\mathbf{J}\widehat{C}, && \widehat{C}\mathbf{N} = -\mathbf{N}\widehat{C}, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

где P_0, $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{N}$ — базисные элементы алгебры Пуанкаре.

Будем исходить из представлений алгебры AP(1, 3) в универсальной реализации (2.1.44). Согласно (2.2.2)—(2.2.4) достаточно ограничиться представлениями, соответствующими фиксированным собственным значениям операторов Казимира C_1 и C_2, в то время как операторы C_3, C_4, C_5 и C_7 не могут быть кратными единичным операторам. Ограничиваясь пока представлениями I—III классов, заключаем, что P_μ, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$ могут быть выбраны в форме

$$\begin{aligned} &P_0 = \widehat{\varepsilon}E, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{x}\times\mathbf{p} + \lambda_0\frac{\mathbf{n}+\widehat{\mathbf{p}}}{1+\mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{p}}}, \quad \widehat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \\ &\mathbf{N} = -\frac{1}{2}\widehat{\varepsilon}\,[E, \mathbf{x}]_+ + \frac{\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{p}}{p^2} - \frac{\widehat{\mathbf{p}}\times\mathbf{n}\left(\widehat{\varepsilon}\lambda_0 pE - \boldsymbol{\lambda}\cdot\widehat{\mathbf{p}}\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}, \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

где $\widehat{\varepsilon}$ — оператор знака энергии, имеющий собственные значения ± 1, а λ_μ — матрицы, реализующие приводимое представление алгебры (2.1.19) (соответствующее фиксированным собственным значениям c_1 и c_2 (2.1.40)). При этом, очевидно,

$$[\widehat{\varepsilon}, \lambda_\mu] = 0, \quad \widehat{\varepsilon}^2 = 1, \tag{2.2.12}$$

и оператор $\widehat{\varepsilon}$ может быть выбран в виде диагональной матрицы, а λ_μ — в виде прямой суммы неприводимых матриц (2.1.39).

Пусть $\Psi(p)$ — произвольный вектор из пространства приводимого представления алгебры Пуанкаре, принадлежащего одному из первых трех классов ($P_\mu P^\mu \geqslant 0$). Преобразования $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$, не умаляя общности, можно представить в виде

$$\widehat{P}\Psi(\mathbf{p}) = U_1\Psi(-\mathbf{p}), \quad \widehat{T}\Psi(\mathbf{p}) = U_2\Psi(\mathbf{p}),$$
$$\widehat{C}\Psi(\mathbf{p}) = U_3\Psi^*(-\mathbf{p}), \tag{2.2.13}$$

где U_1, U_2, U_3 — операторы, удовлетворяющие, согласно (2.2.10), следующим условиям:

$$U_a\mathbf{p} = \mathbf{p}U_a, \quad a = 1,\ 2,\ 3, \tag{2.2.14}$$

$$\begin{gathered} U_1P_0 = P_0U_1, \quad U_2P_0 = -P_0U_2, \quad U_3P_0 = -P_0U_3, \\ U_1\mathbf{J} = \mathbf{J}'U_1, \quad U_2\mathbf{J} = \mathbf{J}U_2, \quad U_3\mathbf{J} = -\mathbf{J}'^*U_3, \\ U_1\mathbf{N} = -\mathbf{N}'U_1, \quad U_2\mathbf{N} = -\mathbf{N}U_2, \quad U_3\mathbf{N} = -\mathbf{N}'^*U_3. \end{gathered} \tag{2.2.15}$$

Здесь $\mathbf{J}'$ и $\mathbf{N}'$ — операторы, получаемые из $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$ заменой $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$.

Из (2.2.14) заключаем, что U_a не включают операторов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial p_a}$ и, следовательно, могут рассматриваться как матрицы, зависящие от $\mathbf{p}$. Соотношения (2.2.9) накладывают следующие ограничения на операторы U_a:

$$\begin{gathered} U_1(\mathbf{p})\,U_2(-\mathbf{p}) = \mu_3U_2(\mathbf{p})\,U_1(-\mathbf{p}), \\ U_1(\mathbf{p})\,U_3(-\mathbf{p}) = \mu_2U_3(\mathbf{p})\,U_1^*(-\mathbf{p}), \\ U_2(\mathbf{p})\,U_3(\mathbf{p}) = \mu_1U_3(\mathbf{p})\,U_2^*(-\mathbf{p}), \\ U_1(\mathbf{p})\,U_1(-\mathbf{p}) = U_2^2(\mathbf{p}) = 1, \quad U_3(\mathbf{p})\,U_3^*(-\mathbf{p}) = \mu_4. \end{gathered} \tag{2.2.16}$$

Таким образом, задача описания неэквивалентных операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$, заданных в пространствах представлений алгебры Пуанкаре I—III классов, сводится в нашей постановке к нахождению неприводимых наборов матриц $U_a(\mathbf{p})$, удовлетворяющих соотношениям (2.2.14)—(2.2.16).

Для представлений IV класса оператор знака энергии не является оператором Казимира, поэтому операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ должны определяться несколько по-иному. Вектор из пространства такого представления — это бесконечномерный столбец с компонентами $\Psi_\lambda(\mathbf{p}, \varepsilon)$, где λ пробегает значения, перечисленные в формулах (2.1.43). Обозначая этот столбец символом $\Psi(\mathbf{p}, \varepsilon)$, соответствующие операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ можно представить в виде

$$\widehat{P}\Psi(\mathbf{p}, \varepsilon) = U_1(\mathbf{p}, \varepsilon)\Psi(-\mathbf{p}, \varepsilon), \ \widehat{T}\Psi(\mathbf{p}, \varepsilon) = \\ = U_2(\mathbf{p}, \varepsilon)\Psi(\mathbf{p}, -\varepsilon), \ \widehat{C}\Psi(\mathbf{p}, \varepsilon) = U_3(\mathbf{p}, \varepsilon)\Psi^*(-\mathbf{p}, -\varepsilon). \tag{2.2.17}$$

В результате снова приходим к соотношениям (2.2.14) — (2.2.16) для операторов U_1, U_2 и U_3 и генераторов P_μ, **J**, **N**, реализующих приводимое представление алгебры AP(1, 3) IV класса.

Отметим для полноты, что операторы дискретной симметрии можно определить и в пространстве представления алгебры AP(1, 3), принадлежащего V классу (когда $p_\mu \equiv 0$). При этом операторы **J** и **N** из (2.2.11) сводятся к конечномерным или бесконечномерным матрицам, а операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ могут быть представлены в виде

$$\widehat{P} = \xi_1, \quad \widehat{T} = \xi_2, \quad \widehat{C}_3 = \xi_3 A, \tag{2.2.18}$$

где A — оператор комплексного сопряжения, ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — числовые матрицы соответствующей размерности, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &\xi_1 S_{ab} = S_{ab}\xi_1, \quad \xi_2 S_{ab} = S_{ab}\xi_2, \quad \xi_3 S_{ab} = -S^*_{ab}\xi_3, \\ &\xi_1 S_{0a} = -S_{0a}\xi_1, \quad \xi_2 S_{0a} = -S_{0a}\xi_2, \quad \xi_3 S_{0a} = -S^*_{0a}\xi_3, \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$$\begin{aligned} &\xi_1\xi_2 = \xi_2\xi_1\mu_3, \quad \xi_1\xi_3 = \xi_3\xi_1^*\mu_2, \quad \xi_2\xi_3 = \xi_3\xi_2^*\mu_1, \\ &\xi_1^2 = \xi_2^2 = 1, \quad \xi_3\xi_3^* = \mu_4. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Здесь $S_{0a} = N_a$ и $S_{ab} = \varepsilon_{abc}J_c$ — матрицы, реализующие представление алгебры AO(1, 3).

В следующих пунктах мы найдем в явном виде матрицы U_1, U_2, U_3 (и ξ_1, ξ_2, ξ_3), определяющие операторы дискретной симметрии для всех классов представлений алгебры AP(1, 3).

2.2.4. Операторы $\widehat{\mathrm{P}}$, $\widehat{\mathrm{T}}$ и $\widehat{\mathrm{C}}$ в пространстве представления I класса. Представления алгебры Пуанкаре, принадлежащие I классу, характеризуются собственными числами $c_1 = m^2 > 0$, $c_2 = -m^2 s(s+1)$ и $c_3 = \varepsilon = \pm 1$ трех операторов Казимира C_1, C_2 и C_3 (2.1.6), (2.1.11). В соответствии со сказанным в начале предыдущего пункта можно ограничиться представлениями, для которых c_1 и c_2 фиксированы, а ε принимает оба возможных значения. Базисные элементы такого представления выберем в форме (2.2.11), где λ_μ — конечномерные матрицы, реализующие прямую сумму эквивалентных неприводимых представлений алгебры (2.1.19), соответствующих $c_1 = m^2 > 0$, $c_2 = m^2 s(s+1)$ (c_2 — собственное значение оператора Казимира (2.1.21)).

Операторы U_1, U_2 и U_3 из (2.2.14) удобно представить в виде

$$U_1 = \xi_1 U, \quad U_2 = \xi_2 V, \quad U_3 = \xi_3 U\Delta, \tag{2.2.21}$$

где

$$U = \exp\left(\frac{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{p}}{m\sqrt{p^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})^2}}\pi\right), \qquad V = \exp(i\lambda_0\widehat{\varepsilon}\pi), \tag{2.2.22}$$

Δ — числовая матрица, удовлетворяющая условиям

$$\Delta\lambda_\mu = -\lambda_\mu^*\Delta, \qquad \Delta^2 = 1, \tag{2.2.23}$$

ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — операторы, подлежащие определению.

Используя соотношения

$$U\mathbf{J} = \mathbf{J}'U, \qquad U\mathbf{N} = -\mathbf{N}'U, \qquad V\lambda = -\lambda V \tag{2.2.24}$$

($\mathbf{J}'$ и $\mathbf{N}'$ определены в (2.2.15)), заключаем из (2.2.15), (2.2.11), что для ξ_1, ξ_2, ξ_3 должно выполняться

$$\xi_1\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}\xi_1, \qquad \xi_2\widehat{\varepsilon} = -\widehat{\varepsilon}\xi_2, \qquad \xi_3\widehat{\varepsilon} = -\widehat{\varepsilon}\xi_3, \tag{2.2.25}$$
$$[\xi_a, P_b] = [\xi_a, \widehat{\varepsilon}P_0] = [\xi_a, J_b] = [\xi_a, \widehat{\varepsilon}N_b] = 0.$$

Но операторы $\{P_a, \widehat{\varepsilon}P_0, J_a, \widehat{\varepsilon}N_a\}$ реализуют прямую сумму эквивалентных неприводимых представлений $D^+(m, s)$ алгебры AP(1, 3), откуда в силу леммы Шура заключаем, что ξ_a должны быть числовыми матрицами.

Из (2.2.15), (2.2.16) заключаем, что матрицы ξ_a должны коммутировать с λ_μ,

$$[\xi_a, \lambda_\mu] = 0, \tag{2.2.26}$$

и удовлетворять уравнениям (2.2.20), которые совместно с соотношениями (2.2.12), (2.2.25) определяют эти матрицы с точностью до унитарной эквивалентности.

Таким образом, задача описания всех допустимых операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ может быть сведена к нахождению неэквивалентных матриц λ_μ, $\widehat{\varepsilon}$ и ξ_a. Неприводимые наборы таких матриц перечислены в следующей теореме.

Теорема 2.4. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) неприводимые наборы матриц, удовлетворяющих коммутационным и антикоммутационным соотношениям* (2.1.19), (2.2.19), (2.2.20), (2.2.25), (2.2.26), *можно пронумеровать пятерками чисел* s, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, *где* $s = 0, 1/2, 1, \ldots$, $\mu_k = \pm 1$. *Размерность таких матриц равна* $2(2s+1)\times 2(2s+1)$, *если* $\mu_1\mu_4 = \mu_2\mu_3 = 1$, *и* $4(2s+1)\times 4(2s+1)$ *во всех остальных случаях. Явный вид* ξ_a, $\widehat{\varepsilon}$ *и* λ_μ *задается следующими формулами*:

$\mu_1\mu_4 = \mu_2\mu_3 = 1$:

$$\xi_1 = \delta_{\mu_3}, \qquad \xi_2 = \sigma_2, \qquad \xi_3 = \alpha_{\mu_1}, \qquad \widehat{\varepsilon} = \sigma_3, \quad \lambda_\mu = \lambda_\mu^{(2)}; \tag{2.2.27}$$

$\mu_1\mu_4 = -1$ *или* $\mu_2\mu_3 = -1$:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix}\delta_{\mu_3} & 0\\ 0 & \mu_2\mu_3\delta_{\mu_3}\end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \mu_1\sigma_2\end{pmatrix}, \qquad \xi_3 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_1\\ \mu_4\sigma_1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\widehat{\varepsilon} = \begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}, \qquad \lambda_\mu = \begin{pmatrix}\lambda_\mu^{(2)} & 0\\ 0 & \lambda_\mu^{(2)}\end{pmatrix}, \tag{2.2.28}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 *и* δ_{μ_i}, α_{μ_i}, $\lambda_\mu^{(2)}$ — *матрицы размерности* $2(2s+1)\times$ $\times 2(2s+1)$ *следующего вида*:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=i\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad \sigma_0=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},$$
$$\delta_{\mu_i}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & \mu_i I\end{pmatrix},\quad \alpha_{\mu_i}=i^{\frac{\mu_i-1}{2}}\begin{pmatrix}0 & I\\ \mu_i I & 0\end{pmatrix},\quad \lambda_\mu^{(2)}=\begin{pmatrix}\lambda_\mu & 0\\ 0 & \lambda_\mu\end{pmatrix}, \tag{2.2.29}$$

λ_μ — $(2s+1)\times(2s+1)$*-мерные матрицы, реализующие неприводимое представление* $D(s)$ *алгебры* $A(c_1=m^2,\ \mathbf{n})$ (2.1.19) (*которая изоморфна алгебре* AO(3)), I — $(2s+1)$*-рядные единичные матрицы*, 0 — *нулевые матрицы соответствующей размерности.*

Доказательство сводится к перебору различных вариантов значений μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 и нахождению неэквивалентных неприводимых наборов матриц ξ_a, ε и λ_μ для каждой комбинации значений μ_k. Мы не приводим здесь соответствующих выкладок (см. [3]), отметим только, что матрицы (2.2.27), (2.2.28) определены с точностью до преобразований проективной эквивалентности (ср. (2.2.7))

$$\xi_a\to\alpha_{\xi_a}V\xi_a\tilde V^{-1},\quad a=1,2,3,\quad \varepsilon\to V\varepsilon V^{-1}, \tag{2.2.30}$$

где V — произвольная невырожденная матрица, коммутирующая с λ_μ, $\tilde V^{-1}=V^{-1}$ при $a=1$, 2 и $\tilde V^{-1}=(V^{-1})^*$ для $a=3$. Если потребовать, чтобы $\alpha_{\xi_1}=\alpha_{\xi_2}=\alpha_{\xi_3}=1$ (т. е. ограничиться преобразованиями точной эквивалентности), то матрицы ξ_a, которые пропорциональны единичной матрице, будут определяться с точностью до знака. ■

Таким образом, операторы $\hat P$, $\hat T$ и $\hat C$ могут быть заданы в пространстве представления алгебры AP(1, 3) I класса шестнадцатью неэквивалентными способами, соответствующими различным мультипликаторам группы G_8 (или, что то же, различным перестановочным и антиперестановочным соотношениям (2.2.9)). При этом в четырех случаях пространство представления алгебры Пуанкаре разлагается в прямую сумму двух инвариантных подпространств $D^+(m,s)\oplus D^-(m,s)$ (если $\mu_2\mu_3=\mu_1\mu_4=1$), а в двенадцати остальных случаях операторы P_μ, $\mathbf{J}$, $\mathbf{N}$ (2.2.11) реализуют прямую сумму четырех неприводимых представлений $D^+(m,s)\oplus D^-(m,s)\oplus$ $\oplus D^+(m,s)\oplus D^-(m,s)$. Явный вид операторов $\hat P$, $\hat T$ и $\hat C$ для представления (2.2.11) задается формулами (2.2.13), (2.2.21), где ξ_a — матрицы, перечисленные в (2.2.28), (2.2.29). Для других реализаций алгебры AP(1, 3), эквивалентных (2.2.11), эти операторы могут быть получены из (2.2.13), (2.2.21) с помощью замены $\Psi\to$ $\to V(\mathbf{p})\Psi$, $U_1\to U_1'=V(\mathbf{p})U_1V^{-1}(-\mathbf{p})$, $U_2\to U_2'=V(\mathbf{p})U_2V^{-1}(\mathbf{p})$, $U_3\to U_3'=V(\mathbf{p})U_3\left[V^{-1}(-\mathbf{p})\right]^*$, где $V(\mathbf{p})$ — оператор, осуществляющий преобразование эквивалентности. В частности, для представления Вигнера — Широкова — Фолди (2.1.49) получаем

$$U'_1=\xi_1,\quad U'_2=\xi_2,\quad U'_3=\xi_3\Delta. \tag{2.2.31}$$

Приведем еще явный вид матрицы Δ, входящей в определения операторов U_a (2.2.21) и U'_a (2.2.31). Если $\mu_1\mu_4=\mu_2\mu_3=1$, то

$$\Delta=\Delta_2=\begin{pmatrix}\Delta' & 0\\ 0 & \Delta'\end{pmatrix}, \tag{2.2.32}$$

где Δ' — $(2s+1)\times(2s+1)$-мерная матрица, явное выражение для которой в представлении (2.1.39) задается формулой

$$\Delta'=(i)^{2s}\exp\left[i(\lambda_2+n_2\lambda_0)\pi\right]. \tag{2.2.33}$$

Если же $\mu_1\mu_4=-1$ или $\mu_2\mu_3=-1$, то Δ является прямой суммой двух матриц Δ_2.

2.2.5. Представления II класса. Представления алгебры AP(1, 3), соответствующие нулевым собственным значениям операторов C_1 и C_2 (2.1.11) (представления II класса), имеют два дополнительных оператора Казимира C_3 и C_4 (2.1.12). Операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ должны удовлетворять совместно с C_3 и C_4 соотношениям (2.2.2) — (2.2.4), следующим образом преобразуя друг в друга пространства неприводимых представлений $D^\varepsilon(\lambda)$:

$$\begin{array}{ccc} D^\varepsilon(\lambda) & \xrightarrow{\widehat{C}} & D^{-\varepsilon}(\lambda)\\ \widehat{P}\uparrow & & \widehat{P}\downarrow\\ D^\varepsilon(-\lambda) & \xleftarrow{\widehat{C}} & D^{-\varepsilon}(-\lambda)\end{array} \tag{2.2.34}$$

Из (2.2.34) заключаем, что операторы $\widehat{P}$ и $\widehat{C}$ могут быть заданы в пространстве приводимого представления алгебры AP(1, 3), принадлежащего II классу, которое разлагается в прямую сумму по крайней мере четырех неприводимых подпространств $D^\varepsilon(\lambda)$, $D^\varepsilon(-\lambda)$, $D^{-\varepsilon}(-\lambda)$ и $D^{-\varepsilon}(\lambda)$. Базисные элементы такого представления выберем в форме (2.2.11), где λ_0 и $\widehat{\varepsilon}$ — диагональные матрицы с собственными значениями $\pm s$ и ± 1, s — фиксированное целое или полуцелое число, $\lambda\equiv 0$.

Операторы U_1, U_2 и U_3, определяющие преобразования $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ (2.2.13), представим в виде

$$U_1=\xi_1 U,\quad U_2=\xi_2,\quad U_3=\xi_3 U, \tag{2.2.35}$$

где U — оператор (2.1.52), ξ_a — операторы, которые нам предстоит найти. Используя тот факт, что оператор U изменяет знак вектора $\mathbf{n}$, входящего в генераторы (2.2.11) с $\lambda\equiv 0$, можно показать, что соотношения (2.2.14), (2.2.15) сводятся к следующим уравнениям для ξ_a:

$$\xi_1\lambda_0=-\lambda_0\xi_1,\quad \xi_2\lambda_0=\lambda_0\xi_2,\quad \xi_3\lambda_0=\lambda_0^*\xi_3, \tag{2.2.36}$$

$$\xi_1\widehat{\varepsilon}=\widehat{\varepsilon}\xi_1,\quad \xi_2\widehat{\varepsilon}=-\widehat{\varepsilon}\xi_2,\quad \xi_3\widehat{\varepsilon}=-\widehat{\varepsilon}^*\xi_3,\quad [\xi_a,\ p_b]=[\xi_a,\ x_b]=0. \tag{2.2.37}$$

Таким образом, задача описания неэквивалентных операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ для представлений алгебры AP(1, 3) II класса сводится к решению системы уравнений (2.2.20), (2.2.36), (2.2.37) для матриц λ_0, $\widehat{\varepsilon}$ и ξ_a. Неразложимые наборы матриц, удовлетворяющих этим уравнениям, с точностью до проективной эквивалентности, исчерпываются следующими комбинациями [3].

Для $\mu_1\mu_4 = 1$ размерность матриц равна 4×4, а их явный вид задается формулами

$$\widehat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = s\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\xi_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \mu_3\sigma_1 \end{pmatrix}, \; \xi_3 = \begin{pmatrix} \delta_{\mu_1} & 0 \\ 0 & \mu_2\delta_{\mu_1} \end{pmatrix}, \tag{2.2.38}$$

где σ_0, σ_1, σ_3, δ_{μ_1} — матрицы (2.2.29) размерности 2×2.

Если же $\mu_1\mu_4 = -1$, то размерность соответствующих матриц равна 8×8, причем

$$\widehat{\varepsilon} = i\begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = is\begin{pmatrix} \gamma_4 & 0 \\ 0 & -\gamma_4 \end{pmatrix},$$
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{\mu_3} & 0 \\ 0 & \Gamma_{\mu_3} \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{\mu_1\mu_2} \\ -\Gamma_{\mu_1\mu_2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.39}$$

Здесь γ_μ — матрицы Дирака (1.2.4),

$$\Gamma_{\mu_3} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \mu_3\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{\mu_1\mu_2} = \begin{pmatrix} \delta_{\mu_1} & 0 \\ 0 & \mu_2\delta_{\mu_1} \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что существуют 16 неэквивалентных способов задания операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ в пространстве представления алгебры AP(1, 3), соответствующего $P_\mu P^\mu = W_\mu W^\mu = 0$. Пространство такого представления разлагается в прямую сумму подпространств $D^+(s)\oplus D^-(-s)\oplus D^+(-s)\oplus D^-(s)$, или $2D^+(s)\oplus 2D^-(-s)\oplus \oplus 2D^+(-s)\oplus 2D^-(s)$ $(2D^\varepsilon(\mu s) = D^\varepsilon(\mu s)\oplus D^\varepsilon(\mu s))$, а операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$, $\widehat{C}$ задаются формулами (2.2.19), (2.2.35), где ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — матрицы (2.2.38) или (2.2.39).

2.2.6. Представления III—V классов. Итак, мы нашли все возможные (с точностью до проективной эквивалентности) операторы пространственной инверсии, зарядового сопряжения и обращения времени, которые могут быть заданы в пространстве представлений алгебры AP(1, 3), принадлежащих важнейшим с точки зрения физических приложений классам I и II. Аналогично могут быть найдены операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ для других классов представлений. Обсудим коротко возникающие при этом возможности.

Представления алгебры AP(1, 3), принадлежащие III классу $(P_\mu P^\mu = 0,\ -W_\mu W^\mu = r^2 > 0)$, имеют только один дополнительный оператор Казимира $C_3 = \widehat{\varepsilon} = P_0/|P_0|$, поэтому описание соответствующих операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ в принципе ничем не отличается от случая представлений I класса. Положим в (2.2.13)

$$U_1 = \xi_1 U\Lambda, \quad U_2 = \xi_2 V, \quad U_3 = \xi_3 U\Lambda\Delta, \tag{2.2.40}$$

где U и V — операторы (2.1.52) и (2.2.22) (с соответствующей матрицей λ_0), Λ и Δ — унитарные матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\Lambda\lambda_0 = -\lambda_0\Lambda, \quad \Lambda\boldsymbol{\lambda} = \left(-\boldsymbol{\lambda} + \frac{2(\mathbf{n}\times\mathbf{n}'')(\mathbf{n}\times\mathbf{n}''\cdot\boldsymbol{\lambda})}{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'')^2}\right)\Lambda \tag{2.2.41}$$

и соотношениям (2.2.23). В результате, используя следующие свойства операторов $U\Lambda$ и Λ:

$$\begin{gathered} U\Lambda\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}U\Lambda, \quad U\Lambda(\mathbf{J}, \mathbf{N}) = (\mathbf{J}', \mathbf{N}')U\Lambda, \\ U\Lambda(P_0, \mathbf{P}) = (P_0, \mathbf{P})U\Lambda, \quad V\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\lambda}V, \end{gathered} \tag{2.2.42}$$

где $\mathbf{J}'$ и $\mathbf{N}'$ получаются из $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$ заменой $\mathbf{p}\to -\mathbf{p}$, снова приходим к уравнениям (2.2.20) для матриц ξ_a, общее решение которых приведено в (2.2.27), (2.2.28) (где I обозначает единичный оператор в пространстве неприводимого представления алгебры AE(2). Соответствующее представление алгебры AP(1, 3) разлагается в прямую сумму либо двух неприводимых представлений $D^{\varepsilon}(r)\oplus D^{-\varepsilon}(r)$ (если $\mu_1\mu_4 = \mu_2\mu_3 = 1$), либо четырех неприводимых представлений $D^{\varepsilon}(r)\oplus D^{-\varepsilon}(r)\oplus D^{\varepsilon}(r)\oplus D^{-\varepsilon}(r)$ (для всех остальных комбинаций значений μ_k). Явные выражения для матриц Λ и Δ в базисе (2.1.39) задаются формулами

$$\begin{aligned} &\Lambda = \Lambda_1\cos\varphi + \Lambda_2\sin\varphi, \quad \Delta = \Lambda_1, \\ &\varphi = \operatorname{arctg}\frac{n_1''(1+n_3) - n_1(n_3'' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'')}{n_2''(1+n_3) - n_2(n_3'' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'')}, \\ &\Lambda_1|0, r, \lambda\rangle = (-1)^{[\lambda]}|0, r, -\lambda\rangle, \\ &\Lambda_2|0, r, \lambda\rangle = i(-1)^{[\lambda]}\operatorname{sign}\lambda\,|0, r, -\lambda\rangle, \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

где $[\lambda]$ — целая часть числа λ.

Более сложная ситуация возникает в случае, когда операторы P_0, P, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$ из (2.2.10) образуют представление алгебры Пуанкаре IV класса, соответствующее отрицательным собственным значениям оператора Казимира $P_\mu P^\mu$. Такие представления можно разделить на два подкласса. Подкласс IVA, для которого собственные значения оператора $W_\mu W^\mu$ равны $\eta^2 l(l+1)$ (см. (2.1.43)), имеет дополнительный оператор Казимира $C_5 = W_0/|W_0|$. Представления, принадлежащие этому подклассу, будем обозначать символом $D(\eta, l, \mu)$, где $\mu = \pm 1$ задает собственное значение оператора $W_0/|W_0|$. Другой подкласс — IVБ — соответствует отрицательным собственным значениям $W_\mu W^\mu$ и не имеет дополнительных операторов Казимира. Для обозначения представлений подкласса IVБ используем символ $D(\eta, \alpha)$.

Операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ могут быть заданы в пространстве приводимого представления $D(\eta, l, \mu) \oplus D(\eta, l, -\mu)$ (если $\mu_1\mu_4 = \mu_2\mu_3 = 1$), или $D(\eta, l, \mu) \oplus D(\eta, l, -\mu) \oplus D(\eta, l, \mu) \oplus D(\eta, l, -\mu)$ (если $\mu_1\mu_4 = -1$ или $\mu_2\mu_3 = -1$). Явный вид этих операторов, с точностью до преобразований эквивалентности, задается формулами (2.2.17), (2.2.35), где ξ_a — матрицы, приведенные в (2.2.27), (2.2.28). Символ I в (2.2.27), (2.2.28) обозначает в этом случае единичный оператор в пространстве неприводимого представления $D(\eta, l, \varepsilon\mu)$, $\varepsilon = \pm 1$.

Для подкласса IVБ операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ задаются в пространстве неприводимого представления $D(\eta, \alpha)$, или в пространстве прямой суммы двух эквивалентных представлений $D(\eta, \alpha) \oplus D(\eta, \alpha)$, или, наконец, в пространстве представления, являющегося прямой суммой четырех неприводимых представлений $D(\eta, \alpha)$. Явный вид неэквивалентных операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ определяется соотношениями (2.2.17), (2.2.40), (2.2.43), где ξ_a — матрицы, удовлетворяющие уравнениям (2.2.20), (2.2.26). Явный вид неразложимых матриц ξ_a задается следующими формулами:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = I,$$
$$\mu_3 = 1, \quad \mu_2 = -1 \text{ или } \mu_1\mu_4 = -1,$$
$$\xi_1 = \delta_{\mu_2}, \quad \xi_2 = \delta_{\mu_1}, \quad \xi_3 = \alpha_{\mu_4},$$
$$\mu_3 = -1, \quad \mu_2 = \mu_1 = \mu_4 = 1, \quad \xi_1 = \sigma_3, \quad \xi_2 = \sigma_2, \quad \xi_3 = \delta_{-\mu_1}, \tag{2.2.44}$$

а для значений μ_k, не входящих в (2.2.44),— формулами (2.2.27), (2.2.28), где I — единичный оператор в пространстве неприводимого представления $D(\eta, \alpha)$.

Остановимся еще на конечномерных представлениях V класса, соответствующих $p_\mu \equiv 0$. Описание неэквивалентных операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$, которые можно задать в пространстве этих представлений, представляет особый интерес, так как именно такие операторы можно определить на множестве решений релятивистских волновых уравнений.

Согласно (2.2.2) — (2.2.4) операторы $\widehat{P}$ и $\widehat{T}$ должны антикоммутировать с $C_7 = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma}$. Отсюда заключаем, что эти операторы переводят вектор из пространства неприводимого представления $D(l_0, l_1)$ в вектор из пространства представления $D(-l_0, l_1)$. Следовательно, операторы $\widehat{P}$ и $\widehat{T}$ можно определить только для прямой суммы неприводимых представлений $D(l_0, l_1) \oplus D(-l_0, l_1)$ (за исключением случая $l_0 = 0$, когда в принципе можно ограничиться одним неприводимым представлением).

Пусть $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие прямую сумму неприводимых представлений $D(l_0, l_1) \oplus D(-l_0, l_1)$ при фиксированных l_0 и l_1, $l_0 \neq 0$ (каждое неприводимое представление может встретиться с некоторой кратностью). Соответствующие операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ задаются формулами (2.2.18), где ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — матрицы, удовлетворяющие соотношениям (2.2.19), (2.2.20). Все неэквивалентные матрицы ξ_a задаются формулами

$$\xi_1 = \xi_1' \widehat{p}, \quad \xi_2 = \xi_2' \widehat{p}, \quad \xi_3 = \xi_3' \widehat{p}, \tag{2.2.45}$$

где ξ_a', $\widehat{p}$ — матрицы, перечисленные в следующей таблице:

Таблица 3

Значения $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$	$\mu_1\mu_2\mu_3=1$ $\mu_4=1$	$\mu_1\mu_2\mu_3=-1$ $\mu_4=1$	$\mu_1\mu_2\mu_3=-1$ $\mu_4=-1$	$\mu_1\mu_2\mu_3=1$ $\mu_4=-1$
Представление, реализуемое матрицами	$D(l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(-l_0, l_1)$	$D(l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(-l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(-l_0, l_1)$	$D(l_0, l_1)\oplus D(-l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(l_0, l_1)\oplus D(-l_0, l_1$	$D(l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(-l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(l_0, l_1)\oplus$ $\oplus D(-l_0, l_1)$
ξ'_1	σ_1	$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}$
ξ'_2	α_{μ_3}	$\begin{pmatrix}0 & \delta_{\mu_3}\\ \delta_{\mu_3} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & \delta_{\mu_3}\\ \delta_{\mu_3} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{\mu_3} & 0\\ 0 & \alpha_{\mu_3}\end{pmatrix}$
ξ'_3	δ_{μ_2}	$\begin{pmatrix}\delta_{\mu_2} & 0\\ 0 & \delta_{\mu_2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & \alpha_{-\mu_2}\\ \mu_1\alpha - \mu_2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -\delta_{\mu_2}\\ \delta_{\mu_2} & 0\end{pmatrix}$
$\widehat{p}$	$p_{(2)} = \begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}p_{(2)} & 0\\ 0 & p_{(2)}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}p_{(2)} & 0\\ 0 & p_{(2)}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}p_{(2)} & 0\\ 0 & p_{(2)}\end{pmatrix}$

Здесь α_{μ_i}, δ_{μ_i} — матрицы (2.2.29), где I — единичные матрицы в пространстве неприводимого представления $D(l_0, l_1)$, $\widehat{p}$ — матрицы пространственной инверсии для неприводимого представления $D(l_0, l_1)$, определяемые соотношением

$$p|l_0, l_1; l, m\rangle = (-1)^{[l]}|-l_0, l_1; l, m\rangle. \tag{2.2.46}$$

Подчеркнем, что формулы (2.2.45) справедливы только для представлений алгебры АО(1, 3) в базисе (2.1.64)—(2.1.66).

Для представления типа $D(0, l_1)$ неэквивалентные операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ также задаются формулами (2.2.45), где ξ_a' — матрицы, приведенные в формулах (2.2.24) (а для значений μ_k, не входящих в (2.2.24), в формулах (2.2.27), (2.2.28)). Таким образом, операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ могут быть заданы в пространстве представления алгебры АО(1, 3) шестнадцатью неэквивалентными способами (соответствующими возможным значениям параметров μ_k, определяющих мультипликаторы группы G_8).

В заключение отметим, что в случае двузначных представлений группы $P(1, 3)$ операторы $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ могут определяться так, чтобы $\widehat{P}^2 = \pm 1$, $\widehat{C}^2 = \pm 1$ и $\widehat{T}^2 = \pm 1$, поскольку двойное отражение можно сопоставить как тождественному преобразованию, так и повороту на угол 2π (который в двузначных представлениях сводится к умножению на -1). При этом всевозможные произведения операторов $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ также образуют конечномерную группу, причем число различных групп (соответствующих различному выбору $\widehat{P}^2$, $\widehat{T}^2$ и $\widehat{C}^2$ и различным правилам коммутации $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ друг с другом) равно 64. Однако, с точностью до проективной эквивалентности, неприводимые представления этих групп сводятся к представлениям группы G_8, задаваемой таблицей 1.

§ 2.3. Пуанкаре-инвариантные уравнения первого порядка

2.3.1. Введение. В этом и в трех последующих параграфах излагаются элементы теории пуанкаре-инвариантных уравнений движения частиц произвольного спина, простейшими (и одновременно важнейшими) примерами которых являются уравнения КГФ, Дирака и Максвелла, которые рассматривались в гл. 1.

Пусть $\{\Psi(x)\}$ — множество решений уравнения движения релятивистской частицы с фиксированными массой и спином. В релятивистской квантовой теории пространство состояний свободной (невзаимодействующей) частицы отождествляется с пространством неприводимого представления группы Пуанкаре. Поэтому $\{\Psi(x)\}$, по определению, должно быть инвариантно относительно алгебры Ли группы $P(1, 3)$ и для каждого $\Psi \in \{\Psi(x)\}$ должны выполняться условия

$$P_\mu P^\mu \Psi = m^2\Psi, \quad W_\mu W^\mu \Psi = -m^2 s(s+1)\Psi, \tag{2.3.1}$$

где m и s — параметры, задающие массу и спин частицы, $P_\mu P^\mu$ и $W_\mu W^\mu$ — инвариантные операторы группы Пуанкаре (см. п. 2.1.2).

Соотношения (2.3.1) гарантируют неприводимость представления группы Пуанкаре, которое реализуется на множестве $\{\Psi(x)\}$. Если задаться какой-либо конкретной реализацией базисных элементов представления (в общем случае приводимого) алгебры AP(1, 3), то условия (2.3.1) сами по себе можно рассматривать как систему линейных уравнений, описывающих движения частицы спина s и массы m, так как множество их решений совпадает с пространством неприводимого представления $D(m, s)$ группы $P(1, 3)$.

Все известные пуанкаре-инвариантные уравнения для частиц с фиксированными массой и спином по существу являются той или иной формой записи условий (2.3.1). Так, например, для ковариантных представлений алгебры AP(1, 3) соотношения (2.3.1) задают систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которая в случае $s = 1$ сводится к уравнениям Прока [96]. Уравнение Дирака также можно рассматривать как способ задания условий (2.3.1) с помощью дифференциального уравнения первого порядка.

Ниже мы изложим основные элементы теории пуанкаре-инвариантных уравнений вида

$$(\beta_\mu p^\mu - \beta_4 m)\Psi = 0, \tag{2.3.2}$$

где β_μ, β_4 — числовые матрицы, а Ψ — вектор-функция (матрица-столбец). Важность анализа таких уравнений обусловлена тем обстоятельством, что уравнения, включающие производные произвольного порядка, всегда могут быть сведены к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка путем введения новых зависимых переменных. Так, например, уравнение КГФ (1.1.1), как хорошо известно, с помощью замены $p_\mu\Phi = m\Psi_\mu$, $\Phi = \Psi_4$ может быть приведено к форме (2.3.2), где Ψ — столбец с компонентами Ψ_4, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, $\beta_4 = 1$, а β_μ — матрицы Кеммера — Деффина размерности 5×5 (см. ниже (2.3.21)).

Пуанкаре-инвариантность системы уравнений (2.3.2) означает, что эта система имеет десять независимых операторов симметрии, удовлетворяющих алгебре AP(1, 3). Ограничиваясь случаем, когда такие операторы принадлежат классу $\mathfrak{M}_1$ (т. е. имеют ковариантную форму (2.1.57)), естественно приходим к следующему определению.

Определение 2.1. Будем говорить, что *уравнение* (2.3.2) *пуанкаре-инвариантно и описывает частицу с массой m и спином s*, если на множестве его решений реализуется ковариантное представление алгебры AP(1, 3), причем для операторов Казимира этой алгебры выполняются соотношения (2.3.1).

Релятивистские уравнения вида (2.3.2), где β_4 — обратимая матрица, являются хорошо изученным объектом. В работах Баба [156], Хариш-Чандры [234], Уайлда [317], Умедзавы [96] найден общий вид матриц β_μ, при которых уравнение (2.3.2) оказывается инвариантным относительно группы Пуанкаре, и сформулированы дополнительные условия, которым должны удовлетворять эти матрицы, чтобы уравнение (2.3.2) описывало частицу с фиксированными массой и спином. В нашей стране начало исследований таких уравнений было положено в работе Тамма и Гинзбурга [26], важные результаты в этом направлении были получены Давыдовым [29], Федоровым [97] и особенно Гельфандом и Ягломом [22], которые в рамках единого подхода описали как конечномерные, так и бесконечномерные уравнения первого порядка с группой симметрии $P(1, 3)$. Тем не менее теория пуанкаре-инвариантных уравнений вида (2.3.2) все еще далека от своего завершения; в частности, почти неисследованными остаются уравнения с сингулярными матрицами β_4, а также уравнения, на множестве решений которых реализуются не вполне приводимые представления группы Лоренца; см. [97, 141, 289, 238].

2.3.2. Условия релятивистской инвариантности уравнения (2.3.2). Ограничимся случаем, когда представление алгебры AP(1, 3) на множестве решений уравнения (2.3.2) вполне приводимо, тогда базисные элементы этой алгебры задаются формулами (2.1.57), где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие прямую сумму неприводимых представлений алгебры AO(1, 3).

Пусть число уравнений в системе (2.3.2) равно числу неизвестных. По аналогии с (1.2.21) условие инвариантности такой системы относительно алгебры AP(1, 3) может быть записано в виде

$$[Q_A, \beta^\mu p_\mu - \beta_4 m] = \beta_{Q_A}(x)\left(\beta^\mu p_\mu - \beta_4 m\right), \qquad (2.3.3)$$

где Q_A — любой оператор из множества (2.1.57), $\beta_{Q_A}(x)$ — матрица размерности $n\times n$, в общем случае зависящая от x и Q_A. Подставив в (2.3.3) явные выражения операторов симметрии (2.1.57) и приравнивая коэффициенты при одинаковых операторах дифференцирования, убеждаемся, что для $Q_A\in\{P_\mu\}$ условие (2.3.3) выполняется тождественно, а для $Q_A\in\{J_{\mu\nu}\}$ получаем следующие уравнения, которым должны удовлетворять матрицы β_μ, β_4, $\beta_{Q_A}=\beta_{\mu\nu}$:

$$[S_{\mu\nu},\ \beta_\lambda]=i(g_{\nu\lambda}\beta_\mu-g_{\mu\lambda}\beta_\nu)+\beta_{\mu\nu}\beta_\lambda,$$

$$[S_{\mu\nu},\ \beta_4]=\beta_{\mu\nu}\beta_4,$$

или

$$\tilde{S}_{\mu\nu}\beta_\lambda-\beta_\lambda S_{\mu\nu}=i(g_{\nu\lambda}\beta_\mu-g_{\mu\lambda}\beta_\nu),\quad \tilde{S}_{\mu\nu}\beta_4-\beta_4 S_{\mu\nu}=0, \qquad (2.3.4)$$

где мы ввели обозначение $\tilde{S}_{\mu\nu}=S_{\mu\nu}-\beta_{\mu\nu}$.

Используя тот факт, что матрицы $S_{\mu\nu}$ удовлетворяют алгебре AO(1, 3), нетрудно убедиться, что соотношения (2.3.4) накладывают следующие условия на матрицы $\tilde{S}_{\mu\nu}$:

$$[\tilde{S}_{\mu\nu},\ \tilde{S}_{\lambda\sigma}]\,\beta_x=i(g_{\mu\sigma}\tilde{S}_{\nu\lambda}+g_{\nu\lambda}\tilde{S}_{\mu\sigma}-g_{\nu\sigma}\tilde{S}_{\mu\lambda}-g_{\mu\lambda}\tilde{S}_{\nu\sigma})\,\beta_k. \qquad (2.3.5)$$

Достаточным условием справедливости (2.3.5) является требование, чтобы матрицы $\tilde{S}_{\mu\nu}$ реализовали представление алгебры AO(1, 3) (которое в общем случае может отличаться от представления, задаваемого матрицами $S_{\mu\nu}$). Если выполняются соотношения (2.3.4), где $S_{\mu\nu}$ и $\tilde{S}_{\mu\nu}$ — матрицы, удовлетворяющие алгебре AO(1, 3), то будем говорить, что уравнение (2.3.2) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре в сильном смысле, или S-инвариантно.

Таким образом, мы естественно приходим к следующему определению.

Определение 2.2. *Уравнение* (2.3.2) *S-инвариантно относительно алгебры Пуанкаре*, если существуют такие матрицы $S_{\mu\nu}$ и $\tilde{S}_{\mu\nu}$, образующие представления алгебры AO(1, 3), что для β_μ и β_4 выполняются соотношения (2.3.4).

Подчеркнем, что приведенное определение задает только достаточные условия пуанкаре-инвариантности системы (2.3.2), так как в общем случае алгебра AP(1, 3) может реализоваться операторами, не принадлежащими классу $\mathfrak{M}_1$, и, кроме того, матрицы $\tilde{S}_{\mu\nu}$ не обязательно должны удовлетворять алгебре AO(1, 3), поскольку условие (2.3.5) является более слабым.

Отметим, что определение 2.1 сохраняет силу и в том случае, когда число компонент функции Ψ в (2.3.2) не совпадает с числом уравнений. При этом β_μ, β_4 являются прямоугольными матрицами размерности $m\times n$, а $S_{\mu\nu}$ и $\tilde{S}_{\mu\nu}$ — квадратными матрицами размерности $m\times m$ и $n\times n$ соответственно.

В дальнейшем мы ограничимся анализом пуанкаре-инвариантных уравнений (2.3.2) с квадратными матрицами β_μ, β_4, где β_4 несингулярна. Теория уравнений с сингулярной матрицей β_4 еще весьма далека от завершения, хотя в последнее время в ней получены важные результаты [242, 289].

Если β_4 имеет обратную матрицу, то, не умаляя общности, можно положить $\beta_4 = I$ (I — единичная матрица соответствующей размерности). При этом система (2.3.2) принимает вид

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi = 0. \tag{2.3.6}$$

Согласно (2.3.4) из соотношения $\beta_4 = I$ следует $\tilde{S}_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}$, и условия пуанкаре-инвариантности уравнения (2.3.6) записываются в форме следующих коммутационных соотношений для матриц $S_{\mu\nu}$ и β_λ:

$$[S_{\mu\nu},\ \beta_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}\beta_\mu - g_{\mu\lambda}\beta_\nu). \tag{2.3.7}$$

Общее решение уравнений (2.3.7) для случая, когда $S_{\mu\nu}$ вполне приводимы, дается в следующем пункте.

2.3.3. Явный вид матриц β_μ. Решение уравнений (2.3.7), вообще говоря, должно включать следующие этапы:

а) нахождение матриц $S_{\mu\nu}$, удовлетворяющих алгебре $AO(1, 3)$ (2.1.58), т. е. описание представлений этой алгебры;

б) отбор таких представлений, для которых уравнения (2.3.7) имеют нетривиальные решения;

в) и, наконец, определение явного вида матриц β_μ, задающих такие решения.

Ограничимся случаем, когда $S_{\mu\nu}$ реализуют конечномерное приводимое представление алгебры $AO(1, 3)$. Такое представление, не умаляя общности, можно выбрать в виде прямой суммы неприводимых представлений, перечисленных в п. 2.1.8.

Обозначим символом $|(j\tau;\ l,\ m)_\lambda\rangle$ вектор, принадлежащий пространству неприводимого представления $D(j\tau)$ и являющийся собственным вектором операторов (2.1.60), (2.1.65) (индекс λ введен для нумерации пространств эквивалентных представлений), и символом $\langle (j\tau;\ lm)_\lambda | \beta_\mu | (j'\tau';\ l'm')_{\lambda'}\rangle$ — матричные элементы матриц β_μ, входящих в инвариантное уравнение (2.3.6). Основное утверждение относительно общего вида матриц β_μ, удовлетворяющих уравнениям (2.3.7), может быть сформулировано следующим образом [164].

Теорема 2.5. *Пусть $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие прямую сумму неприводимых представлений $D(j\tau)$ алгебры $AO(1, 3)$, β_μ — матрицы, удовлетворяющие соотношениям (2.3.7). Тогда матричные элементы β_0 отличны от нуля только в тех случаях, когда $|j - j'| = 1/2$ и $|\tau - \tau'| = 1/2$, причем*

$$\begin{gathered}
\left\langle (j\tau;\ lm)_\lambda \left| \beta_0 \right| \left(j - \tfrac{1}{2}\,\tau + \tfrac{1}{2};\ l',\ m'\right)_{\lambda'} \right\rangle = \\
= C_{\lambda\lambda'}\delta_{mm'}\delta_{ll'}\,[(j + l - 1)(\tau - j + l + 1)]^{1/2}, \\
\left\langle (j\tau;\ lm)_\lambda \left| \beta_0 \right| \left(j - \tfrac{1}{2}\,\tau - \tfrac{1}{2};\ l'm'\right)_{\lambda'} \right\rangle = \\
= (-1)^{j+\tau+l} C_{\lambda\lambda'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,[(j + \tau - l)(j + \tau + l + 1)]^{1/2}, \\
\left\langle \left(jj + \tfrac{1}{2};\ \ lm\right)_\lambda \left| \beta_0 \right| \left(j + \tfrac{1}{2}\,j;\ l'm'\right)_{\lambda'} \right\rangle = \\
= (-1)^{[l]+1} C_{\lambda\lambda'}\,(l + 1/2)\,\delta_{ll'}\delta_{mm'},
\end{gathered} \tag{2.3.8}$$

где $j - \tau \leqslant j + \tau$, $|j - \tau| \leqslant l \leqslant j + \tau$, $[l]$ — целая часть l,

$$\langle (j\tau;\, lm)_\lambda \,|\, \beta_0 \,|\, j'\tau';\, l'm')_{\lambda'} \rangle = (-1)^{2j+2} \langle j'\tau';\, l'm')_\lambda \,|\, \beta_0 \,|\, (j\tau;\, lm)_{\lambda'} \rangle,$$

$$\langle (j\tau;\, lm)_\lambda \,|\, \beta_0 \,|\, (j'\tau';\, l'm')_{\lambda'} \rangle = \qquad (2.3.9)$$

$$= -\langle \tau j;\, lm \rangle_\lambda \,|\, \beta_0 \,|\, (\tau' j';\, lm)_{\lambda'} \rangle, \qquad j \neq \tau, \quad j' \neq \tau',$$

$$\left\langle \left(j - \frac{1}{2}\, j + \frac{1}{2};\, l,\, m \right)_\lambda \,|\, \beta_0 \,|\, (jj;\, l'm')_{\lambda'} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{2j+l-1}\, C_{\lambda\lambda'}\, [s(s+1)]^{1/2}\, \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \qquad (2.3.10)$$

Здесь $C_{\lambda\lambda'}$ — произвольные комплексные числа. Матричные элементы β_1, β_2 и β_3 могут быть получены из (2.3.9), (2.3.10) с использованием соотношений (2.3.7).

Таким образом, даже при заданном представлении алгебры АО(1, 3), по которому преобразуются решения релятивистски инвариантного уравнения (2.3.6), матрицы β_μ определяются не однозначно, но с точностью до произвольных комплексных коэффициентов $C_{\lambda\lambda'}$. Число этих произвольных коэффициентов можно уменьшить, если потребовать инвариантности уравнения (2.3.6) относительно пробразований P, T и C. Действительно, пусть λ, λ' и ν, ν' нумеруют две пары неэквивалентных неприводимых представлений, которые переходят друг в друга под действием операции пространственного отражения, тогда для P-инвариантности (2.3.6) необходимо, чтобы $C_{\lambda\lambda'} = -C_{\nu\nu'}$. Другие ограничения на значения $C_{\lambda\lambda'}$ рассматриваются в следующем пункте.

2.3.4. Дополнительные ограничения для матриц β_μ. Если ограничиться вполне приводимыми представлениями алгебры АР(1, 3), то формулы (2.3.8)—(2.3.10) задают все возможные матрицы β_μ, при которых уравнение (2.3.2) S-инвариантно относительно алгебры АР(1, 3). Однако решение этого уравнения в общем случае не удовлетворяет условиям (2.3.1), и в силу определения 2.2 его нельзя априори интерпретировать как уравнение движения частицы с фиксированными массой и спином.

Уравнения (2.3.1) налагают дополнительные ограничения на вид матриц β_μ. Как показано в [96], необходимым и достаточным условием выполнения первого из соотношений (2.3.1) является требование, чтобы для матрицы β_0 выполнялось

$$\beta_0^{2s+1} = \beta_0^{2s-1}, \qquad (2.3.11)$$

где s — максимальное значение спина, возникающее при редукции представления алгебры матриц $S_{\mu\nu}$ по алгебре АО(3). Согласно (2.3.11) собственные значения матрицы β_0^2 могут равняться только 0 или 1.

Таким образом, первое из условий (2.3.1) допускает простую формулировку (2.3.11). Что же касается второго уравнения (2.3.1), которое гарантирует единственность значения спина частицы, описываемой системой (2.3.2), то оно сводится к следующим соотношениям для матрицы β_0:

$$\mathbf{S}^2 P \equiv \frac{1}{2} S_{ab} S_{ab} P = s(s+1) P, \qquad (2.3.12)$$

где P — проектор на подпространство, соответствующее ненулевым собственным значениям матрицы β_0. Этот проектор имеет вид*)

$$P = \begin{cases} \beta_0^{2s-1}, & s \text{ — полуцелые,} \\ \beta_0^{2s}, & s \text{ — целые.} \end{cases} \tag{2.3.13}$$

Еще одно ограничение на матрицы β_μ может быть получено, исходя из требования, чтобы уравнение (2.3.2) допускало лагранжеву формулировку, т. е. могло быть выведено с помощью принципа минимального действия из соответствующим образом подобранного пуанкаре-инвариантного лагранжиана. Это требование означает, что должна существовать несингулярная «эрмитизирующая» матрица η, удовлетворяющая условиям

$$\eta S_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^{+}\eta, \tag{2.3.14}$$

$$\eta\beta_\mu = \beta_\mu^{+}\eta. \tag{2.3.15}$$

Необходимым и достаточным условием существования матрицы η, удовлетворяющей (2.3.14), является требование, чтобы в представление D алгебры АО(1, 3), реализуемое матрицами $S_{\mu\nu}$, каждое неприводимое представление $D(j\tau)$ входило вместе с сопряженным представлением $D(\tau j)$, если $j \neq \tau$. При этом условия (2.3.14) определяют матрицу η однозначно, если каждое представление $D(j\tau)$ встречается с кратностью единица [164]. Явный вид η задается формулами:

а) $$D = D(0j) \oplus D(j0), \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.16}$$

где 0 и I — $(2j+1)$-рядные нулевые и единичные матрицы;

б) $$D = D(j\tau) \oplus D(\tau j), \quad j \neq \tau, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & P_{j\tau} \\ P_{\tau j} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.17}$$

где $P_{j\tau}$ — матрицы размерности $[(2j+1)(2\tau+1)]^2$, задаваемые соотношениями (2.2.46) (там они обозначены символом p);

в) $$D = D(jj), \qquad \eta = P_{jj}. \tag{2.3.18}$$

Поскольку представление D более общего вида представляет собой прямую сумму представлений а), б), в), то формулы (2.3.16) — (2.3.18) по существу задают общий вид оператора η для случая, когда эта прямая сумма невырождена. Относительно общего вида матрицы η в случае, когда $S_{\mu\nu}$ задают вырожденную прямую сумму неприводимых представлений, см., например, [23].

Итак, общий вид матриц β_μ, задающих пуанкаре-инвариантное уравнение движения частицы произвольного спина s типа (2.3.2), задается формулами (2.3.8) — (2.3.10), причем коэффициенты $C_{ll'}$ должны удовлетворять дополнительным условиям, вытекающим из

---

*) Условия (2.3.12), (2.3.13) для полуцелого спина приведены в [164], а обобщение их на случай целого спина с использованием результатов [164] почти очевидно.

соотношений (2.3.11)—(2.3.13), (2.3.15)—(2.3.18). В следующих пунктах мы рассмотрим примеры таких уравнений для $s \leqslant 3/2$.

2.3.5. Уравнение Кеммера — Деффина — Петье (КДП). Простейшим примером пуанкаре-инвариантного уравнения вида (2.3.2) является уравнение Дирака, подробно рассматриваемое выше в § 1.2. Здесь мы не будем на нем останавливаться, отметим только, что это уравнение может быть получено из общих формул (2.3.8)—(2.3.10), если исходить из представления $D = D\left(0\,\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2}\,0\right)$. Матрица Дирака $\gamma_0 \equiv \beta_0$ удовлетворяет условиям (2.3.11)—(2.3.13), а матрица η совпадает с γ_0.

Рассмотрим другие, более сложные примеры. Выбирая представление алгебры АО(1, 3):

$$D = D(0\,0) \oplus D\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right), \tag{2.3.19}$$

из (2.3.8), (2.3.9), (2.3.11)—(2.3.15), (2.3.18) получаем выражения для матриц β_μ в базисе $\Psi =$ столбец $\left(|0\,0;\,0\,0\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2};\,0\,0\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2};\,1\,1\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2};\,1\,0\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2};\,1-1\right\rangle\right)$ (произвольная константа C_{10} из (2.3.8), не умаляя общности, может быть выбрана равной единице):

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -i\;\tilde{0} \\ \hline i & \\ \tilde{0}^+ & \hat{0} \end{array}\right), \qquad \beta_Q = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\;\lambda_a \\ \hline 0 & \\ -\lambda_a^+ & \hat{0} \end{array}\right), \tag{2.3.20}$$

где $\hat{0}$ и $\tilde{0}$ — нулевые матрицы размерности 4×4 и 1×3, λ_a — матрицы-строки

$$\lambda_1 = (i\,0\,0), \quad \lambda_2 = (0\,i\,0), \quad \lambda_3 = (0\,0\,i). \tag{2.3.21}$$

Уравнение (2.3.6) с матрицами (2.3.20) описывает частицу с массой m и спином $s = 0$. Действительно, как нетрудно убедиться, матрица β_0 удовлетворяет критериям (2.3.11), (2.3.13), (2.3.15), где

$$S_{\mu\nu} = i\,[\beta_\mu, \beta_\nu], \qquad \eta = \left(1 + 2\beta_1^2\right)(1 + 2\beta_2)^2\left(1 + 2\beta_3^2\right). \tag{2.3.22}$$

Формулы (2.3.6), (2.3.20) определяют уравнение КДП для скалярных частиц. Матрицы (2.3.20) удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = g_{\mu\nu}\beta_\rho + g_{\nu\rho}\beta_\mu. \tag{2.3.23}$$

Соотношения (2.3.23) определяют эти матрицы с точностью до унитарной эквивалентности.

Уравнение КДП для скалярных частиц инвариантно относительно преобразований P, T и C, которые на множестве решений уравнений (2.3.6), (2.3.20) задаются формулами (1.2.59), (1.2.65), где $\Psi(x)$ — пятикомпонентная волновая функция,

$$r_1 = \left(1 - 2\beta_0^2\right), \qquad r_2 = 1, \qquad r_3 = \eta. \tag{2.3.24}$$

Рассмотрим еще уравнение КДП для векторных частиц, которое представляет собой систему (2.3.6) с матрицами β_μ размерности 10×10, реализующими неприводимое представление алгебры (2.3.23). Для большинства приложений явный вид β_μ не требуется (так как соотношения (2.3.23) определяют их с точностью до эквивалентности).

Мы выберем для конкретности следующую реализацию:

$$\beta_0 = i\begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \mathrm{I} & \widetilde{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{0} & \widetilde{0} \\ -\mathrm{I} & \widehat{0} & \widehat{0} & \widetilde{0} \\ \widetilde{0}^\dagger & \widetilde{0}^\dagger & \widetilde{0}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \begin{Vmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{0} & \lambda_a^\dagger \\ \widehat{0} & \widehat{0} & -S_a & \widetilde{0} \\ \widehat{0} & S_a & \widehat{0} & \widetilde{0} \\ -\lambda_a & \widetilde{0}^\dagger & \widetilde{0}^\dagger & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (2.3.25)$$

Здесь $\widehat{0}$ и $\widetilde{0}$ — нулевые матрицы размерности 3×3 и 3×1, I — трехрядная единичная матрица, S_a — матрицы следующего вида:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.26)$$

Матрицы (2.3.25) удовлетворяют алгебре КДП (2.3.23), откуда вытекает, что они удовлетворяют также условиям (2.3.7), где $S_{\mu\nu}$ задаются формулами (2.3.22) и реализуют представление $D(1\,0)\oplus$ $\oplus D(0\,1)\oplus D\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)$ алгебры $AO(1,\,3)$. Следовательно, уравнение (2.3.6) с матрицами (2.3.25) S-инвариантно относительно алгебры Пуанкаре. Это уравнение описывает релятивистскую частицу со спином $s=1$ и массой m, поскольку матрицы β_μ удовлетворяют условиям (2.3.11), (2.3.12) для $s=1$.

Уравнение КДП для векторных частиц P-, T-, C-инвариантно и допускает лагранжеву формулировку. Операторы P-, T-, C-преобразований для множества решений этого уравнения и эрмитизирующая матрица η задаются формулами (1.2.59), (1.2.65), (2.3.24), (2.3.22), где β_μ — десятирядные матрицы КДП.

Отметим, что наряду с β_0, β_1, β_2 и β_3 существует также пятая матрица, удовлетворяющая совместно с β_μ алгебре (2.3.23). Эта матрица определяется согласно следующему соотношению:

$$\beta_4 = \frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho\beta^\sigma. \qquad (2.3.27)$$

В представлении (2.3.25)

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{\mathrm{I}} & \widehat{0} & \widetilde{0} \\ -\mathrm{I} & \widehat{0} & \widehat{0} & \widetilde{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{0} & \widetilde{0} \\ \widetilde{0}^+ & \widetilde{0}^+ & \widetilde{0}^+ & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.28)$$

2.3.6. Уравнение Дирака — Фирца — Паули для спина 3/2. В качестве последнего примера релятивистских уравнений в частных производных первого порядка рассмотрим уравнение, описывающее частицу со спином $s=3/2$.

Будем исходить из следующего представления алгебры AO(1, 3):

$$D = D\left(1\,\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(0\,\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2}\,0\right) \oplus D\left(\frac{1}{2}\,1\right). \qquad (2.3.29)$$

Можно показать, что формула (2.3.29) определяет простейшее (т. е. реализуемое матрицами минимальной размерности) представление матриц $S_{\mu\nu}$, для которого имеется нетривиальное решение уравнений (2.3.7), (2.3.12) — (2.3.15) для $s = 3/2$.

Вектор из пространства представления (2.3.29) — это матрица-столбец, имеющая 16 строк. Мы будем использовать для такого вектора следующее обозначение:

$$\Psi = \text{столбец}\left(\Phi_{\frac{3}{2}}^{\left(1\frac{1}{2}\right)},\ \Phi_{\frac{1}{2}}^{\left(1\frac{1}{2}\right)},\ \Phi_{\frac{1}{2}}^{\left(0\frac{1}{2}\right)},\ \Phi_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1}{2}0\right)},\ \Phi_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1}{2}1\right)},\ \Phi_{\frac{3}{2}}^{\left(\frac{1}{2}1\right)}\right), \qquad (2.3.30)$$

где $\Psi_s^{(j\tau)}$ — собственные векторы операторов $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}S^{\mu\nu}S^{\rho\sigma}$ и $\vec{S}^2 = \frac{1}{2}S_{ab}S_{ab}$,

$$\Psi_s^{(j\tau)} \in D(j\tau), \qquad \mathbf{S}^2\Psi_s^{(j\tau)} = s(s+1)\,\Psi_s^{(j\tau)}. \qquad (2.3.31)$$

Из (2.3.8) — (2.3.10) получаем следующее общее выражение для матрицы β_0 в базисе (2.3.31):

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & 2C_2 \\ & 0 & & \sqrt{3}\,C_1 & -C_2 & 0 \\ & & & C_3 & \sqrt{3}\,C_4 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{3}\,C_4 & C_3 & & & \\ 0 & -C_2 & \sqrt{3}\,C_1 & & 0 & \\ 2C_2 & 0 & 0 & & & \end{array}\right), \qquad (2.3.32)$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные комплексные параметры. Значения этих параметров можно найти, если потребовать выполнения условий (2.3.12), (2.3.13), которые приводят к следующим результатам:

$$C_2 = C_3 = 1/2, \quad C_1 = C_4 = i/(2\sqrt{3}). \qquad (2.3.33)$$

Как нетрудно убедиться, матрица (2.3.32), (2.3.33) удовлетворяет также условию (2.3.11), гарантирующему единственность собственного значения оператора квадрата массы.

С помощью соотношений (2.3.7) находим явный вид матриц β_a:

$$\beta_a\left(\begin{array}{c|c} \hat{0} & B_a \\ \hline -B_a^{+} & \hat{0} \end{array}\right), \qquad B_a = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} iK_a^{+} & K_a^{+} & 2S_a \\ i\Sigma_a & -2\Sigma_a & K_a \\ -3\Sigma_a & i\Sigma_a & iK_a \end{pmatrix}, \qquad (2.3.34)$$

где S_a и Σ_a — спиновые матрицы для $s = 3/2$ и $s = 1/2$ (см. (2.1.30)),

K_a — матрицы размерности 2×4:

$$K_1=\begin{pmatrix}0&3&0&5\\3&0&5&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}},\quad K_2=\begin{pmatrix}0&3&0&5\\-3&0&-5&0\end{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}},\quad K_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0\end{pmatrix},\tag{2.3.35}$$

$\widehat{0}$ — нулевые матрицы размерности 8×8.

Уравнение (2.3.6) с матрицами (2.3.32)—(2.3.34) инвариантно относительно полной группы Пуанкаре и описывает релятивистскую частицу с массой m и спином $s=3/2$. Это уравнение допускает лагранжеву формулировку, причем эрмитизирующая матрица η имеет вид

$$\eta=\begin{pmatrix} & & & P_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}\\ & & \mathrm{I} & \\ & \mathrm{I} & & \\ P_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} & & & \end{pmatrix},\tag{2.3.36}$$

где I — единичная матрица размерности 2×2.

В работах [29], [298] была предложена другая формулировка уравнения Дирака — Фирца — Паули, которая эквивалентна рассмотренной выше и очень удобна для обобщения на случай частиц произвольного спина. Исходным пунктом этой формулировки является использование в качестве волновой функции вектор-спинора φ_μ^λ (λ — векторный, μ — спинорный индекс), преобразующегося по представлению $D\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)\otimes\left[D\left(\frac{1}{2}\,0\right)\oplus D\left(0\,\frac{1}{2}\right)\right]$ группы $O(1,\ 3)$. Согласно теореме Клебша — Гордона [4] такое представление разлагается в прямую сумму неприводимых представлений, задаваемую формулой (2.3.29).

Уравнение для частицы спина 3/2 в форме Рариты — Швингера записывается в виде

$$\left[(\gamma_\nu p^\nu-m)\,g_{\mu\nu}-\frac{1}{3}(\gamma_\mu p_\lambda+\gamma_\lambda p_\mu)+\frac{1}{3}\gamma_\mu(\gamma_\nu p^\nu+m)\,\gamma_\lambda\right]\varphi^\lambda=0,\tag{2.3.37}$$

где γ_ν — матрицы Дирака, действующие только на спинорный индекс функции $\varphi^\lambda=$ столбец $(\varphi_1^\lambda,\ \varphi_2^\lambda,\ \varphi_3^\lambda,\ \varphi_4^\lambda)$. Умножая левую часть (2.3.37) на p^μ и γ^μ, это уравнение можно свести к следующей форме:

$$(\gamma_\nu p^\nu-m)\,\varphi^\lambda=0,\quad \gamma_\mu\varphi^\mu=0.\tag{2.3.38}$$

Уравнение (2.3.37) полностью эквивалентно уравнению Дирака — Фирца — Паули. Действительно, умножая (2.3.37) на $g_{\sigma\mu}-\gamma_\sigma\gamma_\mu$ и проводя суммирование по μ (эта операция обратима), мы приходим к уравнению в форме (2.3.6), которое отличается от уравнения Дирака — Фирца — Паули только реализацией β-матриц.

2.3.7. Преобразование к форме Шредингера. Решения рассматриваемых уравнений для частиц со спином $s>1/2$ содержат больше компонент, чем требуется для описания внутренних степеней свободы частицы и античастицы (т. е. больше, чем $2(2s+1)$). Однако с помощью исключения «лишних» компонент эти уравнения можно преобразовать к шредингеровой форме (1.2.10), где Ψ — волновая функция, имеющая $2(2s+1)$ строк, H-гамильтониан частицы которой может оказаться как дифференциальным, так и интегро-дифференциальным оператором.

Для уравнения Дирака переход к шредингеровой формулировке тривиален (см. п. 1.2.2), поэтому рассмотрим уравнения КДП и Дирака — Фирца — Паули.

Анализ уравнений КДП проведем одновременно для спинов 0 и 1, используя только алгебраические свойства β-матриц.

Пусть матрицы β_ν в релятивистском уравнении первого порядка (2.3.6) удовлетворяют алгебре (2.3.23). Умножая это уравнение на β_0^2 и $1-\beta_0^2$ и принимая во внимание, что

$$\beta_0^3 = \beta_0, \qquad \left(1-\beta_0^2\right)\beta_a = \beta_a\beta_0^2,$$

после несложных вычислений получаем следующую систему:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = ([\beta_0, \beta_a]p_a - \beta_0 m)\Psi, \qquad \left(1-\beta_0^2-\frac{1}{m}\beta_a p_a\beta_0^2\right)\Psi = 0. \quad (2.3.39)$$

Система (2.3.39) полностью эквивалентна исходному уравнению (2.3.6), так как является его следствием, а уравнение (2.3.6) в свою очередь вытекает из (2.3.39). Эта система включает уравнение в форме Шредингера и дополнительное условие, выражающее «нефизические» компоненты $\left(1-\beta_0^2\right)\Psi$ через $2(2s+1)$ существенных компонент $\beta_0^2\Psi$.

Преобразуем систему (2.3.39) к такому представлению, в котором нефизические компоненты тождественно равны нулю. Используя для этой цели оператор

$$V = 1 - \frac{1}{m}\beta_a p_a\beta_0^2, \qquad V^{-1} = 1 + \frac{1}{m}\beta_a p_a\beta_0^2, \quad (2.3.40)$$

получаем

$$\begin{gathered} V\left(1-\beta_0^2-\frac{1}{m}\beta_a p_a\beta_0^2\right)V^{-1} \equiv 1-\beta_0^2, \\ V([\beta_0, \beta_a]p_a - \beta_0 m)V^{-1} = \beta_0\left(\beta_a p_a - m + \frac{(\beta_a p_a)^2}{m}\right). \end{gathered} \quad (2.3.41)$$

Согласно (2.3.41) преобразованная функция $\Psi' = V\Psi$ удовлетворяет условию

$$\left(1-\beta_0^2\right)\Psi' = 0, \quad (2.3.42)$$

откуда вытекает, что $\beta_0\beta_a p_a\Psi' \equiv 0$, а первое из уравнений (2.3.39) сводится к форме

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi' = H\Psi' \equiv \left[-\beta_0 m + \beta_0\frac{(\beta_a\pi_a)^2}{m}\right]\Psi'. \quad (2.3.43)$$

Выбирая для матриц β_μ представление (2.3.20) или (2.3.25), заключаем из (2.3.42), что функция Ψ' имеет только $2(2s+1)$ ненулевых компонент, причем гамильтониан H из (2.3.43) принимает вид

$$H = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + \frac{i}{2m}\sigma_2\,[2\,(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p})^2 - p^2]. \qquad (2.3.44)$$

Здесь σ_1 и σ_2 — $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули (см. (2.2.29)), $\mathbf{S}$ — генераторы прямой суммы неприводимых представлений $D(s)\oplus \oplus D(s)$ группы $O(3)$ (т. е. прямая сумма матриц (2.3.36) в случае $s=1$ и нулевых матриц в случае $s=0$).

Мы видим, что уравнения КДП после исключения лишних компонент сводятся к уравнению в форме Шредингера, причем соответствующий гамильтониан является дифференциальным оператором второго порядка. Уравнения для частицы со спином $s=1$ в форме (1.2.10), (2.3.44) были впервые предложены Таммом [92], а также Сакатой и Такетани [303].

Обратимся теперь к уравнению Дирака — Фирца — Паули для частицы спина 3/2, определяемого соотношениями (2.3.6), (2.3.32) — (2.3.34). Умножив (2.3.6) слева на обратимую матрицу $\widehat{C}$,

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & i1 & 1 \\ 0 & -i1 & 1 \end{pmatrix},$$

и обозначив компоненты волновой функции Ψ (2.3.30) следующим образом:

$$\Phi_{\frac{3}{2}}^{1\frac{1}{2}} = \Phi_1, \quad \Phi_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} = \frac{i}{2}(\Phi_3 - \Phi_2), \quad \Phi_{\frac{1}{2}}^{0\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\Phi_3 + \Phi_2),$$

$$\Phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}0} = \frac{1}{2}(\Phi_4 + \Phi_5), \quad \Phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}1} = \frac{i}{2}(\Phi_4 - \Phi_5), \quad \Phi_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}1} = \Phi_6,$$

приходим к следующей системе уравнений:

$$p_0\Phi_1 + \frac{1}{3}\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}\Phi_4 + \frac{2}{3}\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\Phi_1 - m\Phi_6 = 0, \qquad (2.3.45)$$

$$-\frac{4}{3}i\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\Phi_5 + \frac{2}{3}i\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_1 - m\Phi_2 = 0, \qquad (2.3.46)$$

$$-\frac{2}{3}i\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_6 + \frac{4}{3}\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\Phi_2 - im\Phi_5 = 0, \qquad (2.3.47)$$

$$p_0\Phi_5 + \frac{2}{3}\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\,(2\Phi_4 + \Phi_5) + im\Phi_3 = 0, \qquad (2.3.48)$$

$$p_0\Phi_2 + \frac{2}{3}\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\,(2\Phi_3 - \Phi_2) + im\Phi_4 = 0, \qquad (2.3.49)$$

$$p_0\Phi_6 - \frac{2}{3}\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\Phi_6 - \frac{i}{3}\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}\Phi_3 - m\Phi_1 = 0, \qquad (2.3.50)$$

В отличие от системы уравнений КДП, «лишние» компоненты Φ_2, Φ_3, Φ_4 и Φ_5 не могут быть выражены через Φ_1 и Φ_6 с помощью линейного дифференциального оператора первого порядка. Более того, получить уравнение в форме Шредингера для физических компонент Φ_1 и Φ_6 удается только с помощью нелокальных (интегральных) преобразований.

Рассматривая систему (2.3.45) — (2.3.50) в импульсном пространстве, из (2.3.46), (2.3.47) получаем следующие выражения для Φ_2 и Φ_5:

$$\Phi_2 = iF\left(\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_1 + \frac{4}{3m}\,\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_6\right), \qquad F = \frac{2m}{3\left(m^2 + \frac{9}{4}\,p^2\right)},$$
$$\Phi_5 = F\left(-\,\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_6 + \frac{4}{3m}\,\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_1\right), \tag{2.3.51}$$

где мы воспользовались соотношением $(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = p^2/4$. Подставив (2.3.51) в (2.3.48), (2.3.49) и принимая во внимание соотношения (6.3.10), (6.3.11) и уравнения (2.3.45), (2.3.50), выражаем Φ_3 и Φ_4 через Φ_1 и Φ_6:

$$\Phi_3 = iF\left(\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_1 - \frac{4}{3m}\,\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_6\right),$$
$$\Phi_4 = F\left(-\,\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_6 + \frac{4}{3m}\,\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\mathbf{K}^\dagger\cdot\mathbf{p}\Phi_1\right). \tag{2.3.52}$$

Наконец, подставив (2.3.51) и (2.3.52) в (2.3.45), (2.3.50), получаем уравнение в форме Шредингера (1.2.10) для восьмикомпонентной функции $\Psi =$ столбец (Φ_1, Φ_6), где [281]

$$H = \sigma_3\widehat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{p}\left\{1 + \frac{3F}{2m}\,[p^2 - (\widehat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{p})^2]\right\} + \sigma_1 m\left\{m + \frac{3F}{4m}\,[p^2 - (\widehat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{p})^2]\right\},$$
$$\widehat{\mathbf{S}} = (2/3)\mathbf{S}. \tag{2.3.53}$$

Здесь σ_1, σ_3 — восьмирядные матрицы Паули, коммутирующие с $\mathbf{S}$, а $\mathbf{S}$ — генераторы прямой суммы неприводимых представлений $D(3/2)\oplus D(3/2)$ группы $O(3)$ (см. ниже (2.4.12), (2.4.16)).

Гамильтониан (2.3.53) может быть ореределен как нелокальный (интегральный) оператор в x-представлении. Это означает, что уравнение Дирака — Фирца — Паули соответствует интегральному уравнению эволюции для физических компонент волновой функции, т. е. по существу является нелокальным. В этом заключается первопричина парадоксов с нарушением причинности, к которым приводит упомянутое уравнение при описании движения частицы спина 3/2 во внешнем электромагнитном поле.

Отметим, что нелокальный характер гамильтониана (2.3.53) обусловлен нильпотентностью матрицы β_0 в уравнении Дирака — Фирца — Паули. Поскольку эта матрица нильпотентна для всех пуанкаре- и P-, T-, C-инвариантных уравнений вида (2.3.6) для частицы с единственным значением спина $s > 1$, то эти уравнения всегда приводят к интегральным операторам Гамильтона для физических компонент волновой функции и в этом смысле являются нелокальными.

§ 2.4. Пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент

2.4.1. Введение. Как отмечалось во введении, ковариантные уравнения для частиц с высшими спинами не могут служить удовлетворительной основой ни для описания взаимодействия частиц с внешним полем, ни для построения вторично квантованной теории. Единственным релятивистским уравнением, не приводящим к противоречиям при решении реальных физических задач, является уравнение Дирака для частицы со спином 1/2.

Какова же причина выделенности уравнения Дирака среди других ковариантных уравнений? Таких причин несколько, поскольку это уравнение обладает уникальным набором свойств, перечисленных ниже.

(1) Явная релятивистская инвариантность. На множестве решений уравнения Дирака реализуется представление алгебры Пуанкаре, принадлежащее классу $\mathfrak{M}_1$.

(2) Существование шредингеровой формулировки (1.2.10), где гамильтониан H — локальный (дифференциальный) оператор.

(3) Волновая функция Ψ, удовлетворяющая уравнению Дирака, имеет $4=2(2s+1)$ компоненты, что в точности соответствует числу спиновых степеней свободы частицы и античастицы со спином 1/2.

(4) Генераторы группы Пуанкаре, определенные на множестве решений уравнения Дирака, эрмитовы относительно обычного принятого в квантовой механике скалярного произведения (1.2.40).

Ковариантные уравнения первого порядка, рассматриваемые в предыдущем параграфе, в случае $s \geqslant 1$ обладают, вообще говоря, только свойством (1) и, как редкое исключение, свойством (2). Что же касается пп. (3) и (4), то единственным ковариантным уравнением вида (2.3.6), обладающим перечисленными там качествами, является уравнение Дирака. Именно наличие «лишних» (по сравнению с $2(2s+1)$) компонент волновой функции Ψ является первопричиной тех трудностей, с которыми сталкивается теория релятивистских уравнений для частиц произвольного спина.

В связи с изложенным выше возникает естественное желание попытаться найти такие уравнения движения для частиц с произвольным спином, которые бы не имели лишних компонент и обладали другими важными свойствами, перечисленными в пп. (1)—(4). Оказывается, такие уравнения существуют, но ценой, которую приходится платить за отсутствие нефизических компонент, является потеря явной релятивистской инвариантности (т. е. очевидной симметрии относительно пространственных и временной переменных). Вывод уравнений движения, не обладающих явной симметрией относительно группы Пуанкаре, и составляет содержание настоящего параграфа.

2.4.2. Постановка задачи. Будем искать пуанкаре-инвариантные уравнения движения частицы произвольного спина в форме

Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial x_0} \Psi = H_s \Psi, \tag{2.4.1}$$

где $\Psi = \Psi(x_0, \mathbf{x})$ — $2(2s+1)$-компонентная волновая функция (матрица-столбец)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{2(2s+1)} \end{pmatrix}, \tag{2.4.2}$$

$H_s = H_s(\mathbf{p})$ — неизвестный пока линейный оператор, заданный на множестве вектор-функций (2.4.2), который должен быть таким, чтобы уравнение (2.4.1) было инвариантно относительно алгебры Пуанкаре.

Определение 2.3. Будем говорить, что *уравнение* (2.4.1) *пуанкаре-инвариантно и описывает частицу с массой* m *и спином* s, если на множестве его решений реализуется представление алгебры Пункаре I класса, причем для операторов Казимира $C_1 = P_\mu P^\mu$ и $C_2 = W_\mu W^\mu$ выполняются соотношения (2.3.1).

Согласно приведенному определению гамильтониан $H_s = P_0$ должен удовлетворять следующим перестановочным соотношениям:

$$[H_s, P_a] = 0, \tag{2.4.3}$$

$$[H_s, J_a] = 0, \tag{2.4.4}$$

$$[H_s, N_a] = iP_a, \tag{2.4.5}$$

где P_a, J_a, N_a — базисные элементы алгебры AP(1, 3), в свою очередь удовлетворяющие условиям

$$[P_a, P_b] = 0, \qquad [P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}P_c, \tag{2.4.6}$$

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \tag{2.4.7}$$

$$[J_a, N_b] = i\varepsilon_{abc}N_c, \tag{2.4.8}$$

$$[P_a, N_b] = i\delta_{ab}H_s, \tag{2.4.9}$$

$$[N_a, N_b] = -i\varepsilon_{abc}J_c. \tag{2.4.10}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (2.4.3)—(2.4.10) являются лишь новой формой записи коммутационных соотношений (1.1.13), характеризующих алгебру Пуанкаре.

Таким образом, для описания пуанкаре-инвариантных уравнений движения частицы произвольного спина в форме Шредингера (2.4.1) достаточно задаться каким-либо представлением генераторов P_a, J_a, N_a, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (2.4.6)—(2.4.10), а затем найти все возможные операторы H_s, удовлетворяющие условиям (2.4.3)—(2.4.5). Подчеркнем, что коммутационные соотношения (2.4.3)—(2.4.10) должны выполняться на множестве решений уравнения (2.4.1).

Хорошо известно (см. гл. 2), что условия (2.3.1) определяют операторы P_a, J_a и N_a с точностью до унитарной эквивалентности. Какими же критериями следует руководствоваться при выборе конкретной реализации операторов P_a, J_a и N_a, которая будет диктовать нам явный вид уравнений движения? Разумным представляется требование выбора представления алгебры AP(1, 3) для произвольного спина s в такой форме, чтобы в случае $s = 1/2$ мы пришли к уравнению Дирака. Иными словами, желательно обобщить представление алгебры Пуанкаре, которое реализуется на множестве решений уравнений Дирака, на случай произвольного спина. Мы рассмотрим три таких обобщения, которым будут соответствовать три различных подхода к описанию пуанкаре-инвариантных уравнений вида (2.4.1) [62, 106, 118].

Будем исходить из следующей реализации генераторов группы Пуанкаре:

$$P_0 = H_s, \qquad P_a = p_a, \qquad \mathbf{J} = \mathbf{x}\times\mathbf{p} + \mathbf{S},$$
$$\mathbf{N} = x_0\mathbf{p} - \frac{1}{2}[\mathbf{x}, H_s]_+ + \boldsymbol{\lambda}_s, \tag{2.4.11}$$

где $\mathbf{S}$ — матрицы, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений $D(s)$ алгебры AO(3):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} & 0 \\ 0 & \mathbf{s} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} \in D(s), \tag{2.4.12}$$

$\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ — канонически сопряженные переменные, определяемые соотношениями

$$[x_a, p_b] = i\delta_{ab}, \tag{2.4.13}$$

H_s и $\boldsymbol{\lambda}_s$ — неизвестные пока операторы, явный вид которых будет получен, исходя из требования, чтобы операторы (2.4.11) удовлетворяли коммутационным соотношениям (2.4.3)—(2.4.10).

Формулы (2.4.11) определяют общий вид базисных элементов алгебры AP(1, 3), порождающих локальные преобразования решений уравнения (2.4.1) при сдвигах и трехмерных поворотах системы координат.

Генераторы группы Пуанкаре на множестве решений уравнения Дирака также имеют форму (2.4.11), где $\boldsymbol{\lambda}_s \equiv 0$ (см. (1.2.42)). Поэтому в первом подходе мы предполагаем, что для произвольных значений s выполняется *)

$$\boldsymbol{\lambda}_s^{\mathrm{I}} = 0. \tag{2.4.14}$$

Отличительной чертой представления (2.4.11), (2.4.14) является эрмитовость базисных элементов алгебры AP(1, 3) относительно скалярного произведения (1.2.40), где Ψ_1, Ψ_2 — $2(2s+1)$-компонентные вектор-функции, удовлетворяющие уравнению (2.4.1). Мы убедимся в этом в следующем пункте, где будут найдены все неэквивалентные гамильтонианы H_s^{I}.

*) Для обозначения операторов, фигурирующих в первом, втором и третьим подходах, мы будем использовать индексы I, II и III соответственно.

Во втором подходе задача формулируется следующим образом: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) операторы H_s^{II}, удовлетворяющие соотношениям (2.4.3) — (2.4.5) с генераторами (2.4.11) в случае, когда

$$\lambda_s^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\left[H_s^{\mathrm{II}}, x_a\right] + S_{0a}, \qquad S_{0a} = i\sigma_3 S_a = i\begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & -S_a \end{pmatrix}. \quad (2.4.15)$$

Здесь, как и в (2.4.12), S_a — $(2s+1)$-рядные квадратные матрицы, образующие представление $D(s)$ алгебры АО(3), 0 — нулевые матрицы соответствующей размерности, а символом σ_3 обозначена одна из $2(2s+1)$-рядных матриц Паули (2.2.29).

Несомненным достоинством представлений (2.4.11), (2.4.15) является то, что они соответствуют локальным конечным преобразованиям волновой функции Ψ при переходе к новой инерциальной системе отсчета. Действительно, на множестве решений уравнения (2.4.1)

$$N_a^{\mathrm{II}}\Psi = (x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a})\Psi, \qquad P_0^{\mathrm{II}}\Psi = p_0\Psi, \quad (2.4.16)$$

т. е. все генераторы группы $P(1, 3)$ имеют ковариантную форму, причем матрицы S_a и S_{0a} образуют представления $D(0s)\oplus D(s0)$ алгебры АО(1, 3). Однако, как мы увидим ниже, операторы H_s^{II} и N_a^{II} в общем случае оказываются неэрмитовыми в метрике (1.2.40). И только для спина $s = 1/2$ представления (2.4.14) и (2.4.15) на множестве решений уравнения (2.4.1) совпадают, что позволяет построить локальные конечные преобразования для волновой функции, сохраняющие билинейную форму (1.2.40).

На множестве решений уравнения (2.4.1) определим операторы дискретных преобразований P, T и C:

$$\begin{aligned} P\Psi(x_0, \mathbf{x}) &= r_1\Psi(x_0, -\mathbf{x}), \\ T\Psi(x_0, \mathbf{x}) &= r_2\Psi(-x_0, \mathbf{x}), \\ C\Psi(x_0, \mathbf{x}) &= r_3\Psi^*(x_0, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

где r_1, r_2, r_3 — эрмитовы матрицы, явный вид которых может быть определен из условия, чтобы операторы (2.4.15) удовлетворяли перестановочным соотношениям (1.1.62) с генераторами группы Пуанкаре. Это условие оставляет определенный произвол в выборе r_1, r_2, r_3 (особенно в случае, когда генераторы группы $P(1, 3)$ задаются формулами (2.4.11)). Можно показать, однако, что с точностью до эквивалентности достаточно ограничиться матрицами следующего вида:

$$\begin{aligned} & r_1^{\mathrm{I}} = \sigma_1 \text{ или } r_1^{\mathrm{I}} = \sigma_0, \quad r_1^{\mathrm{II}} = \sigma_1, \\ & r_2^{\mathrm{I}} = \sigma_2, \quad r_2^{\mathrm{II}} = \sigma_2, \\ & r_3^{\mathrm{I}} = \sigma_2\Delta, \quad r_3^{\mathrm{II}} = \sigma_2\Delta \text{ или } r_3^{\mathrm{II}} = \sigma_1\Delta, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta' & 0 \\ 0 & \Delta' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

где Δ' — матрица размерности $(2s+1)\times(2s+1)$, с точностью до знака определяемая соотношениями (см. (2.2.23), (2.2.33))

$$\Delta' \mathbf{s} = -\mathbf{s}^* \Delta, \quad \Delta^2 = 1. \qquad (2.4.19)$$

Потребуем, чтобы уравнение (2.4.1) было инвариантно относительно преобразований (2.4.17), что сводится к выполнению следующих коммутационных и антикоммутационных соотношений:

$$[P, H_s] = [T, H_s]_+ = [C, H_s]_+ = 0. \qquad (2.4.20)$$

Подходы I и II позволяют описать широкий класс пуанкаре-инвариантных уравнений без лишних компонент, который, однако, не включает уравнений Тамма — Сакаты — Такетани для частиц со спином 0 и 1. Класс уравнений, включающий как уравнение Дирака, так и уравнения ТСТ, будет получен в третьем подходе, в котором задача ставится следующим образом: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные уравнения вида (2.4.1), инвариантные относительно алгебры Пуанкаре. При этом мы ограничимся случаем, когда гамильтониан H_s^{III} принадлежит классу дифференциальных операторов второго порядка, а генераторы группы Пуанкаре выберем в виде (2.4.11), где на λ_s^{III} не накладывается никаких априорных ограничений.

Существенное отличие подхода III от подходов I и II состоит в том, что мы не фиксируем явный вид операторов λ_s^{III} и не требуем инвариантности уравнения (2.4.1) относительно преобразований P, T и C. Для нахождения явного вида гамильтонианов H_s^{III} достаточно потребовать, чтобы они принадлежали классу дифференциальных операторов второго порядка.

2.4.3. Явный вид гамильтонианов H_s^{I} и H_s^{II}. Найдем все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s^{I}. Нетрудно убедиться прямой проверкой, что уравнения (2.4.3) — (2.4.11) обращаются в тождество, если выполняются соотношения (2.4.3) — (2.4.5) и (2.4.10). Подставив в эти соотношения общее выражение для P_0, $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$, приходим к следующей системе уравнений для H_s^{I}:

$$\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)^2 = p^2 + m^2, \qquad (2.4.21)$$

$$[H_s, \mathbf{J}] = [H_s, \mathbf{p}] = 0, \qquad (2.4.22)$$

$$[H_s, \mathbf{x}] \times [H_s, \mathbf{x}] = -4i\mathbf{S}. \qquad (2.4.23)$$

Условия (2.4.21) — (2.4.23) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы выполнялись соотношения (2.4.3) — (2.4.10).

Искомый гамильтониан H_s представим в виде разложения по полной системе ортопроекторов

$$H_s^{\mathrm{I}} = \sum_{\nu=-s}^{s} h_\nu \Lambda_\nu, \qquad (2.4.24)$$

где

$$\Lambda_\nu = \prod_{\nu' \neq \nu} \frac{S_p - \nu'}{\nu - \nu'}, \qquad S_p = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p}, \qquad (2.4.25)$$

$\mathbf{S}=(S_1,\ S_2,\ S_3)$, S_a — матрицы (2.4.12), а h_ν — матрицы, коммутирующие с S_a, которые в свою очередь можно разложить по полной системе матриц Паули (2.2.29):

$$h_\nu = a_\nu^\mu \sigma_\mu, \tag{2.4.26}$$

где a_ν^μ — неизвестные функции от p.

Нетрудно убедиться, что операторы (2.4.25) являются проекторами на собственные подпространства оператора $S\cdot\mathbf{p}/p$, удовлетворяя следующим соотношениям:

$$\Lambda_\nu\Lambda_{\nu'} = \delta_{\nu\nu'}\Lambda_\nu, \qquad \sum_{\nu=-s}^{s}\Lambda_\nu = 1, \qquad \sum_{\nu=-s}^{s}\nu\Lambda_\nu = S_p. \tag{2.4.27}$$

Операторы Λ_ν следующим образом коммутируют с $\mathbf{x}$ [54, 106]:

$$[\mathbf{x},\ \Lambda_\nu] = \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{S}}{2p^2}(\Lambda_{\nu-1}+\Lambda_{\nu+1}-2\Lambda_\nu) - \frac{i}{2p}\left(\mathbf{S}-\frac{\mathbf{p}}{p}S_p\right)(\Lambda_{\nu-1}-\Lambda_{\nu+1}). \tag{2.4.28}$$

С использованием (2.4.28) можно доказать следующее утверждение: векторы $\mathbf{p}\times\mathbf{S}\Lambda_\nu$, $\mathbf{S}\Lambda_\nu$, $\mathbf{p}\Lambda_\nu$ линейно независимы, если $\nu\neq\pm s$:

$$(a\mathbf{p}\times\mathbf{S}+b\,\mathbf{S}+c\mathbf{p})\Lambda_\nu = 0 \Rightarrow a=b=c=0,\ |\nu|\neq s. \tag{2.4.29}$$

Если же $|\nu| = s$, то

$$\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{S}}{p}\Lambda_{\pm s} = \mp\left(\mathbf{S}\mp s\frac{\mathbf{p}}{p}\right)\Lambda_{\pm s}. \tag{2.4.30}$$

Соотношения (2.4.27) — (2.4.30) позволяют свести уравнения (2.4.21) — (2.4.23) к системе алгебраических уравнений для коэффициентов a_ν^μ из (2.4.26).

Подставив (2.4.24) в (2.4.21), получаем с помощью (2.4.27) следующее условие для h_ν:

$$h_\nu^2 = m^2 + p^2, \tag{2.4.31}$$

а из (2.4.24) после несложных, но несколько громоздких выкладок с использованием (2.4.27) — (2.4.30) выводится следующее уравнение:

$$\frac{1}{2}[h_\nu,\ h_{\nu+1}]_+ = m^2 - p^2. \tag{2.4.32}$$

Условия (2.4.31), (2.4.32) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы гамильтониан $H_{s'}^{\mathrm{I}}$ удовлетворял уравнениям (2.4.21) — (2.4.23). Общее решение для h_ν с учетом (2.4.20) задается формулой

$$h_\nu = \sigma_1 E\cos\varphi_\nu + \sigma_3 E\sin\varphi_\nu, \tag{2.4.33}$$

где возможные значения φ_ν определяются из рекуррентных соотношений

$$\varphi_{\nu+1} = \varphi_\nu \pm 2\theta^{\mathrm{I}}, \qquad \theta^{\mathrm{I}} = \operatorname{arctg}\frac{p}{m}. \tag{2.4.34}$$

Если матрица пространственной инверсии r_1^{I} равна σ_1, то

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{1/2} = \theta^{\mathrm{I}}, \quad \varphi_\nu = -\varphi_{-\nu}, \tag{2.4.35}$$

а для $r_1^{\mathrm{I}} = \sigma_0$ решения уравнений (2.4.32), (2.4.31), совместные с условиями (2.4.17), (2.4.20), существуют только для целых s. При этом

$$\varphi_0 = \varphi(p/m), \quad \varphi_\nu = \varphi_{-\nu}, \tag{2.4.36}$$

где φ — произвольная функция от p/m.

Согласно (2.4.34) число возможных гамильтонианов H_s^{I}, возрастает с увеличением спина s, так как при вычислении $\varphi_{\nu+1}$ мы каждый раз можем выбирать любой из знаков, входящих в эту формулу. Нетрудно подсчитать, что при $r_1 = \sigma_1$ число различных гамильтонианов H_s^{I} равно $2^{[s]}$, где $[s]$ — целая часть s.

Приведем простейшие решения рекуррентных соотношений (2.4.34), совместные с (2.4.35), (2.4.36):

$$(\varphi_\nu)_1 = (-1)^{[\nu]}\theta^{\mathrm{I}}, \quad (\varphi_\nu)_2 = 2\nu\theta^{\mathrm{I}}. \tag{2.4.37}$$

Подставляя (2.4.33), (2.4.37) в (2.4.25), получаем

$$(H_s^{\mathrm{I}})_1 = \sigma_1 m + \sigma_3 p \sum_\nu (-1)^{[\nu]} \Lambda_\nu, \tag{2.4.38}$$

$$(H_s^{\mathrm{II}})_2 = E\left[\sum_\nu \sigma_1 \cos\left(2\nu\theta^{\mathrm{I}}\right) + \sigma_3 \sin\left(2\nu\theta^{\mathrm{I}}\right)\right]\Lambda_\nu. \tag{2.4.39}$$

В случае $s = 1/2$ операторы (2.4.38) и (2.4.39) совпадают и сводятся к гамильтониану Дирака (1.2.20), где $\gamma_0 = \sigma_1$, $\gamma_a = -i\sigma_2 S_a$.

Приведем также явные выражения гамильтонианов (2.4.38), (2.4.39) в терминах операторов спиральности S_p для $s \leqslant 3/2$. Согласно определению (2.4.25) получаем

$$\begin{aligned}
&(H_0^{\mathrm{I}})_1 = \sigma_1 E, \quad (H_0^{\mathrm{I}})_2 = \sigma_1 m + \sigma_3 p,\\
&(H_{1/2}^{\mathrm{I}})_1 = (H_{1/2}^{\mathrm{I}})_2 = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \mathbf{S}\cdot\mathbf{p},\\
&(H_1^{\mathrm{I}})_1 = \sigma_1 m + \sigma_3 p\left(1 - 2S_p^2\right),\\
&(H_1^{\mathrm{I}})_2 = \{\sigma_1 [E^2 - 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2] + 2\sigma_3 m \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\} E^{-1},\\
&(H_{3/2}^{\mathrm{I}})_1 = \sigma_1 m + \frac{1}{3}\sigma_3 p S_p\left(7 - 4S_p^2\right),\\
&(H_{3/2}^{\mathrm{I}})_2 = \left\{\sigma_1 [2E^2 + p^2 + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2] m + \sigma_3\left[\left(2E^2 + \frac{p^2}{12}\right)\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} -\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left. - \frac{4}{3}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^3\right]\right\} E^{-2}.
\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Как видно из (2.4.40), гамильтонианы H_s^{I} для $s \neq 1/2$ являются в x-представлении нелокальными (интегро-дифференциальными) операторами. Напомним в связи с этим, что дифференциальные ковариантные уравнения первого порядка также обычно приводят к нелокальным гамильтонианам.

Задача определения явного вида гамильтонианов H_s^{II} решается совершенно аналогично с использованием разложения по полной системе ортопроекторов (2.4.5). Условия пуанкаре-инвариантности (2.4.4) — (2.4.10) для представления (2.4.14), (2.4.15) сводятся к соотношениям (2.4.4), (2.4.5), последнее из которых принимает вид

$$-\left[H_s^{\mathrm{II}}, \mathbf{x}\right] H_s^{\mathrm{II}} + i\mathbf{S}\left[H_s^{\mathrm{II}}, \sigma_3\right] + i\left[H_s^{\mathrm{II}}, \mathbf{S}\right]\sigma_3 = i\mathbf{p}. \qquad (2.4.41)$$

Общее решение уравнений (2.4.4), (2.4.5), совместное с условиями (2.4.19), задается формулами [276], [118]

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right)_1 = E\sum_{\nu}\left[\sigma_1 \operatorname{sech}\left(2\nu\theta^{\mathrm{II}}\right) + \sigma_3 \operatorname{th}\left(2\nu\theta^{\mathrm{II}}\right)\right]\Lambda_\nu, \quad r_3 = \sigma_1\Delta, \quad (2.4.42)$$

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right)_2 = E\sum_{\nu}\left[i\sigma_1 \operatorname{cosech}\left(2\nu\theta^{\mathrm{II}}\right) + \sigma_3 \operatorname{cth}\left(2\nu\theta^{\mathrm{II}}\right)\right]\Lambda_\nu, \qquad r_3 = \sigma_2\Delta, \qquad (2.4.43)$$

где

$$\theta^{\mathrm{II}} = \operatorname{arth}\frac{p}{E}. \qquad (2.4.44)$$

При этом гамильтонианы (2.4.42) определены для произвольных значений s, а (2.4.43) — только для полуцелых значений спина, так как при целых s $\left(H_s^{\mathrm{II}}\right)_2$ не удовлетворяют условию (2.4.21).

В случае $s = 1/2$ оператор (2.4.42) совпадает с гамильтонианом Дирака. Приведем явные выражения для H_s^{II}, $s \leqslant 3/2$, в терминах операторов спиральности

$$H_0^{\mathrm{II}} = \sigma_1 E,$$

$$\left(H_1^{\mathrm{II}}\right)_1 = \sigma_1 E + 2E\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\left[\sigma_1\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} - \sigma_3 E\right]\left[(E^2 + p^2)^{-1}\right.,$$

$$\left(H_{3/2}^{\mathrm{II}}\right)_1 = \Big\{\sigma_1\left[(2E^2 + 7p^2)/2 - 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2\right] m + {}$$
$$+ \sigma_3\left[\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\,(20p^2 + 6E^2)/3 - \frac{8}{3}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^3\right]\Big\}(E^2 + 3p^2)^{-1}. \quad (2.4.45)$$

Операторы (2.4.45) соответствуют выбору $r_3 = \sigma_1\Delta$. Для $s = 1/2$ и $s = 3/2$ имеется еще по одному гамильтониану

$$\left(H_{1/2}^{\mathrm{II}}\right)_2 = 2E\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\,(i\sigma_1 m + \sigma_3 E)\,p^{-2},$$

$$\left(H_{3/2}^{\mathrm{II}}\right)_2 = \Big\{i\sigma_1\frac{mE}{3p^2}\left[(20E^2 + 7p^2)\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} - 4(p^2 + 2E^2)(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^3 p^{-2}\right] + {}$$
$$+ \sigma_3\frac{E^2}{3p^2}\left[(20E^2 + 6p^2)\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} - 8E^2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^3 p^{-2}\right]\Big\}(p^2 + 3E^2)^{-1},$$

которым соответствует $r_s^{\mathrm{II}} = \sigma_2\Delta$.

Мы видим, что операторы H_s^{II}, также как и H_s^{I}, оказываются нелокальными в x-представлении. Можно показать, что при этом операторы (2.4.14) оказываются неэрмитовыми в метрике (1.2.40). Инвариантная билинейная форма для преобразований, генерируемых этими операторами, имеет вид [276, 312]

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^+ M \Psi_2, \tag{2.4.46}$$

где $M = \sigma_3 \frac{E}{m} \sum\limits_{\nu} \operatorname{cosech}\left(2\nu\theta^{\mathrm{II}}\right) \Lambda_\nu$, если $r_3^{\mathrm{II}} = \sigma_2\Delta$ и $M = \frac{E}{m} \sum\limits_{\nu} \operatorname{sech}\left(2\nu\theta^{\mathrm{II}}\right) \Lambda_\nu$ для $r_3^{\mathrm{II}} = \sigma_1\Delta$.

2.4.4. Дифференциальные уравнения движения для спиновых частиц. Уравнения без лишних компонент, получаемые в подходах I и II, включают интегро-дифференциальный оператор H_s, если $s \neq 1/2$. Это обстоятельство, безусловно, осложняет их использование для решения конкретных физических задач. В этом пункте мы рассматриваем третий подход, который по самой постановке задачи приводит к дифференциальным уравнениям движения.

Искомый гамильтониан H_s^{III} представим в виде разложения по спиновым матрицам и $2(2s+1)$-рядным матрицам Паули

$$H_s^{\mathrm{III}} = h_0^s m + h_1^s + \frac{1}{m} h_2^s, \tag{2.4.47}$$

где

$$h_0^s = a_\mu^s \sigma_\mu, \qquad h_1^s = b_\mu^s \sigma_\mu \mathbf{S}\cdot\mathbf{p},$$

$$h_2^s = c_\mu^s \sigma_\mu (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 + d_\mu^s \sigma_\mu p^2,$$

σ_μ — матрицы Паули (2.2.29), a_μ^s, b_μ^s, c_μ^s, d_μ^s — неизвестные постоянные коэффициенты.

Операторы (2.4.47) тождественно удовлетворяют соотношениям (2.4.4) при произвольных значениях коэффициентов a_μ^s, b_μ^s, c_μ^s и d_μ^s. Оставшиеся условия пуанкаре-инвариантности (т. е. соотношения (2.4.3), (2.4.5)—(2.4.10)) позволяют определить эти коэффициенты с точностью до произвольного параметра. Приведем без доказательства явный вид всех возможных (с точностью до эквивалентности) гамильтонианов H_s^{III}, удовлетворяющих перечисленным выше соотношениям:

$$H_s^{\mathrm{III}} = \sigma_1 m + \sigma_3 2k_1 \mathbf{S}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\left[p^2 - 4k_1(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2\right], \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \tag{2.4.48}$$

$$H_1^{\mathrm{III}} = \sigma_1 m + (\sigma_1 - i\sigma_2)\frac{p^2}{2m} + \left[i\sigma_2 k_2 + \sigma_2 \sqrt{k_2(k_2 - 1)}\right] \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{m}, \tag{2.4.49}$$

$$H_1^{\mathrm{III}} = \sigma_1 m + \sigma_3 k_3 \mathbf{S}\cdot\mathbf{p} + (\sigma_1 - i\sigma_2)\frac{p^2}{2m} - \left[k_3^2\sigma_1 + i\left(k_3^2 - 2\right)\sigma_2\right] \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{2m}, \tag{2.4.50}$$

$$H_{3/2}^{\mathrm{III}} = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + \frac{ik_4}{2m}\sigma_2\left[(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 - \frac{5}{4}p^2\right] + \frac{\sigma_3}{2m}\sqrt{k_4^2 - 1}\, p^2, \tag{2.4.51}$$

$$H_{3/2}^{\mathrm{III}} = \sigma_1 \left[m + \frac{p^2}{2m} - \frac{k_5^2 (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{2m} \right] + \sigma_3 k_5 \mathbf{S}\cdot\mathbf{p} -$$

$$- \frac{i}{2m}\sigma_2 \left[\left(\frac{5}{4} k_5^2 - 1 \right) (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 \right] - \left(\frac{9}{16} k_5^2 - \frac{5}{4} \right) p^2 \Big], \quad (2.4.52)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_5$ — произвольные комплексные параметры.

Формулы (2.4.48) — (2.4.52) задают все неэквивалентные гамильтонианы H_s^{III}, определенные с точностью до преобразований, осуществляемых числовыми матрицами [62, 112]. Помимо гамильтониана (2.4.48), который определен при произвольных значениях s, существует по два неэквивалентных оператора H_s^{III} для частиц со спином 1 и 3/2. Каждый из операторов (2.4.48) — (2.4.52) зависит от произвольного комплексного параметра k_l, $l = 1, 2, \ldots, 5$.

Нетрудно убедиться, что гамильтонианы (2.4.48) — (2.4.52) неэрмитовы относительно скалярного произведения (1.2.40). Однако можно подобрать такие значения коэффициентов k_l, чтобы операторы H_s^{III} были эрмитовы в индефинитной метрике

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger \sigma_1 \Psi_2. \quad (2.4.53)$$

А именно, операторы H_s^{III} эрмитовы относительно метрики (2.4.53), если k_l удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &k_1^* = -k_1, \quad k_3^* = -k_3, \quad k_5^* = -k_5, \\ &k_2^* = k_2, \quad 0 < k_2^2 < 1, \\ &k_4^* = k_4, \quad 0 < k_4 < 1. \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

Гамильтонианы H_s^{III} при произвольных значениях параметров k_l эрмитовы также относительно скалярного произведения (2.4.46), где

$$M_s = [(U_s^{\mathrm{III}})^{-1}]^+ (U_s^{\mathrm{III}})^{-1},$$

а U_s^{III} — оператор, связывающий представление алгебры P(1,3), определяемое формулами (2.4.20), (2.4.53), с каноническим представлением Широкова — Фолди (см. выше § 2.1). Явный вид операторов U_s^{III} приведен в следующем пункте.

Отметим еще, что в случае $k_1 = 1$ операторы λ_s^{III} (2.4.53) тождественно равны нулю и формулы (2.4.11), определяющие общий вид генераторов группы $P(1, 3)$ в подходе III, сводятся к соотношениям (2.4.11), которые задают представление алгебры P(1,3) в первом подходе. Иными словами, уравнение (2.4.1) с гамильтонианом (2.4.48) при $k_1 = 1$ может быть получено в подходе I, если не требовать симметрии относительно преобразований P и T.

Можно показать, что уравнение (2.4.1) с выписанными выше гамильтонианами H_s^{III} инвариантно относительно произведения преобразований PTC, но в общем случае неинвариантно относительно P-, T- и C-преобразований. Требование симметрии относительно каждого из этих преобразований сужает класс операторов H_s^{III} до следующих представителей:

$$H_s^{\mathrm{III}} = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) - i\sigma_2 \frac{p^2}{m}, \tag{2.4.55}$$

$$H_{1/2}^{\mathrm{III}} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}, \tag{2.4.56}$$

$$H_1^{\mathrm{III}} = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + \frac{i}{2m}\sigma_2\left[2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 - p^2\right], \tag{2.4.57}$$

$$H_{3/2}^{\mathrm{III}} = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + \frac{i}{2m}\sigma_2\left[(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 - \frac{5}{4}p^2\right]. \tag{2.4.58}$$

Формулы (2.4.48) — (2.4.52) сводятся к (2.4.55) — (2.4.58) при $k_1 = 1$, $s = 1/2$, $k_1 = k_3 = k_5 = 0$, $k_2 = k_4 = 1$. Оператор (2.4.56) совпадает с гамильтонианом Дирака, а операторы (2.4.55) (при $s = 0$) и (2.4.57) — с гамильтонианами Тамма — Сакаты — Такетани для частиц со спинами 0 и 1.

Гамильтониан (2.4.55) в случае $s > 0$ не представляет особого интереса, так как он не зависит от спиновых матриц и, следовательно, не несет информацию о спиновой структуре частицы. Мы видим, что существуют только четыре пуанкаре- и P-, C-, T-инвариантных уравнения вида (2.4.1), где H_s — зависящий от спиновых матриц дифференциальный оператор, включающий производные не выше второго порядка. Это уравнения Дирака, Тамма — Сакаты — Такетани и уравнения (2.4.1), (2.4.58) для частиц со спином 3/2. Преобразования P, T и C на множествах решений уравнений (2.4.1) с гамильтонианами (2.4.55), (2.4.58) задаются формулами (2.4.17), где

$$r_1^{\mathrm{III}} = 1, \quad r_2^{\mathrm{III}} = \sigma_3, \quad r_3^{\mathrm{III}} = \sigma_3\Delta. \tag{2.4.59}$$

Таким образом, для частиц спина $s > 3/2$ не существует пуанкаре- и P-, T-, C-инвариантных гамильтонианов H_s^{III} в классе дифференциальных операторов второго порядка, отличных от тривиальных операторов (2.4.55). Более того, можно показать, что таких гамильтонианов нет и в классе дифференциальных операторов произвольного конечного порядка. Следовательно, при описании частицы со спином $s > 3/2$ приходится выбирать между нелокальными (интегро-дифференциальными) уравнениями вида (2.4.1), описанными в предыдущих пунктах, и уравнениями, не обладающими симметрией относительно пространственной инверсии.

2.4.5. Связь с каноническим представлением Ю. М. Широкова. Как нетрудно заметить, задача нахождения пуанкаре-инвариантных уравнений движения в подходах I—III сводилась к описанию некоторых специальных реализаций представлений алгебры Пуанкаре, принадлежащих I классу. Возникает естественный вопрос о связи этих реализаций с неприводимыми представлениями алгебры AP(1, 3), полученными в § 2.1.

Здесь мы установим эту связь в явном виде и покажем, что представления (2.4.11), (2.4.14), (2.4.15) с найденными выше гамильтонианами H_s^{I}, H_s^{II} и H_s^{III} эквивалентны прямой сумме неприводимых представлений $D^+(s) \oplus D^-(s)$.

Для упрощения выкладок будем исходить из реализации Ю. М. Широкова, в которой базисные элементы упомянутой суммы представлений имеют вид (ср. (2.1.49))

$$\begin{gathered} P_0 = \sigma_1 E, \quad P_a = p_a, \quad \mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}, \\ \mathbf{N} = x_0 \mathbf{p} - \frac{1}{2} \sigma_1 [\mathbf{x}, E]_+ - \sigma_1 \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{S}}{E + m}, \end{gathered} \tag{2.4.60}$$

где σ_1, $\mathbf{S}$ — матрицы (2.2.29), (2.4.12). Операторы (2.4.60) и (2.4.11), (2.4.14), (2.4.15) оказываются связанными соотношениями

$$P_\mu^\alpha = V^\alpha P_\mu \left[V^\alpha\right]^{-1}, \quad \mathbf{J}^\alpha = V^\alpha \mathbf{J} \left(V^\alpha\right)^{-1}, \quad \mathbf{N}^\alpha = V^\alpha \mathbf{N} \left(V^\alpha\right)^{-1}, \tag{2.4.61}$$

где P_μ^α, $\mathbf{J}^\alpha$, $\mathbf{N}^\alpha$ — базисные элементы алгебры AP(1, 3) в представлениях (2.4.11), (2.4.14), (2.4.15), V^α — обратимые операторы следующего вида [118]:

$$\begin{gathered} V^{\mathrm{I}} = \exp\left(\frac{i}{2} \sigma_2 \sum_\nu \varphi_\nu \Lambda_\nu\right), \\ (V^{\mathrm{II}})_1 = \sqrt{\frac{m}{E}} \left\{\mathrm{ch}\left(\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{p} \theta^{\mathrm{II}}\right) + i\sigma_2 \,\mathrm{sh}\left(\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{p} \theta^{\mathrm{II}}\right)\right\}, \\ V^{\mathrm{III}} = \left(E + \sigma_1 H_s^{\mathrm{III}}\right) \left[2E\left(E + \frac{1}{2}\left[\sigma_1, H_s^{\mathrm{III}}\right]_+\right)\right]^{-1/2} \end{gathered} \tag{2.4.62}$$

где φ_ν, θ^{II} — параметры, задаваемые соотношениями (2.4.34) — (2.4.36), (2.4.44), $(V^{\mathrm{II}})_1$ соответствуют гамильтонианам $(H^{\mathrm{II}})_1$ (2.4.42).

Проверка соотношений (2.4.61), (2.4.62) требует несложных, но несколько громоздких выкладок, которые мы опускаем. Отметим только, что преобразование (2.4.61) с $\alpha = \mathrm{III}$ может быть использовано для определения явного вида операторов λ_s^{III}, которые оказываются нелокальными (интегро-дифференциальными). Представления вида (2.4.11), где λ_s^{III} — дифференциальный оператор, сводятся к канонической форме (2.4.60) с помощью более громоздких операторов преобразования, например, для гамильтонианов H_s^{III} вида (2.4.48) можно выбрать при $k_1 = 1$

$$\begin{gathered} V^{\mathrm{III}} = \frac{1}{2m} \exp\left(\sigma_1 \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{p} \,\mathrm{arth}\, \frac{p}{m}\right)\Big[E(1 + \sigma_3) + \\ + (1 - \sigma_3)(m - 2\sigma_1 \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2) E\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\Big], \end{gathered} \tag{2.4.63}$$

что соответствует представлению (2.4.11) с $\lambda_s^{\mathrm{III}} = (1 - k)\Big[i\mathbf{S} + k(\sigma_1 - i\sigma_2) \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{S}}{m}\Big]$.

Формулы (2.4.62) задают явный вид операторов, связывающих представления, используемые в подходах I—III, с каноническим представлением Широкова — Фолди (2.4.60). В случае, когда гамильтониан частицы произвольного спина имеет вид (2.4.38), оператор V^{I} принимает форму

$$V^{\mathrm{I}} = \left(E + \sigma_1 H_s^{\mathrm{I}}\right)\left[2E\,(E + m)\right]^{-1/2}, \tag{2.4.64}$$

а для гамильтонианов (2.4.39) этот оператор принимает вид

$$V^{\mathrm{I}} = \exp\left(i\sigma_2 \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{m}\right). \tag{2.4.65}$$

При $s = 1/2$ операторы (2.4.64) и (2.4.65) совпадают и сводятся к оператору Прайса — Фолди — Воутхойзена (ПФВ) [188, 294], диагонализирующему уравнение Дирака (при этом H_s^{I} в (2.4.64) — гамильтониан Дирака). Формулы (2.4.64), (2.4.65) задают обобщение оператора ПФВ на случай произвольного спина.

Используя связь (2.4.61), можно определить операторы средней координаты и среднего спина для частицы с произвольным спином. Действительно, в каноническом представлении (2.4.60) эти операторы имеют вид [188]

$$X_a^k = x_a, \qquad S_{ab}^k = S_{ab}.$$

С помощью преобразования (2.4.61) получаем эти операторы в представлениях (2.4.11), (2.4.14), (2.4.20):

$$X_a^{\alpha} = V^{\alpha} x_a \,[V^{\alpha}]^{-1}, \qquad S_{ab}^{\alpha} = V^{\alpha} S_{ab}\,[V^{\alpha}]^{-1}, \qquad \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}.$$

Приведем явный вид этих операторов, соответствующих гамильтонианам (2.4.38) и (2.4.39):

$$\begin{aligned}
&\left(X_a^{\mathrm{I}}\right)_1 = x_a + \frac{1}{p^2 E}\left\{S_{ab}p_b\left[E - \sigma_1\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)_1\right] + ip_a\left[\sigma_1\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)_1 - m\right]\right\},\\
&\left(S_{ab}^{\mathrm{I}}\right)_1 = S_{ab} + \frac{1}{p^2 E}\,\varepsilon_{abc}S_{cd}p_d\left[E - \sigma_1\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)_1\right],
\end{aligned} \tag{2.4.66}$$

$$\begin{aligned}
&\left(X_a^{\mathrm{I}}\right)_2 = x_a + \frac{1}{E}\,\sigma_2 S_a + \frac{1}{E^2\,(E+m)}\left(ES_{ab}p_b - i\sigma_2 p_a \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\right),\\
&\left(S_{ab}^{\mathrm{I}}\right)_2 = S_{ab} + \frac{1}{E}\,\sigma_2\varepsilon_{abc}S_{cd}p_d + \frac{1}{E\,(E+m)}\left(p_c\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} - S_c p^2\right)\varepsilon_{abc},\\
&S_a = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}S_{bc}.
\end{aligned}$$

Формулы (2.4.66) обобщают операторы средней координаты и среднего спина для дираковского электрона на случай частиц произвольного спина.

В заключение отметим, что найденные выше уравнения можно обобщить таким образом, чтобы они описывали квантовомеханические объекты с несколькими спиновыми и массовыми состояниями. Уравнения для частиц с переменными массой и спином рассматривались в работах [54, 203].

§ 2.5. Уравнения для частиц произвольного спина в форме Дирака

2.5.1. Ковариантное уравнение с коэффициентами, образующими алгебру Клифорда. Все релятивистские уравнения движения, описанные выше, в той или иной степени являются обобщением уравнения Дирака. Здесь мы рассмотрим еще одно важное обобщение этого уравнения, которое предполагает использование приводимых представлений алгебры Клифорда.

Как и в § 2.3, будем искать уравнение движения релятивистской частицы произвольного спина в виде

$$(\Gamma_\mu p^\mu - m)\Psi = 0, \tag{2.5.1}$$

где Γ_μ — некоторые квадратные числовые матрицы, $\Psi = \Psi(x)$ — многокомпонентная функция (матрица-столбец).

Согласно (2.3.1) функция Ψ должна покомпонентно удовлетворять уравнению КГФ. Простейший способ, гарантирующий выполнение условия (2.3.1), состоит в том, чтобы по аналогии с теорией Дирака для электрона потребовать выполнения следующих соотношений для матриц Γ_μ:

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \tag{2.5.2}$$

Действительно, умножая (2.5.1) на $\Gamma_\mu p^\mu + m$ и учитывая (2.5.2), мы приходим к условиям (2.3.1), которые, таким образом, являются дифференциальным следствием уравнения (2.5.2).

Неприводимое представление алгебры (2.5.2) задается матрицами размерности 4×4. Подставляя такие матрицы в (2.5.1), приходим к уравнению Дирака для частицы со спином $s = 1/2$.

В этом параграфе мы рассмотрим уравнения вида (2.5.1), где Γ_μ — матрицы, образующие произвольное (в общем случае приводимое) представление алгебры Клифорда (2.5.2). Покажем, что такие уравнения можно интерпретировать как уравнения движения релятивистской частицы произвольного спина s, и найдем дополнительные условия, которые необходимо наложить на Ψ, чтобы выделить подпространство, соответствующее фиксированному значению s.

Умножив (2.5.1) на Γ_0, приходим к уравнению в форме Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = H\Psi, \quad H = \Gamma_0\Gamma_a p_a + \Gamma_0 m. \tag{2.5.3}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (2.5.1), где Γ_μ — матрицы произвольной размерности, удовлетворяющие соотношениям (2.5.2), инвариантно относительно алгебры Пуанкаре. Действительно, выбирая базисные элементы этой алгебры в ковариантной форме (2.1.57) и представляя матрицы $S_{\mu\nu}$ в виде

$$S_{\mu\nu} = j_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \quad j_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu], \tag{2.5.4}$$

получаем, что операторы (2.1.57), (2.5.4) удовлетворяют условиям пуанкаре-инвариантности уравнения (2.5.4) (т. е. соотношениям

(2.4.4) — (2.4.10)), если для матриц $\tau_{\mu\nu}$ выполняется

$$[\tau_{\mu\nu},\ \tau_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}\tau_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}\tau_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\tau_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\tau_{\mu\lambda}),$$
$$[\tau_{\mu\nu},\ \Gamma_\lambda] = [\tau_{\mu\nu},\ j_{\lambda\sigma}] = 0, \qquad (2.5.5)$$

т. е. если матрицы $\tau_{\mu\nu}$ коммутируют с Γ_λ и образуют конечномерное представление алгебры АО(1, 3).

Таким образом, каждому конечномерному представлению алгебры АО(1, 3) можно сопоставить пуанкаре-инвариантное уравнение в форме Дирака (2.5.1). Генераторы группы Пуанкаре на множестве решений такого уравнения задаются формулами (2.1.57), где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, представляющие собой сумму коммутирующих матриц $j_{\mu\nu}$ (2.5.4) и $\tau_{\mu\nu}$.

2.5.2. Уравнения с минимальным числом компонент. Пуанкаре-инвариантные уравнения в форме Дирака (2.5.1) допускают различную интерпретацию, поскольку представление алгебры Пуанкаре, которое реализуется на множестве их решений, не определяется однозначно по явному виду матриц Γ_μ. Исключение составляет лишь случай, когда размерность этих матриц равна 4×4 (что соответствует уравнению Дирака для электрона), так как при этом базисные элементы а. и. однозначно выражаются через Γ_μ; см. § 1.2. Однако и уравнение Дирака можно в принципе использовать для описания бесспиновых частиц; см. ниже п. 4.1.4.

В случае, когда размерность матриц Γ_μ не равна 4×4, для интерпретации уравнения (2.5.1) необходимо задаться соответствующим конкретным представлением алгебры АР(1, 3), т. е. определить представление матриц $\tau_{\mu\nu}$ из (2.5.4), (2.5.5). Однако такое представление алгебры Пуанкаре оказывается приводимым по спину, поэтому на множество решений уравнения (2.5.1) необходимо наложить дополнительное условие типа (2.3.1), выделяющее подпространство, соответствующее фиксированному значению s.

Рассмотрим случай, когда $\tau_{\mu\nu}$ образуют представление $D(\tau,\ 0)$ алгебры АО(1, 3). Это означает, что (см. п. 2.1.8)

$$\tau_{ab} = \tau_c, \qquad \tau_{0a} = i\tau_a, \qquad (a,\ b,\ c) — \text{цикл}\ (1,\ 2,\ 3),$$
$$\tau_a\tau_a = \tau(\tau+1), \qquad [\tau_a,\ \tau_b] = i\tau_c. \qquad (2.5.6)$$

Подставив (2.5.6) в (2.5.4), получаем

$$S_{ab} = \frac{i}{4}[\Gamma_a, \Gamma_b] + \varepsilon_{abc}\tau_c, \quad S_{0a} = \frac{i}{4}[\Gamma_0, \Gamma_a] + i\tau_a, \qquad (2.5.7)$$

где матрицы τ_a, по определению, коммутируют с Γ_μ. В силу леммы Шура заключаем, что минимальная размерность матриц (2.5.7) равна $[4(2\tau+1)]^2$, причем, не умаляя общности, можно положить

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes I, \qquad \tau_a = 1 \otimes \widehat{\tau}_a, \qquad (2.5.8)$$

где символ $\otimes$ означает прямое (кронекеровское) произведение матриц, γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака, $\widehat{\tau}_a$ — матрицы размерности $(2\tau+1)\times(2\tau+1)$, реализующие представление $D(\tau)$ алгебры АО(3) (2.5.6), I и 1 — единичные матрицы размерности $(2\tau+1)\times\times(2\tau+1)$ и 4×4 соответственно.

Для решения вопроса о том, частицы какого спина описывают уравнения (2.5.1), (2.5.8), необходимо найти собственные значения оператора $W_\mu W^\mu$, где W^μ — вектор Любанского — Паули, построенный из генераторов (2.1.57), (2.5.7). В системе отсчета, где $\tilde{p}=(m, 0, 0, 0)$,

$$W_\mu W^\mu = -m^2\mathbf{S}^2, \quad S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \tag{2.5.9}$$

поэтому собственные значения этого оператора могут быть найдены с помощью редукции представления алгебры матриц $S_{\mu\nu}$ (2.5.7) по алгебре AO(3).

Поскольку матрицы $j_{\mu\nu}$ (2.5.4), (2.5.8) являются генераторами $(2\tau+1)$-кратно вырожденного представления $D\left(\frac{1}{2}0\right)\oplus D\left(0\frac{1}{2}\right)$ группы $O(1,3)$, то матрицы $S_{\mu\nu}$ (2.5.7) порождают представление

$$\left[D\left(\frac{1}{2}0\right)\oplus D\left(0\frac{1}{2}\right)\right]\otimes D(\tau 0) = \\ = D\left(\tau+\frac{1}{2}0\right)\oplus D\left(\tau-\frac{1}{2}0\right)\oplus D\left(\tau\frac{1}{2}\right), \tag{2.5.10}$$

При редукции этого представления по группе $O(3)\subset O(1,3)$ получаем следующую прямую сумму представлений:

$$D(\tau+1/2)\oplus D(\tau-1/2)\oplus D(\tau+1/2)\oplus D(\tau-1/2), \tag{2.5.11}$$

что соответствует двум возможным значениям спина:

$$s_1 = s = \tau+1/2, \qquad s_2 = s-1 = \tau-1/2. \tag{2.5.12}$$

При этом, как нетрудно подсчитать, размерность матриц $j_{\mu\nu}$ и $\tau_{\mu\nu}$ равна $8s\times 8s$. Можно показать, что если матрицы $\tau_{\mu\nu}$ образуют представление $D(\tau_1, \tau_2)$, где $\tau_1\neq 0$, $\tau_2\neq 0$, или приводимое представление, то размерность Γ_μ при заданном фиксированном s (старшем весе представления алгебры AO(3)) будет больше, чем $8s\times 8s$.

Итак, гамильтониан (2.5.3) и генераторы (2.1.57) удовлетворяют условиям пуанкаре-инвариантности (2.4.4)—(2.4.10), а вектор-функция Ψ имеет минимальное число компонент, необходимое для того, чтобы уравнение (2.5.1) описывало частицу со спином s, если матрицы Γ_μ имеют размерность $8s\times 8s$, а матрицы $S_{\mu\nu}$ являются генераторами представления (2.5.10) группы Лоренца.

Потребуем, чтобы решения уравнения (2.5.1) удовлетворяли условиям (2.3.2):

$$W_\mu W^\mu\Psi = -m^2 s(s+1)\Psi. \tag{2.5.13}$$

Подставляя сюда явный вид операторов W_μ, P_μ и $J_{\mu\nu}$ из (2.1.3), (2.1.57), (2.5.7), приходим к системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которая с использованием (2.5.1) сводится к системе первого порядка:

$$(\Gamma_\mu p^\mu + m)(1+i\Gamma_4)[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)]\Psi = 16ms\Psi, \tag{2.5.14}$$

где $\Gamma_4 = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$.

Таким образом, в отличие от уравнений первого порядка, рассматриваемых в § 2.3, для уравнений в форме Дирака (2.5.1) условие (2.5.13) не следует непосредственно из уравнения, но должно рассматриваться как дополнительное требование, которое может быть записано в виде (2.5.14).

Сформулируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

Теорема 2.6. *Система уравнений* (2.5.1) *и* (2.5.14) *пуанкаре-инвариантна и описывает свободное движение частицы с фиксированными спином s и массой m.*

Уравнения (2.5.1), (2.5.14) имеют определенные преимущества перед другими пуанкаре-инвариантными уравнениями, рассматриваемыми выше. Эти преимущества заключаются в относительно простой форме, которая не усложняется с ростом спина, и в существовании разумного предела при $m \to 0$ (в то время как ковариантные уравнения из § 2.3 не допускают такого предельного перехода [157]). Наконец, уравнения (2.5.1), (2.5.14) допускают непротиворечивое обобщение на случай частиц, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем.

Уравнения в форме Дирака для частиц произвольного спина впервые рассматривались Мозесом и Ломонтом [271]. Однако дополнительное условие, выделяющее подпространство решений с фиксированным спином s, в подходе [271] имеет другую (отличающуюся от (2.5.14)) форму и оказывается несовместным с уравнением (2.5.1) после введения минимального взаимодействия с электромагнитным полем.

2.5.3. Связь с уравнениями без лишних компонент. Выведенные выше уравнения в форме Дирака самым тесным образом связаны с дифференциальными уравнениями движения без лишних компонент, рассматриваемыми в § 2.4. А именно, уравнения (2.5.1), (2.5.14) могут быть сведены к форме (2.4.1), где гамильтониан H — дифференциальный оператор второго порядка (2.4.48).

Запишем уравнения (2.5.1), (2.5.14) в форме

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = H\Psi, \quad \widehat{P}_s\Psi = \Psi, \tag{2.5.15}$$

где H — гамильтониан (2.5.3),

$$\widehat{P}_s = P_s + \frac{1}{2m}(1 - i\Gamma_4)[\Gamma_\mu p^\mu, P_s], \quad P_s = \frac{1}{2s}[S^2 - s(s-1)]. \tag{2.5.16}$$

Эквивалентность уравнений (2.5.1), (2.5.14) и (2.5.15) следует из соотношения

$$8s(1 + i\Gamma_4)P_s = (1 + i\Gamma_4)[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)].$$

Как нетрудно убедиться, операторы (2.5.16) удовлетворяют условиям

$$P_s^2 = P_s, \quad \widehat{P}_s^2 = \widehat{P}_s. \tag{2.5.17}$$

Оператор $\widehat{P}_s$ является проектором на подпространство, соответствующее спину s.

С помощью преобразования

$$\Psi \to \Phi = V\Psi, \quad H \to H' = VHV^{-1}, \quad \widehat{P}_s \to V\widehat{P}_s V^{-1} = P_s,$$
$$V = 1 + (1 - i\Gamma_4)(\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{p} - k_1\Gamma_0\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}), \quad V^{-1} = V(-\mathbf{p}), \tag{2.5.18}$$

уравнения (2.5.15) приводятся к следующему эквивалентному виду:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Phi = H'\Phi \equiv [\Gamma_0 m + 2k_1\Gamma_4\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} + \\ + \frac{1}{2m}\Gamma_0(1 - i\Gamma_4)[p^2 - 4k^2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2]\Phi,$$
$$\widehat{P}'_s\Phi \equiv P_s\Phi = 0, \text{ или } \mathbf{S}^2\Phi = s(s+1)\Phi. \tag{2.5.19}$$

Выбирая для матриц Γ_0, Γ_1, $\mathbf{S}$ представление

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \tilde{\sigma}_1\end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \tilde{\sigma}_3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix}\mathbf{S} & 0\\ 0 & \tilde{\mathbf{S}}\end{pmatrix}, \tag{2.5.20}$$

где σ_1, σ_3, $\mathbf{S}$ — матрицы (2.2.29), (2.4.12), $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_3$, $\tilde{\mathbf{S}}$ — аналогичные матрицы для спина $s' = s - 1$. 0 — нулевые матрицы соответствующей размерности, приходим к уравнениям в форме (2.4.1), (2.4.48) для $2(2s+1)$-компонентной функции $\Phi_s = P_s\Phi$, которые, таким образом, являются дифференциальными следствиями уравнений в форме Дирака.

2.5.4. Лагранжева формулировка. Покажем, что уравнения в форме Дирака могут быть получены в рамках принципа минимального действия из соответствующим образом подобранного лагранжиана.

Запишем систему (2.5.1), (2.5.14) в виде единого уравнения

$$[B_s(\Gamma_\mu p^\mu - m) + \varkappa m(1 - B_s)]\Psi = 0, \tag{2.5.21}$$

где $\varkappa$ — произвольный параметр, который, не умаляя общности, можно выбрать равным единице, а B_s — оператор проектирования

$$B_s = \frac{1}{16ms}\left(\Gamma_\mu p^\mu + m\right)(1 + i\Gamma_4)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]. \tag{2.5.22}$$

Действительно, умножая (2.5.21) на B_s и $1 - B_s$ и принимая во внимание тождества

$$B_s\cdot B_s = B_s, \quad (1 + i\Gamma_4)B_s(\Gamma_\mu p^\mu - m)B_s \equiv 2(\Gamma_\mu p^\mu - m)B_s, \tag{2.5.23}$$

приходим к системе уравнений (2.5.1), (2.5.14).

Используя формулировку (2.5.21), уже нетрудно найти лагранжиан, соответствующий уравнению в форме Дирака для произвольного спина. Действительно, выбирая плотность лагранжиана в виде

$$L(x) = i\left(m\overline{\Psi}' + i\frac{\partial\overline{\Psi}'}{\partial x_\mu}\widehat{\Gamma}_\mu\right)\widehat{S}\widehat{\Gamma}_\lambda\frac{\partial\Psi'}{\partial x_\lambda} + i\frac{\partial\overline{\Psi}'}{\partial x_\lambda}\widehat{\Gamma}_\lambda\widehat{S}\left(m\Psi' + i\widehat{\Gamma}_\mu\frac{\partial\Psi'}{\partial x_\mu}\right) + 16m^2s\overline{\Psi}'\Psi', \tag{2.5.24}$$

где Ψ', $\overline{\Psi}'$ — волновые функции, имеющие $16s$ компонент:

$$\Psi' = \text{столбец}\ (\Psi,\ \chi), \quad \overline{\Psi}' = \Psi'^* i\widehat{\Gamma}_0\widehat{\Gamma}_5\widehat{\Gamma}_4, \tag{2.5.25}$$

Ψ и χ — $8s$-компонентные функции, $\widehat{\Gamma}_\lambda$, $\widehat{S}$ — матрицы размерности $16s \times 16s$:

$$\widehat{S} = (1 + i\Gamma_4)\,(\widehat{S}_{\mu\nu}\widehat{S}^{\mu\nu} - 4s(s-1)),$$

$$\widehat{\Gamma}_\mu = \begin{pmatrix} \Gamma_\mu & 0 \\ 0 & \Gamma_\mu \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Gamma}_4 = \begin{pmatrix} \Gamma_4 & 0 \\ 0 & -\Gamma_4 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\Gamma}_5 = i\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_4 \\ -\Gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.5.26}$$

нетрудно убедиться, что уравнение (2.5.21) представляет собой одно из уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\Psi}} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{\partial L}{\partial \left(\dfrac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x_\lambda} \right)} = 0, \tag{2.5.27}$$

где L задается формулой (2.5.24). Из (2.5.27) следует также уравнение для функции χ, которое сводится к (2.5.21) с помощью замены $\chi \to \Psi$, $\Gamma_4 \to -\Gamma_4$.

Таким образом, уравнения движения в форме Дирака для произвольного спина допускают лагранжеву формулировку, если удвоить число компонент волновой функции. Отметим, что уравнения (2.5.27) для волновых функций Ψ и χ инвариантны относительно преобразований P, T и C, в то время как уравнения для Ψ P- и T-неинвариантны.

2.5.5. Уравнения в форме Дирака как универсальная модель частицы произвольного спина. В заключение этого параграфа покажем, что формулировка уравнения для частицы произвольного спина в виде системы, включающей многокомпонентное уравнение Дирака и дополнительное условие, устраняющее лишние компоненты, не является экзотическим приемом, лежащим вне рамок традиционной формулировки релятивистских волновых уравнений. Напротив, эта формулировка очень естественна и может быть применена для широкого класса пуанкаре-инвариантных уравнений.

Рассмотрим в качестве примера уравнения для частиц со спином 0 и 1 в формулировках КПД (см. выше п. 2.3.5), Штюкельберга [307] и Герли [240] и покажем, что все они могут быть записаны в следующей эквивалентной форме:

$$(\Gamma^\mu p_\mu - m)\,\Psi = 0, \quad P\Psi = 0, \tag{2.5.28}$$

где Γ^μ — матрицы Дирака размерности 16×16, P — некоторая числовая матрица (разная для различных формулировок).

Будем исходить из представления алгебры $AO(1,3)$ следующего вида:

$$D=\left[D\left(\frac{1}{2}\,0\right)\oplus D\left(0\,\frac{1}{2}\right)\right]\otimes\left[D\left(\frac{1}{2}\,0\right)\oplus D\left(0\,\frac{1}{2}\right)\right]=$$
$$=D(1\,0)\oplus D(0\,0)\oplus D\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)\oplus D\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)\oplus D(0\,0)\oplus D(0\,1). \quad (2.5.29)$$

Базисные элементы такой алгебры можно представить в следующей форме:

$$\widehat{S}_{\mu\nu}=S_{\mu\nu}+S'_{\mu\nu},\quad S_{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu],\quad S'_{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\Gamma'_\mu,\Gamma'_\nu], \quad (2.5.30)$$

где $\{\Gamma_\mu\}$ и $\{\Gamma'_\mu\}$ — коммутирующие наборы матриц Дирака размерности 16×16, удовлетворяющих условиям

$$[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu]_+=[\Gamma'_\mu,\Gamma'_\nu]_+=2g_{\mu\nu},\quad [\Gamma_\mu,\Gamma'_\nu]=0. \quad (2.5.31)$$

Первое из уравнений (2.5.28) явно инвариантно относительно алгебры Пуанкаре, базисные элементы которой имеют ковариантную форму (2.1.57), (2.5.30). Условие пуанкаре-инвариантности второго из уравнений (2.5.28) сводится к коммутативности матриц P и $\widehat{S}_{\mu\nu}$.

Покажем, что система уравнений (2.5.28), где

$$P=1-P_1\equiv\frac{1}{16}(1-\Gamma'_k\Gamma^k)^2,\quad k=0,1,2,3,4,$$
$$\Gamma_4=-i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3,\quad \Gamma'_4=-i\Gamma'_0\Gamma'_1\Gamma'_2\Gamma'_3, \quad (2.5.32)$$

или

$$P=P_1, \quad (2.5.33)$$

эквивалентна десятикомпонентному уравнению КПД для частицы спина 1 или пятикомпонентному уравнению КПД для частицы спина 0.

Выберем для конкретности следующую реализацию матриц Γ_μ и Γ'_μ:

$$\Gamma_0=\begin{pmatrix}0&0&0&g\\0&0&I&0\\0&I&0&0\\g&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \Gamma_a=\begin{pmatrix}0&0&-S_a&-gS_{4a}\\0&0&-S_{4a}&S_a\\S_a&S_{4a}&0&0\\-gS_{4a}&-S_a&0&0\end{pmatrix},$$
$$\Gamma'_0=\begin{pmatrix}0&0&0&I\\0&0&-g&0\\0&-g&0&0\\I&0&0&0\end{pmatrix},\quad \Gamma'_a=\begin{pmatrix}0&0&-S_a&-S_{4a}\\0&0&gS_{4a}&-S_a\\S_a&gS_{4a}&0&0\\S_{4a}&S_a&0&0\end{pmatrix}, \quad (2.5.34)$$

где $g=2\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\tau}-1/2$, $S_{4a}=j_a-\tau_a$, $S_a=j_a+\tau_a$, I и 0 — единичные и нулевые матрицы размерности 4×4, j_a и τ_a — матрицы размерности

4×4, удовлетворяющие условиям

$$[j_a, \tau_b] = 0, \quad j_a^2 = \tau_a^2 = 1/4, \\ [j_a, j_b] = i\varepsilon_{abc} j_c, \quad [\tau_a, \tau_b] = i\varepsilon_{abc}\tau_c \tag{2.5.35}$$

и задаваемые в явном виде приведенными ниже соотношениями (2.6.25).

В выбранном представлении матрица $1 - P_1$ (2.5.32) имеет диагональную форму

$$1 - P_1 = \begin{pmatrix} P_+ & & & \\ & P_+ & & \\ & & \widehat{0} & \\ & & & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \qquad P_+ = \frac{1}{2}(1+g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5.36}$$

откуда с очевидностью следует, что условие $(1 - P_1)\Psi = 0$ зануляет шесть из шестнадцати компонент волновой функции Ψ.

Систему (2.5.28), (2.5.32) можно записать в виде единого уравнения следующего вида:

$$[P(\Gamma^\mu \boldsymbol{p}_\mu - m)P + m(1-P)]\,\Psi \equiv (\beta^\mu p_\mu - m)\,\Psi = 0, \tag{2.5.37}$$

где

$$P = 1 - P_1, \qquad \beta^\mu = P\Gamma^\mu P. \tag{2.5.38}$$

Эквивалентность системы (2.5.28) и уравнения (2.5.37) следует из того факта, что оператор $P = P^2$ коммутирует с $\Gamma^\mu p_\mu$ на множестве решений уравнения (2.5.37).

Формула (2.5.37) задает уравнение КДП (2.3.6), (2.3.25) для 10-компонентной волновой функции, в чем можно убедиться непосредственной проверкой, сравнивая (2.5.37) и (2.3.6), (2.3.25) покомпонентно («лишние» компоненты Ψ и матриц β^μ (2.5.38) тождественно равны нулю).

Аналогично убеждаемся, что уравнения (2.5.28), (2.5.33) эквивалентны 5-компонентному уравнению КДП для частиц со спином 0. Соответствующие матрицы β^μ задаются формулами (2.3.20).

Одиннадцатикомпонентное уравнение Штюкельберга [307, 15], описывающее частицу с двумя возможными значениями спина 0 и 1, также может быть сформулировано как уравнение типа Дирака с дополнительным условием (2.5.28), где

$$P = \frac{1}{4}\left(1 - \Gamma_4\Gamma_4'\right)\left(1 - \frac{1}{2}\Gamma^\mu\Gamma_\mu'\right). \tag{2.5.39}$$

В представлении (2.5.34) проектор (2.5.39) является диагональной матрицей, в которой отличны от нуля (и равны единице) только четыре последних диагональных элемента. Явный вид соответствующих матриц β^μ для уравнения Штюкельберга получаем из выражений (2.5.34) для Γ^μ, зачеркивая в них последние четыре строки и столбца (и опуская первые — нулевые — строку и столбец).

Наконец, полагая в (2.5.28)

$$P = \frac{1}{64}\left(1 \pm \Gamma_4' \mp \Gamma_4 - \Gamma_4\Gamma_4'\right)\left(\Gamma^\mu\Gamma_\mu'\right)^2, \tag{2.5.40}$$

приходим при любом выборе знака $\pm$ к уравнению для частиц со спином 1 в форме Ломонта — Мозеса [271]. Записывая это уравнение в эквивалентной формулировке (2.5.37), получаем уравнение для семикомпонентной волновой функции, подробно исследованное Герли [240].

Отметим, что релятивистские уравнения Герли для частиц произвольного спина [240] также представляют собой не что иное, как уравнения Мозеса [271] (последние также имеют форму (2.5.28)), записанные в виде (2.5.37).

Подведем итоги. Мы убедились, что рецепт построения уравнений для частиц со спином $s > 1/2$ в виде системы, включающей уравнение Дирака для многокомпонентной волновой функции и ковариантное дополнительное условие, является достаточно универсальным и позволяет получить не только новые уравнения, рассматриваемые выше в §§ 2.1—2.4, но и хорошо известные уравнения КДП, Штюкельберга и Герли. Такую же структуру имеет уравнение Рариты — Швингера (2.3.37), которое допускает эквивалентную формулировку (2.3.38). Наконец, как будет показано в следующем параграфе, уравнения для безмассовых полей также удобно формулировать в форме Дирака.

§ 2.6. Уравнения для безмассовых полей

2.6.1. Основные определения. Выше в §§ 1.3, 1.4 мы уже сталкивались с примерами уравнений, на решениях которых реализуется представление алгебры Пуанкаре II класса. Согласно определению 1.5 такие уравнения описывают безмассовое поле с дискретным спином.

В этом параграфе рассматриваются пуанкаре-инвариантные уравнения для безмассовых полей с произвольной спиральностью. Задача описания таких уравнений представляет самостоятельный интерес, поскольку их нельзя в общем случае получить из уравнений для полей с ненулевой массой покоя с помощью предельного перехода $m \to 0$ [157]. Уравнения для безмассовых полей интересны также с точки зрения их возможных физических приложений, поскольку поля с нулевой массой покоя — это вполне реальные физические объекты.

Сформулируем основные определения, которые будут использоваться ниже при выводе пуанкаре-инвариантных уравнений для полей с нулевой массой покоя.

Определение 2.4. Будем говорить, что *уравнение*

$$L\Psi = 0, \tag{2.6.1}$$

где Ψ — *вектор-функция*

$$\Psi = \text{столбец } (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n),\ \Psi_\alpha \subset L_2, \tag{2.6.2}$$

а L — *некоторый линейный оператор (дифференциальный или интегро-дифференциальный), пуанкаре-ковариантно и описывает поле с нулевой массой, если* а) уравнение (2.6.1) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре;

б) представление алгебры AP(1, 3), которое реализуется на множестве решений этого уравнения, ковариантно (т. е. принадлежит классу $\mathfrak{M}_1$);

в) функция Ψ покомпонентно удовлетворяет уравнению Даламбера

$$p_\mu p^\mu \Psi = 0. \tag{2.6.3}$$

Множество решений уравнения (2.6.1), удовлетворяющего определению 2.4, будем называть релятивистским безмассовым полем. Релятивистское безмассовое поле является *скалярным*, *спинорным* и *векторным*, если а. и. уравнения (2.6.1) реализует ковариантные представления соответственно $D(0\,0)$, $D\left(0\,\frac{1}{2}\right)$ $\left(\text{или } D\left(\frac{1}{2}\,0\right)\right)$ и $D(0\ 1)$ (или $D(1\ 0)$).

Рассматриваемые в §§ 1.3, 1.4 уравнения для релятивистских безмассовых полей инвариантны также относительно конформной алгебры AC(1, 3). Оказывается, однако, что в общем случае конформная инвариантность пуанкаре-ковариантного уравнения для поля с нулевой массой покоя может и не иметь места*). В связи с этим инвариантность относительно конформной алгебры является дополнительным требованием, сужающим класс релятивистских уравнений для безмассовых полей.

Определение 2.5. Релятивистское безмассовое поле Ψ конформно-ковариантно, если уравнение (2.6.1) инвариантно относительно ковариантного представления алгебры AC(1, 3).

Мы увидим ниже, что условие конформной ковариантности позволяет однозначно определить уравнения для произвольного спина.

2.6.2. Теоретико-групповой вывод уравнений Максвелла. Прежде чем приступить к описанию пуанкаре-инвариантных уравнений для безмассового поля произвольного спина, обратимся к уравнениям Максвелла и продемонстрируем, как эти уравнения могут быть выведены, исходя из постулата релятивистской (или конформной) инвариантности и некоторых других предположений.

Покажем сначала, как уравнения Максвелла могут быть получены, исходя из требования конформной симметрии.

Теорема 2.7 [126]. *Пусть $\Psi(x)$ — релятивистское векторное поле с нулевой массой покоя, удовлетворяющее условию конформной инвариантности. Тогда $\Psi(x)$ с необходимостью удовлетворяет уравнениям Максвелла.*

Доказательство. По определению 2.4, безмассовое векторное поле описывается трехкомпонентной вектор-функцией (2.6.2), удовлетворяющей условию (2.6.3). Это условие должно быть инвариантно относительно конформной алгебры, базисные элементы

---

*) Это утверждение не противоречит теореме 1.6, поскольку мы не накладываем на множество решений уравнения (2.6.1) условия $W_\mu W^\mu \Psi = 0$.

которой имеют ковариантную форму (1.2.22), (1.4.24):

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu},\ J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},\\
&K_\mu = 2x_\mu D - p_\mu x_\nu x^\nu + 2S_{\mu\nu}x^\nu, \qquad (2.6.4)\\
&D = x_\mu p^\mu + iK,
\end{aligned}
$$

где в нашем случае $S_{ab} = \varepsilon_{abc}S_c$, $S_{0a} = i\varepsilon S_a$, S_c — матрицы (1.3.9), а K — произвольный параметр, $\varepsilon = \pm 1$.

Операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ и D, очевидно, удовлетворяют условию инвариантности уравнения (2.6.3) (см. теорему 1.6, с. 40). Что же касается операторов K_μ, то условие инвариантности $[K_\mu,\ p_\lambda p^\lambda]\Psi = 0$ сводится, как нетрудно проверить, к следующим уравнениям для $\Psi(x)$:

$$L_\mu \Psi \equiv [i(k_1 - 1)p_\mu + S_{\mu\nu}p^\nu]\Psi = 0. \qquad (2.6.5)$$

Можно показать, что система (2.6.5) совместна только при $k = 2$, при этом она совпадает с уравнениями Максвелла, если положить $\Psi = \mathbf{E} - i\varepsilon\mathbf{H}$ (в нем нетрудно убедиться, записав (2.6.5) покомпонентно и используя (1.3.9)). ■

Мы видим, что уравнения Максвелла однозначно определяются постулатами о конформной инвариантности и векторной природе электромагнитного поля. В следующем пункте в аналогичной постановке будет решена задача описания конформно-инвариантных уравнений для произвольного спина.

Рассмотрим теперь уравнения Максвелла с токами и зарядами (1.3.5), (1.3.6). Эти уравнения, очевидно, не могут быть получены с помощью изложенного выше приема из предположения о конформной инвариантности, поскольку ток не удовлетворяет условиям (2.6.3). Зато можно указать такие минимальные подсистемы уравнений (1.3.5), (1.3.6), которые приводят к полной системе уравнений Максвелла, если потребовать инвариантности теории относительно преобразований Лоренца. Приведем без доказательства два утверждения, иллюстрирующие возможности теоретико-группового вывода уравнений Максвелла с токами и зарядами.

Теорема 2.6 [126]. *Пусть $L(\mathbf{H}, \mathbf{E}, j)$ — система дифференциальных уравнений в частных производных, включающая уравнения*

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = -ij_0, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{H} = 0. \qquad (2.6.6)$$

Тогда для пуанкаре-инвариантности $L(\mathbf{E}, \mathbf{H}, j)$ необходимо, чтобы эта система включала также уравнения

$$i\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\mathbf{p}\times\mathbf{H} + i\mathbf{j}, \quad i\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}. \qquad (2.6.7)$$

Доказательство приведено в [126]. ■

Таким образом, уравнения Максвелла являются следствием системы (2.6.6) и постулата релятивистской инвариантности.

Справедлива также в некотором смысле обратная теорема: необходимым и достаточным условием пуанкаре-инвариантности системы уравнений (2.6.7) является требование, чтобы **E** и **H** удовлетворяли дополнительным условиям (2.6.6) [126].

2.6.3. Конформно-инвариантные уравнения для полей произвольного спина. В полной аналогии с доказательством теоремы 2.5 может быть осуществлен вывод уравнения для безмассового поля с произвольной спиральностью. Действительно, предположив, что такое поле удовлетворяет постулату конформной инвариантности, мы приходим к следующей системе соотношений:

$$[P_\mu,\ L]\,\Psi = [J_{\mu\nu},\ L]\,\Psi = [D,\ L]\,\Psi = 0, \tag{2.6.8}$$

$$[K_\mu,\ L]\,\Psi = 0, \qquad L = p_\mu p^\mu, \tag{2.6.9}$$

где P_μ, $J_{\mu\nu}$, D, K_μ — базисные элементы алгебры AC(1, 3) вида (2.6.4) с матрицами $S_{\mu\nu}$, принадлежащими произвольному представлению алгебры AO(1, 3), Ψ — вектор-функция (2.6.2) соответствующей размерности.

Соотношения (2.6.8), (2.6.9) являются необходимым условием конформной инвариантности уравнения (2.6.3), которому, по определению, должна удовлетворять вектор-функция $\Psi(x)$, описывающая релятивистское безмассовое поле. Условия (2.6.8) удовлетворяются тождественно на множестве решений уравнений (2.6.2), а из (2.6.9) получаем уравнения, совпадающие по форме с (2.6.5).

Таким образом, конформно-инвариантное безмассовое поле с необходимостью удовлетворяет уравнениям (2.6.5) с соответствующими матрицами $S_{\mu\nu}$. Мы ограничимся случаем, когда эти матрицы образуют вполне приводимое представление алгебры AO(1, 3). Тогда уравнения (2.6.5) распадаются на ряд незацепляющихся подсистем, в каждой из которых матрицы $S_{\mu\nu}$ — это базисные элементы неприводимого представления $D(j\tau)$ алгебры AO(1, 3).

Но уравнения (2.6.5) в свою очередь должны быть инвариантны относительно алгебры AC(1, 3), что приводит к следующим условиям для операторов L_μ:

$$[L_\mu,\ Q_A]\,\Psi = 0, \tag{2.6.10}$$

где Q — любой из генераторов (2.6.4), а Ψ принадлежит множеству решений уравнений (2.6.5). Прямым вычислением получаем

$$[L_\nu,\ P_\mu] = 0, \quad [L_\nu,\ D] = iL_\nu, \quad [L_\mu,\ J_{\nu\lambda}] = i\,(g_{\mu\lambda}L_\nu - g_{\mu\nu}L_\lambda), \tag{2.6.11}$$

откуда видно, что операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ и D удовлетворяют соотношениям (2.6.10). Что же касается операторов K_λ, то в результате подстановки их в (2.6.10) получаем следующую систему уравнений [159]:

$$\begin{gathered}\left[S_\lambda^\alpha S_{\alpha\mu} - iS_{\lambda\mu} - k\,(1-k)\,g_{\lambda\mu}\right]\Psi = 0,\\ [k\,(1-k) - j\,(j+1) - \tau\,(\tau+1)]\,\Psi = 0,\\ (j+\tau+1-k)\,(j-\tau-k)\,(j-\tau+k)(k+j+\tau+1)\,p_\lambda\Psi = 0,\end{gathered} \tag{2.6.12}$$

которая имеет нетривиальные решения только в случае $j\tau = 0$, при этом

$$k = j + \tau + 1 = s + 1. \qquad (2.6.13)$$

Подставив (2.6.13) в (2.6.5), приходим к системе конформно-инвариантных уравнений следующего вида:

$$(isp_\mu + S_{\mu\nu}p^\nu)\Psi = 0, \qquad (2.6.14)$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, принадлежащие представлению $D(s\ 0)$ (или $D(0\ s)$) алгебры АО(1, 3), Ψ — $(2s+1)$-компонентная волновая функция. Нетрудно убедиться, что эти уравнения описывают безмассовое поле со спиральностью $\pm s$. Действительно, умножение (2.6.14) слева на p_μ с последующим суммированием по μ приводит нас к уравнению (2.6.3), которое является условием безмассовости. Представляя (2.6.14) в виде

$$W_\mu \Psi = \varepsilon' s P_\mu \Psi \equiv \varepsilon\lambda p_\mu \Psi, \quad \lambda = \varepsilon\varepsilon' s, \qquad (2.6.15)$$

где W_μ — компоненты вектора Любанского — Паули, $\varepsilon' = 1$ для $S_{\mu\nu} \subset D(0\ s)$ и $\varepsilon' = -1$ для $S_{\mu\nu} \subset D(s\ 0)$, и сравнивая это уравнение с (2.1.54), заключаем, что на множестве функций Ψ, удовлетворяющих (2.6.24), реализуется прямая сумма неприводимых представлений $D^+(\varepsilon' s) \oplus D^-(-\varepsilon' s)$ группы Пуанкаре.

Итак, мы получили систему уравнений (2.6.14), описывающую безмассовое релятивистское поле произвольного спина. В случае $s = 1/2$ эта система эквивалентна уравнению Вейля, а при $s = 1$ — уравнениям Максвелла. Уравнения вида (2.6.14) для произвольного спина рассматривались в [102].

Подчеркнем, что уравнения (2.6.14) однозначно вытекают из предположения о конформной ковариантности поля $\Psi(x)$. Иными словами, если Ψ — конформно-ковариантное безмассовое поле, то оно обязательно должно удовлетворять системе уравнений (2.6.14). Эта система является полной в том смысле, что множество ее решений совпадает с пространством представления $D(\varepsilon' s) \oplus D^-(-\varepsilon' s)$ группы Пуанкаре, никаких дополнительных условий для $\Psi \subset L_2$ не требуется.

2.6.4. Уравнения типа Вейля. Выведенные выше уравнения (2.6.14) представляют собой совокупность четырех систем дифференциальных уравнений в частных производных, которым одновременно должна удовлетворять функция Ψ. Однако в случае $s = 1/2$ мы фактически имеем только одну систему уравнений — систему Вейля (1.4.3), к которой сводится каждое из уравнений (2.6.14) после умножения на одну из матриц Паули σ_μ.

Оказывается, пуанкаре-инвариантные уравнения типа Вейля существуют для безмассового поля произвольного спина. Вместо совокупности четырех уравнений (2.6.14) всегда (при любых значениях s) можно рассматривать одну систему, из которой эти уравнения будут вытекать как следствия.

Хорошо известно, что уравнение Вейля эквивалентно уравнению Дирака (при $m = 0$) с дополнительным условием $(1 - i\gamma_4)\Psi =$

$=0$. Уравнение типа Вейля для произвольного спина может быть получено аналогичным образом, исходя из дираконодобных уравнений, введенных в § 2.5.

Система пуанкаре-инвариантных уравнений для частицы произвольного спина (2.5.1), (2.5.14) для случая $m=0$ может быть записана в виде

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = \Gamma_0\Gamma_a p_a\Psi, \qquad (2.6.16)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0\Gamma_a p_a\right)(1+i\Gamma_4)\,S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\Psi = 0.$$

Накладывая на множество решений этой системы пуанкаре-инвариантное дополнительное условие

$$(1-i\Gamma_4)\Psi = 0 \qquad (2.6.17)$$

и выбирая матрицы Γ_μ в виде

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \Gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_a \\ \sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.6.18)$$

где I и 0 — $4s$-рядные единичные и нулевая матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда, приходим к системе уравнений

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x_0} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\varphi(x) \equiv \sigma_\mu p^\mu\varphi(x) = 0, \qquad (2.6.19)$$

$$\sigma_\mu p^\mu \widehat{S}_{\nu\lambda}\widehat{S}^{\nu\lambda}\varphi(x) = 0,$$

где $\varphi(x)$ — $4s$-компонентная волновая функция, связанная с Ψ соотношением

$$\varphi = \frac{1}{2}(1+i\Gamma_4)\Psi, \qquad (2.6.20)$$

а матрицы $\widehat{S}_{\mu\nu}$, согласно (2.5.7), (2.6.20), принадлежат представлению $D\left(\frac{1}{2}\,0\right)\oplus D\left(s-\frac{1}{2}\,0\right)$ алгебры АО(1, 3), т. е. имеют следующую структуру:

$$\widehat{S}_{0a} = i\widehat{S}_{bc}, \quad \widehat{S}_{ab} = j_c + \frac{1}{2}\sigma_c, \quad (a, b, c) - \text{цикл } (1, 2, 3), \qquad (2.6.21)$$

причем

$$[j_a, \sigma_b] = 0, \quad [j_a, j_b] = ij_c, \quad j_a j_a = s(s-1). \qquad (2.6.22)$$

Уравнения (2.6.19) записаны в форме, делающей явной их релятивистскую и конформную инвариантность. Нетрудно убедиться, что эти уравнения описывают безмассовое поле со спиральностью $\pm s$. Действительно, умножая первое из них на $i\frac{\partial}{\partial x_0} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$, приходим к уравнению (2.6.3), откуда видно, что масса покоя поля равна нулю. Обозначив $\widehat{S}_{\mu\nu}\widehat{S}^{\mu\nu} = -4(g-s^2)$ и принимая во внимание тождества

$$[g, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}]_+ = 2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}, \quad g^2 = s^2, \quad [g, \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}] = 0, \quad S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc},$$

получаем из (2.6.19) после несложных преобразований

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\varphi = g\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\varphi, \tag{2.6.23}$$

или

$$gp_0\varphi = \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\varphi = W_0\varphi. \tag{2.6.24}$$

Сравнивая (2.6.24) с (2.1.54), заключаем, что спиральность поля φ совпадает с собственными значениями матрицы g, которые, согласно (2.6.22), равны $\pm s$. Можно показать что конформно-ковариантные уравнения (2.6.14) являются следствием системы (2.6.19).

Таким образом, для описания безмассовых частиц произвольной спиральности можно использовать обобщенные уравнения Вейля (2.6.19). Эти уравнения имеют то преимущество перед ковариантными уравнениями (2.6.14), что включают две подсистемы, каждая из которых остается инвариантной при преобразованиях из конформной группы, в то время как уравнения (2.6.14) — это четыре подсистемы, переходящие при преобразованиях Лоренца друг в друга. Рассмотрим примеры уравнений (2.6.19) для $s \leqslant 2$.

а) $s = 1/2$. В этом случае матрицы σ_μ имеют размерность 2×2, j_a — нулевые матрицы, $\widehat{S}_{\mu\nu}\widehat{S}^{\mu\nu} = \sigma_a\sigma_a = 3$ и уравнения (2.6.19) сводятся к уравнению Вейля для нейтрино; см. (1.4.3).

б) $s = 1$. Матрицы σ_a и j_a, не умаляя общности, выберем в виде

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6.25}$$

$$j_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для функции φ = столбец $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$ получаем из (2.6.19), (2.6.21) следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial x_0} = \mathbf{p}\times\boldsymbol{\Psi}, \quad \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\Psi} = 0, \quad \Psi_4 = \mathrm{const}, \tag{2.6.26}$$

где константу Ψ_4 без потери общности можно считать равной нулю.

Уравнения (2.6.26) сводятся к уравнениям Максвелла, если обозначить $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{H} - i\mathbf{E}$, где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — векторы с вещественными компонентами.

в) $s = 3/2$. Выбирая $\widehat{\sigma}_a$ и j_a в виде

$$\widehat{\sigma}_a = \mathrm{I}_3\otimes\sigma_a, \quad j_a = \widehat{S}_a\otimes\mathrm{I}_2, \tag{2.6.27}$$

где S_a и σ_a — матрицы (1.3.9), (1.2.5), I_2 и I_3 — двухрядные и трехрядные единичные матрицы соответственно, и представляя функцию φ в форме

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_\alpha = \text{столбец } (\Psi_\alpha^1, \Psi_\alpha^2, \Psi_\alpha^3), \qquad \alpha = 1, 2,$$

получаем из (2.6.19) следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_\alpha}{\partial x_0} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\Psi}_\alpha, \qquad \sigma_\mu p^\mu \boldsymbol{\Psi} = 0. \tag{2.6.28}$$

Мы видим, что безмассовое поле со спиральностью $|\lambda| = 3/2$ удовлетворяет уравнениям типа Максвелла по векторному индексу a и уравнению Вейля по спинорному индексу α.

г) $s = 2$. Выберем матрицы $\widehat{\sigma}_a$ и j_a в форме

$$j_a = \widehat{j}_a \otimes I_2, \qquad \widehat{\sigma}_a = I_4 \otimes \sigma_a, \tag{2.6.29}$$

где σ_a — матрицы Паули (1.2.5),

$$2\widehat{j}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad -2ij_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$2j_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Функция φ имеет восемь компонент $\overset{k}{\varphi}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$, причем матрицы j_a действуют только на индекс k, а $\widehat{\sigma}_a$ — на индекс α. Из (2.6.19), (2.6.21), (2.6.29) получаем уравнения для $\overset{k}{\varphi}_\alpha$ в виде

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\alpha'}\, p^\mu \overset{k}{\varphi}_{\alpha'} = 0, \quad \frac{2}{3} (j_a)_{kk'} p_a \overset{k'}{\varphi}_\alpha = i \frac{\partial \overset{k}{\varphi}_\alpha}{\partial x_0}, \tag{2.6.30}$$

которые описывают безмассовое поле со спином 2.

2.6.5. О других типах уравнений для безмассового поля. Системами (2.6.14), (2.6.19) по существу исчерпываются все неэквивалентные формулировки конформно-инвариантных уравнений для безмассового поля произвольного спина, которые можно получить, в предположении, что генераторы конформной группы имеют ковариантную форму (2.6.4). Это не означает, конечно, что не существует других уравнений для безмассового поля, инвариантных относительно алгебры AC(1, 3), поскольку базисные элементы этой алгебры могут в принципе и не принадлежать классу дифференциальных операторов первого порядка. Примером уравнений для поля с массой нуль, которые не эквивалентны ни (2.6.14), ни (2.6.19), могут служить уравнения, получаемые предельным переходом $m \to 0$ из (2.4.1), (2.4.38).

Все неэквивалентные уравнения для релятивистских безмассовых полей могут быть перечислены следующим образом. Поскольку на множестве решений таких уравнений, по определению, реализуется представление II класса алгебры Пуанкаре, то достаточно сопоставить одно уравнение каждому такому представлению. Предполагая, что эти представления разлагаются в невырожденную прямую сумму неприводимых представлений $D^{\varepsilon_1}(\varepsilon_2\lambda), \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$, получаем для фиксированных λ следующие комбинации:

$$D^{\varepsilon_1}(\varepsilon_2\lambda), \tag{2.6.31}$$

$$D^{\varepsilon_1}(\lambda) \oplus D^{\varepsilon_1}(-\lambda), \tag{2.6.32}$$

$$D^{+}(\varepsilon_2\lambda) \oplus D^{-}(\varepsilon_2\lambda), \tag{2.6.33}$$

$$D^{+}(\varepsilon_2\lambda) \oplus D^{-}(-\varepsilon_2\lambda), \tag{2.6.34}$$

$$D^{\varepsilon_1}(\varepsilon_2\lambda) \oplus D^{\varepsilon_1}(-\varepsilon_2\lambda) \oplus D^{-\varepsilon_1}(\varepsilon_2\lambda), \tag{2.6.35}$$

$$D^{\varepsilon_1}(\varepsilon_2\lambda) \oplus D^{\varepsilon_1}(-\varepsilon_2\lambda) \oplus D^{-\varepsilon_1}(\varepsilon_2\lambda) \oplus D^{-\varepsilon_1}(-\varepsilon_2\lambda). \tag{2.6.36}$$

Представления типа (2.6.34) реализуются на множествах решений уравнений (2.6.14), (2.6.19). Уравнения, соответствующие другим представлениям, перечисленным в (2.6.31) — (2.6.33), (2.6.35), можно получить с помощью приема, использованного в [196, 200] при описании неэквивалентных уравнений для частиц со спином 1/2. А именно, задавшись уравнением, инвариантным относительно алгебры AP(1, 3), базисные элементы которой принадлежат представлению (2.6.36), перечислить затем все неэквивалентные пуанкаре-инвариантные дополнительные условия, которые можно наложить на множество решений этого уравнения с целью выделения подпространств представлений (2.6.31) — (2.6.35). Таким образом, в частности, могут быть описаны все неэквивалентные уравнения для безмассового поля, включающие, как частный случай, уравнения Максвелла. Мы не будем останавливаться на этих вопросах более подробно, так как они с достаточной полнотой освещены в [126].

Г Л А В А 3

НЕГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ

Исследуется симметрия основных уравнений релятивистской физики, не связанная с преобразованиями пространственно-временных переменных. С помощью нелиевского подхода, предложенного в [105, 115], найдены а. и. уравнений Дирака, Максвелла, Кеммера — Деффина — Петье и некоторых других в классе дифференциальных операторов высших порядков и в классе интегро-дифференциальных операторов. Обсуждаются новые законы сохранения, связанные с негеометрической симметрией.

§ 3.1. Негеометрическая симметрия уравнения Дирака

3.1.1. Основные определения. В гл. 1 исследовалась симметрия основных уравнений квантовой физики относительно непрерывных групп преобразований. На алгебраическом языке такую симметрию можно определить как инвариантность относительно конечномерной алгебры Ли, базисные элементы которой принадлежат классу $\mathfrak{M}_1$ — классу дифференциальных операторов первого порядка. Ясно, что эта симметрия не исчерпывает всех симметрийных свойств указанных уравнений, поскольку при этом априорно не рассматриваются а. и., включающие операторы с производными более высоких порядков.

Основная задача настоящей главы — описание симметрии фундаментальных уравнений квантовой теории на базе подхода, более общего, чем классический метод Ли. Главная идея этого подхода (называемого ниже нелиевским) заключается в том, что класс операторов симметрии можно существенно расширить, включив в него дифференциальные операторы второго, третьего, ... и т. д. порядков и даже интегро-дифференциальные операторы. Хорошо известным примером симметрии относительно такого расширенного класса операторов является инвариантность уравнения Шредингера для атома водорода относительно алгебры АО(4), обнаруженная впервые Фоком [100].

В работах [105, 115] предложен эффективный алгоритм нахождения а. и. дифференциальных уравнений в частных производных. Краткое изложение этого алгоритма составляет содержание настоящего пункта.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных, которую символически запишем в виде

$$L\Psi(x)=0, \tag{3.1.1}$$

где $\Psi(x)$ — конечномерный столбец, а L — линейный дифференциальный оператор. Как и в п. 1.1.2, будем называть оператором симметрии системы (3.1.1) любой оператор Q (линейный, нелинейный, дифференциальный или интегро-дифференциальный), переводящий решения уравнения (3.1.1) в решения. Иными словами, оператор Q, по определению, должен удовлетворять условию

$$[Q,\ L]\Psi=0, \tag{3.1.2}$$

где Ψ — произвольное решение системы (3.1.1).

В гл. 1 при описании операторов симметрии уравнений Шредингера, Дирака и т. д. предполагалось, что эти операторы принадлежат классу $\mathfrak{M}_1$. Здесь мы отказываемся от этого предположения, заменяя его требованием, чтобы совокупность операторов симметрии Q_A образовала конечномерную алгебру Ли*), т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$[Q_A,\ Q_B]=if_{ABC}Q_C, \qquad (A,\ B,\ C)=1,\ 2,\ \ldots,\ N<\infty, \tag{3.1.3}$$

где f_{ABC} — структурные константы. Как будет показано ниже, таким путем удается найти новые широкие а. и. уравнений квантовой физики, которые включают множества операторов $Q\in\mathfrak{M}_1$ как подалгебру.

Условие (3.1.3) является весьма существенным ограничением, выбирающим из, вообще говоря, бесконечного множества операторов симметрии только такие подмножества, которые обладают структурой алгебры Ли. Мы будем рассматривать также более широкие классы операторов симметрии, образующих базис супералгебры или вообще не обладающих алгебраической структурой.

Основной вопрос, возникающий при исследовании симметрии дифференциальных уравнений в рамках нелиевского подхода, заключается в следующем: как конструктивно найти возможно более широкий класс операторов симметрии, образующих а. и. заданного уравнения? Обобщая результаты исследования симметрии основных уравнений квантовой механики, можно сформулировать следующий алгоритм для нахождения явного вида таких операторов [115, 119]: 1) система дифференциальных уравнений с помощью невырожденного преобразования приводится к диагональному виду, т. е. производится максимальное расщепление исследуемой системы на независимые подсистемы; 2) находится а. и. преобразованного уравнения и устанавливается, какое именно представление алгебры Ли (3.1.3) реализуют найденные операторы симметрии; 3) с по-

*) Как следует из теоремы 1.1, операторы симметрии, принадлежащие классу $\mathfrak{M}_1$, всегда образуют алгебру Ли. Однако уже в классе дифференциальных операторов второго порядка операторы симметрии в общем случае не удовлетворяют условиям (3.1.3).

мощью обратного преобразования находится явный вид этих операторов в исходном представлении.

Как нетрудно заметить, в основе сформулированного алгоритма лежит одна из самых эффективных идей теории дифференциальных уравнений — использование преобразований зависимых и независимых переменных. Следует, однако, подчеркнуть, что преобразования, применяемые для нахождения а. и. дифференциальных уравнений, как правило, не приводят эти уравнения к форме, более удобной с точки зрения их решения.

Важную роль в реализации алгоритма играет понятие символа оператора $\widehat{L}$, который может быть определен с помощью преобразования Фурье

$$\widehat{L}\Psi(x)=(2\pi)^{-3/2}\int\limits_{D(\mathbf{p})} L\exp(i\mathbf{p}\cdot x)\,\widetilde{\Psi}(\mathbf{p},x_0)\,d^3p, \tag{3.1.4}$$

где $\Psi\in C_0^\infty(R^4)$, $\widetilde{\Psi}(\mathbf{p},\ x_0)=F\Psi(x)$ — фурье-образ $\Psi(x)$, F — унитарный оператор Фурье, отображающий вектор из гильбертова пространства H в $\widetilde{H}$, $\widetilde{\Psi}\in\widetilde{H}$, $D(\mathbf{p})$ — область интегрирования, в качестве которой можно выбрать все трехмерное многообразие R_3. Формально связь между оператором $\widehat{L}$ и его символом L может быть записана в виде

$$\widehat{L}=F^{-1}LF,\qquad L=F\widehat{L}F^{-1}. \tag{3.1.5}$$

Соотношения (3.1.4), (3.1.5) могут быть использованы для реализации первого шага описанного выше алгоритма. В самом деле, если символ оператора L из (3.1.3) является матрицей с переменными коэффициентами (что действительно имеет место для многих уравнений математической физики), то систему (3.1.3) в принципе можно свести к системе незацепляющихся интегральных уравнений путем преобразования L к диагональной или жордановой форме.

Мы увидим ниже, что преобразование Фурье действительно является эффективным инструментом при анализе симметрии дифференциальных уравнений в рамках нелиевского подхода, хотя в общем случае его применение не является обязательным.

3.1.2. А. и. уравнения Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Уравнение Дирака является простейшим примером релятивистского уравнения движения, обладающего негеометрической симметрией, и в силу этого является удобным объектом для демонстрации основных идей и методов нелиевского подхода к исследованию уравнений математической физики. Исследование симметрийных свойств этого уравнения приобретает первостепенное значение также в силу исключительно важной роли, играемой им в современной теоретической физике.

В § 1.2 мы нашли максимальную а. и. уравнения Дирака в классе $\mathfrak{M}_1$, которая оказалась изоморфной алгебре Ли группы Пуанкаре $P(1,\ 3)$. Однако инвариантностью относительно алгебры AP(1, 3) симметрия этого уравнения не исчерпывается. Оказывается, описанная выше а. и. может быть расширена за счет включения операторов, включающих производные первого порядка с матричными коэффициентами. Для обозначения класса таких операторов (т. е. операторов вида $Q=A^{\mu}p_{\mu}+B$, где A^{μ}, B — матрицы, в общем случае зависящие от x) будем использовать символ $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$.

Выпишем для удобства уравнение Дирака (1.3.1) в виде

$$L\Psi=0,\quad L=\gamma^{\mu}p_{\mu}-m. \tag{3.1.6}$$

Используя определение (3.12) и алгебраические свойства (1.2.3) γ-матриц, можно показать, что линейный дифференциальный оператор

$$Q_A=A^{\mu}p_{\mu}+B,\quad A^{\mu},\ B\in G^4, \tag{3.1.7}$$

является оператором симметрии уравнения Дирака (в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$), если

$$[Q_A, L]=\left(f_A^{\mu}p_{\mu}+q_A\right)L, \tag{3.1.8}$$

где f_A^{μ}, q_A — матрицы размерности 4×4, в общем случае зависящие от x. Относительно функций Ψ и матриц f_A^{μ}, q_A делаем те же предположения, которые использовались в п. 1.2.4: $\Psi\in F_4$, $\quad f_A^{\mu}, q_A\in G^4$.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Уравнение Дирака инвариантно относительно восьмимерной алгебры Ли A_8, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры могут быть выбраны в виде*

$$\begin{gathered}\widehat{\Sigma}_{\mu\nu}=\frac{m}{4}[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}]+\frac{1}{2}(1-i\gamma_4)(\gamma_{\mu}p_{\nu}-\gamma_{\nu}p_{\mu}),\\ \widehat{\Sigma}_0=\mathrm{I},\qquad \widehat{\Sigma}_1=m\gamma_4-i(1-i\gamma_4)\gamma_{\mu}p^{\mu},\end{gathered} \tag{3.1.9}$$

где I *— единичная матрица. В случае $m\neq 0$ алгебра, натянутая на базис* (3.1.9), *изоморфна алгебре Ли группы $GL(2,C)$, а при $m=0$ операторы* (3.1.9) *образуют коммутативную алгебру.*

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться прямой проверкой. Действительно, используя формулы (1.2.3), нетрудно доказать, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}[\Sigma_{\mu\nu}, L]=\frac{1}{2}(\gamma_{\mu}p_{\nu}-\gamma_{\nu}p_{\mu})L,\\ [\Sigma_0, L]=0,\ [\Sigma_1, L]=-2\gamma_4\gamma_{\nu}p^{\mu}L,\end{gathered} \tag{3.1.10}$$

откуда видно, что операторы $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_0 и Σ_1 удовлетворяют условиям (3.1.8), т. е. являются операторами симметрии уравнения Дирака. Нетрудно убедиться также, что эти операторы в случае $m=0$ коммутируют. Если же $m\neq 0$, то обозначив

$$\Sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{m}\widehat{\Sigma}_{\mu\nu},\qquad \Sigma_0=\widehat{\Sigma}_0,\qquad \Sigma_1=\frac{1}{m}\widehat{\Sigma}_1, \tag{3.1.11}$$

получаем с помощью (1.2.3) следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}[\Sigma_{\mu\nu},\ \Sigma_{\lambda\sigma}]=g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\sigma}+g_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\lambda}-g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\lambda}-g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\sigma},\\ [\Sigma_1,\ \Sigma_0]=[\Sigma_1,\ \Sigma_{\mu\nu}]=[\Sigma_0,\ \Sigma_{\mu\nu}]=0.\end{gathered} \tag{3.1.12}$$

Таким образом, операторы (3.1.9) действительно образуют а. и. уравнения Дирака, которая при $m=0$ коммутативна, а в случае $m\neq 0$ изоморфна, согласно (3.1.12), алгебре AGL(2, C). Этот изоморфизм может быть установлен посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &\lambda_{11}=\Sigma_0+\Sigma_{12}, \quad \lambda_{22}=\Sigma_0-\Sigma_{12}, \quad \lambda_{12}=\Sigma_{23}-\Sigma_{02},\\ &\lambda_{21}=\Sigma_{23}+\Sigma_{02}, \quad \tilde{\lambda}_{11}=\Sigma_1+\Sigma_{03}, \quad \tilde{\lambda}_{22}=\Sigma_1-\Sigma_{03},\\ &\tilde{\lambda}_{12}=-\Sigma_{01}+\Sigma_{31}, \quad \tilde{\lambda}_{21}=\Sigma_{31}+\Sigma_{01}, \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

где $\lambda_{\alpha\beta}$, $\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}$ — базисные элементы алгебры AGL(2, C), удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[\lambda_{\alpha\beta},\ \lambda_{\nu\sigma}]=-[\tilde{\lambda}_{\alpha\beta},\ \tilde{\lambda}_{\nu\sigma}]=\delta_{\alpha\nu}\lambda_{\beta\sigma}+\delta_{\beta\nu}\lambda_{\alpha\sigma}-\delta_{\alpha\sigma}\lambda_{\beta\nu}-\delta_{\beta\nu}\lambda_{\alpha\sigma},\\ &[\lambda_{\alpha\beta},\ \tilde{\lambda}_{\nu\sigma}]=\delta_{\alpha\nu}\tilde{\lambda}_{\beta\sigma}+\delta_{\beta\nu}\tilde{\lambda}_{\alpha\sigma}-\delta_{\alpha\sigma}\tilde{\lambda}_{\beta\nu}-\delta_{\beta\nu}\tilde{\lambda}_{\alpha\sigma}. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Приведем другое, более конструктивное доказательство теоремы 3.1, проливающее свет на природу дополнительной симметрии уравнения Дирака в случае $m\neq 0$. Как известно, система четырех дифференциальных уравнений первого порядка, задаваемая формулой (3.1.6), может быть сведена к системе двух уравнений второго порядка $(p_\mu p^\mu - m^2)\Phi_\pm=0$, где $\Phi_\pm$ — двухкомпонентные волновые функции. Переход к этим уравнениям можно осуществить с помощью умножения (3.1.6) слева на $\frac{1}{2}(1\mp i\gamma_4)$ и последующего выражения функции

$$\Phi_\pm=\frac{1}{2}(1\mp i\gamma_4)\Phi \tag{3.1.15}$$

через $\Phi_\mp$. В результате, выбирая для определенности верхний знак, переходим к системе уравнений

$$(p_\mu p^\mu - m^2)\Phi_+=0, \tag{3.1.16}$$

$$\Phi_-=\frac{1}{m}\gamma_\mu p^\mu\Phi_+, \tag{3.1.17}$$

которая совместно с определением (3.1.13) полностью эквивалентна исходному уравнению (3.1.6).

Но уравнения (3.1.15), (3.1.16) обладают очевидной симметрией относительно произвольных матричных преобразований, операторы которых коммутируют с γ_4. Именно этим преобразованиям (которые необходимо дополнить соответствующими преобразованиями для Φ_-, очевидно, зависящими от p_μ) отвечает скрытая симметрия уравнения Дирака, сформулированная в теореме.

Для эффективного описания всех неэквивалентных преобразований такого типа воспользуемся тем фактом, что переход от уравнения (3.1.6) к системе (3.1.15)—(3.1.17) может быть формально представлен в виде

$$\Psi\to\Psi'=V\Psi, \quad L\to L'=\gamma_0 V^+\gamma_0 L V^{-1}, \tag{3.1.18}$$

где

$$V = \exp\left[-\frac{1}{2m}(1-i\gamma_4)\gamma_\mu p^\mu\right] \equiv 1 - \frac{1}{2m}(1-i\gamma_4)\gamma_\mu p^\mu,$$

$$L' = \frac{1}{2}(1+i\gamma_4)m + \frac{1}{2m}(1-i\gamma_4)(p_\mu p^\mu - m^2). \qquad (3.1.19)$$

Действительно, уравнение

$$L'\Psi' = 0, \quad \Psi' = V\Psi, \qquad (3.1.20)$$

сводится к системе (3.1.15) — (3.1.17), поскольку, как нетрудно заметить, $\Psi' = \Phi_+$.

Уравнение (3.1.18) явно инвариантно относительно произвольных матричных преобразований, коммутирующих с γ_4. Оператор таких преобразований может быть представлен в виде линейной комбинации матриц

$$\Sigma'_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \qquad \Sigma'_0 = I, \qquad \Sigma'_1 = \gamma_4, \qquad (3.1.21)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.12) и, следовательно, образуют базис восьмимерной алгебры Ли. Нетрудно убедиться, что над полем вещественных чисел матрицы (3.1.21) линейно независимы, в то время как

$$\left(\Sigma'_{ab} - i\varepsilon_{abc}\Sigma'_{0c}\right)\Psi' = (\Sigma_1 + i\Sigma_0)\Psi' = 0,$$

где Ψ' — произвольное решение уравнения (3.1.20).

С помощью оператора V (3.1.19) получаем из (3.1.21) явный вид базисных элементов а. и. уравнения Дирака $\Sigma_\alpha = V^{-1}\Sigma'_\alpha V$, $\Sigma_{\mu\nu} = V^{-1}\Sigma'_{\mu\nu}V$, где $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_α — операторы (3.1.9), (3.1.11), чем и завершается второе доказательство теоремы 3.1 (для случая $m \neq 0$). ■

Из приведенного доказательства вытекает, что дополнительная симметрия уравнения Дирака, сформулированная в теореме 3.1, является в некотором смысле максимальной, поскольку охватывает все возможные матричные преобразования в представлении (3.1.20).

Итак, помимо хорошо известной инвариантности относительно алгебры Пуанкаре, уравнение Дирака обладает дополнительной симметрией, описываемой теоремой 3.1. Поскольку операторы (3.1.9), (3.1.11) образуют алгебру Ли и, кроме того, удовлетворяют условиям $\Sigma_{0a}^2 = \Sigma_0^2 = -\Sigma_{ab}^2 = -\Sigma^2 = 1$, то из доказанной теоремы следует инвариантность уравнения Дирака относительно восьмипараметрической группы преобразований

$$\Psi \to \Psi' = (\cos\theta_{ab} + \gamma_a\gamma_b\sin\theta_{ab})\Psi - \frac{i}{m}\sin\theta_{ab}(1-i\gamma_4)\left(\gamma_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_b} - \gamma_b\frac{\partial\Psi}{\partial x_a}\right), \qquad (3.1.22)$$

$$\Psi \to \Psi'' = (\operatorname{ch}\theta_{0a} + \gamma_0\gamma_a\operatorname{sh}\theta_{0a})\Psi - \frac{i}{m}\operatorname{sh}\theta_{0a}(1-i\gamma_4)\left(\gamma_0\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \gamma_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_0}\right),$$

$$\Psi \to \Psi''' = (\cos\theta_1 + \gamma_4 \sin\theta_1)\Psi + \frac{1}{m}\sin\theta_1 (1 - i\gamma_4)\gamma_\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu},$$
$$\Psi \to \Psi^{IV} = (\exp\theta_0)\Psi, \tag{3.1.23}$$

где θ_{ab}, θ_{0a}, θ_0, θ_1 — вещественные параметры (суммирование по повторяющимся индексам не подразумевается). Каждая из формул (3.1.22) задает однопараметрическую подгруппу преобразований и может быть представлена в виде $\Psi \to \Psi' = \exp(2\Sigma_A\theta_A)\Psi$, где A — мультииндекс, принимающий значения 0, 1, 01, 02, ... и т. д.

Принципиальное отличие преобразований (3.1.22) от локальных преобразований Лоренца (1.2.53) состоит в том, что функции Ψ', Ψ'', ... зависят не только от $\Psi(x)$ (и параметров преобразования), но также от производных $\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}$, и, кроме того, независимые переменные в (3.1.22) не изменяются. Другими словами, дополнительная инвариантность уравнения Дирака не имеет ничего общего с преобразованиями пространственно-временного континуума, поэтому мы будем называть эту симметрию негеометрической.

Возникает вопрос: в каком отношении находятся негеометрическая симметрия уравнения Дирака и его релятивистская инвариантность, не являются ли группы преобразований (3.1.22) и (1.2.53) подгруппами какой-то более широкой группы? Оказывается, это действительно так, поскольку генераторы преобразований (3.1.22) и преобразований Лоренца образуют 18-мерную алгебру Ли. Последнее утверждение сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Уравнение Дирака инвариантно относительно 18-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами* (1.2.22), (3.1.8). *Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям* (1.1.13), (3.1.12) *и приведенным ниже соотношениям* (3.1.24):

$$[P_\mu, \Sigma_{\lambda\nu}] = [P_\mu, \Sigma_0] = [P_\mu, \Sigma_1] = 0, \tag{3.1.24}$$
$$[J_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\lambda}).$$

Доказательство сводится к проверке справедливости соотношений (3.1.24) с использованием (1.2.3). ■

На основании сказанного выше заключаем, что уравнение Дирака инвариантно относительно 18-параметрической группы Ли, включающей преобразования Лоренца для биспинора (1.2.53) и негеометрические преобразования (3.1.22). Общий вид преобразования из этой группы может быть задан формулой

$$\Psi \to \Psi' = A\Psi(x') + B^\mu \frac{\partial\Psi(x')}{\partial x_\mu}, \tag{3.1.25}$$

где x'_μ связаны с x_μ преобразованием Лоренца, A и B_μ — числовые матрицы, зависящие от 18 параметров [206].

3.1.3. Симметрия уравнения Дирака в классе интегро-дифференциальных операторов. Обозначим символом $\mathfrak{M}_\infty$ множество нелокальных (интегральных) операторов $\widehat{Q}$ следующего вида:

$$\widehat{Q}\,\Psi = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\left[Q\widetilde{\Psi}(\mathbf{p},\,x_0)\right]d^3p, \tag{3.1.26}$$

где $\widetilde{\Psi}(\mathbf{p},\,x_0)$ — фурье-образ $\Psi(x)$:

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{p},\,x_0) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\,\Psi(\mathbf{x},\,x_0)\exp(-\,i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}), \tag{3.1.27}$$

а Q — матрица размерности 4×4, матричные элементы которой зависят от $\mathbf{p}$.

В этом пункте мы покажем, что уравнение Дирака обладает дополнительной инвариантностью относительно преобразований, принадлежащих классу $\mathfrak{M}_\infty$, причем соответствующая а. и. оказывается шире установленной выше.

Теорема 3.3. *Уравнение Дирака инвариантно относительно алгебры A_8, заданной над полем комплексных чисел. Символы базисных элементов этой алгебры задаются формулами*

$$\begin{gathered}\widehat{\Sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu,\,\gamma_\nu] + \frac{1}{2m}(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu)\left(1 - i\gamma_4\frac{H}{E}\right),\\ \widehat{\Sigma}_0 = \mathrm{I},\quad \widehat{\Sigma}_1 = \frac{H}{E},\end{gathered} \tag{3.1.28}$$

где $H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m$, $E = \sqrt{p^2 + m^2}$.

Доказательство. Условие инвариантности уравнения Дирака относительно перечисленных в теореме операторов может быть записано в виде

$$[L,\,\widehat{\Sigma}_A]\,\widetilde{\Psi}(\mathbf{p},\,x_0) = 0, \tag{3.1.29}$$

где $\widetilde{\Psi}(\mathbf{p},\,x_0)$ — произвольное решение уравнения Дирака в импульсном представлении, L — символ оператора (3.1.6).

Можно проверить непосредственно, что операторы (3.1.28) удовлетворяют условию инвариантности (3.1.29). Более конструктивное доказательство (позволяющее установить, что а. и., натянутая на базис (3.1.28), является в некотором смысле максимальной в классе $\mathfrak{M}_\infty$) состоит в преобразовании операторов $\widehat{\Sigma}_A$, L к такому представлению, в котором L имеет диагональную форму. Используя для этой цели оператор

$$V = P_+ + P_-\frac{H}{E},\qquad V^{-1} = \frac{1}{m}(HP_+ + P_-E), \tag{3.1.30}$$

где $P_\pm = (1 \pm \gamma_0)/2$, получаем

$$\widetilde{L}' = V\gamma_0 L V^{-1} = i\frac{\partial}{\partial x_0} - \gamma_0 E. \tag{3.1.31}$$

Операторы симметрии $\widetilde{\Sigma}'_A \in \mathfrak{M}_\infty$ в представлении (3.1.31) — это матрицы, коммутирующие с γ_0. Любая такая матрица может быть представлена в виде линейной комбинации базисных матриц

$$\widetilde{\Sigma}'_{ab} = [\gamma_a,\,\gamma_b]/4,\qquad \widetilde{\Sigma}'_{0a} = [\gamma_4,\,\gamma_a]/4,\qquad \widetilde{\Sigma}'_0 = \gamma_0,\qquad \widetilde{\Sigma}'_1 = \mathrm{I}. \tag{3.1.32}$$

Матрицы (3.1.32) линейно независимы над полем комплексных чисел и удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.11). С помощью преобразования $\widetilde{\Sigma}'_A \to \widetilde{\Sigma}_A = V^{-1}\widetilde{\Sigma}'_A V$ получаем операторы симметрии (3.1.28) в исходном представлении. ■

Итак, уравнение Дирака обладает дополнительной инвариантностью относительно нелокальных (интегральных) операторов, принадлежащих классу $\mathfrak{M}_\infty$. Отметим, что базисные элементы найденной здесь а. и. по форме очень близки к операторам (3.1.8), (3.1.10), и содержат единственный существенно нелокальный элемент — оператор знака энергии $\widehat{\varepsilon} = H/E$.

Нетрудно убедиться, что операторы (3.1.28) образуют замкнутую алгебру Ли совместно с генераторами группы Пуанкаре (1.2.42), удовлетворяя коммутационным соотношениям (3.1.24). Следовательно, симметрия уравнения Дирака в классе интегро-дифференциальных операторов определяется 18-мерной алгеброй Ли A_{18}, включающей алгебру Пуанкаре как подалгебру. Можно показать, что алгебра A_{18} изоморфна $AP(1, 3) \oplus A_8$.

В заключение этого пункта отметим, что поскольку $\widetilde{\Sigma}_A^2 = I$, то из теоремы 3.3 следует инвариантность уравнения Дирака относительно 16-параметрической группы преобразований $\widetilde{\Psi} \to \widetilde{\Psi}' = \exp(\Sigma_A \theta_A)\Psi$, где $\theta_A = \theta_A^1 + i\theta_A^2$, $A = 0, 1, 12, 31, \ldots, \theta_A^1$ и θ_A^2 — вещественные параметры, явный вид этих преобразований для различных значений мультииндекса A задается формулами

$$
\begin{aligned}
&\Psi \to (\cos\theta_{ab} + \gamma_a\gamma_b \sin\theta_{ab})\Psi - \\
&\qquad - \sum_{\varepsilon} \frac{i}{m}(1 + i\varepsilon\gamma_4)\sin\theta_{ab}\left(\gamma_a \frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial x^b} - \gamma_b \frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial x_a}\right), \\
&\Psi \to (\operatorname{ch}\theta_{0b} + \operatorname{sh}\theta_{0b}\gamma_0\gamma_b)\Psi - \frac{i}{m}\operatorname{sh}\theta_{0b}\sum_{\varepsilon}\left(\gamma_0 \frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial x_b} + \gamma_b \frac{\partial\Psi^\varepsilon}{\partial x_0}\right), \\
&\Psi \to \sum_{\varepsilon}\left(\operatorname{ch}\theta_1 + \varepsilon\operatorname{sh}\theta_1\right)\Psi_\varepsilon, \qquad \Psi \to \exp(i\theta_0)\Psi.
\end{aligned}
\tag{3.1.33}
$$

Здесь $\Psi_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 - \varepsilon\frac{H}{E}\right)\widetilde{\Psi}$, $\widetilde{\Psi} = \Psi_+ + \Psi_-$, $\varepsilon = \pm 1$, θ_A — комплексные параметры, суммирование по повторяющимся индексам не подразумевается.

3.1.4. Восьмикомпонентное уравнение Дирака. До сих пор при анализе дополнительной симметрии уравнения Дирака мы рассматривали только линейные преобразования его решений. Несомненного внимания, однако, заслуживают также допустимые в квантовой механике антилинейные преобразования, включающие переход к комплексно сопряженной волновой функции. Именно такие преобразования симметрии исследуются ниже.

Рассмотрим восьмикомпонентное уравнение Дирака

$$
\widehat{L}\widehat{\Psi} = 0, \qquad \widehat{L} = \Gamma_\mu p^\mu - m,
\tag{3.1.34}
$$

где Γ_μ — матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие совместно с Γ_4, Γ_5, Γ_6 алгебре Клиффорда (2.5.2).

Выбирая Γ_μ и $\widehat{\Psi}$ в виде

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi \\ i\gamma_2\Psi^* \end{pmatrix}, \tag{3.1.35}$$

где γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака в представлении (1.2.4), Ψ — четырехкомпонентная волновая функция, получаем из (3.1.34) уравнение Дирака и сопряженное уравнение (1.2.8). Условие (3.1.35) можно записать в форме, не зависящей от конкретной реализации матриц Γ_μ:

$$(1 - i\Gamma_5\Gamma_6 C)\,\widehat{\Psi} = 0, \tag{3.1.36}$$

где Γ_5, Γ_6 — восьмирядные матрицы Дирака, образующие совместно с Γ_μ и Γ_4 представление алгебры Клиффорда размерности 7, C — оператор зарядового сопряжения. В представлении (3.1.35)

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_4 \\ \gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = i\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_4 \\ \gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} \gamma_4 & 0 \\ 0 & -\gamma_4 \end{pmatrix}, \tag{3.1.37}$$

$$C\widehat{\Psi} = i\Gamma_2\widehat{\Psi}^*.$$

Таким образом, уравнение Дирака (3.1.6) и сопряженное уравнение (1.2.8) могут быть представлены в виде системы восьми линейных уравнений (3.1.34) с дополнительным условием (3.1.36). Нетрудно убедиться, что каждому линейному преобразованию решений системы (3.1.34), и (3.1.36) соответствует линейное или антилинейное преобразование четырехкомпонентной волновой функции Ψ, удовлетворяющей уравнению Дирака, и что такое соответствие является изоморфизмом. Это означает, что задача описания линейных и антилинейных операторов симметрии уравнения Дирака эквивалентна нахождению а. и. уравнений (3.1.34), (3.1.36) в классе линейных операторов.

Отметим, что уравнение (3.1.34) допускает также другие интерпретации —в том числе как уравнение движения частицы со спином 1 (см. § 2.5) и 3/2 [244], что делает задачу исследования его симметрии еще более актуальной. В следующем пункте мы опишем а. и. уравнения (3.1.34) без дополнительных условий, а затем — симметрию системы (3.1.34), (3.1.36).

3.1.5. Симметрия уравнения (3.1.34). Уравнение (3.1.34), очевидно, имеет более высокую симметрию, чем четырехкомпонентное уравнение Дирака. Кроме явной инвариантности относительно группы Пуанкаре (генераторы которой на множестве $\{\widehat{\Psi}\}$ имеют вид (1.2.22), где $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$) это уравнение допускает матричные преобразования, коммутирующие с Γ_μ. Кроме того, восьмикомпонентное уравнение Дирака обладает скрытой (негеометрической) симметрией — в том числе в классах $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ и $\mathfrak{M}_\infty$.

По аналогии с теоремой 3.1 может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Уравнение* (3.1.26) *инвариантно относительно 32-мерной алгебры Ли, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу* $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ *и задаются формулами*

$$Q_{\mu\nu\lambda} = \Sigma_{\mu\nu} D_\lambda, \quad Q_{\alpha\lambda} = \Sigma_\alpha D_\lambda, \tag{3.1.38}$$

где $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3$, $\alpha = 0, 1$,

$$\begin{gathered}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] + \frac{1}{m}(1 - \Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6)(\Gamma_\mu p_\nu - \Gamma_\nu p_\mu),\\ D_1 = i\Gamma_4\Gamma_5, \quad D_2 = i\Gamma_5\Gamma_6, \quad D_3 = i\Gamma_4\Gamma_6,\\ \Sigma_0 = D_0 = I, \quad \Sigma_1 = i\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6 - \frac{1}{m}(1 - \Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6)\Gamma_\mu p^\mu,\end{gathered} \tag{3.1.39}$$

I — *единичная матрица.*

Справедливость приведенных утверждений может быть установлена почти дословным повторением доказательства теоремы 3.1. Алгебра Ли, натянутая на базис (3.1.38), изоморфна AGL(4, C) [206, 126].

Операторы (3.1.38) образуют замкнутую алгебру совместно с генераторами группы Пуанкаре (1.2.22) $\left(\text{где } S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]\right)$, поскольку

$$[P_\mu, Q_{\lambda\sigma\rho}] = [P_\mu, Q_{\alpha\lambda}] = [J_{\mu\nu}, Q_{\alpha\lambda}] = 0,$$
$$[J_{\mu\nu}, Q_{\lambda\sigma\rho}] = i(g_{\mu\sigma}Q_{\nu\lambda\rho} + g_{\nu\lambda}Q_{\mu\sigma\rho} - g_{\mu\lambda}Q_{\nu\sigma\rho} - g_{\nu\sigma}Q_{\mu\lambda\rho}).$$

Можно показать, что сформулированная в теореме 3.4 симметрия восьмикомпонентного уравнения Дирака является максимальной а. и. в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. ■

В полной аналогии с изложенным в предыдущем пункте можно показать, что негеометрическая симметрия восьмикомпонентного уравнения Дирака в классе $\mathfrak{M}_\infty$ еще шире и определяется 32-мерной алгеброй Ли, заданной над полем коплексных чисел. Базисные элементы этой алгебры задаются формулой (3.1.38), где D_λ, Σ_0 имеют вид (3.1.39), а Σ_1, $\Sigma_{\mu\nu}$ принимают следующую форму:

$$\begin{gathered}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] + \frac{1}{m}(\Gamma_\mu p_\nu - \Gamma_\nu p_\mu)\left(1 - \Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6\frac{H}{E}\right),\\ \Sigma_1 = (\Gamma_0\Gamma_a p_a + \Gamma_0 m)E^{-1}.\end{gathered} \tag{3.1.40}$$

3.1.6. Симметрия уравнения Дирака относительно линейных и антилинейных преобразований. Исследуем теперь свойства инвариантности восьмикомпонентного уравнения Дирака (3.1.34) с дополнительным условием (3.1.36). Как отмечалось в п. 3.1.4, эта система уравнений, будучи полностью эквивалентна четырехкомпонентному уравнению Дирака, позволяет естественным образом исследовать его симметрию относительно линейных и антилинейных преобразований. Для обозначения классов операторов симметрии, включающих как линейные, так и антилинейные преобразования, будем использовать символы $\mathfrak{M}_1^*, \widetilde{\mathfrak{M}}_1^*, \ldots$, где $\mathfrak{M}_1^*$ означает класс линейных и антилинейных операторов первого порядка и т. д.

Базисные элементы а. и. уравнения (3.1.34), найденные в предыдущем пункте, вообще говоря, не являются операторами симметрии для дополнительного условия (3.1.36), поэтому анализ симметрийных свойств системы (3.1.34), (3.1.36) представляет самостоятельную задачу. Мы увидим ниже, что симметрия этой системы в классе линейных преобразований уже, чем у уравнения (3.1.34) без дополнительных условий, но шире, чем у четырехкомпонентного уравнения Дирака.

Теорема 3.5. *Система уравнений* (3.1.34), (3.1.36) *инвариантна относительно 14-мерной алгебры Ли, изоморфной* $AP(1, 3) \oplus \oplus AO(2, 1) \oplus T_1$. *Базисные элементы этой алгебры могут быть выбраны в виде*

$$P_\mu = ip_\mu, \quad J_{\mu\nu} = i(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}),$$
$$Q_1 = \frac{1}{2}\Gamma_4\Gamma_5, \quad Q_2 = \frac{i}{2}\Gamma_4\Gamma_6, \quad Q_3 = \frac{i}{2}\Gamma_5\Gamma_6, \quad Q_4 = \mathrm{I}, \tag{3.1.41}$$

где $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$, I — *единичная матрица*, Γ_k $(k = 0, 1, \ldots, 6)$ — восьмирядные матрицы Дирака, удовлетворяющие условиям

$$C\Gamma_6 = \Gamma_6 C, \quad C\Gamma_k = -\Gamma_k C, \quad k \neq 6. \tag{3.1.42}$$

Вещественная алгебра Ли, натянутая на базис (3.1.41), *является максимальной а. и. системы* (3.1.34), (3.1.36) *в классе* $\mathfrak{M}_1$.

Доказательство. Легко проверить, что операторы (3.1.41) коммутируют с $L_1 = \Gamma_\mu p^\mu - m$ и $L_2 = 1 - i\Gamma_5\Gamma_6 C$ и, следовательно, являются операторами симметрии восьмикомпонентного уравнения Дирака с дополнительным условием (3.1.36). Для доказательства того факта, что при операторы образуют максимальную а. и. системы (3.1.34), (3.1.36), достаточно показать, что произвольный оператор $Q \in \mathfrak{M}_1$, удовлетворяющий условиям $[Q, L_1] = \beta_Q^1 L_1 + \lambda_Q^1 L_2$, $[Q, L_2] = \beta_Q^2 L_1 + \lambda_Q^2 L_2$, где $\beta_Q^1, \beta_Q^2, \lambda_Q^1, \lambda_Q^2$ — матрицы, в общем случае зависящие от x, является линейной комбинацией базисных элементов (3.1.41). Мы не будем приводить здесь соответствующие выкладки, укажем только полную систему матриц, по которой можно разложить все неизвестные величины:

$$\{Q_A, \Gamma_\mu Q_A, \Gamma_\mu\Gamma_\nu Q_A, \Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\lambda Q_A, \Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\lambda\Gamma_6 Q_A\}.$$

Здесь $Q_A (A = 1, 2, 3, 4)$ — матрицы (3.1.41) и в произведениях не встречаются Г-матрицы с одинаковыми индексами.

Операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$, очевидно, коммутируют с Q_A, которые в свою очередь удовлетворяют соотношениям $[Q_4, Q_a] = 0$ и

$$[Q_1, Q_2] = Q_3, \quad [Q_1, Q_3] = -Q_2, \quad [Q_2, Q_3] = -Q_1. \tag{3.1.43}$$

Коммутационные соотношения (3.1.43) характеризуют алгебру Ли группы AO(2, 1). ■

Мы видим, что, помимо явной симметрии относительно алгебры Пуанкаре, система уравнений (3.1.34), (3.1.36) инвариантна относительно трехмерной матричной алгебры АО(2, 1) (тривиальный единичный оператор симметрии никакого интереса не представляет). Отсюда вытекает инвариантность этой системы относительно трехпараметрической группы матричных преобразований $\widehat{\Psi} \to \exp(Q_a\theta_a)\widehat{\Psi}$, где θ_a — вещественные параметры. Используя представление (3.1.35), (3.1.37), находим соответствующие преобразования решений четырехкомпонентного уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} &\Psi \to \exp\left(-\frac{i}{2}\theta_1\right)\Psi, \\ &\Psi \to \mathrm{ch}\frac{\theta_2}{2}\Psi + i\gamma_2\,\mathrm{sh}\frac{\theta_2}{2}\Psi^*, \\ &\Psi \to \mathrm{ch}\frac{\theta_3}{2}\Psi - \gamma_2\mathrm{sh}\frac{\theta_3}{2}\Psi^*. \end{aligned} \tag{3.1.44}$$

Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований (3.1.44) была впервые установлена, по-видимому, Плебанским (см. [30, 37, 295]).

Гораздо более широкой симметрией обладает уравнение Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^*$.

Теорема 3.6. *Восьмикомпонентное уравнение Дирака с дополнительным условием* (3.1.36) *инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу* $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^*$ *и задаются формулами*

$$\begin{aligned} &\Sigma_{mn} = \frac{1}{2}[\Gamma_m, \Gamma_n] + \frac{1}{m}(1 - i\Gamma_6)(\Gamma_m p_n - \Gamma_n p_m), \\ &\Sigma_0 = I, \quad m, n = 0, 1, \ldots, 5. \end{aligned} \tag{3.1.45}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1. Отметим, что, по определению, $p_{3+a}\widehat{\Psi}(x) = -i\frac{\partial}{\partial x_{3+a}}\widehat{\Psi}(x) = 0$, так что оператор $\Sigma_{54} = -\Sigma_{45}$ сводится к числовой матрице, а $\Sigma_{4\mu}$, $\Sigma_{5\mu}$ включают только по одному оператору дифференцирования.

Генераторы (3.1.45) удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.12), где $g_{mn} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1, -1)$, и образуют базис алгебры Ли, изоморфной АО(1, 5) $\oplus$ T_1, где T_1 — одномерная подалгебра, состоящая из единичной матрицы. ■

Операторы (3.1.45) образуют замкнутую алгебру совместно с генераторами группы Пуанкаре, удовлетворяя следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &[P_\mu, \Sigma_{mn}] = [J_{\mu\nu}, \Sigma_{54}] = 0, \\ &[J_{\mu\nu}, \Sigma_{m'\lambda}] = i(g_{\mu\lambda}\Sigma_{m'\nu} - g_{\nu\lambda}\Sigma_{m'\nu}), \\ &[J_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\lambda}] = i(g_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\lambda}), \end{aligned} \tag{3.1.46}$$

где $m, n = 0, 1, \ldots, 5$, $m', n' > 3$, $\mu, \nu, \rho, \lambda \leqslant 3$. Поскольку операторы Σ_{mn} удовлетворяют также условиям $\Sigma^2_{0n} = -\Sigma^2_{1+n\,1+m} = 1$, то из (3.1.46) следует, что система (3.1.34), (3.1.36) инвариантна относительно 26-параметрической группы Ли, включающей группу Пуанкаре и преобразования вида $\widehat{\Psi} \to \exp(\theta_A \Sigma_A)\Psi$, где θ_A — произвольные вещественные параметры. Последние преобразования нетрудно записать в явной форме

$$\widehat{\Psi} \to (\cos\theta_{kl} + \Gamma_k\Gamma_l \sin\theta_{kl})\widehat{\Psi} -$$
$$- \frac{i}{m}(1 - i\Gamma_6)\sin\theta_{kl}\left(\Gamma_k \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x_l} - \Gamma_l \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x_k}\right), \quad \begin{array}{l} k, l \neq 0, \\ k \neq l, \end{array} \tag{3.1.47}$$
$$\widehat{\Psi} \to (\operatorname{ch}\theta_{0k} + \Gamma_0\Gamma_k \operatorname{sh}\theta_{0k})\widehat{\Psi} - \frac{i}{m}(1 - i\Gamma_6)\left(\Gamma_0 \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x_k} + \Gamma_k \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x_0}\right)\operatorname{sh}\theta_{0k},$$
$$\widehat{\Psi} \to \exp(\theta_0)\widehat{\Psi}.$$

Каждому преобразованию (3.1.47) можно сопоставить линейное или антилинейное преобразование решений уравнения Дирака (2.1.6). Подставив (3.1.35), (3.1.37) в (3.1.52), получаем для k, $l \leqslant 3$ преобразования (3.1.22). Если же $k > 3$, то соответствующие преобразования имеют вид

$$\Psi \to (\cos\theta_{4a}\Psi + i\gamma_4\gamma_a\gamma_2 \sin\theta_{4a}\Psi^*) - \frac{i}{m}(\gamma_4\gamma_2 - i\gamma_2)\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_a}\sin\theta_{4a},$$
$$\Psi \to (\cos\theta_{5a}\Psi + \gamma_4\gamma_a\gamma_2 \sin\theta_{5a}\Psi^*) - \frac{1}{m}(\gamma_4\gamma_2 - i\gamma_2)\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_a}\sin\theta_{5a},$$
$$\Psi \to \exp(i\theta_{54})\Psi,$$
$$\Psi \to \operatorname{ch}\theta_{04}\Psi + i\gamma_1\gamma_3 \operatorname{sh}\theta_{04}\Psi^* - \frac{1}{m}(\gamma_4 + i)\gamma_2\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_0}\operatorname{sh}\theta_{04},$$
$$\Psi \to \operatorname{ch}\theta_{05}\Psi + \gamma_1\gamma_3 \operatorname{sh}\theta_{05}\Psi^* + \frac{1}{m}(1 - i\gamma_4)\gamma_2\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_0}\operatorname{sh}\theta_{05}. \tag{3.1.48}$$

Формулы (3.1.22), (3.1.48) задают 16 однопараметрических преобразований решений уравнения Дирака, образующих группу Ли. Мы видим, что симметрия этого уравнения в классе линейных и антилинейных преобразований шире, чем в классе линейных преобразований, и включает последние как подгруппу. Отметим также, что инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований (3.1.48), (3.1.22) может быть легко проверена непосредственно.

3.1.7. Полный набор операторов симметрии уравнения Дирака в классе $\mathfrak{M}_1$. До сих пор при анализе симметрии уравнения Дирака мы ограничивались описанием таких операторов симметрии, которые удовлетворяют соотношениям (3.1.3), т. е. обладают структурой конечномерной алгебры Ли. Здесь мы отказываемся от этого ограничения и находим все независимые линейные операторы симметрии уравнения Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Полное описание таких операторов дается в следующей теореме.

Теорема 3.7. *Уравнение Дирака имеет 26 линейно независимых операторов симметрии в классе* $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. *В их число входят генераторы группы Пуанкаре* (1.2.22), *тривиальный единичный оператор и* 15 *операторов, перечисленных ниже*:

$$
\begin{aligned}
B &= i\gamma_4(D - m\gamma_\mu x^\mu),\\
\omega_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu) + mS_{\mu\nu},\\
\eta_\mu &= \frac{i}{2}\gamma_4(p_\mu - m\gamma_\mu),\\
A_\mu &= x^\nu\omega_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}x^\nu + \frac{1}{2}\gamma_\mu,
\end{aligned}
\tag{3.1.49}
$$

где D — *оператор дилатации* (1.2.45).

Доказательство. Нахождение всех линейно независимых операторов симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ для уравнения Дирака сводится к отысканию общего решения операторных уравнений (3.1.6)—(3.1.8).

Уравнение (3.1.8) следует понимать в том смысле, что операторы в левой и правой частях должны давать одинаковый результат при действии на произвольную функцию $\Psi \in \mathscr{F}^4$. Однако операторы Q_1, $Q_2 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$, удовлетворяющие условию (3.1.8), на множестве решений уравнения (3.1.6) могут оказаться линейно зависимыми. Для исключения линейно зависимых операторов и упрощения системы определяющих уравнений для матриц A^μ, B, f_A^μ q_A воспользуемся тем фактом, что на множестве решений уравнений Дирака оператор дифференцирования по x_0 можно выразить через операторы $\mathbf{p} = -i\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}$ с матричными коэффициентами согласно (1.2.10), т. е. достаточно ограничиться операторами симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ вида

$$
Q = \mathbf{B}\cdot\mathbf{p} + C,\quad \mathbf{B},\ C \in G^4. \tag{3.1.50}
$$

Для операторов (3.1.50) условие инвариантности (3.1.8) может быть переписано в виде

$$
\left[Q,\ i\frac{\partial}{\partial x_0} - \gamma_0\gamma_a p_a - \gamma_0 m\right] = \alpha_Q\left(i\frac{\partial}{\partial x_0} - \gamma_0\gamma_a p_a - \gamma_0 m\right), \tag{3.1.51}
$$

где $\alpha_Q \equiv 0$, поскольку коммутатор в левой части (3.1.51) не может зависеть от p_0.

Разложим искомый оператор Q (3.1.50) по полной системе матриц Дирака, полагая

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= I\mathbf{d}^0 + i\gamma_4\mathbf{d}^1 + \gamma_\nu\mathbf{n}^\nu + S_{\mu\nu}\mathbf{m}^{\mu\nu} + \gamma_4\gamma_\nu\mathbf{b}^\nu,\\
C &= a^0 + i\gamma_4 a^1 + \gamma_\nu c^\nu + S_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \gamma_4\gamma_\nu g^\nu.
\end{aligned}
\tag{3.1.52}
$$

Здесь $\mathbf{d}^0$, $\mathbf{d}^1$, $\mathbf{n}^\nu$, $\mathbf{m}^{\mu\nu}$, $\mathbf{b}^\nu$, a^0, a^1, c^ν, $f^{\mu\nu}$, g^ν — неизвестные функции от $x = (x_0, \mathbf{x})$, которые нам предстоит определить.

Подставив (3.1.50), (3.1.52) в (3.1.51) и вычислив необходимые коммутаторы с использованием соотношений (1.2.3), (1.2.17) для γ-матриц, приходим после приравнивания коэффициентов при линейно независимых матрицах и операторах дифференцирования к следующей системе уравнений:

$$n^0 = b^0 = 0, \quad n^a_b = i\varepsilon_{abc}d^2_c, \quad b^a_b = i\varepsilon_{abc}d^3_c, \tag{3.1.53}$$

$$m^{0a}_b = i\delta_{ab}A^0, \quad m^{ab}_c = \varepsilon_{abc}A^1,$$

$$\frac{\partial d^\mu_a}{\partial x_b} = -\frac{\partial d^\mu_b}{\partial x_a}, \quad \frac{\partial d^\mu_a}{\partial x_a} = \frac{\partial d^\mu_b}{\partial x_b}, \quad a \neq b,$$

$m \operatorname{div} \mathbf{d}^0 = 0,\ m \operatorname{div} \mathbf{d}^1 = 2i\, a^1 m,$

$$\dot{\mathbf{d}}^3 = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{d}^2, \quad \dot{\mathbf{d}}^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{d}^3,$$

$\dot{\mathbf{d}}^i = -\operatorname{grad} A^i,\ \operatorname{div} \mathbf{d}^i = -3\dot{A}^i,\ i = 0,1,$

$$c^0 = -\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{d}^3 + mA^0, \quad c^a = -\frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{d}^2)_a,$$

$$g^0 = \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{d}^2, \quad g^a = -\frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{d}^3)_a - im\, d^1_a,$$

$$\dot{a}^0 = -\frac{i}{2} \operatorname{div} \mathbf{d}^0, \quad \operatorname{grad} a^0 = -\frac{3i}{2} \ddot{\mathbf{d}}^0,$$

$$\dot{a}^1 = -\frac{i}{2} \operatorname{div} \dot{\mathbf{d}}^1 + \frac{m}{3} \operatorname{div} \mathbf{d}^2, \quad \operatorname{grad} a^1 = -\frac{3i}{2} \ddot{\mathbf{d}}^1 - m\mathbf{d}^2,$$

$$f^{ab} = \varepsilon_{abc}\left[\frac{i}{2} \dot{d}^1_c + \frac{1}{4} (\operatorname{rot} \mathbf{d}^1)_c + m d^2_c\right],$$

$$f^{0a} = \frac{1}{2} \dot{d}^0_a - \frac{i}{4} (\operatorname{rot} \mathbf{d}^1)_a, \tag{3.1.54}$$

где точка над функцией обозначает производную по x_0, суммирование по повторяющимся индексам не подразумевается, а символ $\mathbf{d}^\mu$ обозначает вектор с компонентами $\left(d^\mu_1, d^\mu_2, d^\mu_3\right)$ (аналогично обозначены и другие векторные величины).

Используя тот факт, что первая строка в (3.1.54) определяет уравнения в форме Киллинга (ср. (1.1.8)), удается найти общее решение этой системы. Опуская громоздкие выкладки, приведем явный вид решения для $m \neq 0$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{d}^0 = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\rho} x_0 + \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{d}^1 = \boldsymbol{\xi} + \lambda \mathbf{x}, \\
\mathbf{d}^2 = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{d}^3 = \boldsymbol{\varepsilon} x_0 + \mu \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma}, \\
g^0 = 0, \quad g^a = -im(\xi_a + \lambda x_a), \quad f^{0a} = \frac{1}{2} \rho_a, \\
f^{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc}(2m\zeta_c + \eta_c) + m(x_a\varepsilon_b - x_b\varepsilon_a), \\
c^0 = -\mu - m(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{x} + \varkappa), \quad c^a = \varepsilon_a, \quad A^0 = -\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{x} - \varkappa, \\
A^1 = -\lambda x_0 + \omega, \quad a^0 = \Omega, \quad a^1 = -\frac{3i}{2}\lambda,
\end{gathered} \tag{3.1.55}$$

где греческими буквами обозначены произвольные постоянные.

Таким образом, общее решение системы (3.1.53), (3.1.54) зависит от 26 произвольных числовых параметров. Подставив (3.1.55), (3.1.53), (3.1.52) в (3.1.50), получаем общее выражение оператора симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ в виде линейной комбинации генераторов группы Пуанкаре (1.2.42), единичного оператора в следующих пятнадцати операторов:

$$\begin{aligned}
&\eta_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{ab}p_c, \quad \eta_a = \frac{i}{2}\gamma_4(p_a - m\gamma_a),\\
&\omega_{0a} = 2\gamma_0 S_{ab}p_b,\\
&\omega_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a p_b - \gamma_b p_a) + mS_{ab},\\
&B = x^\mu \eta_\mu + \eta^\mu x^\mu, \quad -A_\nu = x^\mu\omega_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}x^\mu + \frac{1}{2}\gamma_\nu - \frac{3}{2}\gamma_0 g_{\nu 0}.
\end{aligned} \tag{3.1.56}$$

На множестве решений уравнения Дирака операторы (1.2.42), (3.1.56) могут быть представлены в ковариантной форме (1.2.22), (3.1.49).

Итак, мы нашли все линейно независимые операторы (3.1.49), которые совместно с единичным оператором и генераторами группы Пуанкаре образуют базис в пространстве операторов симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ уравнения Дирака. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[P_\mu, B] = 2i\eta_\mu, \quad [\eta_\mu, B] = \frac{i}{2}(P_\mu + mA_\mu), \quad [P_\mu, A_\nu] = 2i\omega_{\mu\nu}, \tag{3.1.57}$$

а оператор B выражается через $J_{\mu\nu}$: $B = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\mu\nu}J^{\rho\delta}$. Отсюда следует, что все операторы симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ для уравнения Дирака принадлежат обвертывающей алгебре алгебры Пуанкаре.

Возникает естественный вопрос: какова же структура операторов симметрии уравнения Дирака в более широких классах, чем $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$? В работе [248] доказано, что все операторы симметрии, включающие производные второго порядка с матричными коэффициентами, также принадлежат обвертывающей алгебре алгебры AP(1, 3), и приведены серьезные аргументы в пользу того, что аналогичное утверждение справедливо для операторов симметрии уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов произвольного конечного порядка.

Примерами операторов симметрии, не принадлежащих обвертывающей алгебре алгебры AP(1, 3), являются операторы $Q \in \mathfrak{M}_\infty$ и $Q \in \mathfrak{M}_1^*$, задаваемые формулами (3.1.28), (3.1.41), (3.1.45). Как будет показано ниже, более широкими наборами операторов симметрии, не выражаемых через генераторы группы Пуанкаре, обладает безмассовое уравнение Дирака. Отметим, что полный набор операторов симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ для уравнения Дирака был впервые получен Шаповаловым (см. [134]) с использованием несколько иного подхода. Подход, используемый выше, имеет то преимущество, что его можно успешно применить и для случая $m = 0$.

В заключение опишем полный набор операторов симметрии уравнения Дирака в классе линейных и антилинейных дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами (классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^*$). Используя представление (3.1.34)—(3.1.37) и принимая во внимание результат, сформулированный в теореме 3.7, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.8. *Уравнение Дирака имеет 104 линейно независимых оператора симметрии, образующие базис в классе* $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^*$. *Эти операторы имеют вид*

$$\widehat{Q}_{A\mu} = Q_A P_\mu, \quad \widehat{Q}_{a\mu\nu} = Q_A J_{\mu\nu}, \quad \widehat{Q}_{AB} = Q_A \widetilde{Q}_B, \tag{3.1.58}$$

где Q_A — *матрицы* (3.1.41), P_μ, $J_{\mu\nu}$ — *генераторы* (3.1.41), *а символ* $\widetilde{Q}_B$ *обозначает операторы, получаемые из* (3.1.56) *заменой* $\gamma_\mu \to \Gamma_\mu$.

Доказательство в принципе не отличается от доказательства предыдущей теоремы и поэтому может быть опущено. ■

3.1.8. Симметрия уравнения Дирака для безмассовой частицы. Мы уже видели в гл. 1, что анализ свойств симметрии уравнений для безмассовых частиц имеет свою специфику и что а.и. таких уравнений в классе $\mathfrak{M}_1$ оказываются шире, чем соответствующая алгебра в случае не равной нулю массы.

Здесь мы исследуем негеометрическую симметрию безмассового уравнения Дирака, которая также отличается от симметрии этого уравнения для $m = 0$.

Как отмечалось в п. 1.2.8, безмассовое уравнение Дирака инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, включающей алгебру Ли конформной группы и подалгебру, содержащую единственный базисный элемент $F = i\gamma_4$. Кроме того, это уравнение обладает симметрией относительно восьмимерной коммутативной алгебры в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$, натянутой на базис (3.1.9). Однако, как можно убедиться непосредственной проверкой, операторы (1.2.22), (1.2.45), принадлежащие конформной алгебре, не образуют алгебры Ли совместно с операторами (3.1.9) [126].

А. и. безмассового уравнения Дирака, описанная в теореме 1.3, может быть расширена за счет операторов симметрии, принадлежащих классу $\mathfrak{M}_1^*$. Запишем это уравнение в виде системы (3.1.34), (3.1.36) (положив $m = 0$). Тогда каждому оператору симметрии уравнения Дирака $Q \in \mathfrak{M}_1^*$ можно взаимно однозначно сопоставить оператор симметрии этой системы, принадлежащей классу $\mathfrak{M}_1$.

По аналогии с теоремой 3.5 формулируется и доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.9. *Максимальная а.и. системы уравнений* (3.1.34), (3.1.36) (*с* $m = 0$) *в классе* $\mathfrak{M}_1$ *может быть натянута на базис* $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D, Q_k, Q_{4+k}\}$, *где*

$$Q_{4+k} = \Gamma_4 \Gamma_5 \Gamma_6 Q_k, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{3.1.59}$$

а P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ, D, Q_k — *операторы* (1.2.45), (3.1.41) (*где* $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.5 и поэтому здесь не приводится. Операторы Q_k, Q_{4+k} коммутируют с P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ, D и образуют восьмимерную подалгебру. Коммутационные соотношения между операторами Q_k, Q_{4+k} можно записать в форме (3.1.12), если обозначить

$$Q_2 = \Sigma_1, \quad Q_8 = \Sigma_0, \quad Q_1 = \Sigma_{23}, \quad Q_6 = \Sigma_{31},$$
$$Q_7 = \Sigma_{12}, \quad Q_3 = \Sigma_{01}, \quad Q_4 = \Sigma_{02}, \quad Q_5 = \Sigma_{03}.$$

Отсюда заключаем, что безмассовое уравнение Дирака допускает 23-мерную а.и., изоморфную $A[C(1, 3) \otimes GL(2, C)]$.

Из приведенной выше теоремы вытекает инвариантность уравнения Дирака для безмассовой частицы относительно 23-параметрической группы Ли, локально изоморфной группе $C(1, 3) \otimes GL(2, C)$. Конечные преобразования из конформной подгруппы (которые не перемешивают Ψ и Ψ^*) приведены выше в п. 1.2.9. Что же касается преобразований из подгруппы $GL(2, C)$, то их также нетрудно вычислить по формуле

$$\hat{\Psi} \to \hat{\Psi}' = \exp(Q_A\theta_A)\hat{\Psi}, \tag{3.1.60}$$

где θ_A — вещественные параметры, поскольку $-Q_1^2 = Q_2^2 = Q_3^2 = = Q_4^2 = Q_5^2 = -Q_6^2 = -Q_7^2 = -Q_8^2 = 1$. Преобразования (3.1.60) для $A \leqslant 3$ приведены в (3.1.44), (3.1.43). Для $A = 4$ имеем тривиальное преобразование растяжения функции Ψ, а при $A > 4$ получаем из (3.1.35), (3.1.37), (3.1.60)

$$\begin{aligned}
&\Psi \to \left(\operatorname{ch}\frac{\theta_5}{2} - \gamma_4 \operatorname{sh}\frac{\theta_5}{2}\right)\Psi,\\
&\Psi \to \cos\left(\frac{\theta_6}{2}\right)\Psi - i\gamma_4\gamma_2\sin\left(\frac{\theta_6}{2}\right)\Psi^*,\\
&\Psi \to \cos\left(\frac{\theta_7}{2}\right)\Psi + \gamma_4\gamma_2\sin\left(\frac{\theta_7}{2}\right)\Psi^*,\\
&\Psi \to \left(\cos\frac{\theta_8}{2} - i\gamma_4\sin\frac{\theta_8}{2}\right)\Psi.
\end{aligned} \tag{3.1.61}$$

Группа преобразований (3.1.44), (3.1.61) включает подгруппу Паули — Гюрши [231] (порождаемую операторами Q_1, Q_6, Q_7, Q_8). Остальные преобразования, перечисленные в (3.1.44), (3.1.61), содержат гиперболические вращения и в силу этого оказываются неунитарными в метрике (1.2.40). Инвариантность уравнений Дирака (с $m = 0$) относительно семипараметрической группы преобразований (3.1.44), (3.1.61) (в несколько другой формулировке и с использованием специального представления γ-матриц) была установлена Даниловым [30] и Ибрагимовым [36].

Если ограничиться только линейными преобразованиями, то симметрия безмассового уравнения Дирака в классе $\mathfrak{M}_1$ сводится к инвариантности относительно 16-параметрической алгебры Ли $A[C(1, 3) \otimes T_1]$, натянутой на базис (1.2.22), (1.2.45). Однако симметрия этого уравнения относительно линейных преобразований в классе $\mathfrak{M}_\infty$ определяется очень широкой алгеброй, изоморфной алгебре Ли группы $C(1, 3) \otimes GL(2, C)$. Доказательство этого факта приведено в работе [210]; см. также [126].

В заключение этого параграфа определим полный набор операторов симметрии уравнения Дирака с $m = 0$ в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ [70].

Теорема 3.10. *Безмассовое уравнение Дирака имеет* 52 *линейно независимых оператора симметрии в классе* $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. *Базис в пространстве таких операторов может быть выбран в виде*

$$\begin{gathered}\{P_\mu,\ J_{\mu\nu},\ K_\mu,\ D,\ F = i\gamma_4,\ \widetilde{P}_\mu = i\gamma_4 P_\mu,\ I,\\ \widetilde{J}_{\mu\nu} = i\gamma_4 J_{\mu\nu},\ \widetilde{K}_\mu = i\gamma_4 K_\mu,\ \widetilde{D} = i\gamma_4 D;\end{gathered} \tag{3.1.62}$$

$$\begin{gathered}A_\mu = (D - i)\gamma_\mu - \gamma_\nu x^\nu p_\mu,\ \omega_{\mu\nu} = \gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu,\\ \widetilde{A}_\mu = i\gamma_4 A_\mu,\ Q_{\mu\nu} = i([K_\mu,\ A_\nu] - [K_\nu,\ A_\mu])\},\end{gathered} \tag{3.1.63}$$

где $P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D$ — *генераторы конформной группы* (1.2.45), (1.2.22).

Доказательство. Исследование симметрии уравнения (1.2.44) относительно операторов из класса $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ в принципе ничем не отличается от соответствующего исследования для уравнения Дирака с не равной нулю массой. Повторяя дословно доказательство теоремы 3.7, снова приходим к системе уравнений (3.1.53), (3.1.54) для коэффициентов разложения оператора симметрии по полному набору матриц Дирака, где, однако, следует положить $m = 0$. Общее решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{d}^\alpha = \mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\mu}^\alpha) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^\alpha(x_0^2 - \mathbf{x}^2) + \mathbf{x}\times\boldsymbol{\eta}^\alpha + \nu^\alpha\mathbf{x} + \rho_\alpha x_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}^\alpha x_0 + \boldsymbol{\lambda}^\alpha,$$

$$\alpha = 0,1,$$

$$\mathbf{d}^2 = \mathbf{x}\times\boldsymbol{\varepsilon} + \xi_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\xi}x_0 + \mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\mu}^2) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^2(x_0^2 + \mathbf{x}^2) - x_0\mathbf{x}\times\boldsymbol{\mu}^3,$$

$$\mathbf{d}^3 = \mathbf{x}\times\boldsymbol{\xi} + \varepsilon_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}x_0 + \boldsymbol{\varkappa} + \mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\mu}^3) + x_0\mathbf{x}\times\boldsymbol{\mu}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^3(x_0^2 + \mathbf{x}^2),$$

$$A^\alpha = -(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\mu}^\alpha)x_0 - \frac{1}{2}\rho^\alpha(x_0^2 + \mathbf{x}^2) - \nu^\alpha x_0 - \boldsymbol{\omega}^\alpha\cdot\mathbf{x} - \eta^\alpha, \tag{3.1.64}$$

$$a^\alpha = -\frac{3i}{2}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\mu}^\alpha + \rho^\alpha x_0 + \delta^\alpha),$$

$$f^{0a} = \frac{1}{2}(-\eta_a^1 + \rho^0 x_a + \mu_a^0 x_0 + \omega_a^0),$$

$$f^{ab} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}(\mu_c^1 x_0 + \rho^1 x_c + \omega_c^1 + \eta_c^0),$$

$$c^0 = \varepsilon_0,\ c^a = -\varepsilon_a,\ g^0 = \xi_0,\ g^a = -\xi_a,$$

где греческими буквами обозначены произвольные числовые параметры.

Подставив (3.1.64), (3.1.53), (3.1.52) в (3.1.50), получаем общий вид оператора симметрии безмассового уравнения Дирака в виде линейной комбинации операторов (3.1.62), (3.1.63), где P_μ,

$J_{\mu\nu}$ задаются формулами (1.2.42) (при $m=0$), а K_μ, $\omega_{\mu\nu}$ и D имеют вид

$$\begin{gathered} K_\mu = -[J_{\mu\nu}, x^\nu]_+ + \frac{1}{2}[P_\mu, x_\nu x^\nu]_+, \\ \omega_{ab} = \gamma_a p_b - \gamma_b p_a, \qquad \omega_{0a} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\gamma_4\omega_{bc}, \\ A_\mu = [x^\nu, \omega_{\mu\nu}]_+ + \frac{1}{2}\gamma_\mu + \frac{3}{2}i\gamma_0 g_{\mu 0}, \\ \widetilde{A}_\mu = i\gamma_4 A_\mu, \qquad D = \frac{1}{2}[x^\mu, P_\mu]_+. \end{gathered} \tag{3.1.65}$$

На множестве решений уравнения (1.2.44) эти операторы могут быть представлены в ковариантной форме (1.2.22), (1.2.45), (3.1.63).

Таким образом, операторы (3.1.62), (3.1.63) действительно задают базис в пространстве операторов симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ безмассового уравнения Дирака. ■

Мы видим, что операторы симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ уравнения Дирака с $m=0$ включают генераторы конформной группы, произведения этих генераторов (и единичного оператора) на $F = i\gamma_4$ и 20 дополнительных операторов (3.1.63), которые не выражаются через генераторы конформной группы и матрицу F и в этом смысле являются существенно новыми. Напомним, что для уравнения Дирака с отличной от нуля массой все операторы $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ выражаются через $Q \in \mathfrak{M}_1$, т. е. через генераторы группы Пуанкаре.

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что операторы (3.1.62), (3.1.63) не образуют алгебры Ли. Можно, однако, выделить такие подмножества этих операторов, которые обладают структурой алгебры Ли. Очевидным примером такого подмножества являются генераторы конформной группы. Однако соответствующая алгебра Ли может быть существенно расширена до множества операторов (3.1.62), которые образуют 32-мерную алгебру Ли. Структурные константы этой алгебры легко вычислить, принимая во внимание коммутативность $i\gamma_4$ с P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ и D и учитывая соотношение $\gamma_4^2 = -1$.

Укажем также подмножество операторов симметрии уравнения Дирака с $m=0$, образующее супералгебру Ли. Это подмножество представляет собой комбинацию следующих базисных элементов:

$$\{P_\mu,\ J_{\mu\nu},\ D,\ P_{\mu\nu} = P_\mu P_\nu,\ \mathrm{I};\ \omega_{\mu\nu},\ F = \gamma_4,\ FP_\mu\} \tag{3.1.66}$$

Действительно, $\omega_{\mu\nu}$, FP_μ и F удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} [\omega_{\mu\nu}, \omega_{\lambda\sigma}]_+ = 2(g_{\mu\lambda}P_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}P_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma}P_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}P_{\mu\sigma});\ F^2 = -\mathrm{I}, \\ [FP_\mu, F]_+ = 2P_\mu,\ [FP_\mu, FP_\nu]_+ = 2P_{\mu\nu},\ [\omega_{\mu\nu}, F]_+ = [\omega_{\mu\nu}, FP_\lambda]_+ = 0. \end{gathered} \tag{3.1.67}$$

С другой стороны, операторы, стоящие в (3.1.66) левее точки с запятой, очевидно, образуют алгебру Ли, а коммутаторы этих операторов с $\omega_{\mu\nu}$, FP_μ и F выражаются через линейную комбинацию $\omega_{\nu\sigma}$, FP_σ и F.

Указанная супералгебра Ли включает 33 базисных элемента, из которых 10 (а именно $P_{\mu\nu}$) принадлежат более широкому классу чем $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Определение супералгебры см. в сноске на с. 169.

Отметим еще, что все операторы симметрии (3.1.62), (3.1.63) принадлежат обвертывающей алгебре, базис которой может быть выбран в виде

$$\{P_0,\ J_{12},\ J_{31},\ J_{01},\ K_0,\ F,\ \omega_{01}\}.$$

Наконец, укажем подмножество операторов симметрии уравнения Дирака с $m=0$, образующее базис 42-мерной алгебры Ли. Это подмножество включает операторы (3.1.62) и следующие десять операторов:

$$F_\mu = A_\mu + \widetilde{A}_\mu, \qquad \widehat{Q}_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Q^{\rho\sigma},$$
$$\widehat{\omega}_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma} \tag{3.1.68}$$

(среди операторов $\widehat{Q}_{\mu\nu}$ и $\widehat{\omega}_{\mu\nu}$ имеется только по три линейно независимых). Операторы (3.1.68) образуют коммутативный идеал в указанной 42-мерной алгебре Ли.

Найденные выше операторы симметрии безмассового уравнения Дирака в представлении (1.2.13) переводят вещественные решения в вещественные. Это означает, что теорема 3.10 устанавливает также симметрию уравнения Вейля. Действительно, полагая в (1.4.3)

$$\varphi = \Psi_1 + i\Psi_2, \tag{3.1.69}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — вещественные функции, приходим к уравнению в форме Дирака (1.2.44), где γ_μ — матрицы Дирака в представлении Майорана (1.2.13), $\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}$. Операторы симметрии (3.1.62), (3.1.63) определены для произвольной реализации γ-матриц и, следовательно, преобразуют решения уравнений (1.2.44), (1.2.13) в решения. Этим преобразованиям очевидным образом соответствуют линейные и антилинейные преобразования двухкомпонентной функции φ (3.1.69), оставляющие инвариантным уравнение Вейля (1.4.3).

Следовательно, уравнение Вейля имеет в точности 52 линейно независимых оператора симметрии в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^*$.

Подведем итоги. Уравнение Дирака обладает широкой негеометрической симметрией, которая не может быть обнаружена в классическом подходе Ли. А именно, при $m \neq 0$ существуют 26 линейно независимых операторов симмметрии этого уравнения в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ (которые все принадлежат обвертывающей алгебре алгебры AP(1, 3)), а при $m=0$ число таких операторов равно 52 (20 из которых, т. е. операторы (3.1.63), не принадлежат обвертывающей алгебре алгебры Ли конформной группы).

Максимальное а. и. уравнения Дирака в различных классах приведены в следующей таблице:

Таблица 4

Значение m	Классы операторов симметрии			
	$\mathfrak{M}_1$	$\widetilde{\mathfrak{M}}_1$	$\widetilde{\mathfrak{M}}_1^*$	$\mathfrak{M}_\infty$
$m \neq 0$	AP (1, 3)	$A\ [P\,(1,3) \otimes \otimes GL\,(2, C)]$	$A\ [P\,(1,3) \otimes \otimes O\,(1,3) \otimes T_1]$	$A\ [P\,(1,3) \otimes \otimes GL\,(2, C) \otimes \otimes GL\,(2, C)]$
$m = 0$	$A\ [C(1,3) \otimes T_1]$	$A\ [C\,(1,3) \otimes \otimes T_{10}]$, T_8	$A\ [C\,(1,3) \otimes \otimes GL\,(2, C)]$	$A\ [C\,(1,3) \otimes \otimes GL\,(2, C) \otimes \otimes GL\,(2, \quad C]$

§ 3.2. Симметрия релятивистских уравнений для частиц произвольного спина

3.2.1. Симметрия уравнения Кеммера — Деффина — Петье. В этом параграфе исследуются свойства симметрии релятивистских уравнений для частиц с высшими спинами — уравнений КДП, ТСТ, уравнений в форме Дирака и других (см. п. 3.2.3). Оказывается, что эти уравнения, помимо явной инвариантности относительно группы Пуанкаре, обладают также скрытой (негеометрической) симметрией, которая шире соответствующей симметрии уравнения Дирака.

Уравнение КПД для массивной частицы спина 1 запишем в виде (см. п. 2.3.5)

$$L\Psi \equiv (\beta^\mu p_\mu - m)\,\Psi = 0, \tag{3.2.1}$$

где Ψ — десятикомпонентная волновая функция, β^μ — десятирядные матрицы КДП, удовлетворяющие алгебре (2.3.23). Явная реализация таких матриц может быть выбрана в форме (2.3.25), однако для наших целей она несущественна.

Как отмечалось в § 2.3, уравнение КДП инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли группы Пуанкаре. Базисные элементы этой алгебры на множестве решений уравнения (3.2.1) могут быть выбраны в ковариантной форме (1.2.22), где $S_{\mu\nu} = i\,[\beta_\mu, \beta_\nu]$. Можно показать, что алгебра Пуанкаре является максимальной а. и. уравнения КДП в классе дифференциальных операторов первого порядка.

Здесь мы продемонстрируем, что уравнение КДП обладает широкой негеометрической симметрией. Природа этой симметрии заключается в специальных свойствах β-матриц и многокомпонентности функции Ψ и не связана с преобразованиями независимых переменных.

Покажем, что уравнение (3.2.1), как и уравнение Дирака, инвариантно относительно алгебры A_8, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^*$ и задаются формулами

$$i\,\Sigma_{\mu\nu}=S_{\mu\nu}+\frac{1}{m}(a_\mu p_\nu-a_\nu p_\mu),\quad \Sigma_0=\mathrm{I},\quad \Sigma_1=\beta_4+\frac{i}{m}a^\mu p_\mu, \tag{3.2.2}$$

где

$$a_\mu=S_{5\mu}+iS_{4\mu},\quad S_{kl}=i[\beta_k,\ \beta_l],\quad S_{5k}=i\beta_k,\qquad k,\,l=0,\ 1,\ \ldots,\ 4. \tag{3.2.3}$$

Действительно, используя тот факт, что матрицы β_k удовлетворяют алгебре (2.3.23), а S_{mn} $(m,\ n=0,\ 1,\ \ldots,\ 5)$ — алгебре AO(1, 5), нетрудно получить следующие соотношения:

$$[\Sigma_{\mu\nu},\ L]=f_{\mu\nu}L,\qquad f_{\mu\nu}=\frac{1}{2m^2}(L+2m)(\beta_\mu p_\nu-\beta_\nu p_\mu), \tag{3.2.4}$$

$$[\Sigma_\alpha,\ L]=0,\qquad \alpha=0,\ 1. \tag{3.2.5}$$

На первый взгляд формула (3.2.4) может показаться противоречивой, так как в левой части содержит операторы дифференцирования не выше второго порядка, а в правой — операторы трехкратного дифференцирования. Однако это противоречие только кажущееся, поскольку, согласно (2.3.23),

$$\beta^\mu p_\mu(\beta_\lambda p_\sigma-\beta_\sigma p_\lambda)\beta^\nu p_\nu\equiv 0. \tag{3.2.6}$$

Из (3.2.5), (3.2.4) заключаем, что $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_0 и Σ_1 являются операторами симметрии уравнения КДП. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.12), характеризующим алгебру A_8. Последний факт легко проверить непосредственно, подвергая операторы (3.2.2) следующему преобразованию:

$$\Sigma_{\mu\nu}\to V\Sigma_{\mu\nu}V^{-1}=[\beta_\mu,\ \ \beta_\nu],\quad \Sigma_0\to V\Sigma_0V^{-1}=\mathrm{I},\quad \Sigma_1\to V\Sigma_1V^{-1}=\beta_4, \tag{3.2.7}$$

где $V=\exp\left(\frac{i}{m}a^\mu p_\mu\right)$.

Таким образом, уравнение КДП обладает такой же негеометрической симметрией в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$, как и уравнение Дирака (см. теорему 3.1). Отметим, что операторы симметрии уравнения Дирака, задаваемые формулами (3.1.9), также могут быть представлены в форме (3.2.2), (3.2.3), где β^k следует заменить на $\gamma^k/2$.

Можно показать, что алгебра Ли, натянутая на базис (3.2.2), является максимально широкой а. и. уравнения КДП в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Однако, в отличие от уравнения Дирака, уравнение КДП обладает более богатыми симметрийными свойствами в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ — классе дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами. Эти свойства могут быть сформулированы в виде следующего утверждения.

Теорема 3.11. *Уравнение КДП инвариантно относительно 18-мерной алгебры Ли, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ и зада-*

ются формулами

$$\lambda_{ab}=C_aC_b,\quad \widetilde{\lambda}_{ab}=\frac{1}{2}(D_aC_b+C_aD_b),\quad \lambda_1=I,\quad \lambda_0=\frac{1}{2}D_aC_a, \tag{3.2.8}$$

где

$$C_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\Sigma_{bc},\quad D_a=\Sigma_{0a},\quad a,b=1,2,3.$$

Доказательство. Тот факт, что операторы (3.2.8) являются операторами симметрии уравнения КДП, вытекает непосредственно из соотношений (3.2.5), (3.2.4). Действительно, например, для операторов λ_{ab} получаем из (3.2.4)

$$[\lambda_{ab}, L]=[C_a, L]\,C_b+C_a\,[C_b, L]=$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{acd}f_{cd}LC_b+\frac{1}{2}C_a\varepsilon_{bcd}f_{cd}L=$$

$$=\frac{1}{2}f_{cd}(-\varepsilon_{acd}\varepsilon_{bkl}f_{kl}+\varepsilon_{acd}C_b+\varepsilon_{bcd}C_a)\,L$$

и т. д.

Операторы (3.2.8) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}[\lambda_{ab},\lambda_{cd}]&=-\left[\widetilde{\lambda}_{ab},\widetilde{\lambda}_{cd}\right]=if^{kl}_{abcd}\lambda_{kl},\\ [\lambda_{ab},\widetilde{\lambda}_{cd}]&=if^{kl}_{abcd}\widetilde{\lambda}_{kl},\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$[\lambda_1,\lambda_2]=[\lambda_\alpha,\lambda_{cd}]=[\lambda_\alpha,\widetilde{\lambda}_{cd}]=0,\quad \alpha=0,1, \tag{3.2.10}$$

где f^{kl}_{abcd} — структурные константы группы $SU(3)$ в базисе Окубо (см., например, [81]). В справедливости соотношений (3.2.9), (3.2.10) проще всего убедиться в представлении (3.2.7). ■

Итак, помимо симметрии относительно алгебры Пуанкаре, уравнение КДП инвариантно также относительно 18-мерной алгебры Ли, натянутой на базис (3.2.8). Алгебра (3.2.8) включает подалгебру A_8, базисные элементы которой являются линейными комбинациями λ_{ab}, $\widetilde{\lambda}_{ab}$. Например, $\Sigma_{ab}=i(\lambda_{ba}-\lambda_{ab})$, где Σ_{ab} и λ_{ab} — операторы (3.2.2) и (3.2.8).

Возникает вопрос: нельзя ли объединить алгебру Пуанкаре и алгебру (3.2.7) в единую а.и. уравнения КДП? Оказывается, такое объединение вполне естественно, поскольку коммутаторы операторов (3.2.7) и генераторов группы Пуанкаре сводятся к линейным комбинациям λ_{ab}, $\widetilde{\lambda}_{ab}$, λ_a. Действительно, как нетрудно убедиться, операторы $\Sigma_{\mu\nu}$, λ_α удовлетворяют совместно с генераторами группы $P(1, 3)$ коммутационным соотношениям (3.1.17), откуда получаем

$$\begin{aligned}&[J_a,\lambda_{bc}]=-[J_{0a},\widetilde{\lambda}_{bc}]=i(\varepsilon_{abd}\lambda_{dc}+\varepsilon_{acd}\lambda_{bd}),\\ &[J_a,\widetilde{\lambda}_{bc}]=[J_{0a},\lambda_{bc}]=i(\varepsilon_{abd}\widetilde{\lambda}_{dc}+\varepsilon_{acd}\widetilde{\lambda}_{bd}),\\ &[P_\mu,\lambda_{ab}]=[P_\mu,\widetilde{\lambda}_{ab}]=[P_\mu,\lambda_\alpha]=[J_{\mu\nu},\lambda_\alpha]=0,\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

где $J_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}$.

Соотношения (1.1.13), (3.2.9)—(3.2.11) определяют 28-мерную алгебру Ли, которая, по доказанному, является а. и. уравнения КДП. По этой алгебре нетрудно восстановить группу симметрии. Действительно, преобразования, порождаемые операторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, уже рассматривались выше (см. (1.3.33)—(1.3.35)). Что же касается преобразований, порождаемых λ_{ab}, $\widetilde{\lambda}_{ab}$ и λ_α, то они также легко могут быть найдены в явном виде по формуле

$$\Psi \to \Psi' = \exp(Q_j\theta_j)\Psi, \quad Q_j \subset \{\lambda_{ab}, \widetilde{\lambda}_{ab}, \lambda_\alpha\}, \tag{3.2.12}$$

где θ_f — вещественные параметры. Соответствующие экспоненты легко вычисляются:

$$\exp(Q_j\theta_j) = 1 + Q_j\theta_j, \ Q_j \subset \{\lambda_{ab}, \widetilde{\lambda}_{ab}, a \neq b\},$$

$$\exp(\lambda_{bb}\theta_b) = 1 + \lambda_{bb}(\exp\theta_b - 1); \ \exp(\lambda_0\theta_0) = \exp\theta_0,$$

$$\exp(\widetilde{\lambda}_{bb}\theta_b) = 1 + \widetilde{\lambda}^2_{bb}(\operatorname{ch}\theta_b - 1) + \widetilde{\lambda}^2_{bb}\operatorname{sh}\theta_b,$$

$$\exp(\lambda_1\theta_1^2) = 1 + \lambda_1^2(\operatorname{ch}\theta_1 - 1) + \lambda_1^2\operatorname{sh}\theta_1.$$

Используя соотношения $a_\mu a_\nu a_\lambda = 0$, вытекающие из определения (3.2.3) и условий (2.3.23), можно показать, что общее преобразование симметрии уравнения КДП, включающее преобразования Лоренца и преобразования (3.2.12), имеет форму

$$\Psi(x) \to A\Psi(x') + B_\mu \frac{\partial\Psi(x')}{\partial x_\mu} + D_{\mu\nu}\frac{\partial^2\Psi(x')}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \tag{3.2.13}$$

где x' связаны с x преобразованиями Лоренца, A, B_μ и $D_{\mu\nu}$ — числовые матрицы, зависящие от параметров преобразования.

Остановимся кратко на вопросе о негеометрической симметрии уравнения Тамма — Сакаты — Такетани (ТСТ) (2.4.1), (2.4.57), которое также описывает релятивистскую частицу спина 1, но не имеет лишних (нефизических) компонент. Поскольку между множествами решений уравнений КДП и ТСТ можно установить взаимно однозначное соответствие с помощью преобразования (2.3.40), то приведенные выше результаты относительно симметрии уравнения (3.2.1) нетрудно переформулировать для уравнения ТСТ. Укажем негеометрическую а. и. этого уравнения, интересную с физической точки зрения.

Теорема 3.12. *Уравнение ТСТ инвариантно относительно алгебры* ASU(3). *Базисные элементы этой алгебры на множестве решений уравнений* (2.4.1), (2.4.57) *могут быть выбраны в виде*

$$\lambda_{ab} = \widehat{S}_a\widehat{S}_b, \tag{3.2.14}$$

где $\widehat{S}_a$, $\widehat{S}_b$ — *дифференциальные операторы, принадлежащие классу* $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$,

$$\widehat{S}_a = S_a\left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) - \frac{p_a S_b p_b}{2m} + \frac{i}{m}\sigma_1\varepsilon_{abc}p_b S_c,$$

S_a — *матрицы, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений* $D(1)$ *алгебры* AO(3).

Доказательства теоремы мы не приводим. Заметим только, что операторы (3.2.14) удовлетворяют соотношениям (3.2.9) и коммутируют с гамильтонианом ТСТ (2.4.57), т. е. образуют а. и. уравнения ТСТ. ■

В заключение этого пункта отметим, что уравнения КДП и ТСТ обладают негеометрическими а. и. также в классе $\mathfrak{M}_\infty$. Мы не приводим явный вид базисных элементов этих алгебр из-за их громоздкости (см. [58, 61]).

3.2.2. Симметрия уравнений типа Дирака для произвольного спина. Исследуем теперь скрытую (негеометрическую) симметрию уравнений в форме Дирака для релятивистских частиц произвольного спина, задаваемых формулами (2.5.1), (2.5.14).

Уравнения (2.5.1), (2.5.14) отличает симметричная форма, которая не усложняется с ростом спина. Последнее обстоятельство позволяет почти очевидным образом обобщить на случай произвольного спина все основные результаты, полученные в § 3.1, при исследовании симметрии четырехкомпонентного уравнения Дирака.

Уравнения (2.5.1), (2.5.14) явно инвариантны относительно алгебры $AP(1,3)$. Основной результат о негеометрической симметрии уравнений в форме Дирака состоит в том, что при любом значении спина эти уравнения инвариантны также относительно алгебры A_8. На самом деле эти уравнения (для $s > 1/2$) обладают более широкой алгеброй инвариантности.

Теорема 3.13. *Система уравнений* (2.5.1), (2.5.14) *инвариантна относительно алгебры A_8, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ и могут быть выбраны в виде*

$$\begin{gathered}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] + \frac{1}{2m}(\Gamma_\mu p_\nu - \Gamma_\nu p_\mu)(1 - i\Gamma_4),\\ \Sigma_0 = \mathrm{I}, \quad \Sigma_1 = \Gamma_4 - \frac{1}{m}(i + \Gamma_4)\Gamma^\mu p_\mu.\end{gathered} \tag{3.2.15}$$

Доказательство может быть проведено в полной аналогии с доказательством теоремы 3.1, поэтому приведем только явные выражения для коммутаторов операторов (3.2.15) с L_1 и L_2 из (2.5.1), (2.5.14):

$$\begin{gathered}[\Sigma_{\mu\nu}, L_1] = \frac{i}{m}(\Gamma_\mu p_\nu - \Gamma_\nu p_\mu) L_1,\\ [\Sigma_{\mu\nu}, L_2] = [\Sigma_\alpha, L_1] = [\Sigma_\alpha, L_2] = 0, \quad \alpha = 0, 1.\end{gathered} \tag{3.2.16}$$

Из (3.2.16) следует, что $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_α являются операторами симметрии системы уравнений (2.5.1), (2.5.14). Нетрудно убедиться также, что операторы (3.2.15) образуют восьмимерную алгебру Ли A_8, удовлетворяя коммутационным соотношениям (3.1.12).

В случае $s = 1/2$ операторы (3.2.15) сводятся к форме (3.1.9).

Мы видим, что, помимо явной инвариантности относительно алгебры Пуанкаре, уравнения в форме Дирака для частиц произвольного спина дополнительно оказываются инвариантными относительно алгебры A_8, которая реализуется в классе дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами. Таким образом, указанная выше симметрия не является специфическим свойством уравнения Дирака для электрона, но присуща также релятивистским уравнениям движения для частиц с высшими спинами.

Так же, как в случае четырехкомпонентного уравнения Дирака (см. теорему 3.2), операторы (3.2.15) образуют замкнутую алгебру совместно с генераторами группы Пуанкаре, удовлетворяя коммутационным соотношениям (3.1.24). Это означает, что система уравнений (2.5.1), (2.5.14) инвариантна относительно 18-мерной алгебры Ли, включающей подалгебры AP(1, 3) и A_8.

Нетрудно заметить, что в случае $s > 1/2$ симметрия системы (2.5.1), (2.5.14) в классе $\mathfrak{M}_1$ оказывается шире описанной выше. Действительно, всевозможные произведения операторов (3.2.15), очевидно, также будут операторами симметрии этой системы, принадлежащими классу $\mathfrak{M}_1$. В случае $s = 1/2$ такие произведения линейно выражаются через $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_α, а для $s > 1/2$ образуют базис более широкой а. и.

Теорема 3.14. *Система уравнений* (2.5.1), (2.5.14) *инвариантна относительно алгебры Ли, изоморфной* $A[P(1, 3) \otimes GL(2s + 1, C)]$. *Базисные элементы этой алгебры (обозначаемые символами* P_μ, $J_{\mu\nu}$, λ_{nm}, $\tilde{\lambda}_{nm}$) *принадлежат классу* $\mathfrak{M}_1$ *и могут быть выбраны в форме, задаваемой соотношениями* (2.1.52) *и приведенными ниже формулами* (3.2.17):

$$\begin{aligned}\lambda_{n+kn} &= \frac{1}{2} a_{kn}\left[(\Sigma_{23} - \Sigma_{02})^k P_{s-n+1}(1 - i\Sigma_1) + \right.\\ &\qquad\qquad \left. + P_{s-n+1}(\Sigma_{23} + \Sigma_{02})^k (1 + i\Sigma_1)\right], \\ \lambda_{nn+k} &= \frac{1}{2} a_{kn}\left[P_{s-n+1}(\Sigma_{23} + \Sigma_{02})^k (1 - i\Sigma_1) + \right.\\ &\qquad \left. + (\Sigma_{23} - \Sigma_{02})^k P_{s-n+1}(1 + i\Sigma_1)\right], \quad \tilde{\lambda}_{mn} = \Sigma_1 \lambda_{mn},\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_1 — *операторы* (3.2.15),

$$P_{s-n+1} = \prod_{n' \neq n} \frac{\Sigma_{12} - s - 1 + n'}{n' - n},$$

$$n = 1, 2, \ldots, 2s + 1; \quad k = 0, 1, \ldots, 2s + 1 - n,$$

а a_{kn} — *коэффициенты, определяемые следующими рекуррентными формулами:*

$$a_{0n} = 1, \quad a_{1n} = [n(2s + 1 - n)]^{-1/2},$$

$$a_{\lambda n} = a_{\lambda-1n} a_{\lambda-1n+\lambda-1}, \quad \lambda = 2, 3, \ldots, 2s - n.$$

Доказательство. Операторы (3.2.17), очевидно, являются операторами симметрии системы (2.5.1), (2.5.14), так как выражаются через произведения базисных элементов а. и. этой системы, приведенной в теореме 3.13.

Чтобы доказать, что эти операторы образуют базис алгебры AGL$(2s + 1, C)$, достаточно убедиться, что они линейно независимы и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[\lambda_{ab},\ \lambda_{cd}] = -[\widetilde{\lambda}_{ab},\ \widetilde{\lambda}_{cd}] = \delta_{bc}\lambda_{ad} - \delta_{ad}\lambda_{cb}, \\ &[\lambda_{ab},\ \widetilde{\lambda}_{cd}] = \delta_{bc}\widetilde{\lambda}_{ad} - \delta_{ad}\widetilde{\lambda}_{cb}. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Непосредственная проверка этих утверждений является сложной задачей, которую можно значительно упростить с помощью преобразования операторов (3.2.17) к такому представлению, в котором они сводятся к числовым матрицам. Используя для этой цели оператор (ср. (3.1.18))

$$V = 1 - \frac{1}{2m}(1 - i\Gamma_4)\Gamma^\mu p_\mu, \qquad V^{-1} = 1 + \frac{1}{2m}(1 - i\Gamma_4)\Gamma^\mu p_\mu,$$

получаем

$$\Sigma'_{\mu\nu} = V\Sigma_{\mu\nu}V^{-1} = S_{\mu\nu}, \qquad \Sigma'_1 = V\Sigma_1 V^{-1} = \Gamma_4, \tag{3.2.20}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, образующие базис представления $D(s\ 0) \oplus \oplus D(s-1\ 0) \oplus D\left(s - \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$. Одновременно уравнения (2.5.1), (2.5.14) могут быть преобразованы к форме

$$L'_2\Psi' = 0, \qquad L'_1\Psi' = 0, \tag{3.2.21}$$

где $\Psi' = V\Psi$,

$$L'_1 = \Gamma_0 V^\dagger \Gamma_0 L_1 V^{-1} = \frac{1}{2m}\left[(1 + i\Gamma_4)m^2 + (1 - i\Gamma_4)\left(p_\mu p^\mu - m^2\right)\right], \tag{3.2.22}$$

$$L'_2 = V(L_2 - \widehat{S}L_1)V^{-1} = \frac{1}{2s}[S_{ab}S_{ab} - 2s(s+1)].$$

Уравнения (3.2.21), очевидно, инвариантны относительно произвольных матричных преобразований, коммутирующих с Γ_4. Для эффективного описания этих преобразований воспользуемся тем фактом, что матрицы $S_{\mu\nu}$ на множестве решений второго из уравнений (3.2.21) реализуют неприводимое представление $D(s\ 0)$ алгебры AO(1, 3). Всевозможные произведения таких матриц можно использовать для построения базиса в пространстве операторов симметрии системы (3.2.21). Действительно, используя для $S_{\mu\nu} \subset \subset D(s\ 0)$ представление (2.1.66) (2.1.68), нетрудно убедиться, что матрицы λ'_{ab} и $\widetilde{\lambda}'_{ab}$, получаемые из (3.2.17) заменой $\Sigma_{\mu\nu} \to \Sigma'_{\mu\nu}$, $\Sigma_1 \to \Sigma'_1$ согласно (3.2.20), имеют следующие отличные от нуля матричные элементы:

$$(\lambda'_{mn})_{ab} = \delta_{am}\delta_{bn}, \qquad (\widetilde{\lambda}'_{mn})_{ab} = i\delta_{am}\delta_{bn},$$
$$a,\ b = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2s+1.$$

Эти матрицы линейно независимы над полем вещественных чисел, коммутируют с L'_1 и L'_2 (3.2.22), образуют базис в пространстве матриц размерности $(2s+1)\times(2s+1)$ и удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.2.19). С помощью обратного преобразования

$$\lambda'_{mn} \to V^{-1}\lambda'_{mn}V = \lambda_{mn}, \qquad \widetilde{\lambda}'_{mn} \to V^{-1}\widetilde{\lambda}'_{mn}V = \widetilde{\lambda}_{mn}$$

эти матрицы сводятся к форме (3.2.17).

Для завершения доказательства теоремы осталось вычислить коммутационные соотношения между генераторами группы Пуанкаре и операторами (3.2.17). Как нетрудно убедиться, операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ (2.1.57), (2.5.7) и $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_α (3.2.15) удовлетворяют соотношениям (3.1.24), откуда заключаем, что линейные комбинации

$$\widehat{P}_\mu = iP_\mu, \quad \widehat{J}_{\mu\nu} = iJ_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu} \tag{3.2.23}$$

коммутируют с $\Sigma_{\mu\nu}$, Σ_α (а значит, и с λ_{mn}, $\widetilde{\lambda}_{mn}$). Поскольку $\Sigma_{\mu\nu}$ можно разложить по полной системе операторов (3.2.17):

$$\Sigma_{12} = \sum_n (s+1-n)\lambda_{nn}, \qquad \Sigma_{23} = \frac{1}{2a_{1n}}(\lambda_{nn+1} + \lambda_{n+1n}),$$

$$\Sigma_{02} = \frac{1}{2a_{1n}}\left(\widetilde{\lambda}_{nn+1} - \widetilde{\lambda}_{n+1n}\right) \tag{3.2.24}$$

(остальные $\Sigma_{\mu\nu}$ выражаются через коммутаторы операторов (3.2.24)), то отсюда вытекает, что $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, \lambda_{mn}, \widetilde{\lambda}_{mn}\}$ образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathrm{AP}(1, 3) \oplus A\mathrm{GL}(2s+1, C)$.

Таким образом, уравнения в форме Дирака для частицы произвольного спина s обладают широкой симметрией в классе $\mathfrak{M}_1$, которая возрастает с увеличением спина. Соответствующая а. и. таких уравнений может быть натянута на базис (1.2.22), (3.2.17).

Поскольку операторы (3.2.17) удовлетворяют условиям $\lambda_{mn}^2\Psi = \delta_{mn}\lambda_{nn}\Psi$, $(\widetilde{\lambda}_{mn})^2\Psi = -\delta_{mn}\lambda_{nn}\Psi$, где Ψ — произвольное решение уравнений (2.5.1), (2.5.14), то из доказанной теоремы следует инвариантность этих уравнений относительно $[10 + 2(2s+1)^2]$-параметрической группы Ли, которая включает неоднородные преобразования Лоренца и преобразования вида

$$\Psi \to \exp(\lambda_{mn}\theta_{mn})\Psi = \begin{cases} (1 + \lambda_{mn}\theta_{mn})\Psi, & m \neq n, \\ [1 + \lambda_{nn}(\exp\theta_{nn} - 1)]\Psi, & m = n, \end{cases}$$

$$\Psi(x) \to \exp\left(\widetilde{\lambda}_{mn}\theta_{mn}\right)\Psi = \begin{cases} (1 + \widetilde{\lambda}_{mn}\theta_{mn})\Psi, \quad m \neq n, \\ \left[\widetilde{\lambda}_{mm}\sin\theta_{mm} + 1 + \lambda_{mm}(\cos\theta_{mm} - 1)\right]\Psi, \\ m = n, \end{cases}$$

где θ_{mn}, $\widetilde{\theta}_{mn}$ — вещественные параметры, суммирование по повторяющимся индексам не подразумевается. Как легко убедиться, общее преобразование из этой группы можно представить в форме (3.1.25), где A, B_μ — матрицы размерности $8s \times 8s$, зависящие от параметров преобразования.

3.2.3. О дополнительной симметрии релятивистских волновых уравнений в произвольной формулировке. Негеометрическая симметрия уравнений в форме Дирака, рассматриваемая в предыдущем пункте, не является их специфическим свойством, но присуща всем без исключения релятивистским уравнениям движения частиц со спином $s > 0$. Доказательство справедливости этого утверждения и составит основное содержание настоящего пункта.

Пусть $\{\Psi\}$ — множество решений пуанкаре-инвариантного уравнения для частицы произвольного спина s и массы m, которое мы запишем символически в виде (3.1.1). На явный вид L не будем накладывать никаких априорных ограничений — это может быть либо дифференциальный оператор, включающий производные любого конечного порядка, либо интегро-дифференциальный оператор. Единственное требование, налагаемое на L и Ψ, состоит в том, что уравнение (3.1.1) должно быть инвариантно относительно алгебры Пуанкаре AP(1, 3), причем представление этой алгебры на множестве $\{\Psi\}$ должно принадлежать I классу ($P_\mu P^\mu > 0$) и быть неприводимым по спину и массе (см. п. 2.3.1). Последнее означает, что уравнение (3.1.1) допускает десять операторов симметрии P_μ и $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), удовлетворяющих коммутационным соотношениям (1.1.13), характеризующим алгебру AP(1,3), причем собственные значения операторов Казимира этой алгебры задаются формулами (2.3.1).

Покажем, что из пуанкаре-инвариантности уравнения (3.1.1) с неизбежностью следует существование дополнительной (негеометрической) симметрии этого уравнения, сформулированной в следующей теореме [220].

Теорема 3.15. *Пуанкаре-инвариантные уравнения движения для частиц спина s и массы $m > 0$ обладают дополнительной симметрией относительно алгебры* AGL$(2s+1, C)$.

Доказательство. Пуанкаре-инвариантное уравнение, по определению, имеет десять операторов симметрии P_μ, $J_{\mu\nu}$, удовлетворяющих алгебре (2.1.1). Но тогда операторами симметрии этого уравнения будут также компоненты тензора $\Sigma_{\mu\nu}$, определяемые согласно формуле (3.2.25):

$$\Sigma^{\pm}_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2}\left[i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma \pm (P_\nu W_\mu - P_\mu W_\nu)\right]. \qquad (3.2.25)$$

Здесь W_μ — вектор Любанского — Паули (1.2.38), $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — абсолютно антисимметричный тензор четвертого ранга.

Используя соотношения (2.1.4), нетрудно убедиться, что операторы $\Sigma^{\pm}_{\mu\nu}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$[\Sigma^{\pm}_{\mu\nu}, \Sigma^{\pm}_{\lambda\sigma}] = -\left(g_{\mu\sigma}\Sigma^{\pm}_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma^{\pm}_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\Sigma^{\pm}_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\Sigma^{\pm}_{\mu\lambda}\right)\frac{1}{m^2}P_\rho P^\rho, \qquad (3.2.26)$$

$$C_6 = \frac{1}{2}\Sigma^{\pm}_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu\pm} = \frac{1}{m^4}W_\nu W^\nu P_\mu P^\mu,$$

$$C_7 = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Sigma^{\pm\mu\nu}\Sigma^{\pm\rho\sigma} = \mp\frac{2i}{m^4}W_\nu W^\nu P_\mu P^\mu.$$

Согласно (2.3.1), (2.3.26) операторы $\Sigma^{\pm}_{\mu\nu}$ удовлетворяют на множестве решений пуанкаре-инвариантного уравнения для частицы с массой $m > 0$ и спином s коммутационным соотношениям (3.1.12), характеризующим алгебру AO(1, 3), причем собственные значения операторов Казимира C_6 и C_7 (ср. (2.1.60)) равны

$$C_6\Psi = \pm\frac{i}{2}C_7\Psi = s(s+1)\Psi. \qquad (3.2.27)$$

Отсюда следует, что операторы $\Sigma^{+}_{\mu\nu}$ реализуют представление $D(s\ 0)$, а $\Sigma^{-}_{\mu\nu}$ — представление $D(0\ s)$ алгебры AO(1, 3).

Но всевозможные линейно независимые произведения операторов $\Sigma^{\pm}_{\mu\nu}$ определяют базис, вообще говоря, более широкой алгебры, чем AO(1, 3). Действительно, выбирая такой базис в виде (3.2.17), где $\Sigma_1 = \frac{C_7}{2s(s+1)}$, получаем $2(2s+1)^2$ операторов симметрии, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (3.2.19), т. е. реализующих представление алгебры AGL$(2s+1, C)$. Проверка справедливости соотношений (3.2.19) для операторов (3.2.25), (3.2.17) может быть осуществлена по аналогии с соответствующей проверкой в доказательстве теоремы 3.15, т. е. путем выбора специального матричного представления для операторов $\Sigma^{\pm}_{\mu\nu}$.

Итак, если уравнение пуанкаре-инвариантно и описывает частицу со спином s и массой m, то оно с необходимостью оказывается инвариантным также относительно алгебры AGL$(2s+1, C)$, базисные элементы которой принадлежат обвертывающей алгебре алгебры AP(1, 3) и задаются формулами (3.2.17), (3.2.25). ■

Операторы $\Sigma^{\pm}_{\mu\nu}$ (3.2.25) удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.24) совместно с генераторами группы Пуанкаре. Отсюда следует, что совокупность операторов симметрии $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, \lambda_{mn}, \tilde{\lambda}_{mn}\}$ образует замкнутую алгебру Ли, изоморфную $A[P(1,3)\otimes \otimes GL(2s+1, C)]$. В этом проще всего убедиться, переходя к новому базису (3.2.23), (3.2.24).

При доказательстве теоремы 3.15 мы не делаем никаких предположений относительно класса операторов, которому принадлежит а. и. уравнения для частицы произвольного спина. Если предположить, что генераторы группы $P(1, 3)$ на множестве решений этого уравнения имеют ковариантную форму (2.1.57) (с соответствующими матрицами $S_{\mu\nu}$), то операторы симметрии (3.2.25) принадлежат классу $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ и задаются формулами

$$-\Sigma^{\pm}_{ab} = iS_{ab} + \frac{1}{m^2}[\varepsilon_{abc}(p^2F_c - p_c\mathbf{p}\cdot\mathbf{F}) \pm ip_0(F_ap_b - F_bp_a)],$$

$$-\Sigma^{\pm}_{0a} = iS_{0a} + \frac{1}{m^2}[p_0\varepsilon_{abc}F_bp_c \pm i(p_a\mathbf{p}\cdot\mathbf{F} - p^2F_a)],$$

где $F_a = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc} \pm S_{0a}$, $S_{\mu\nu}$ — матрицы, входящие в генераторы (2.1.57). Как нетрудно убедиться, соответствующие операторы симметрии (3.2.17) в общем случае являются дифференциальными операторами порядка $4s$ с матричными коэффициентами.

Возникает естественный вопрос: в каком отношении находится дополнительная симметрия произвольного релятивистского уравнения движения, описываемая теоремой 3.15, и а. и. уравнений Дирака, КДП и уравнений для произвольного спина, описанные выше в пп. 3.2.1 и 3.2.2? Оказывается, операторы симметрии уравнения Дирака, задаваемые формулами (3.1.9), сводятся на решениях к форме (3.2.25), а операторы симметрии уравнения КДП и уравнений в форме Дирака для произвольного спина могут быть представлены в виде, задаваемом соотношениями (3.2.17), (3.2.25). В справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственной проверкой.

§ 3.3. Негеометрическая симметрия уравнений Максвелла

3.3.1. Инвариантность относительно алгебры AGL(2, C). Как отмечалось в гл. 1, максимальная симметрия уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_1$ определяется инвариантностью относительно алгебры Ли конформной группы. Представляет несомненный интерес исследовать также негеометрическую симметрию этих уравнений, поскольку описываемое ими электромагнитное поле — это вполне реальный и измеряемый физический объект, скрытая симметрия которого может иметь проверяемые следствия.

В этом пункте мы рассмотрим задачу описания а. и. уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_\infty$. Оказывается, уравнения Максвелла обладают в этом классе нетривиальной симметрией, которая, конечно, не могла быть обнаружена в классическом подходе Ли.

Будем исходить из формулировки уравнений Максвелла, задаваемой соотношениями (1.3.7), (1.3.8). Следуя алгоритму, кратко изложенному в п. 3.1.1, перейдем от (1.3.8) к уравнениям в импульсном представлении. Записывая $\mathbf{E}(x_0, \mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(x_0, \mathbf{x})$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_0, \mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\tilde{\mathbf{E}}(x_0, \mathbf{p})\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}),\\ \mathbf{H}(x_0, \mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\tilde{\mathbf{H}}(x_0, \mathbf{p})\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

получаем из (1.3.7), (1.3.8) следующую систему уравнений:

$$L_1\varphi(x_0, \mathbf{p}) = 0, \tag{3.3.2}$$

$$L_2^a\varphi(x_0, \mathbf{p}) = 0, \tag{3.3.3}$$

где

$$\varphi(x_0, \mathbf{p}) = \text{столбец}(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3), \tag{3.3.4}$$

а L_1 и L_2^a — символы операторов (1.3.8):

$$L_1 = i\frac{\partial}{\partial x_0} - \sigma_2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} \equiv i\frac{\partial}{\partial x_0} - \widehat{H}, \quad L_2^a = (\delta_{ab} - S_bS_a)\,p_b. \tag{3.3.5}$$

К уравнениям (3.3.2)—(3.3.5) следует добавить условие вещественности векторов (3.3.1), которое может быть записано в виде

$$\varphi^*(x_0, \mathbf{p}) = \varphi(x_0, -\mathbf{p}). \tag{3.3.6}$$

Уравнения (3.3.2)—(3.3.6) полностью эквивалентны исходной системе (1.3.7), (1.3.8) в x-представлении.

Операторы симметрии уравнений Максвелла, принадлежащие классу $\mathfrak{M}_\infty$ в представлении (3.3.2)—(3.3.6), являются матрицами размерности 6×6, матричные элементы которых зависят от $\mathbf{p}$. Условие инвариантности относительно преобразований, порождаемых такими матрицами, может быть записано в виде (ср. (1.3.22))

$$[L_1, Q_A] = f_1^A L_1 + g_1^A L_2, \qquad [L_2, Q_A] = f_2^A L_1 + g_2^A L_2, \tag{3.3.7}$$

где L_1, $L_2 = L_2^1$ — операторы (3.3.5) (мы для определенности выбрали в (3.3.5) $a=1$), Q_A — символы базисных элементов а. и. уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_\infty$, f_1^A, g_1^A, f_2^A, g_2^A — матрицы, зависящие от $\mathbf{p}$.

Наша задача состоит в описании всех неэквивалентных матриц $Q_A = Q_A(\mathbf{p})$, удовлетворяющих уравнениям (3.3.7). Потребуем дополнительно, чтобы преобразования $\varphi \to Q_A\varphi$ не выводили $\varphi(x_0, \mathbf{p})$ из класса функций, удовлетворяющих условию (3.3.6), откуда получаем

$$Q_A^*(\mathbf{p}) = Q_A(-\mathbf{p}). \tag{3.3.8}$$

Конструктивное описание операторов Q_A, удовлетворяющих условиям (3.3.7), (3.3.8), дается в следующей теореме.

Теорема 3.16. *Уравнения Максвелла инвариантны относительно восьмимерной алгебры Ли, изоморфной* AGL(2, C). *Базисные элементы этой алгебры в импульсном представлении могут быть выбраны в виде*

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \Sigma_{23} = \sigma_3 \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}} Q, && Q_2 = \Sigma_{31} = i\sigma_2,\\
&Q_3 = \Sigma_{12} = \sigma_1 \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}} Q, && Q_4 = \Sigma_{01} = -\sigma_1 Q,\\
&Q_5 = \Sigma_{02} = \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}, && Q_6 = \Sigma_{03} = -\sigma_3 Q,\\
&Q_7 = \Sigma_0 = \mathbf{I}, && Q_8 = \Sigma_1 = i\sigma_2 \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}},
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

где

$$Q = 1 + 2(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{p}}\times\mathbf{n})^2[1-(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{n})^2]^{-1}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p, \tag{3.3.10}$$

$\mathbf{n}$ — *произвольный постоянный единичный вектор*, σ_a *и* S_a — *матрицы размерности* 6×6, *задаваемые формулами* (2.2.29), (1.3.9).

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться непосредственной проверкой. Действительно, воспользовавшись тем фактом, что матрицы S_a удовлетворяют алгебре КДП (2.3.23) и коммутируют с σ_b, получаем следующие соотношения:

$$[Q, \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}]_+ = [Q, \sigma_a] = 0, \quad Q^2 = 1, \quad L_2 Q = -L_2, \tag{3.3.11}$$

откуда вытекает, что операторы (3.3.9) удовлетворяют условиям (3.3.7) и коммутационным соотношениям (3.1.12).

Таким образом, уравнения (3.3.2), (3.3.6) действительно инвариантны относительно восьмимерной алгебры Ли, базис которой образуют операторы (3.3.9). ■

Мы видим, что наряду с конформной инвариантностью уравнения Максвелла обладают скрытой симметрией, описываемой теоремой 3.1. Операторы (3.3.9), образующие базис а. и., определены на множестве вектор-функций $\varphi(x_0, \mathbf{p})$, которые представляют собой фурье-образы решений уравнений Максвелла в представлении (1.3.7), (1.3.8). Каждой матрице из (3.3.9) можно сопоставить интегральный оператор $\widehat{Q}$, заданный в пространстве функций $\varphi(x_0, \mathbf{x})$ (1.3.7):

$$\widehat{Q}_A\varphi(x_0, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3}\int d^3p\, d^3y Q_A\varphi(x_0, \mathbf{y}) \exp[ip(\mathbf{x}-\mathbf{y})]. \qquad (3.3.12)$$

Операторы (3.3.12), (3.3.9) образуют а. и. уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_\infty$. В отличие от базисных элементов конформной алгебры (см. § 1.3), эти операторы порождают нелокальные преобразования векторов $\mathbf{E}(x_0, \mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(x_0, \mathbf{x})$.

3.3.2. Другое доказательство теоремы 3.16. Приведем более конструктивное доказательство теоремы 3.16, позволяющее установить, что найденная выше а. и. уравнений Максвелла в некотором смысле является максимально широкой. Основная идея его состоит в том, чтобы преобразовать операторы (3.3.5) к такой эквивалентной форме, для которой утверждения теоремы очевидны.

Операторы L_1 и L_2 из (3.3.5) не коммутируют и поэтому не могут быть одновременно приведены к диагональной форме. Мы рассмотрим наряду с (3.3.3) более слабое уравнение (которое является следствием (3.3.3))

$$L_3\varphi \equiv p_a L_2^a \varphi = 0 \qquad (3.3.13)$$

и исследуем симметрию системы (3.3.2), (3.3.13).

Каждый оператор симметрии системы (3.3.2), (3.3.3) оставляет инвариантными уравнения (3.3.2), (3.3.13) (обратное, вообще говоря, неверно). Мы найдем полный набор операторов симметрии последних уравнений, а затем отберем те из них, которые допускаются исходной системой (3.3.2), (3.3.3).

Диагонализуем коммутирующие операторы L_1 и L_3, используя для этой цели оператор преобразования вида

$$W = U_3U_2U_1, \qquad (3.3.14)$$

где

$$U_1 = \exp\left(-P_+Q\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}}\,\frac{\pi}{2}\right) \equiv P_- + P_+Q\mathbf{S}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}, \quad P_\pm = \frac{1}{2}(1\mp\sigma_2),$$

$$U_2 = \exp\left[-i\,\frac{S_1p_2 - S_2p_1}{|p|}\operatorname{arctg}\frac{|p|}{p_3}\right], \qquad |p| = \left(p_1^2+p_2^2\right)^{1/2},$$

$$U_3 = 1 - S_3^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[S_3^2 - i(S_1S_2+S_2S_1)\right], \qquad (3.3.15)$$

Q — оператор (3.3.10).

Действительно, последовательным вычислением получаем

$$U_1L_1U_1^{\dagger}=L_1'=i\frac{\partial}{\partial x_0}-\mathbf{S}\cdot\mathbf{p},\qquad U_2L_1'U_2^{\dagger}=L_1''=i\frac{\partial}{\partial x_0}-S_3p,$$
$$U_3L_1''U_3^{\dagger}=L_1'''=i\frac{\partial}{\partial x_0}-\Gamma_0p,\quad WL_3W^{\dagger}=\left(1-\Gamma_0^2\right)p^2, \tag{3.3.16}$$

где Γ_0 — диагональная матрица,

$$\Gamma_0=-i(S_1S_2+S_2S_1)S_3=\operatorname{diag}(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0). \tag{3.3.17}$$

Из приведенного выше следует, что преобразованная функция $\varphi'=W\varphi$ удовлетворяет системе уравнений

$$L_1'''\varphi'\equiv\left(i\frac{\partial}{\partial x_0}-\Gamma_0p\right)\varphi'=0,\qquad L_3'''\varphi'\equiv\left(1-\Gamma_0^2\right)p^2\varphi'=0. \tag{3.3.18}$$

Операторы симметрии $Q_A'\in\mathfrak{M}_\infty$ в представлении (3.3.18) сводятся к зависящим от $\mathbf{p}$ матрицам, удовлетворяющим условиям

$$\left[Q_A',\Gamma_0\right]p=\alpha_AL_3''',\qquad\left[Q_A',1-\Gamma_0^2\right]p^2=\beta_AL_3''', \tag{3.3.19}$$

где α_A и β_A — матрицы, также зависящие от $\mathbf{p}$. Общее выражение для Q_A', очевидно, можно записать следующим образом:

$$Q_A'=\begin{pmatrix}a&0&0&b&0&0\\0&c&0&0&d&0\\0&0&0&0&0&0\\e&0&0&f&0&0\\0&g&0&0&h&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}+\widehat{F}L_3''', \tag{3.3.20}$$

где $\widehat{F}=\widehat{F}(\mathbf{p})$ — произвольная матрица размерности 6×6, которую, не умаляя общности, можно считать нулевой ввиду уравнения (3.3.13), $a,\ b,\ \ldots,\ h$ — произвольные функции от $\mathbf{p}$.

Мы видим, что существуют всего восемь линейно независимых матриц, удовлетворяющих уравнениям (3.3.19). Выберем эти матрицы в форме

$$Q_a'=\frac{i}{2}\sigma_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\Sigma_{bc}',\qquad Q_{3+a}'=-i\Gamma_0Q_a'=\Sigma_{0a}',$$
$$Q_7'=\mathrm{I}=\Sigma_0',\qquad\qquad Q_8'=i\Gamma_0=\Sigma_1'. \tag{3.3.21}$$

Нетрудно убедиться, что произвольный оператор $Q_A'(\mathbf{p})$ (3.3.20) может быть представлен как линейная комбинация базисных элементов (3.3.21). Матрицы $\Sigma_{\mu\nu}',\Sigma_\alpha'$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.12) и с помощью преобразования $Q_A'\to Q_A=W^{\dagger}Q_A'W$ (W — оператор (3.3.14)) сводятся к форме (3.3.9). Последним утверждением мы завершаем доказательство теоремы 3.16. ■

3.3.3. Группа негеометрической симметрии уравнений Максвелла. Операторы симметрии уравнений Максвелла, описанные в п. 3.3.2, образуют алгебру Ли и удовлетворяют условиям

$$
\begin{aligned}
&Q_A^2\varphi(x_0, \mathbf{p}) = -\varphi(x_0, \mathbf{p}), \qquad A \leqslant 3,\ A = 8,\\
&Q_A^2\varphi(x_0, \mathbf{p}) = \varphi(x_0, \mathbf{p}), \qquad 4 \leqslant A \leqslant 7,
\end{aligned} \tag{3.3.22}
$$

где $\varphi(x_0, \mathbf{p})$ — произвольное решение системы (3.3.2), (3.3.3). Отсюда следует, что уравнения Максвелла инвариантны относительно восьмипараметрической группы преобразований, задаваемых приведенными ниже соотношениями

$$
\varphi(x_0, \mathbf{p}) \to \varphi'(x_0, \mathbf{p}) = \exp\{Q_A\theta_A\}\,\varphi(x_0, \mathbf{p}) =
$$

$$
= \begin{cases}(\cos\theta_A + Q_A\sin\theta_A)\,\varphi(x_0, \mathbf{p}), & A \leqslant 3,\ A = 8,\\ (\operatorname{ch}\theta_A + Q_A\operatorname{sh}\theta_A)\,\varphi(x_0, \mathbf{p}), & 3 < A < 8,\end{cases} \tag{3.3.23}
$$

где θ_A — вещественные параметры. Действительно, в силу теоремы 3.14 преобразования (3.3.23) переводят решения системы (3.3.2), (3.3.3) в решения и образуют группу, поскольку Q_A — базисные элементы алгебры Ли.

Подставляя в (3.3.23) явные выражения операторов Q_A из (3.3.9) и функции $\varphi(x_0, \mathbf{p})$ из (3.3.4), получаем преобразования для фурье-компонент векторов напряженности магнитного и электрического полей в виде

$$
\begin{cases}\widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}' = \widetilde{\mathbf{E}}\cos\theta_1 + i\,[\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{E}} - 2\widehat{\mathbf{p}}\times\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{E}})\,\lambda]\sin\theta_1,\\ \widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}' = \widetilde{\mathbf{H}}\cos\theta_1 - i\,[\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{H}} - 2\widehat{\mathbf{p}}\times\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{H}})\,\lambda]\sin\theta_1;\end{cases} \tag{3.3.24}
$$

$$
\begin{cases}\widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}' = \widetilde{\mathbf{E}}\cos\theta_2 + \widetilde{\mathbf{H}}\sin\theta_2,\\ \widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}' = \widetilde{\mathbf{H}}\cos\theta_2 - \widetilde{\mathbf{E}}_2\sin\theta_2;\end{cases} \tag{3.3.25}
$$

$$
\begin{cases}\widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}\cos\theta_3 - i\,[\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{H}} - 2\widehat{\mathbf{p}}\times\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{H}})\,\lambda]\sin\theta_3,\\ \widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}\cos\theta_3 - i\,[\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{E}} - 2\widehat{\mathbf{p}}\times\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{E}})\,\lambda]\sin\theta_3;\end{cases} \tag{3.3.26}
$$

$$
\begin{cases}\widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}\operatorname{ch}\theta_4 + \{\widetilde{\mathbf{H}} + 2\,[\widehat{\mathbf{p}}\,(\widehat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{n}]\,(\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{H}})\,\lambda\}\operatorname{sh}\theta_4,\\ \widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}\operatorname{ch}\theta_4 + \{\widetilde{\mathbf{E}} + 2\,[\widehat{\mathbf{p}}\,(\widehat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{n}]\,(\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{E}})\,\lambda\}\operatorname{sh}\theta_4;\end{cases} \tag{3.3.27}
$$

$$
\begin{cases}\widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}\operatorname{ch}\theta_5 + i\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{E}}\operatorname{sh}\theta_5,\\ \widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}\operatorname{ch}\theta_5 + i\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{H}}\operatorname{sh}\theta_5;\end{cases} \tag{3.3.28}
$$

$$
\begin{cases}\widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}\operatorname{ch}\theta_6 + \{\widetilde{\mathbf{E}} - 2\,[\widehat{\mathbf{p}}\,(\mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{p}}) - \mathbf{n}]\,\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{E}}\lambda\}\operatorname{sh}\theta_6,\\ \widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}\operatorname{ch}\theta_6 - \{\widetilde{\mathbf{E}} - 2\,[\widehat{\mathbf{p}}\,(\mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{p}}) - \mathbf{n}]\,\mathbf{n}\cdot\widetilde{\mathbf{H}}\lambda\}\operatorname{sh}\theta_6;\end{cases} \tag{3.3.29}
$$

$$
\widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}\exp\theta_0, \qquad \widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}\exp\theta_0, \tag{3.3.30}
$$

$$
\begin{cases}\widetilde{\mathbf{H}} \to \widetilde{\mathbf{H}}\cos\theta_1 - i\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{E}}\sin\theta_1,\\ \widetilde{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathbf{E}}\cos\theta_1 + i\widehat{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{H}}\sin\theta_1,\end{cases} \tag{3.3.31}
$$

где $\lambda = [1 - (\widehat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{n})^2]^{-1}$, $\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор, $\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$.

Формулы (3.3.25) задают преобразования Хевисайда — Лармора — Райнича (1.3.2). Остальные соотношения (3.3.24), (3.3.26) — (3.3.31) определяют совокупность однопараметрических преобразований, которым можно поставить в соответствие интегральные преобразования векторов $\mathbf{E}(x_0, \mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(x_0, \mathbf{x})$ (3.3.1). Таким образом, преобразования Хевисайда — Лармора — Райнича являются подгруппой восьмипараметрической группы дополнительной симметрии уравнений Максвелла.

Итак, помимо хорошо известной инвариантности относительно конформной группы $C(1, 3)$, уравнения Максвелла обладают скрытой негеометрической симметрией относительно восьмипараметрической группы Ли, локально изоморфной группе $GL(2, C)$. Эта группа включает преобразования Хевисайда — Лармора — Райнича и нелокальные (интегральные) преобразования, изменяющие фурье-компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей согласно (3.3.24) — (3.3.31). Отметим, что инвариантность уравнений Максвелла в импульсном представлении относительно указанных преобразований может быть легко проверена непосредственно.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что операторы Q_A, которые задают базис дополнительной а. и. уравнений Максвелла, не образуют алгебры Ли совместно с генераторами конформной группы (1.2.22), (1.4.24). Как и в случае безмассового уравнения Дирака, объединить конформную алгебру и а. и. (3.3.9) удается только в том случае, если базисные элементы конформной алгебры определить в классе интегральных операторов. Явный вид соответствующих базисных элементов алгебры AC(1, 3) (который мы не воспроизводим для экономии места) указан в [210, 126].

3.3.4. Симметрия уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов второго порядка. Мы убедились, что симметрия уравнений Максвелла гораздо шире хорошо известной конформной инвариантности. Действительно, если искать операторы симметрии в классе интегральных операторов $\mathfrak{M}_\infty$, то удается обнаружить скрытую инвариантность этих уравнений относительно алгебры $A_8 \infty \mathrm{AGL}(2, C)$, причем эта симметрия является максимальной в рассматриваемом классе.

Возникает естественный вопрос: обладают ли уравнения Максвелла нетривиальными локальными (дифференциальными) операторами симметрии, которые невозможно найти в классическом подходе Ли? Для безмассового уравнения Дирака такие операторы имеются уже в классе дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами; см. п. 3.1.8. Как будет показано ниже, для уравнений Максвелла все операторы симметрии этого класса принадлежат обертывающей алгебре алгебры $\mathrm{AC}(1, 3) \oplus H$, т. е. в определенном смысле являются тривиальными.

Нетривиальные операторы симметрии уравнений Максвелла имеются в классе дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами (классе $\tilde{\mathfrak{M}}_2$), как это устанавливается в следующем утверждении.

Теорема 3.17. *Уравнения Максвелла* (1.3.7), (1.3.8) *имеют 70 линейно независимых операторов симметрии в классе* $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$, *не принадлежащих обвертывающей алгебре алгебры* $A[C(1,\ 3)\otimes H]$. *Эти операторы (обозначаемые ниже символами* $Q^{ab}_{(\lambda)}$, $\widetilde{Q}^{ab}_{(\lambda)}$, $Q^{\mu}_{(\nu)}$, $\widetilde{Q}^{\mu}_{(\nu)}$, $(\nu,\ a,\ b)=1,\ 2,\ 3$, $\lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3$) *имеют вид*

$$Q^{ab}_{(0)}=\sigma_1\left\{\left[(\mathbf{S}\times\mathbf{p})^a,(\mathbf{S}\times\mathbf{p})^b\right]_+ + p_ap_b+\delta_{ab}\left[p^2-2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2\right]\right\},$$

$$Q^{a}_{(1)}=\left[Q^{ab}_{(0)},\ x_b\right]_+,\qquad Q_{(2)}=\frac{1}{2}\left[Q^{a}_{(1)},\ x_a\right]_+,$$

$$Q^{ab}_{(1)}=\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{anc}Q^{bc}_{(0)}+\varepsilon_{bnc}Q^{ac}_{(0)},\ x_n\right]_+-2x_0\widetilde{Q}^{ab}_{(0)}+$$
$$+\frac{i}{2}\left(\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{S})^a,\ S^b\right]_++\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{S})^b,\ S^a\right]_+\right)\sigma_1,\qquad(3.3.32)$$

$$Q^{a}_{(2)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left[Q^{b}_{(1)},\ \mathbf{x}_c\right]_++x_0\widetilde{Q}^{a}_{(1)}+\frac{1}{2}\sigma_1\left\{\frac{1}{2}S^a\left[p_b,\ x_b\right]_+-\right.$$
$$\left.-\left[p_a,\ S^bx_b\right]_++i\left(\left[(\mathbf{S}\times\mathbf{p})^a,\ S^bx_b\right]_++\left[S^a,\ S^bJ_b-1\right]_+\right)\right\},$$

$$Q^{ab}_{(2)}=-\left[x_\mu x^\mu,\ Q^{ab}_{(0)}\right]_++\frac{1}{2}\left(\left[x^a,\ Q^{b}_{(1)}\right]_++\left[x^b,\ Q^{a}_{(1)}\right]_+\right)-2x_0\widetilde{Q}^{ab}_{(1)}-$$
$$-\left\{\frac{7}{2}\left[\delta_{ab}x_\mu x^\mu+x^ax^b,\ p^2-(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2\right]_++\frac{1}{4}\left[S^a,\ S^b\right]_+-\right.$$
$$\left.-i\left[S^ap^b+S^bp^a,\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{x}\right]_+-\frac{i}{2}\left[S^ax^b+S^bx^a,\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\right]_+\right\}\sigma_1,$$

$$Q^{a}_{(3)}=i\left[Q^{ad}_{(2)},\ K_d\right],\qquad Q^{ab}_{(j)}=\left[Q^{a}_{(j-1)},\ K^b\right]+\left[Q^{b}_{(j-1)},\ K^a\right],\qquad j=3,\ 4,$$

где K_0, K_a, $J_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J^{bc}$ — *генераторы* (1.2.22), (1.2.45) (*с матрицами* $S_{0a}=i\sigma_2S_a$, $S_{ab}=\varepsilon_{abc}S_c$, S_a *определены в* (1.3.9)),

$$\widetilde{Q}^{\mu}_{(\nu)}=i\sigma_2Q^{\mu}_{(\nu)},\qquad \widetilde{Q}^{ab}_{(\lambda)}=i\sigma_2Q^{ab}_{(\lambda)},$$

σ_μ и S_a — *матрицы Паули и спиновые матрицы размерности* 6×6, *задаваемые соотношениями* (2.2.29), (1.3.9).

Доказательство требует очень громоздких выкладок, поэтому приведем только его схему.

Оператор симметрии уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов произвольного конечного порядка N представим в виде разложения по матрицам Паули (2.2.29):

$$Q=Q_1+Q_2,\quad Q_1=\sigma_1A+\sigma_3B,\quad Q_2=\sigma_0C+i\sigma_2D,\qquad(3.3.33)$$

где A, B, C и D — дифференциальные операторы порядка N с вещественными матричными коэффициентами, коммутирующие с σ_μ.

Мы разбили оператор Q на «нечетную» (Q_1) и «четную» (Q_2) части, которые, как будет показано ниже, являются независимыми операторами симметрии. Названия «четная» («нечетная») обусловлены тем, что произведения Q_1Q_1 и Q_2Q_2 являются величинами типа Q_2, а Q_1Q_2 — величиной типа Q_1.

Не умаляя общности, можно считать, что Q включает операторы дифференцирования только по пространственным переменным x_a, поскольку дифференцирование по x_0 в силу уравнения (1.3.8) сводится к взятию производных по x_a.

Оператор Q является оператором симметрии уравнений Максвелла (1.3.7), (1.3.8), если выполняются следующие условия:

$$[Q, \widehat{L}_1] = \alpha_Q^a \widehat{L}_2^a, \quad [Q, \widehat{L}_2^a] = \beta_Q^{ab} \widehat{L}_2^b, \tag{3.3.34}$$

где α_Q^a и β_Q^{ab} — также дифференциальные операторы порядка N, которые, не умаляя общности, можно выбрать коммутирующими с матрицами S_a (1.3.9):

$$\begin{aligned} &\alpha_Q^a = \alpha_{Q_1}^a + \alpha_{Q_2}^a, && \beta_Q^{ab} = \beta_{Q_1}^{ab} + \beta_{Q_2}^{ab}, \\ &\alpha_{Q_1}^a = \sigma_1 \alpha_{(1)}^a + \sigma_3 \alpha_{(3)}^a, && \beta_{Q_1}^{ab} = \sigma_1 \beta_{(1)}^{ab} + \sigma_3 \beta_{(3)}^{ab}, \\ &\alpha_{Q_2}^a = \sigma_0 \alpha_{(0)}^a + i\sigma_2 \alpha_{(2)}^a, && \beta_{Q_2}^{ab} = \sigma_0 \beta_{(0)}^{ab} + i\sigma_2 \beta_{(2)}^{ab}, \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

где $\alpha_{(k)}^a$, $\beta_{(\mu)}^{ab}$ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ a, b = 1,\ 2,\ 3)$ — дифференциальные операторы порядка N с вещественными матричными коэффициентами, коммутирующие с σ_μ и S_a.

Подставив (3.3.35) в (3.3.34) и принимая во внимание линейную независимость матриц Паули, получаем две незацепляющиеся системы уравнений:

$$[Q_1, \widehat{L}_1] = \alpha_{Q_1}^a \widehat{L}_2^a, \quad [Q_1, \widehat{L}_2^a] = \beta_{Q_1}^{ab} \widehat{L}_2^b \tag{3.3.36}$$

и

$$[Q_2, \widehat{L}_1] = \alpha_{Q_2}^a \widehat{L}_2^a, \quad [Q_2, \widehat{L}_2^a] = \beta_{Q_2}^{ab} \widehat{L}_2^b. \tag{3.3.37}$$

Мы видим, что описание нечетных операторов симметрии Q_1 уравнений Максвелла сводится к решению системы операторных уравнений (3.3.36), в то время как четные операторы Q_2 описываются системой (3.3.37), не зависимой от (3.3.36). Это означает, что нахождение каждого из классов операторов симметрии Q_1 или Q_2 представляет собой отдельную задачу.

Рассмотрим сначала нечетные операторы. Обозначим

$$Q_1 = Q_1^H + Q_1^A,\ \alpha_{Q_1}^a = \left(\alpha_{Q_1}^a\right)^H + \left(\alpha_{Q_1}^a\right)^A, \tag{3.3.38}$$

где индексы H и A обозначают эрмитову и антиэрмитову части соответствующих операторов. Приравнивая в первом из уравнений (3.3.36) эрмитовы и антиэрмитовы слагаемые, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} 2\left[Q_1^H, \widehat{L}_1\right] &= \left[\left(\alpha_{Q_1}^a\right)^H, L_2^a\right] + \left[\left(\alpha_{Q_1}^a\right)^A, \widehat{L}_2^a\right]_+, \\ 2\left[Q_1^A, \widehat{L}_1\right] &= \left[\left(\alpha_{Q_1}^a\right)^H, L_2^a\right]_+ + \left[\left(\alpha_{Q_1}^a\right)^A, \widehat{L}_2^a\right]. \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Далее ограничимся операторами симметрии из класса $\mathfrak{M}_2$, включающими операторы дифференцирования не выше второго порядка.

Операторы $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2^a$ (1.3.8) и искомые операторы Q_1^H, Q_1^A, $\left(\alpha_{Q_1}^a\right)^H, \left(\alpha_{Q_1}^a\right)^A$ удобно разложить по полной системе матриц S^a (1.3.9) и Z^{ab} (3.3.41):

$$\widehat{L}_1 = i\frac{\partial}{\partial x_0} + S^a p_a, \qquad \widehat{L}_2^a = \varepsilon_{abc} p^b S^c - iZ^{ab} p_b,$$

$$\begin{aligned}
&Q_1^H = \sigma_\alpha \{Z^{ab}([[D_\alpha^{ab,cd}, p_c]_+, p_d]_+ + D^{ab}) + S^a [B_\alpha^{ac}, p_c]_+\},\\
&Q_1^A = i\sigma_\alpha \{S^a([[B_\alpha^{a,cd}, p_c]_+, p_d]_+ + K_\alpha^a) + Z^{ab} [F_\alpha^{ab,c}, p_c]_+\},\\
&\qquad\left(\alpha_{Q_1}^a\right)^H = \sigma_\alpha ([[G_\alpha^{a,bc}, p_b]_+, p_c]_+ + H_\alpha^a),\\
&\qquad\left(\alpha_{Q_1}^a\right)^A = i\sigma_\alpha [N_\alpha^{ab}, p_b]_+,
\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

где $D_\alpha^{ab,cd}, B_\alpha^{ca}, D_\alpha^{ab}, B_\alpha^{a,cd}, F_\alpha^{ab,c}, K_\alpha^c, G_\alpha^{a,bc}, H_\alpha^a$ — неизвестные вещественные функции от x, по повторяющемуся индексу α подразумевается суммирование по значениям $\alpha = 1, 3$,

$$Z^{ab} = 2\delta^{ab} - S^a S^b - S^b S^a. \tag{3.3.41}$$

Подставив разложения (3.3.40) в уравнения (3.3.39), используя коммутационные и антикоммутационные соотношения

$$\begin{aligned}
&[S^a, S^b] = i\varepsilon^{abc} S_c,\\
&[Z^{ab}, S^c] = -i(\varepsilon_{cak} Z^{bk} + \varepsilon_{cbk} Z^{ak}),\\
&[S^a, S^b]_+ = 2\delta^{ab} - Z^{ab},\\
&[Z^{ab}, S^c]_+ = 2\delta^{ab} S^c - \delta^{ac} S^b - \delta^{bc} S^a
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

и приравнивая коэффициенты при линейно независимых матрицах и операторах дифференцирования, приходим после несложных, но несколько громоздких преобразований к следующей системе определяющих уравнений для коэффициентов оператора симметрии Q_1 и оператора α_{Q_1}:

$$\begin{aligned}
&D_\alpha^{ab,cd} = (\varepsilon_{ack}\varepsilon_{bdn} + \varepsilon_{bck}\varepsilon_{adn}) U_{(\alpha)}^{kn} + \delta_{ab} U_{(\alpha)}^{cd},\\
&B_\alpha^{a,cd} = G_\alpha^{a,cd} = 0, \qquad F_\alpha^{ab,c} = \varepsilon_{bcf}\dot{U}_{(\alpha')}^{af} + \varepsilon_{acf}\dot{U}_{(\alpha')}^{bf},\\
&B_\alpha^{ab} = \frac{7}{5} i^{\alpha+1} \varepsilon_{abc} U_{(\alpha)n}^{cn}, \qquad K_\alpha^a = -\frac{6}{5}\dot{U}_{(\alpha')n}^{an},\\
&D_\alpha^{ab} = \frac{1}{5}\left(U_{(\alpha)nb}^{an} + U_{(\alpha)na}^{bn} - 3\delta_{ab} U_{(\alpha)nm}^{nm}\right),
\end{aligned} \tag{3.3.43}$$

$$N_\alpha^a = \frac{1}{10} i^{\alpha-1} \dot{U}_{(\alpha)b}^{ab}, \qquad H_\alpha^{ab} = \frac{1}{2} i^{\alpha+1} \dot{U}_{(\alpha)}^{ab}, \tag{3.3.44}$$

$$\begin{aligned}
&U_{(\alpha)c}^{ab} + U_{(\alpha)a}^{bc} + U_{(\alpha)b}^{ac} = \frac{2}{5}\left(\delta_{ab} U_{(\alpha)k}^{ck} + \delta_{ac} U_{(\alpha)k}^{ak} + \delta_{bc} U_{(\alpha)k}^{ak}\right),\\
&3\dot{U}_{(\alpha)}^{ac} = i^{\alpha-1}\left(\varepsilon_{kcf} U_{(\alpha')k}^{fa} + \varepsilon_{kaf} U_{(\alpha')k}^{fc}\right),
\end{aligned} \tag{3.3.45}$$

где

$$U^{ab}_{(\alpha)c} = \frac{\partial}{\partial x_c} U^{ab}_{(\alpha)}, \qquad \dot{U}^{ab}_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_0} U^{ab}_{(\alpha)}, \qquad \alpha' = \begin{cases} 1, & \alpha = 3, \\ 3, & \alpha = 1, \end{cases}$$

по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование.

Согласно (3.3.43) все коэффициенты оператора симметрии выражаются через бесследовый симметричный тензор второго ранга $U^{ab}_{(\alpha)}$, который должен удовлетворять уравнениям (3.3.44), (3.3.45).

Общее решение переопределенной системы (3.3.44) получено в [71]. Поскольку эта система часто встречается при исследовании симметрии уравнений в классе дифференциальных операторов второго порядка, приведем соответствующее решение в явном виде

$$U^{ab}_{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{4} \left(U^{ab}_{(\alpha k)} + U^{ba}_{(\alpha k)} \right), \tag{3.3.46}$$

где

$$U^{ab}_{(\alpha 0)} = \frac{1}{2} \rho^{ab}_{(\alpha)}, \qquad U^{ab}_{(\alpha 1)} = \varepsilon_{nbc}\mu^{an}_{(\alpha)} + \nu^{a}_{(\alpha)} x_b - \frac{1}{3}\delta_{ab}\nu^{c}_{(\alpha)} x_c,$$

$$U^{ab}_{(\alpha 2)} = \frac{1}{2}\omega^{ab}_{(\alpha)} x^2 - x_a \omega^{bc}_{(\alpha)} x_c + x_a \varepsilon_{bck} x_c \theta^{k}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\lambda_{(\alpha)} x_a x_b + \frac{1}{3}\delta_{ab}\omega^{kl} x_k x_l, \tag{3.3.47}$$

$$U^{ab}_{(\alpha 3)} = x_a \lambda^{b}_{(\alpha)} - 2 x_a x_b \lambda^{c}_{(\alpha)} x_c + 2\xi^{cn}_{(\alpha)} \varepsilon_{ndb} x_a + \xi^{an} \varepsilon_{nbc} x_c x^2 + \frac{1}{3}\delta_{ab}\lambda^{c}_{(\alpha)} x_c x^2,$$

$$U^{ab}_{(\alpha 4)} = x_a x_b \sigma^{cd} x_c x_d - x_a \sigma^{bc} x_c x^2 + \frac{1}{4}\sigma^{ab} x^4,$$

где греческие буквы обозначают произвольные параметры (в нашем случае зависящие от x_0), все величины с двумя верхними индексами симметричны относительно их перестановки и имеют нулевой шпур.

Из уравнения (3.3.45) получаем в явном виде зависимость коэффициентов от x_0:

$$\begin{gathered} \rho^{ab}_{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{4} \eta^{ab}_{\alpha\nu} x_0^{\nu}, \qquad \mu^{ab}_{(\alpha)} = i^{\alpha+1} \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\nu}{2} \eta^{ab}_{\alpha'\nu} x_0^{\nu-1}, \\ \omega^{ab}_{(\alpha)} = -\sum_{\mu=2}^{4} \frac{\mu(\mu-1)}{2} \eta^{ab}_{\alpha\mu} x_0^{\mu-2}, \quad \lambda_{(\alpha)} = \eta_{\alpha}, \\ \xi^{ab}_{(\alpha)} = \frac{1}{2} i^{\alpha-1} \left(\eta^{ab}_{\alpha' 3} + \eta^{ab}_{\alpha' 4} x_0 \right), \quad \sigma^{ab}_{(\alpha)} = -\frac{1}{2}\eta^{ab}_{\alpha 4}, \\ \nu^{a}_{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{2} \eta^{a}_{\alpha\nu} x_0^{\nu}, \qquad \lambda^{a}_{(\alpha)} = 3\eta^{a}_{\alpha 2}, \\ \theta^{a}_{(\alpha)} = i^{\alpha+1} \left(\eta^{a}_{\alpha' 1} + 2\eta^{a}_{\alpha' 2} x_0 \right), \end{gathered} \tag{3.3.48}$$

греческими буквами в правых частях обозначены произвольные числовые параметры, $\alpha' \neq \alpha$.

Подставляя полученные результаты в (3.3.40), (3.3.43), приходим к линейной комбинации операторов симметрии уравнений Максвелла, задаваемых формулами (3.3.32). При этом следует иметь в виду, что все тензорные величины (т. е. нумеруемые парой индексов a, b) *имеют нулевой след на множестве решений* уравнения (1.3.8).

Все операторы (3.3.32) удовлетворяют также второму из условий (3.3.36) и являются нечетными. Последнее означает, что они не принадлежат обвертывающей алгебре алгебры $A[C(1, 3) \otimes H]$, все элементы которой четные. Можно показать, что все четные операторы симметрии уравнений Максвелла $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_2$ принадлежат этой обвертывающей алгебре.

Таким образом, мы нашли полный набор нечетных операторов симметрии уравнений Максвелла в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$. Операторы (3.3.32), в отличие от операторов симметрии из класса $\mathfrak{M}_1$, не образуют алгебры Ли. Однако существуют такие подмножества операторов (3.3.32), которые можно расширить до суперанлгебры Ли*). Например, можно положить

$$B_1 = Q_A, \qquad B_2 = \widetilde{Q}_A,$$
$$B_3 = \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}, \qquad B_{3+a} = B_a^2, \tag{3.3.49}$$

где Q_A — любой из операторов $Q^{ab}_{(0)}, Q^a_{(1)} Q_{(2)}$ из (3.3.32),

$$\widetilde{Q}_A = i\sigma_2 Q_A \qquad (A = 0, 1, \ldots, 12, 13, \ldots; a = 1, 2, 3).$$

Операторы (3.3.49) образуют базис супералгебры Ли, удовлетворяя следующим коммутационным и антикоммутационным соотношениям:

$$[B_a, B_b]_+ = 2\delta_{ab} B_{3+b},$$
$$[B_a, B_{3+b}] = [B_{3+a}, B_{3+b}] = 0. \tag{3.3.50}$$

Эта супералгебра включает пять линейно независимых элементов, поскольку $B_4 = B_5 \neq B_6$, и может быть расширена до 15-мерной супералгебры добавлением новых базисных элементов дифференциальных операторов шестого порядка

$$B_{6+k} = i\sigma_2 \mathbf{S}\cdot\mathbf{p} B_k, \qquad B_{12+a} = B_3^2 B_{3+a}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 6,$$

---

*) Супералгеброй Ли называется конечномерное векторное пространство над полем комплексных чисел, которое градуировано и замкнуто относительно бинарной операции $(x_\sigma, y_{\sigma'}) \to [x_\sigma, y_{\sigma'}]_{f_{\sigma\sigma'}}$. В простейшем варианте градуировка пространства заключается в присвоении каждому элементу одного из двух значений индекса $\sigma(\sigma')$ — 0 или 1. Тогда $f_{\sigma\sigma'} = (-1)^{\sigma+\sigma'}$, положительным $f^{\sigma\sigma'}$ соответствует антикоммутатор, а отрицательным — коммутатор элементов супералгебры. Более подробно о супералгебрах см., например, [49].

которые удовлетворяют соотношениям

$$[B_{6+a},\ B_{6+b}]_+ = 2\delta_{ab}B_{12+b},\ [B_{6+a},\ B_b] = 2\delta_{ab}B_{6+b},$$
$$[B_{9+a},\ B_b] = [B_{12+a},\ B_B] = 0,\quad B = 1,\ 2,\ \ldots,\ 15.$$

Мы видим, что операторы симметрии уравнений Максвелла в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ обладают нетривиальной алгебраической структурой, хотя не образуют алгебры Ли.

В заключение отметим, что множество операторов, задаваемое формулой (3.3.32), является замкнутым относительно операции коммутирования с генераторами конформной группы и матрицей $i\sigma_2$. Более того, можно показать, что все эти операторы можно представить как результат коммутирования оператора Q_0 (или $\tilde{Q}_0$) с генераторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, D и K_μ (1.2.42), (1.2.45), (1.3.23).

Найденные выше операторы симметрии уравнений Максвелла могут быть получены также с использованием подхода, предложенного в [33]. Однако при этом необходимо делать априори предположение о том, что эти операторы являются полиномами от x (мы это доказали).

§ 3.4. Негеометрическая симметрия релятивистских уравнений для частиц, взаимодействующих с внешним полем

3.4.1. Введение. До сих пор нами рассматривались симметрийные свойства только таких уравнений, которые описывают свободные (невзаимодействующие) частицы. Вопросам, связанным с обобщением таких уравнений на случай заряженных частиц во внешнем поле, посвящена следующая глава. А в этом параграфе мы исследуем негеометрическую симметрию некоторых конкретных задач о взаимодействии релятивистских частиц с внешним электромагнитным полем.

Пусть

$$L(p_0,\ \mathbf{p})\Psi = 0 \tag{3.4.1}$$

— релятивистское уравнение движения свободной частицы. Здесь $L(p_0,\ \mathbf{p})$ — линейный дифференциальный оператор, коммутирующий на множестве решений уравнения (3.4.1) с генераторами группы Пуанкаре. Тогда в силу теоремы 3.13 уравнение (3.4.1) обладает дополнительной симметрией относительно алгебры $\mathrm{AGL}(2s+1,\ C)$, где s — спин описываемой частицы.

Учет взаимодействия с внешним полем приводит к следующей модификации уравнения (3.4.1) (см. гл. 4):

$$[L(\pi_0,\ \boldsymbol{\pi}) + L'(\mathbf{E},\ \mathbf{H})]\Psi = 0, \tag{3.4.2}$$

где $L(\pi_0,\ \boldsymbol{\pi})$ — оператор, получаемый из $L(p_0,\ \mathbf{p})$ заменой $p_\mu \to \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, e — заряд частицы, A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, $L'(\mathbf{E},\ \mathbf{H})$ — дополнительный оператор взаимодействия, зависящий от напряженности электромагнитного поля. При заданном вектор-потенциале A_μ симметрия уравнения (3.4.2), как правило, оказывается уже, чем уравнения (3.4.1), описывающего свободное движение. Например, если внешнее поле сводится к электрическому, направленному по фиксированной оси, то задача будет обладать только цилиндрической симметрией и т. д. Однако для некоторых классов потенциалов негеометрическая симметрия уравнений движения сохраняется. Именно такие потенциалы в основном рассматриваются в настоящем параграфе.

3.4.2. Уравнение Дирака для частицы во внешнем поле. Уравнение Дирака для частицы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем, может быть получено из (3.1.6) с помощью «минимальной» замены $p_\mu \to \pi_\mu$. В результате получаем

$$(\gamma_\mu \pi^\mu - m)\Psi = 0, \quad \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu. \tag{3.4.3}$$

Другой способ введения взаимодействия, позволяющий учесть мультипольную структуру частицы, состоит в добавлении к (3.4.3) дополнительных членов, зависящих от напряженности электромагнитного поля (что соответствует так называемому аномальному взаимодействию Паули).

Здесь мы рассмотрим некоторые примеры потенциалов A_μ, представляющих интерес с точки зрения негеометрической симметрии уравнения Дирака. Утверждения, сформулированные ниже, могут быть доказаны в рамках алгоритма, сформулированного в п. 3.1.1, или проверены непосредственно.

а) Постоянное и однородное электромагнитное поле. Соответствующий вектор-потенциал с точностью до калибровочной эквивалентности имеет вид

$$A_\mu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu, \tag{3.4.4}$$

где $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ — постоянные величины, задающие напряженность поля: $F_{ab} = \varepsilon_{abc} H_c$, $F_{0a} = E_a$.

Уравнение Дирака с потенциалом (3.4.4) уже не обладает симметрией относительно алгебры $AGL(2, C) \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Однако можно указать два интеграла движения, тесно связанные с такой симметрией. Эти операторы имеют вид

$$F_1 = \Sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_2 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Sigma^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}, \tag{3.4.5}$$

где

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] - \frac{i}{2m} (1 - i\gamma_4)(\gamma_\mu \pi_\nu - \gamma_\nu \pi_\mu). \tag{3.4.6}$$

Нетрудно убедиться, что операторы (3.4.5) коммутируют друг с другом и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} [F_1, L] = \frac{1}{2m} (\gamma_\mu \pi_\nu - \gamma_\nu \pi_\mu) F^{\mu\nu} L, \\ [F_2, L] = \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(\gamma^\mu \pi^\nu - \gamma^\nu \pi^\mu\right) F^{\rho\sigma} L, \end{gathered} \tag{3.4.7}$$

где L — оператор (3.4.3). Отсюда заключаем, что F_1 и F_2 образуют коммутативную двумерную а. и. уравнения Дирака. Как легко видеть, $\Sigma_{\mu\nu}$ из (3.4.6) могут быть получены из операторов симметрии свободного уравнения Дирака (см. (3.1.8), (3.1.10)) с помощью замены $p_\mu \to \pi_\mu$.

б) Рассмотрим теперь уравнение Дирака с аномальным взаимодействием типа Паули

$$L\Psi \equiv \left[\gamma_\mu \pi^\mu - m + \frac{i}{4m}(1 - i\gamma_4)\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0, \qquad (3.4.8)$$

где $F^{\mu\nu} = -i[\pi^\mu, \pi^\nu]$ — тензор электромагнитного поля, и на вид потенциала A_μ не накладывается никаких априорных ограничений.

Уравнение (3.4.8) записано в форме, делающей очевидной его инвариантность относительно группы Пуанкаре. Оказывается, негеометрическая симметрия этого уравнения в классе $\mathfrak{M}_1$ также совпадает с симметрией уравнения Дирака без взаимодействия и определяется алгеброй AGL(2, C). В качестве базисных элементов этой алгебры на множестве решений уравнений (3.4.8) могут быть выбраны операторы (3.4.6) и приведенные ниже операторы (3.4.9):

$$\Sigma_0 = I, \qquad \Sigma_1 = \gamma_4 - \frac{i}{m}(1 - i\gamma_4)\gamma_\mu\pi^\mu. \qquad (3.4.9)$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.12) (характеризующим алгебру Ли группы GL(2, C)) и условиям инвариантности

$$\begin{aligned} &[\Sigma_{\mu\nu}, L] = \frac{1}{2m}(\gamma_\mu\pi_\nu - \gamma_\nu\pi_\mu)L, \\ &[\Sigma_0, L] = 0, \qquad [\Sigma_1, L] = -\frac{2i}{m}\gamma_4\gamma_\mu\pi^\mu L, \end{aligned} \qquad (3.4.10)$$

где L — оператор (3.4.8).

в) Уравнение Дирака для заряженной частицы, минимально взаимодействующей с постоянным магнитным полем, зависящим от двух пространственных переменных. Вектор-потенциал выберем в виде

$$A_0 = A_3 = 0, \quad A_1 = A_1(x_1, x_2), \quad A_2 = A_2(x_1, x_2), \qquad (3.4.11)$$

что соответствует магнитному полю, направленному по третьей оси координат.

Уравнение (3.4.3) с потенциалом (3.4.11) не инвариантно относительно преобразований Лоренца, поскольку в нем явно выделенную роль играют ось времени и третья координата. Однако это уравнение, как и в отсутствие взаимодействия, инвариантно относительно алгебры AGL(2, C). Базисные элементы этой а.и. являются интегральными операторами, символы которых имеют вид [208]

$$\begin{aligned} &\Sigma_{31} = \frac{i\gamma_3\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha}{2|\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha|}, \qquad \Sigma_{31} = \frac{i\gamma_4(\gamma_3 m + p_3)}{2(p_3^2 + m^2)^{1/2}}, \qquad \Sigma_{32} = \frac{i}{2}\Sigma_{12}\Sigma_{31}, \\ &\Sigma_{0a} = \frac{i\varepsilon_{abc}H\Sigma_{bc}}{2|H|}, \qquad \Sigma_0 = I, \qquad \Sigma_1 = i\frac{H}{|H|}, \qquad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \qquad (3.4.12)$$

где $H = \gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha + \gamma_0 m$.

Действительно, как нетрудно проверить, операторы (3.4.12) коммутируют с $\gamma_0(\gamma_\mu\pi^\mu - m)$ и удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.1.12).

Из приведенного утверждения с очевидностью следует инвариантность уравнений (3.4.3), (3.4.11) относительно набора дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} &\widehat{\Sigma}_{32} = i\gamma_4(\gamma_3 m + p_3), \qquad \widehat{\Sigma}_{31} = i\gamma_3\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha, \\ &\widehat{\Sigma}_{12} = i\widehat{\Sigma}_{23}\widehat{\Sigma}_{31}, \qquad \widehat{\Sigma}_{0a} = \frac{i}{2}H\varepsilon_{abc}\widehat{\Sigma}_{bc}. \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Эти операторы образуют супералгебру Ли совместно с $\widehat{\Sigma}^2_{\mu\nu}$ и $iH\widehat{\Sigma}^2_{ab}$, удовлетворяя следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &[\widehat{\Sigma}_{\mu\nu}, \widehat{\Sigma}_{\lambda\sigma}]_+ = 2(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})\widehat{\Sigma}^2_{\mu\nu} + \\ &\qquad + i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}H\left[\widehat{\Sigma}^2_{\mu\nu}(1-\delta_{\lambda 0})(1-\delta_{\sigma 0}) + \widehat{\Sigma}^2_{\lambda\sigma}(1-\delta_{\mu 0})(1-\delta_{\nu 0})\right], \\ &[\widehat{\Sigma}_{\mu\nu}, \widehat{\Sigma}^2_{\lambda\sigma}] = [\widehat{\Sigma}_{\mu\nu}, iH\widehat{\Sigma}^2_{ab}] = [\widehat{\Sigma}^2_{\mu\nu}, \widehat{\Sigma}^2_{\lambda\sigma}] = [\widehat{\Sigma}^2_{\mu\nu}, iH\widehat{\Sigma}^2_{ab}] = 0. \end{aligned}$$

Аналогичной симметрией обладает уравнение Дирака в электрическом поле, зависящем от x_0 и x_3 [208].

Подведем итоги. Учет взаимодействия частицы с внешним полем в общем случае приводит к сужению негеометрической симметрии уравнения Дирака. Однако для некоторых типов потенциалов такая симметрия сохраняется. Кроме того, учет аналогичного взаимодействия типа Паули, приведенного в (3.4.8), сохраняет негеометрическую симметрию уравнения Дирака при любом выборе потенциала A_μ внешнего электромагнитного поля.

3.4.3. Уравнения Максвелла с токами и зарядами. В этом пункте анализируется симметрия уравнений Максвелла в проводящей среде, а также уравнений с произвольными токами и зарядами.

Уравнения Максвелла в проводящей среде имеют вид

$$i\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_0} = -\mathbf{p}\times\mathbf{H} + i\sigma\mathbf{E}, \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = 0, \quad i\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_0} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}, \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{H} = 0, \tag{3.4.14}$$

где σ — коэффициент проводимости. Покажем, что уравнения (3.4.14), как и уравнения для электромагнитного поля в вакууме, инвариантны относительно алгебры $AGL(2, C)$.

Используя обозначения (1.3.9), (3.3.1), (3.3.4), запишем уравнения (3.4.14) в импульсном представлении в матричной форме

$$\begin{aligned} &L_1\varphi(x_0, \mathbf{p}) = 0, \qquad L_1 = i\frac{\partial}{\partial x_0} - \sigma_2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} + \frac{i}{2}(1+\sigma_3)\sigma, \\ &L_2^a\varphi(x_0, \mathbf{p}) = 0, \qquad L_2^a = p_a - \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}S_a. \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Уравнения (3.4.15) инвариантны относительно восьмимерной алгебры Ли, изоморфной $AGL(2, C)$. Базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$\Sigma_{23} = \frac{i}{2}h|h|^{-1}\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}}, \qquad \Sigma_{31} = \frac{i}{2}h|h|^{-1}\sigma_3 Q,$$

$$\Sigma_{12}=\frac{1}{2}\sigma_3\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}}Q,\qquad \Sigma_{01}=\frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}},\quad \Sigma_{02}=\frac{1}{2}\sigma_3 Q,$$

$$\Sigma_{03}=-\frac{i}{2}h\,|h|^{-1}\sigma_3\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}}Q,\quad \Sigma_1=ih\,|h|^{-1},\quad \Sigma_0=I,$$

где Q — матрица, заданная в (3.3.10),

$$\begin{gathered} h=\sigma_2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}-\frac{i}{2}\sigma_3\sigma, \\ |h|^{-1}=\left(p^2-\frac{1}{4}\sigma^2\right)^{-1/2}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2-\frac{2i}{\sigma}\,[1-(\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}})^2]. \end{gathered}\tag{3.4.16}$$

Доказательство этого утверждения приведено в [126].

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла с произвольными токами и зарядами. Используя ковариантную формулировку этих уравнений, задаваемую соотношениями (1.3.12), (1.3.13), сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 3.18. *Для уравнений Максвелла с токами и зарядами существуют двадцать операторов симметрии в классе дифференциальных операторов второго порядка с постоянными матричными коэффициентами, не принадлежащих обвертывающей алгебре алгебры $AC(1, 3)$. В представлении* (1.3.12), (1.3.13), (2.3.25) *эти операторы имеют следующий вид:*

$$Q^{\lambda}_{\mu\nu}=\left(1-2\beta_5^2\right)\Big[Z_{\mu\nu}p_\sigma p^\sigma+\left(p_\mu p_\nu-\frac{2}{3}g_{\mu\nu}p_\sigma p^\sigma\right)Z^\sigma_\sigma-$$
$$-p_\mu Z_{\nu\sigma}p^\sigma-p_\nu Z_{\mu\sigma}p^\sigma+\frac{2}{3}g^{\mu\nu}Z_{\sigma\rho}p^\sigma p^\rho\Big],\tag{3.4.17}$$

где

$$Z_{\mu\nu}=2g_{\mu\nu}-\beta_\mu\beta_\nu-\beta_\nu\beta_\mu,\qquad (\mu,\ \nu,\ \rho,\ \sigma)\neq\lambda.$$

Доказательство. Используя соотношения (2.3.23), можно убедиться непосредственной проверкой, что операторы (3.4.17) коммутируют с L_1 и L_2 из (1.3.13). Отсюда заключаем, что формула (3.4.17) действительно задает операторы симметрии уравнений Максвелла с токами и зарядами.

Мы видим, что даже в случае наличия произвольных токов и зарядов уравнения Максвелла обладают дополнительной симметрией, описанной в приведенной теореме. Операторы (3.4.17) не принадлежат обвертывающей алгебре алгебры АС(1,3) и в этом смысле являются существенно новыми по сравнению с операторами симметрии, которые можно получить в классическом подходе Ли.

Используя выражения для β-матриц, задаваемые формулами (2.3.25), (2.3.27), нетрудно записать в явном виде действие операторов (3.4.17) на волновую функцию (1.3.12), т. е. получить преобразования напряженностей **E**, **H** и четырехвектора тока j, оставляющие уравнения Максвелла инвариантными. Можно убедиться, что из двадцати четырех операторов (3.4.17) линейно независимы только двадцать, поскольку $Q_\sigma{}^\sigma=0$. Операторы симметрии (3.4.17) не образуют алгебры Ли и не могут быть включены ни в какую конечномерную алгебру Ли$\left([Q^{\lambda}_{\mu\nu}, Q^{\lambda'}_{\mu'\nu'}] \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_4, [[Q^{\lambda}_{\mu\nu}, Q_{\mu'\nu'}], Q^{\lambda''}_{\mu''\nu''}] \subset \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_6, \ldots\right)$. Однако для каждого значения λ $\{Q^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ могут быть пополнены до множества операторов симметрии, образующего базис супералгебры. Такой базис образуют операторы $\{Q^{\lambda}_{\mu\nu}; \eta^{\mu\nu} = p^{\mu}p^{\nu}(\beta_{\sigma}p^{\sigma})^2, \eta^{\mu\nu\sigma\rho} = p^{\mu}p^{\nu}p^{\sigma}p^{\rho}\}$, $(\mu, \nu, \sigma, \rho) \neq \lambda$.

Вычисляя коммутаторы операторов (3.4.17) с генераторами конформной группы, можно получить более широкий набор операторов симметрии уравнений Максвелла в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$.

3.4.4. Релятивистские уравнения для частиц произвольного спина. В этом пункте мы рассмотрим примеры уравнений движения частиц произвольного спина, взаимодействующих с внешним полем, которые обладают нетривиальной негеометрической симметрией.

Начнем со случая, когда внешнее электромагнитное поле является постоянным и однородным, что соответствует выбору вектор-потенциала в виде (3.4.4). Уравнения в форме Дирака для частицы произвольного спина, взаимодействующей с таким потенциалом, принимают вид (см. ниже п. 4.1.3)

$$L_1\Psi = 0, \quad L_2\Psi = 0,$$

$$L_1 = \Gamma^{\mu}\pi_{\mu} - m + \frac{e}{4m}(1 - i\Gamma_4)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu}\right)F^{\mu\nu}, \qquad (3.4.18)$$

$$L_2 = (\Gamma^{\mu}\pi_{\mu} + m)\widehat{S} - 16ms,$$

где Γ^{μ}, $S_{\mu\nu}$, $\widehat{\mathrm{S}}$ — матрицы размерности $8s \times 8s$, задаваемые соотношениями (2.5.2), (2.5.4), (2.5.5), (2.5.26).

Как показано в п. 3.2.2, уравнение (3.4.18) в случае $F^{\mu\nu} = 0$, $\pi_{\mu} = p_{\mu}$ инвариантно относительно алгебры $AGL(2s + 1, C)$, базисные элементы которой являются дифференциальными операторами первого порядка с матричными коэффициентами. При наличии внешнего поля, задаваемого потенциалом (3.4.4), симметрия этого уравнения в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ уже не определяется алгеброй $AGL(2s + 1, C)$, но сводится к инвариантности относительно $(2s + 1)$-мерной коммутативной алгебры, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой а. и. имеют вид

$$Q_n = (\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^n, \qquad n = 1, 2, \ldots, 2s, \qquad (3.4.19)$$

где

$$\Sigma_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu} + (1 - i\Gamma_4)\frac{i}{m}(\Gamma_{\mu}\pi_{\nu} - \Gamma_{\nu}\pi_{\mu}). \qquad (3.4.20)$$

Операторы (3.4.19) коммутируют с L_2 из (3.4.18). Поскольку

$$[\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, L_1] = \frac{i}{m}(\Gamma_{\mu}\pi_{\nu} - \Gamma_{\nu}\pi_{\mu})F^{\mu\nu}L_1, \qquad (3.4.21)$$

где L_1 — оператор (3.4.18), то для каждого Q_n выполняется

$$[Q_n, L_1] = f_n L_1, \qquad (3.4.22)$$

где f_n — дифференциальный оператор, явный вид которого нетрудно определить, исходя из (3.4.21). Отсюда заключаем, что формулы (3.4.19) действительно определяют операторы симметрии системы (3.4.18), принадлежащие классу $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$.

Мы видим, что негеометрическая симметрия уравнений в форме Дирака для частицы произвольного спина в постоянном электромагнитном поле определяется коммутативной алгеброй, размерность которой растет с увеличением спина.

Можно показать, что негеометрическая симметрия уравнений (3.4.18) в случаях, когда потенциал A_μ задается формулами (3.4.11) или (3.4.13), определяется алгеброй $\mathrm{AGL}(2, C) \oplus \mathrm{ALG}(2, C) \oplus \ldots \oplus \oplus \mathrm{AGL}(2, C)$, где число подалгебр, входящих в прямую сумму, равно $s+1$ для целых s и $s+1/2$ для s полуцелых. Мы не приводим явного вида базисных элементов указанной а. и. из-за их громоздкости.

В заключение этого пункта рассмотрим релятивистские уравнения движения без лишних компонент с потенциалом специального вида

$$\left(H_s^{\mathrm{I}} + V\right) \Psi = i \frac{\partial}{\partial x_0} \Psi, \tag{3.4.23}$$

где H_s^{I} — гамильтониан свободной частицы произвольного спина (2.4.38),

$$V = (1 + \sigma_1) \varphi(x)/2 \tag{3.4.24}$$

— потенциал взаимодействия частицы с внешним полем. В случае $s = 1/2$ формула (3.4.23) задает хорошо известное уравнение, используемое при описании движения кварков в поле с эффективным потенциалом, представляющим собой полусумму скалярной и векторной составляющих.

Уравнения (3.4.23) обладают широкой негеометрической симметрией, которая описывается в следующем утверждении.

Теорема 3.19. *Уравнение* (3.4.23) *инвариантно относительно алгебры* $\mathrm{AGL}(2s+1, R)$. *Базисные элементы* λ_{mn} *этой алгебры задаются формулами* (3.2.17), *где* $\Sigma_{ab} = -i\varepsilon_{abc}\Sigma_{0c} = -i\varepsilon_{abc}\widehat{S}_c$, $\Sigma_1 = i$,

$$\widehat{S}_a = \sigma_1 S_a + (1 - \sigma_1) p_a \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} p^{-2}. \tag{3.4.25}$$

Доказательство. И уравнение (3.4.23), и операторы (3.4.25) можно преобразовать к такой форме, для которой утверждения теоремы становятся очевидными. Используя для этой цели унитарный оператор

$$U = U^{-1} = \frac{1}{2}\left[1 + \sigma_1 + (1 - \sigma_1) \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \Lambda_\nu\right], \tag{3.4.26}$$

где Λ_ν — проекторы (2.4.25), получаем

$$U\left(H_s^{\mathrm{I}} + V\right) U^\dagger = \sigma_1 m + \sigma_3 p + \frac{1}{2}(1 + \sigma_1) \varphi(x), \tag{3.4.27}$$

$$U\widehat{S}_a U^\dagger = S_a. \tag{3.4.28}$$

Матрицы (3.4.28), очевидно, коммутируют с гамильтонианом

(3.4.27) и удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.1.24). Следовательно, с их помощью можно построить базис алгебры $AGL(2s+1, R)$ по формулам (3.2.17).

Отметим, что аналогичной симметрией обладают уравнения

$$\left(H_s^{\mathrm{III}} + V\right)\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \qquad (3.4.29)$$

где V — потенциал (3.4.24), H_s^{III} — гамильтонианы (2.4.55) — (2.4.58). Базис негеометрической а. и. уравнений (3.4.29) задается формулами (3.2.17), (3.4.25). В случае $s=1$ формула (3.4.29) определяет уравнение ТСТ со специальным потенциалом (3.4.24), которое, таким образом, обладает симметрией относительно алгебры $AGL(3, R)$.

В работах [61, 126] описана нелиевская симметрия уравнения Кеммера — Деффина для частицы с аномальным моментом в постоянном однородном магнитном поле и постоянном однородном электрическом поле. В случае, когда аномальный момент частицы равен единице, эта симметрия определяется десятимерной алгеброй Ли, изоморфной $ASU(2) \oplus ASU(2) \oplus T_4$, где T_4 — четырехмерная коммутативная подалгебра. Мы не приводим здесь явный вид базисных элементов этой алгебры из-за их крайне громоздкой формы.

3.4.5. Операторы симметрии уравнений для упругих волн. Исследуем симметрию основного уравнения теории упругости [44]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -\frac{\lambda}{\rho_0}\, p^2\mathbf{U} - \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\,\mathbf{pp}\cdot\mathbf{U}. \qquad (3.4.30)$$

Здесь $\mathbf{U} = (U^1, U^2, U^3)$ — вектор смещения, $\lambda > 0$, $\mu + \lambda > 0$ и $\rho_0 > 0$ — коэффициенты Ламе.

Уравнение (3.4.30) не инвариантно относительно группы Пуанкаре, но его дифференциальные следствия обладают такой инвариантностью [44]. Ввиду того, что симметрия уравнения (3.4.30) может иметь важные и проверяемые физические следствия, мы решили исследовать ее наряду с симметрией основных уравнений релятивистской квантовой теории.

Запишем уравнение (3.4.30) в матричной форме

$$LU \equiv Z_{ab}\left[\left(p_0^2 - \frac{\lambda}{\rho_0}\, p^2\right)\delta_{ab} - \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\, p_a p_b\right] U, \qquad (3.4.31)$$

где U — столбец с компонентами U^1, U^2, U^3, Z_{ab} — матрицы (3.3.41), S_a — трехрядные спиновые матрицы (1.3.9) для спина 1.

В работе [28*] найдена максимальная алгебра инвариантности уравнения (3.4.31), которую можно получить в классическом подходе Ли. Базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad D = x_0 P_0 - x_a P_a,$$

$$J_a = \varepsilon_{abc} x_b P_c + iS_a, \qquad (3.4.32)$$

где S_a — матрицы (1.3.9).

Возникает естественное желание исследовать симметрию уравнения (3.4.31) в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$, т. е. в классе, которому принадлежит оператор L. Соответствующие операторы симметрии могут иметь применение при описании систем координат, приводящих к разделению переменных [50], и при нахождении новых законов сохранения в теории упругости.

Неизвестный (пока) оператор симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_2$ уравнения (3.4.31) представим в виде разложения по полной системе матриц Z_{ab} и S_a:

$$Q = Z_{ab} b^{ab} + i S_a c^a, \tag{3.4.33}$$

где b^{ab}, c^a — дифференциальные операторы второго порядка с вещественными коэффициентами, зависящими от x. Оператор (3.4.33), по определению, является оператором симметрии уравнения (3.4.31), если он удовлетворяет следующему условию:

$$[Q,\ L] = \alpha^Q L, \tag{3.4.34}$$

где α^Q — некоторый оператор из класса $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$, который также удобно представить в форме (3.4.33).

Подставляя L (3.4.31) и Q (3.4.33) в уравнение (3.4.34) и вычисляя необходимые коммутаторы и антикоммутаторы с использованием соотношений (3.3.42), получаем после приравнивания коэффициентов при линейно независимых матрицах и операторах дифференцирования систему определяющих уравнений для коэффициентных функций оператора (3.4.33). Ввиду крайней громоздкости этой системы мы ее не выписываем, но сформулируем сразу конечный результат [29*].

Теорема 3.20. *Для основного уравнения линейной теории упругости* (3.4.31) *существует* 61 *линейно независимый оператор симметрии в классе* $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$. *В это число входят операторы* (3.4.30) *и линейные комбинации их произведений, а также девять операторов, приведенных ниже*:

$$\begin{aligned}
&Q_0 = 2\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}\,(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J} - 1) - \mathbf{J}^2,\\
&Q_a = i\left[\varepsilon_{abc} S_b p_c,\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{J} - \frac{1}{2}\right]_+ + \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}(J_b p_c + p_c J_b), \qquad (3.4.35)\\
&Q_{ad} = [\varepsilon_{abc} S_b p_c,\ \varepsilon_{dkl} S_k p_l] + p_a p_d - \frac{1}{3}\delta_{ad}(5p^2 - 3(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2).
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (3.4.31) имеет девять существенно новых операторов симметрии в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$, не принадлежащих обвертывающей алгебре алгебры (3.4.32) (операторы Q_{ab} симметричны относительно перестановки индексов a, b и имеют нулевой шпур).

Операторы (3.4.35) не образуют алгебры Ли. Однако операторы симметрии

$$\widehat{Q}_1 = Q_A, \quad \widehat{Q}_2 = \mathbf{J}\cdot\mathbf{P} \equiv \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}, \quad \widehat{Q}_3 = \widehat{Q}_1\widehat{Q}_2, \quad \widehat{Q}_{3+a} = Q_a^2,$$

где $a = 1, 2, 3$, Q_A — любой из операторов (3.4.35), A — мультииндекс, принимающий значения 0, 1, ..., 12, 13, ..., образуют базис супералгебры Ли, удовлетворяя соотношениям (3.3.50).

Операторы (3.4.35) можно использовать для построения новых законов сохранения для уравнения (3.4.31). Поскольку мы имеем дело с дифференциальными операторами второго порядка, соответствующие токи зависят от вторых производных.

Выберем сохраняющиеся токи в виде

$$j_0 = (A\dot{U})^{\dagger}BU + (BU)^{\dagger}A\dot{U},\ j_a = (AV^aU)^{\dagger}BU + (BU)^{\dagger}AV^aU, \tag{3.4.36}$$

где A — любой из операторов (3.4.35), а B — любой из генераторов (3.4.32),

$$V^a = iZ_{kl}\left[\frac{\mu}{\rho_0}p_a\delta_{kl} + \frac{\lambda+\mu}{2\rho_0}(\delta_{ka}p_l - \delta_{al}p_k)\right], \quad \dot{U} = \frac{\partial U}{\partial x_0}.$$

Так как и A, и B удовлетворяют условиям (3.4.34) и, кроме того, в силу уравнения (3.4.31) $-ip_aV^aU = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U$, билинейные комбинации (3.4.36) удовлетворяют уравнению непрерывности и порождают сохраняющиеся величины $\langle j_0\rangle$ (см. ниже (3.5.6), (3.5.7)). В частности, сохраняются приведенные ниже тензор I^{ab} и вектор I^a:

$$\mathrm{I}^{ab} = \int d^3x\lambda^{ab}, \quad \mathrm{I}^a = \int d^3x\lambda^{ab}x_b,$$

где

$$\lambda^{ab} = (\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{U}})^a(\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{U}})^b + \frac{\lambda}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_c}(\mathrm{rot}\,\mathbf{U})^a\right]\frac{\partial}{\partial x_c}(\mathrm{rot}\,\mathbf{U})^b.$$

Не составляет труда вычислить в явном виде и другие сохраняющиеся величины, задаваемые формулами (3.4.36), (3.5.7). Исследованию сохраняющихся величин для уравнений релятивистской квантовой теории посвящен следующий параграф.

Нелиевская симметрия уравнения (3.4.40) обнаружена в [115]. Явный вид интегро-дифференциальных операторов симметрии этого уравнения приведен в [120]. Симметрия стационарного уравнения теории упругости в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ подробно изучена в [291].

§ 3.5. Законы сохранения и интегралы движения

3.5.1. Введение. В связи с изложенными выше результатами относительно негеометрической симметрии релятивистских уравнений движения возникает вопрос: каковы физические следствия этой симметрии и как она может быть использована при решении тех или иных физических задач?

Наличие негеометрической симметрии уравнений движения само по себе является фундаментальным фактом, отражающим существование некоторой внутренней степени свободы описываемого объекта (связанной в нашем случае с наличием спина у релятивистских частиц). Некоторые следствия такой симметрии могут непосредственно использоваться для различных прикладных целей: отыскания интегралов движения релятивистских волновых уравнений, построения поляризационной матрицы плотности, разложения решений уравнений движения по полной системе собственных функций операторов дополнительной симметрии и некоторых других. Обсуждению некоторых приложений негеометрической симметрии и посвящен настоящий параграф.

Одним из важнейших (и проверяемых экспериментально) следствий инвариантности уравнений движения относительно той или иной группы преобразований является существование интегралов движения — некоторых (обычно билинейных) комбинаций решений этого уравнения, сохраняющихся во времени. Хорошо известными примерами интегралов движения являются энергия, импульс и момент количества движения.

Какие же сохраняющиеся величины соответствуют описанной выше негеометрической симметрии релятивистских волновых уравнений? В традиционном подходе для нахождения интегралов движения исследуют симметрию лагранжиана описываемой физической системы, а затем с использованием теоремы Нетер находят законы сохранения, соответствующие каждой однопараметрической подгруппе группы такой симметрии (см., например, [10]). Достоинство такого подхода состоит в том, что найденные сохраняющиеся величины, как правило, имеют разумную физическую интерпретацию. Вместе с тем этот подход имеет ограниченную применимость, так как не всякое уравнение математической физики допускает лагранжеву формулировку и, кроме того, существуют законы сохранения, которые нельзя получить из теоремы Нетер даже в том случае, если уравнения движения выведены в рамках вариационного принципа. Если же группа симметрии уравнений движения имеет нелокальный характер, то возможность использования теоремы типа Нетер и вовсе становится проблематичной (см. однако, [174]).

В силу изложенного выше при описании законов сохранения, соответствующих негеометрической симметрии, предпочтительнее воспользоваться другим, более универсальным методом, суть которого заключается в непосредственном вычислении билинейных комбинаций решений уравнений движения, сохраняющихся во времени в силу симметрии этих уравнений. Мы увидим, что таким путем могут быть найдены как классические сохраняющиеся величины (импульс, энергия и т. д.), так и новые законы сохранения, связанные с негеометрической симметрией. Более того, таким путем можно вычислить и такие сохраняющиеся величины, которым вообще не соответствует никакой оператор симметрии. Примеры таких величин приведены ниже в п. 3.5.5.

Рассмотрим уравнение эволюционного типа

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi \equiv i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H(\mathrm{p})\Psi, \tag{3.5.1}$$

где $H(\mathbf{p})$ — дифференциальный оператор с матричными коэффициентами, $\Psi = \Psi(x_0 \equiv t, \mathbf{x})$ — вещественная (комплексная) вектор-функция, принадлежащая пространству $L_2(R_4)$.

Пусть Q — линейный оператор, заданный на множестве, всюду плотном в пространстве вектор-функции $\Psi \supset L_2(R_4)$. Каждому решению уравнения (3.5.1) сопоставим билинейную комбинацию

$$\mathrm{I}_Q = \int d^3x \Psi^\dagger Q \Psi, \tag{3.5.2}$$

где $\Psi^\dagger$ — функция, транспонированная (и комплексно сопряженная) к Ψ.

Дифференцируя (3.5.2) по x_0 и используя уравнение (3.5.1), получаем следующие условия сохранения I_Q во времени:

$$\left\{\left[i\frac{\partial}{\partial x_0} - H^\dagger(\mathbf{p})\right]Q - Q\left[i\frac{\partial}{\partial x_0} + H(\mathbf{p})\right]\right\}\Psi = 0. \tag{3.5.3}$$

Если оператор $H(\mathbf{p})$ эрмитов, то соотношение (3.5.3) может быть переписано в виде

$$\left[i\frac{\partial}{\partial x_0} - H, Q\right]\Psi = 0. \tag{3.5.4}$$

Но условие (3.5.4) — это не что иное, как определение оператора симметрии уравнения (3.5.1) (ср. (1.1.4)). Иными словами, если оператор эволюции (гамильтониан) эрмитов, то каждому базисному элементу а. и. уравнения (3.5.1) можно поставить во взаимно однозначное соответствие сохраняющуюся величину (3.5.2).

Приведенные рассуждения имеют самое непосредственное отношение к интегралам движения уравнений, исследуемых в §§ 3.1—3.4. Ниже мы обсудим сохраняющиеся билинейные формы, соответствующие а. и. уравнений Дирака и Максвелла.

Сохраняющиеся величины можно вычислять также с использованием более традиционного подхода, основанного на концепции токов, удовлетворяющих уравнению непрерывности.

Сформулируем основные определения, справедливые для достаточно произвольной системы дифференциальных уравнений вида

$$F^A(x, U, U', \ldots) = 0, \quad A = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.5.5}$$

Здесь $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — независимые переменные, $U = (U^1, U^2, \ldots, U^m)$ — вектор-функция, зависящая от x, U' — производные от U по x, т. е. величины вида

$$U_j^k = \frac{\partial U^k}{\partial x_j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

многоточие обозначает производные от U более высокого порядка, которые также могут входить в систему (3.5.5).

Будем говорить [35], что для системы уравнений (3.5.5) существует закон сохранения, если для каждого решения этой системы можно указать $(n+1)$-мерный вектор $j_\mu(x, U, U', \ldots)$ $(\mu = 0, 1, \ldots, n)$, который удовлетворяет уравнению непрерывности

$$p^\mu j_\mu = 0, \quad p^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{3.5.6}$$

Из уравнения (3.5.6) в силу теоремы Остроградского — Гаусса следует существование функции $\langle j_0 \rangle$, которая на множестве решений системы (3.5.5) не зависит от x_0:

$$\langle j_0 \rangle = \int\limits_{R_n} d^n x j_0(x, U, U', \ldots), \quad \frac{\partial \langle j_0 \rangle}{\partial x_0} = 0, \tag{3.5.7}$$

где R_n обозначает область интегрирования, которая у нас совпадает с n-мерным многообразием $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

К настоящему времени не существует конструктивного алгоритма для описания всех возможных законов сохранения, допускаемых произвольной системой дифференциальных уравнений (см., однако, [38]). Тем не менее каждому оператору симметрии, найденному выше, соответствует закон сохранения вида (3.5.6), хотя в принципе возможна ситуация, когда закону сохранения нельзя сопоставить оператор симметрии.

3.5.2. Законы сохранения для поля Дирака. Пусть Q — оператор симметрии уравнения Дирака. Соответствующий четырехвектор тока определим следующим образом:

$$j_\mu^Q = \frac{1}{2}\left[\overline{\Psi}\gamma_\mu Q\Psi + \overline{Q\Psi}\gamma_\mu\Psi\right], \tag{3.5.8}$$

где $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0$, а Ψ принадлежит множеству решений уравнения Дирака. Поскольку Q, по определению, удовлетворяет соотношениям (3.1.2), (3.1.6), а Ψ — уравнению (3.1.6), то для (3.5.8) справедливо уравнение непрерывности (3.5.6).

Выпишем в явном виде токи, соответствующие операторам симметрии уравнения Дирака из класса $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Для генераторов группы Пуанкаре P_μ и $J_{\mu\nu}$, задаваемых формулами (1.2.22), получаем из (3.5.8) хорошо известные выражения для тензоров энергии — импульса и углового момента

$$\begin{gathered} T_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}\,\gamma_\nu\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\nu\Psi\right), \\ M_{\mu\lambda\nu} = x_\mu T_{\lambda\nu} - x_\lambda T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\overline{\Psi}\,[\gamma_\nu, S_{\mu\lambda}]_+\Psi, \end{gathered} \tag{3.5.9}$$

которые удовлетворяют уравнению непрерывности по индексу ν.

Тривиальный единичный оператор симметрии порождает ток плотности вероятности

$$j_\mu = \overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi. \tag{3.5.10}$$

Для остальных операторов симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$, задаваемых соотношениями (3.1.49), получаем из определения (3.5.8) следующие выражения для соответствующих сохраняющихся токов:

а) операторам η_μ и $\omega_{\mu\nu}$ соответствуют тензоры второго и третьего рангов

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(\overline{\Psi}\gamma_4\gamma_\nu \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\mu}\gamma_\nu\gamma_4\Psi\right) + m\overline{\Psi}\gamma_4 S_{\mu\nu}\Psi,$$

$$\omega_{\mu\nu\rho} = \frac{i}{4}\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\rho} S_{\nu\mu}\Psi + \overline{\Psi}S_{\nu\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - \overline{\Psi}S_{\nu\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\mu} S_{\nu\rho}\Psi\right) + \\ + \frac{1}{2} m\overline{\Psi}\,[S_{\mu\nu}, \gamma_\rho]_+\,\Psi; \quad (3.5.11)$$

б) операторам B и A_μ соответствуют четырехвектор J_μ и тензор второго ранга $Z_{\mu\nu}$:

$$J_\nu = 2x^\mu W_{\nu\mu},\ Z_{\mu\nu} = x^\lambda \omega_{\mu\lambda\nu} - \omega_{\lambda\mu\nu}x^\lambda. \quad (3.5.12)$$

Можно убедиться непосредственной проверкой, что все величины, задаваемые соотношениями (3.5.11), (3.5.12), удовлетворяют уравнению непрерывности по индексу ν. С использованием теоремы Остроградского — Гаусса получаем соответствующие интегралы движения в виде

$$\langle P_\mu\rangle = \int d^3x T_{0\mu}, \qquad \langle J_{\mu\nu}\rangle = \int d^3x M_{\mu\nu 0}, \langle j_0\rangle = \int d^3x \Psi^\dagger \Psi, \quad (3.5.13)$$

$$\langle \eta_\mu\rangle = \int d^3x W_{\mu 0},\ \langle \omega_{\mu\lambda}\rangle = \int d^3x \omega_{\mu\lambda 0},$$
$$\langle B\rangle = \int d^3x J_0, \qquad \langle A_\mu\rangle = \int d^3x Z_{\mu 0}. \quad (3.5.14)$$

Итак, мы построили в явном виде законы сохранения и интегралы движения, соответствующие операторам симметрии уравнения Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Наряду с хорошо известными интегралами движения (3.5.13) (энергией, импульсом, угловым моментом и зарядом) в формулах (3.5.14) приведены «новые» интегралы движения, которые соответствуют операторам симметрии из обертывающей алгебры алгебры Пуанкаре.

Формулы (3.5.13), (3.5.14) задают полный набор сохраняющихся величин, билинейно зависящих от Ψ или Ψ и $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}$.

Гораздо более интересны интегралы движения, которые отвечают операторам симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ для безмассового уравнения Дирака, так как в число последних входят существенно новые величины, не связанные с обертывающей алгеброй алгебры AC(1, 3). Соответствующие законы сохранения приведены в следующем пункте.

3.5.3. Законы сохранения для безмассового спинорного поля. Выпишем законы сохранения, соответствующие симметрии уравнения Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ в случае $m = 0$.

Операторы симметрии $Q \in \mathfrak{M}_1$ безмассового уравнения Дирака задаются формулами (3.1.62), (3.1.63). Каждому из этих операторов отвечает сохраняющийся ток (3.5.8).

Для операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ и I, как и в случае ненулевой массы, получаем соответствующие тензоры энергии — импульса и углового момента в форме (3.5.9) и вектор тока вероятности (3.5.10).

Для операторов D и K_μ получаем из (3.5.8)

$$J_\mu^D = x^\nu T_{\nu\mu}, \qquad J_\mu^{K_\nu} = x^\lambda M_{\nu\lambda\mu} + x_\nu J_\mu^D, \tag{3.5.15}$$

где $T_{\nu\mu}$ и $M_{\nu\lambda\mu}$ — тензоры (3.5.9). Принимая во внимание, что в случае $m = 0$ след тензора $T_{\mu\nu}$ равен нулю, нетрудно убедиться прямой проверкой, что токи (3.5.15) удовлетворяют уравнению непрерывности.

Аналогично вычисляются токи, соответствующие операторам симметрии (3.1.63):

$$\begin{aligned}
&J_\mu^{\widetilde{P}_\nu} = \frac{1}{2}\left(\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_4 \frac{\partial\Psi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_\nu}\gamma_4\gamma_\mu\Psi\right),\\
&J_\lambda^{\widetilde{J}_{\mu\nu}} = x_\mu J_\lambda^{\widetilde{P}_\nu} - x_\nu J_\lambda^{\widetilde{P}_\mu} + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\Psi}\left[\gamma_\lambda, S^{\rho\sigma}\right]_+\Psi,\\
&J_\lambda^{i\gamma_4} = i\overline{\Psi}\gamma_4\gamma_\lambda\Psi,\ J_\mu^{\widetilde{D}} = x^\nu J_\mu^{\widehat{P}_\nu},\\
&J_\nu^{\widetilde{K}_\mu} = x^\lambda J_\nu^{\widetilde{J}_{\mu\nu}} + x_\mu J_\nu^{\widetilde{D}},
\end{aligned}\tag{3.5.16}$$

$$\begin{aligned}
&J_\lambda^{\omega_{\mu\nu}} = \omega^0_{\mu\nu\lambda},\ J_\nu^{A_\mu} = Z^0_{\mu\nu},\\
&J_\mu^{\widetilde{A}_\lambda} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}x^\nu\omega^{\rho\sigma}{}_\lambda,\\
&J_\lambda^{Q_{\mu\nu}} = x_\mu Z^0_{\nu\lambda} - x_\nu Z^0_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}x_\sigma x^\sigma\omega^0_{\mu\nu\lambda}.
\end{aligned}\tag{3.5.17}$$

Здесь $\omega^0_{\mu\nu\lambda}$ и $Z^0_{\mu\nu}$ — тензоры третьего и второго рангов, задаваемые формулами (3.5.11), (3.5.12) (где $m = 0$).

Таким образом, мы получили в явном виде все сохраняющиеся токи, соответствующие симметрии безмассового уравнения Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. *Токи, приведенные в (3.5.17), являются существенно* новыми (по сравнению с теми, которые можно получить классическими методами), так как соответствуют операторам симметрии, не принадлежащим обвертывающей алгебре алгебры AC(1, 3).

Формулы (3.5.9), (3.5.10), (3.5.15)—(3.5.17) задают полный набор сохраняющихся токов для безмассового уравнения Дирака, билинейно зависящих от Ψ и $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}$.

3.5.4. Классические интегралы движения электромагнитного поля. Исследование интегралов движения уравнений Максвелла представляет особый интерес, так как они выражаются через физически измеряемые величины — напряженности электрического и магнитного полей.

Описание интегралов движения уравнений Максвелла может рассматриваться как самостоятельная задача, так как в принципе возможна ситуация, когда сохраняющейся величине не соответствует никакая симметрия [126]. Здесь мы найдем прямым вычислением все сохраняющиеся во времени величины вида

$$I = \int d^3xF\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_a}, x_0, \mathbf{x}\right), \tag{3.5.18}$$

где функция F определяет билинейную комбинацию векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и их производных.

Классические интегралы движения электромагнитного поля описываются в следующей теореме.

Теорема 3.21. *Существуют в точности 15 линейно независимых интегралов движения вида*

$$I = \int d^3xF(\mathbf{E},\ \mathbf{H},\ x_0,\ \mathbf{x}), \tag{3.5.19}$$

где $F(\mathbf{E}, \mathbf{H}, x_0, \mathbf{x})$ — билинейная комбинация компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющих уравнениям Максвелла (1.3.3), (1.3.4). Общий вид соответствующей функции F задается следующей формулой:

$$F(\mathbf{E},\ \mathbf{H},\ x_0,\ \mathbf{x}) = \mathbf{f}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{H} + f^0(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \tag{3.5.20}$$

где $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$ и f^0 удовлетворяют уравнениям Киллинга

$$f^\mu_\nu + f^\nu_\mu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad f^\nu_\nu = f^\mu_\mu, \quad f^\mu_\nu = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{3.5.21}$$

Доказательство. Билинейную комбинацию векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ запишем в виде

$$F = \varphi^\dagger Q\varphi, \tag{3.5.22}$$

где φ — вектор-функция (1.3.7), Q — симметричная вещественная матрица размерности 6×6 (антисимметричные матрицы дают нулевой вклад в интеграл (3.5.19)). Подставим F (3.5.22) в соотношение (3.5.19) и продифференцируем его по времени; в результате получаем с использованием уравнения эволюции (1.3.8)

$$\dot{I} = \int d^3x\Psi^\dagger(\dot{Q} - i\,[Q, \sigma_2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}])\,\Psi. \tag{3.5.23}$$

Приравнивая (3.5.22) нулю и принимая во внимание эрмитовость оператора в круглых скобках, получаем с использованием (1.3.8) следующее уравнение для Q:

$$\dot{Q} - i\,[Q, \sigma_2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}] = i\tilde{\sigma}^\mu\left[\alpha^a_\mu\widehat{L}^a_2 + \left(\alpha^a_\mu\widehat{L}^a_2\right)^\dagger\right], \tag{3.5.24}$$

где $\widehat{L}^a_2$ — оператор (1.3.8), α^a_μ — неизвестные функции от x, подлежащие определению, $\tilde{\sigma}^\mu = \sigma^\mu$, $\mu \neq 2$, $\tilde{\sigma}^2 = i\sigma^2$.

Разлагая искомую эрмитову вещественную матрицу Q по полной системе матриц S_a, Z_{ab}, σ^μ (см. (1.2.5), (1.3.9), (3.3.41)) согласно (3.3.33), где

$$A = Z_{ab}a^{ab},\ B = Z_{ab}b^{ab},\ C = Z_{ab}c^{ab},\ D = if^aS_a, \tag{3.5.25}$$

a^{ab}, b^{ab}, c^{ab} и f^a — неизвестные функции от x, и приравнивая коэффициенты при линейно независимых матрицах и операторах дифференцирования, приходим к соотношениям следующего вида:

$$a^{ab} = b^{ab} = 0, \ c^{ab} = \delta_{ab} f^0,$$

где f^0 — функции, удовлетворяющие совместно с f^a из (3.5.25) системе уравнений (3.5.21).

Соответствующие матрицы Q имеют вид

$$Q = \sigma_0 f^0 - \sigma_2 S_a f^a. \tag{3.5.26}$$

Подставив (3.5.26) в (3.5.21), приходим к формуле (3.5.20). ■

Общее решение системы (3.5.21) зависит от 15 произвольных параметров и задается формулой (1.1.10). Соответствующие линейно независимые интегралы движения получаем, подставляя (1.1.10), (3.5.20) в (3.5.19) и приравнивая поочередно нулю все произвольные параметры, кроме одного. В результате приходим к следующим формулам:

$$\begin{gathered}
\mathscr{E} = \int d^3x\,(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \equiv \int d^3x \mathscr{P}_0, \quad \mathbf{P} = \int d^3x \mathbf{E}\times\mathbf{H} \equiv \int d^3x \widehat{P}, \\
\mathbf{L} = \int d^3x \mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{H}), \ \mathscr{N} = \int d^3x\,[x_0 \mathbf{E}\times\mathbf{H} - \mathbf{x}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)], \\
\mathscr{D} = \int d^3x x_\mu \mathscr{P}^\mu, \quad \mathscr{K}_\mu = \int d^3x \left(2x_\mu x^\nu \mathscr{P}_\nu - x_\lambda x^\lambda \mathscr{P}_\mu\right).
\end{gathered} \tag{3.5.27}$$

Соотношения (3.5.27) задают хорошо известные классические интегралы движения электромагнитного поля в вакууме — энергию $\mathscr{E}$, импульс $\mathbf{P}$, угловой момент $\mathbf{L}$ и т. д. Эти интегралы движения (связанные с симметрией уравнений Максвелла относительно конформной группы) были впервые получены в работе [155] с использованием лагранжева формализма и теоремы Нетер.

В силу доказанной теоремы других интегралов движения, билинейно зависящих от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, для уравнений Максвелла не существует.

3.5.5. Интегралы движения, обусловленные скрытой симметрией уравнений Максвелла. Рассмотрим теперь интегралы движения более общего вида (3.5.18), которые зависят не только от напряженности электромагнитного поля, но и от первых производных от этой напряженности.

Тривиальный набор сохраняющихся величин, билинейно зависящих от векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и их производных, получаем с помощью подстановки в (3.5.18), (3.5.21) (вместо Q) всевозможных произведений генераторов конформной группы и найденных выше матриц (3.5.26). Сохранение таких величин во времени обусловлено релятивистской и конформной инвариантностью уравнений Максвелла. Законы сохранения такого типа были впервые обнаружены Липкиным [268] (см. также [249, 279]).

Найденные выше в п. 3.3.4 операторы симметрии уравнений Максвелла не принадлежат обертывающей алгебре алгебры AC(1, 3) и, следовательно, не связаны с инвариантностью этих уравнений относительно конформной группы. Подставляя их вместо Q в (3.5.18), (3.5.21), получаем принципиально новые интегралы движения, не имеющие ничего общего с релятивистской и конформной инвариантностью уравнений Максвелла.

Оказывается, однако, что для электромагнитного поля существуют еще более экзотические сохраняющиеся величины, которым вообще нельзя поставить в соответствие операторы симметрии. Ниже найден полный набор интегралов движения вида (3.5.18), включающий и такие величины.

Итак, ставится задача найти все возможные сохраняющиеся величины вида (3.5.18). Билинейную комбинацию $F\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}, x\right)$ представим в виде (3.5.22), где Q — неизвестный дифференциальный оператор второго порядка, коэффициентами которого являются матрицы размерности 6×6, зависящие от x. Этот оператор, не умаляя общности, можно выбрать формально самосопряженным.

Подставив (3.5.22) в (3.5.18) и дифференцируя последнее соотношение по времени, снова приходим к уравнению (3.5.24) для неизвестного оператора Q, где α_μ^a — также неизвестные дифференциальные операторы второго порядка.

Дальнейшие рассуждения будем строить по аналогии с доказательством теоремы 3.17. Представляя Q в виде (3.3.33), снова приходим к незацепляющимся уравнениям для четных и нечетных операторов Q_2 и Q_1:

$$[Q_1, \widehat{L}_1] = \alpha_{Q_1}^a \widehat{L}_2^a + \left(\alpha_{Q_1}^a \widehat{L}_2^a\right)^\dagger, \tag{3.5.28}$$

$$[Q_2, \widehat{L}_1] = \alpha_{Q_2}^a \widehat{L}_2^a + \left(\alpha_{Q_2}^a \widehat{L}_2^a\right)^\dagger. \tag{3.5.29}$$

Здесь Q_1, Q_2, $\alpha_{Q_1}^a$, $\alpha_{Q_2}^a$ — неизвестные дифференциальные операторы второго порядка вида (3.3.33), (3.3.35), $\widehat{L}_1$ и $\widehat{L}_2$ — операторы (3.3.40).

Таким образом, задача описания сохраняющихся величин вида (3.5.18) сводится к решению операторных уравнений (3.5.28) и (3.5.29). По сравнению с уравнениями (3.3.36), (3.3.37) для операторов симметрии в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ имеются два существенно новых момента:

1) отсутствуют условия коммутативности с оператором $\widehat{L}_2^a$ на множестве решений уравнений Максвелла (т. е. вторые уравнения (3.3.36) и (3.3.37));

2) отсутствуют антиэрмитовы члены, имеющиеся в уравнениях (3.3.36), (3.3.37).

Иными словами, условия, налагаемые на оператор Q сохраняющейся билинейной формы (3.5.18), (3.5.22), оказываются более слабыми, чем соответствующие уравнения для оператора симметрии $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_2$. Поэтому, как мы увидим ниже, сохраняющихся величин оказывается гораздо больше, чем операторов симметрии.

Можно показать (мы этого здесь делать не будем), что четные операторы $Q = Q_2$, удовлетворяющие уравнениям (3.5.29), сводятся к полиномам от генераторов конформной группы и найденных выше матриц (3.5.26) и поэтому не представляют особого интереса. Поэтому рассмотрим подробно только нечетные операторы $Q = Q_1$, которые должны удовлетворять условиям (3.5.28).

Поскольку Q_1, не умаляя общности, можно считать эрмитовым, уравнение (3.5.28) сводится к первому из уравнений (3.3.39). Представляя $Q_1 = Q_1^H$ и $\alpha^a_{Q_1}$ в форме (3.3.40), вычисляя необходимые коммутаторы и антикоммутаторы с использованием соотношений (3.3.42) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых матрицах и операторах дифференцирования, получаем из первого уравнения (3.3.39) следующую систему определяющих уравнений для коэффициентов оператора сохраняющейся билинейной формы:

$$D^{ab,cd}_{\alpha} = (\varepsilon_{adn}\varepsilon_{bck} + \varepsilon_{bdn}\varepsilon_{ack})\, U^{0kn}_{(\alpha)} + \delta_{ab}U^{0cd}_{(\alpha)} + \\ + \varepsilon_{ack}U^{kbd}_{(\alpha)} + \varepsilon_{bck}U^{kad}_{(\alpha)} + \varepsilon_{adk}U^{kbc}_{(\alpha)} + \varepsilon_{bdk}U^{kac}_{(\alpha)}, \qquad \alpha = 1, 3, \quad (3.5.30)$$

$$B^{ab}_{\alpha} = \frac{16}{7}U^{abn}_{(\alpha)n},$$

$$D^{ab}_{(\alpha)} = \frac{3}{5}\,\delta_{ab}U^{0nm}_{(\alpha)nm} - \frac{8}{5}\left(U^{0na}_{(\alpha)nb} + U^{0nb}_{(\alpha)na}\right) + i^{\alpha-1}\frac{12}{7}\dot{U}^{abn}_{(\alpha')n},$$

где $U^{\mu ab}_{(\alpha)}$ — симметричные бесследовые тензоры, удовлетворяющие уравнениям

$$U^{abc}_{(\alpha)d} - \frac{1}{7}\left(\delta_{ad}U^{cbn}_{(\alpha)n} + \delta_{bd}U^{acn}_{(\alpha)n} + \delta_{cd}U^{abn}_{(\alpha)n}\right) + \text{цикл } (abc, d) = 0,$$

$$U^{0ab}_{(\alpha)cd} - \frac{2}{7}\,\delta_{ab}\left(U^{0cn}_{(\alpha)dn} + U^{0dn}_{(\alpha)cn} + \frac{1}{2}U^{0cd}_{(\alpha)nn} - \frac{1}{5}\,\delta_{cd}U^{0nm}_{(\alpha)nm}\right) + \\ + \text{цикл } (ab, cd) = 0,$$

$$\dot{U}^{abc}_{(\alpha)} = \frac{1}{6}\,i^{\alpha+1}\left(U^{0ab}_{(\alpha')c} - \frac{2}{5}\,\delta_{ab}U^{0cn}_{(\alpha')n} + \varepsilon_{ckn}U^{kab}_{(\alpha')n}\right) + \\ + \text{цикл } (ab, c) = 0, \quad (3.5.31)$$

$$\dot{U}^{0ac}_{(\alpha)} = \frac{1}{3}\,i^{\alpha+1}\left(\varepsilon_{nck}U^{0ak}_{(\alpha')n} + \varepsilon_{nak}U^{0ck}_{(\alpha')n} - \frac{10}{7}\,\dot{U}^{acm}_{(\alpha')m}\right). \quad (3.5.32)$$

Здесь

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial x_0}, \qquad U_a = \frac{\partial U}{\partial x_a}, \qquad U_{ab} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_a \partial x_b}, \qquad \alpha' = \begin{cases} 1, \alpha = 3, \\ 3, \alpha = 1, \end{cases}$$

циклы $(abc,\ k)$, $(ab,\ c)$ и $(ab,\ cd)$ обозначают циклические перестановки индексов по схемам

$(abc,\ k) \Rightarrow abc,\ k + kbc,\ a + akc,\ b + abk,\ c,$

$(ab,\ c) \Rightarrow ab,\ c + ac,\ b + bc,\ a,$

$(ab,\ cd) \Rightarrow ab,\ cd + ac,\ bd + ad,\ bc + bc,\ ad + bd,\ ac + cd,\ ab.$

Таким образом, задача описания билинейных форм вида (3.5.18), сохраняющихся во времени в силу уравнений Максвелла, сводится к решению переопределенной системы уравнений (3.5.31), (3.5.32). Каждому решению этой системы сопоставляется интеграл движения по формулам (3.5.18), (3.5.22), (3.3.38), (3.3.40), (3.5.30), где $Q_1{}^A \equiv 0$.

Общее решение уравнений (3.5.31) задается следующими формулами:

$$U^{\mu bc}_{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{4} \Big[g_{\mu 0} \Big(U^{0bc}_{(\alpha\nu)} + U^{0cb}_{(\alpha\nu)} - \frac{2}{3}\,\delta_{bc} U^{0nn}_{(\alpha\nu)} \Big) + $$
$$+ (1 - g_{\mu 0}) \big(U^{\mu bc}_{(\alpha\nu)} + U^{\mu cb}_{(\alpha\nu)} - \frac{2}{5}\,\delta_{bc} U^{\mu nn}_{(\alpha\nu)} + \text{цикл } (bc, \mu) \Big], \quad (3.5.33)$$

$$U^{\mu bc}_{(\alpha 0)} = \nu^{\mu bc}_{(\alpha 0)},$$
$$U^{\mu bc}_{(\alpha 1)} = \varepsilon_{bdk} x_d \nu^{\mu ck}_{(\alpha 1)} + x_b \nu^{\mu c}_{(\alpha 1)} + g_{\mu 0} \lambda^{bck}_{(\alpha 1)} x_k,$$
$$U^{\mu bc}_{(\alpha 2)} = \nu^{\mu ck}_{(\alpha 2)} x_b x_k - \frac{1}{2}\,\nu^{\mu bc}_{(\alpha 2)} x^2 + \frac{1}{2}\,(x_b \varepsilon_{cfk} + x_c \varepsilon_{bfk})\, \nu^{\mu f}_{(\alpha 2)} x_k +$$
$$+ \nu^{\mu}_{(\alpha 2)} x_b x_c + g_{\mu 0} \Big(\frac{1}{2}\,\lambda^{0bc}_{(\alpha 2)} x^2 - \varepsilon_{can} \lambda^{bnk}_{(\alpha 2)} x_a x_k \Big), \quad (3.5.34)$$
$$U^{\mu bc}_{(\alpha 3)} = \nu^{\mu nl}_{(\alpha 3)} (\varepsilon_{ckn} x_b + \varepsilon_{bkn} x_c)\, x_k x_l - \varepsilon_{bnk} \nu^{\mu cn}_{(\alpha 3)} x_n x^2 +$$
$$+ g_{\mu 0} \Big(x_c \nu^{0b}_{(\alpha 3)} x^2 - 2 x_b x_c \nu^{0k}_{(\alpha 3)} x_k + x_b x_c \lambda^{k}_{(\alpha 3)} x_k +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\varepsilon_{cka} \lambda^{0bk}_{(\alpha 3)} x_a x^2 + 2 x_c \lambda^{bkn}_{(\alpha 3)} x_k x_n \Big) + (1 - g_{\mu 0})\, \varepsilon_{\mu kn} \nu^{n}_{(\alpha 3)} x_b x_c x_k,$$
$$U^{\mu bc}_{(\alpha 4)} = g_{\mu 0} \Big\{ \big(\nu^{ad}_{(\alpha 4)} x_a x_c - \nu^{cd}_{(\alpha 4)} x^2 \big)\, x_b x_d + \frac{1}{4}\,\nu^{bc}_{(\alpha 4)} x^4 +$$
$$+ \varepsilon_{cnk} \big(2 \lambda^{kmf}_{(\alpha 4)} x_b x_f - \lambda^{bkm}_{(\alpha 4)} x^2 + x_b \lambda^{k}_{(\alpha 4)} \big)\, x_n x_m +$$
$$+ \frac{1}{2} \Big[\big[\lambda^{bc}_{(\alpha 4)} x^4 + \big(\lambda_{(\alpha 4)} x^2 + \lambda^{kn}_{(\alpha 4)} x_k x_n \big)\, x_b x_c \Big] \Big\},$$

где греческими буквами обозначены произвольные функции от x_0 (символ ε_{bdk}, как обычно, обозначает абсолютно антисимметричный единичный тензор), все тензорные величины симметричны и бесследовы по верхним индексам. Подставив (3.5.33), (3.5.34) в (3.5.32), находим явный вид этих функций:

$$\nu^{\mu bc}_{(\alpha 0)} = \mu^{\mu bc}_{(\alpha 0)} - x_0^2 \Big(\xi^{\mu bc}_{(\alpha 2)} + \frac{1}{2}\,\mu^{\mu bc}_{(\alpha 2)} - 3 g_{\mu 0} \mu^{bc}_{(\alpha 2)} \Big) +$$
$$+ (1 - g_{\mu 0})\, \xi^{\mu bc}_{(\alpha 4)} x_0^4 + i^{\alpha - 1} \Big[x_0 \big(-2 \mu^{\mu bc}_{(\alpha' 1)} + 2 g_{\mu 0} \mu^{bc}_{(\alpha' 1)} + (g_{\mu 0} - 1)\, \xi^{\mu bc}_{(\alpha' 1)} \big) +$$
$$+ x_0^3 \Big(\frac{1}{2}\,(1 - g_{\mu 0})\, \xi^{\mu bc}_{(\alpha' 3)} + 2 g_{\mu 0} \big(\mu^{0bc}_{(\alpha' 3)} + \xi^{bc}_{(\alpha' 3)} \big) \Big) \Big],$$

$$\nu^{abc}_{(\alpha 1)} = \mu^{abc}_{(\alpha 1)} + \frac{1}{3} i^{\alpha-1} x_0 \left(2\mu^{abc}_{(\alpha' 2)} + \xi^{abc}_{(\alpha' 2)}\right) - \\ - x_0^2 \left(\frac{1}{2} \mu^{abc}_{(\alpha 3)} + \frac{1}{3} \xi^{abc}_{(\alpha 3)}\right) + x_0^3 \xi^{abc}_{(\alpha' 4)} i^{\alpha+1},$$

$$\nu^{0bc}_{(\alpha 1)} = \mu^{0bc}_{(\alpha 1)} + i^{\alpha+1} \left[x_0 \left(2\mu^{bc}_{(\alpha' 2)} + \eta^{bc}_{(\alpha' 2)} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{2}{3} \xi^{bc}_{(\alpha' 2)}\right) + x_0^3 \eta^{bc}_{(\alpha' 4)}\right] - x_0^2 \left(3\eta^{bc}_{(\alpha 3)} + \frac{7}{3} \xi^{bc}_{(\alpha 3)}\right),$$

$$\nu^{0a}_{(\alpha 1)} = \eta^{a}_{(\alpha 1)} + i^{\alpha+1} \left[x_0 \left(2\mu^{a}_{(\alpha' 2)} - \eta^{a}_{(\alpha' 2)}\right) + x_0^3 \xi^{a}_{(\alpha' 4)}\right] + \\ + x_0^2 \left(\eta^{a}_{(\alpha 3)} + 2\mu^{a}_{(\alpha 3)}\right), \qquad (3.5.35)$$

$$\nu^{0ab}_{(\alpha 2)} = \mu^{0ab}_{(\alpha 2)} + i^{\alpha-1} x_0 \left(\xi^{ab}_{(\alpha' 3)} + 6\eta^{ab}_{(\alpha' 3)}\right) + 3\eta^{ab}_{(\alpha 4)} x_0^2,$$

$$\nu^{abc}_{(\alpha 2)} = \mu^{abc}_{(\alpha 2)} + i^{\alpha+1} x_0 \left(4\mu^{abc}_{(\alpha' 3)} + \frac{2}{3} \xi^{abc}_{(\alpha' 3)}\right) - 2x_0^2 \xi^{abc}_{(\alpha 4)},$$

$$\nu^{0a}_{(\alpha 2)} = \mu^{a}_{(\alpha 2)} + i^{\alpha-1} x_0 \left(2\eta^{a}_{(\alpha' 3)} + \frac{8}{3} \mu^{a}_{(\alpha' 3)} - \frac{1}{3} \xi^{a}_{(\alpha' 3)}\right) - \frac{5}{3} \xi^{a}_{(\alpha 4)} x_0^2,$$

$$\nu^{ab}_{(\alpha 2)} = \mu^{ab}_{(\alpha 2)} + \frac{2}{3} i^{\alpha+1} x_0 \xi^{ab}_{(\alpha' 3)}, \qquad \nu^{0}_{(\alpha 2)} = \eta^{0}_{(\alpha 2)},$$

$$\nu^{a}_{(\alpha 2)} = \eta^{a}_{(\alpha 2)} + \frac{1}{3} i^{\alpha+1} x_0 \left(\frac{1}{2} \xi^{a}_{(\alpha' 3)} + 2\mu^{a}_{(\alpha' 3)}\right) + \frac{2}{3} x_0^2 \xi^{a}_{(\alpha 4)},$$

$$\lambda^{0ab}_{(\alpha 2)} = \xi^{ab}_{(\alpha 2)} + i^{\alpha-1} \left(5\mu^{ab}_{(\alpha' 3)} + \frac{8}{3} \xi^{ab}_{(\alpha' 3)}\right) x_0,$$

$$\nu^{abc}_{(\alpha 3)} = \mu^{abc}_{(\alpha 3)} + \frac{4}{3} i^{\alpha-1} x_0 \xi^{abc}_{(\alpha' 4)},$$

$$\nu^{a}_{(\alpha 3)} = \mu^{a}_{(\alpha 3)} + i^{\alpha+1} x_0 \xi^{a}_{(\alpha' 4)},$$

$$\nu^{0bc}_{(\alpha 3)} = \eta^{bc}_{(\alpha 3)} + i^{\alpha-1} x_0 \eta^{bc}_{(\alpha' 4)},$$

$$\lambda^{0a}_{(\alpha 3)} = \xi^{a}_{(\alpha 3)} + \frac{16}{3} i^{\alpha+1} x_0 \xi^{a}_{(\alpha' 4)},$$

$$\nu^{0a}_{(\alpha 3)} = \eta^{a}_{(\alpha 3)} + i^{\alpha+1} \frac{5}{3} x_0 \xi^{a}_{(\alpha' 4)},$$

$$\nu^{0bc}_{(\alpha 4)} = \eta^{bc}_{(\alpha 4)}, \lambda^{0a}_{(\alpha 4)} = \xi^{a}_{(\alpha 4)}.$$

Здесь греческими буквами в правых частях обозначены произвольные параметры, все тензоры симметричны и имеют нулевой след.

Таким образом, мы нашли все сохраняющиеся величины типа (3.5.18), порождаемые нечетными операторами $Q = Q_1$. Эти интегралы движения задаются формулами (3.5.18), (3.3.22), (3.3.38), (3.3.40), (3.5.30), (3.5.33)—(3.5.35). Число этих интегралов достаточно велико и равно числу произвольных параметров в (3.5.35), т. е. 236.

Мы видим, что сохраняющихся величин типа (3.5.18) существует значительно больше, чем операторов симметрии в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$. Следовательно, части интегралов движения нельзя сопоставить операторы симметрии. Эти интегралы движения получим, выбирая в (3.5.35) отличным от нуля любой из параметров $\mu^{0ab}_{(k\alpha)}$, $\mu^{ab}_{(k\alpha)}$, $\mu^{a}_{(k\alpha)}$ или $\xi^{\mu ab}_{(k\alpha)}$, $\xi^{ab}_{(k\alpha)}$, $\xi^{a}_{(k\alpha)}$.

Найденные выше интегралы движения представляют собой билинейные комбинации векторов напряженности электрического и магнитного полей и их производных и полиномы не выше четвертого порядка от независимых переменных x. Выпишем в явном виде соответствующие подынтегральные выражения для случая, когда степень этих полиномов не превышает двух:

$$
\begin{aligned}
F^{0ab}_{(10)} &= \dot{E}^a\dot{H}^b + \dot{E}^b\dot{H}^a + E^a_kH^b_k + E^b_kH^a_k,\\
F^{0ab}_{(30)} &= \dot{E}^a\dot{E}^b + E^a_kE^b_k - \dot{H}^a\dot{H}^b - H^a_kH^b_k,\\
F^{abc}_{(10)} &= \dot{H}^a\left(H^b_c + H^c_b\right) - \dot{E}^a\left(E^b_c + E^c_b\right) + \text{цикл }(bc, a),\\
F^{abc}_{(30)} &= \dot{E}^a\left(H^b_c + H^c_b\right) + \dot{H}^a\left(E^b_c + E^c_b\right) + \text{цикл }(bc, a),
\end{aligned}
\tag{3.5.36}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{\mu bc}_{(\alpha 1)} &= \varepsilon_{0bnf}F^{f\mu c}_{(\alpha 0)}x_n + \text{цикл }(\mu c, b) + 2i^{\alpha-1}x_0F^{\mu bc}_{(\alpha' 0)},\\
F^{\mu b}_{(\alpha 1)} &= F^{\mu b\nu}_{(\alpha 0)}x_\nu + i^{\alpha+1}(1 - g_{\mu 0})\dot{C}^{\mu b}_{(\alpha)},\\
\widetilde{F}^{abc}_{(\alpha 1)} &= x_aF^{0bc}_{(\alpha 0)} + \frac{1}{3}i^{\alpha-1}x_0F^{abc}_{(\alpha' 0)} + \text{цикл }(bc, a),\\
F^{\mu}_{(\alpha 2)} &= F^{\mu b}_{(\alpha 1)}x_b - g^{\mu 0}C^{nn}_{(\alpha)},\\
F^{0a}_{(\alpha 2)} &= F^{0ab}_{(\alpha 1)}x_b + i^{\alpha+1}x_0F^{0a}_{(\alpha' 1)},\\
F^{ab}_{(\alpha 2)} &= -\frac{1}{2}x_\mu x^\mu F^{0ab}_{(\alpha 0)} + \frac{1}{3}i^{\alpha-1}x_0\left(F^{ab}_{(\alpha' 1)} - F^{0ab}_{(\alpha' 1)}\right),\\
\widetilde{F}^{ab}_{(\alpha 2)} &= \frac{1}{2}F^{abc}_{(\alpha 1)}x_c + \frac{1}{3}\left(F^{ab}_{(\alpha' 1)} + 2F^{0ab}_{(\alpha' 1)}\right)x_0i^{\alpha-1} - 4C^{ab}_{(\alpha)},\\
F^{0ab}_{(\alpha 2)} &= -x_\mu x^\mu F^{0ab}_{(\alpha 0)} - x_aF^{0b}_{(\alpha 1)} - x_bF^{0a}_{(\alpha 1)} + i^{\alpha+1}x_0F^{0ab}_{(\alpha' 1)},\\
F^{abc}_{(\alpha 2)} &= \frac{3}{2}F^{0ab}_{(\alpha 1)}x_c + i^{\alpha-1}x_0\Big[-\delta_{ab}F^{c}_{(\alpha' 1)} +\\
&\qquad + \frac{1}{3}\left(F^{abc}_{(\alpha' 1)} + \widetilde{F}^{abc}_{(\alpha' 1)}\right)\Big] + \text{цикл }(ab, c),
\end{aligned}
\tag{3.5.37}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{F}^{abc}_{(\alpha 2)} &= \frac{3}{2}x_\mu x^\mu F^{abc}_{(\alpha 0)} + 3\widetilde{F}^{ab}_{(\alpha 1)}x_c + 3\dot{C}^{ab}_{(\alpha)}x_c - 6\delta_{ab}\dot{C}^{ck}_{(\alpha)}x_k +\\
&\qquad + i^{\alpha-1}x_0\left[2F^{a}_{(\alpha' 1)}\delta_{bc} + \frac{2}{3}\left(F^{abc}_{(\alpha' 1)} + \widetilde{F}^{abc}_{(\alpha' 1)}\right)\right] + \text{цикл }(ab, c).
\end{aligned}
$$

Здесь

$$C^{ab}_{(1)} = E^aE^b - H^aH^b, \quad C^{ab}_{(3)} = E^aH^b + E^bH^a,$$

$$\dot{C}^{ab}_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_0}C^{ab}_{(\alpha)}, \qquad \dot{E}^a = \frac{\partial}{\partial x_0}E^a, \qquad \dot{H}^a = \frac{\partial}{\partial x_0}H^a,$$

$$\alpha = 1, 3, \quad \alpha' = 1, 3, \quad \alpha' \neq \alpha.$$

Следы тензоров, входящих в соотношения (3.5.36), вносят нулевой вклад в интегралы (3.5.18). Независимость от времени интегралов (3.5.18) с приведенными в (3.5.36), (3.5.37) функциями несложно проверить прямым вычислением с использованием уравнений Максвелла.

Используя соотношения (3.5.22), (3.3.38), (3.3.40), (3.5.30), (3.5.33)—(3.5.35) и уравнения (1.3.3), (1.3.4), несложно найти явный вид интегралов движения, явно зависящих от x^3 и x^4. Мы не приводим соответствующие довольно громоздкие формулы.

Таким образом, наряду с классическими интегралами движения (3.5.27) для уравнений Максвелла существует набор сохраняющихся величин, перечисленных выше.

Следует подчеркнуть, что найденные в этом пункте интегралы движения не имеют ничего общего с теми, которые были получены Липкиным [268] и его последователями [249, 279], поскольку законы сохранения Липкина порождаются операторами, принадлежащими обертывающей алгебре алгебры Пункаре [279].

Интегралы движения электромагнитного поля, задаваемые соотношениями (3.5.18), (3.5.36), (3.5.37), пока не имеют прямой физической интерпретации, хотя не вызывает никаких сомнений тот факт, что они связаны с симметрией уравнений Максвелла относительно преобразований, перемешивающих состояния с различной поляризацией. Интерпретация этих сохраняющихся величин еще ждет своего исследования.

В заключение этого пункта приведем явные выражения для токов, соответствующих найденным выше интегралам движения. Обозначим, как обычно, символом $F^{\mu\nu}$ тензор электромагнитного поля, $\widetilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, $F^{\mu\nu}_{\lambda}=\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}F^{\mu\nu}$. Тогда следующие тензоры:

$$G^{\mu\nu\rho\sigma}_{\lambda\alpha}=F^{\mu\nu}_{\lambda}\widetilde{F}^{\rho\sigma}_{\alpha}+F^{\rho\sigma}_{\alpha}\widetilde{F}^{\mu\nu}_{\lambda}+F^{\mu\nu}_{\alpha}\widetilde{F}^{\rho\sigma}_{\lambda}+F^{\rho\sigma}_{\lambda}\widetilde{F}^{\mu\nu}_{\alpha}-$$
$$-g_{\lambda\alpha}\left(F^{\mu\nu}_{\beta}\widetilde{F}^{\rho\sigma}_{\gamma}+F^{\rho\sigma}_{\gamma}\widetilde{F}^{\mu\nu}_{\beta}\right)g^{\beta\gamma} \quad (3.5.38)$$

удовлетворяют непрерывности по индексам α и λ [249].

Перебирая интегралы движения (3.5.7), соответствующие тензорным токам (3.5.38), получаем сохраняющиеся величины $F^{\mu ab}_{(0\alpha)}$ (3.5.36). Токи, соответствующие сохраняющимся величинам (3.5.37), выражаются через различные свертки тензора $G^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\lambda}$ с x^{β} и тензоры $C^{ab}_{(\alpha)}$, $\dot{C}^{ab}_{(\alpha)}$.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

В этой главе рассматриваются релятивистские уравнения движения частицы произвольного спина во внешнем электромагнитном поле. Для некоторых классов внешних полей получены точные решения этих уравнений. В частности, решена задача о движении частицы произвольного спина в поле Кулона.

§ 4.1. Релятивистская частица произвольного спина во внешнем электромагнитном поле

4.1.1. Принцип минимального взаимодействия. Решения пуанкаре-инвариантных уравнений, рассматриваемых в гл. 2, определяют волновые функции частицы произвольного спина, которые могут использоваться при решении различных задач квантовой механики. Однако основная ценность подобных уравнений заключается в том, что они могут служить основой для описания взаимодействия частиц с внешним полем.

В случае, когда внешнее поле является электромагнитным, уравнение для взаимодействующей частицы может быть получено из соответствующего уравнения для свободной частицы с помощью замены

$$p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \tag{4.1.1}$$

где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, e — заряд частицы. Правило введения взаимодействия в уравнения для свободных частиц, задаваемое формулой (4.1.1), можно рассматривать как некоторый дополнительный постулат, называемый принципом минимального взаимодействия. Мы не будем обсуждать пределы применимости этого принципа, отметим только, что рецепт введения взаимодействия, определяемый соотношением (4.1.1), не является единственно возможным. Более общий подход предполагает учет также так называемого аномального взаимодействия, примеры которого рассматривались в пп. 3.4.2, 3.4.3.

Уравнения движения, получаемые из пуанкаре-инвариантных уравнений для свободной частицы с помощью замены (4.1.1), сохраняют пуанкаре-инвариантность, если волновая функция преобразуется по локально ковариантному закону (2.1.59). Однако, как оказалось, введение минимального взаимодействия в релятивистские уравнения для частиц со спином $s \geqslant 1$ приводит к трудностям принципиального характера, которые, коротко говоря, сводятся к следующему:

1. Система уравнений в частных производных, описывающая спиновую частицу, в результате замены (4.1.1) может стать несовместной. Такая ситуация возникает, например, с уравнениями Прока для векторных частиц [314].

2. Введение минимального взаимодействия в уравнение, описывающее свободную частицу с фиксированным спином s, может привести к уравнению, которое нельзя интерпретировать как уравнение движения объекта со спином s, так как соответствующая волновая функция имеет лишние (по сравнению с $2(2s+1)$) независимые компоненты. К такому результату приводят, в частности, уравнения Дирака для произвольного спина [271].

3. Уравнения для частицы спина $s > 1$, минимально взаимодействующей с внешним электромагнитным полем, будучи релятивистски инвариантными, тем не менее описывают распространение волны со сверхсветовой скоростью. Так, например, уравнение Дирака — Фирца — Паули для спина $s = 3/2$ (см. п. 2.3.6) после минимальной замены (4.1.1) для достаточно больших полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ $\left(\mathbf{E} = -\frac{\partial A}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}\right)$ перестает быть гиперболическим (т. е. вообще не имеет волновых решений), а для малых $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, оставаясь гиперболическим, описывает распространение волн со скоростью, превышающей скорость света [310]. Как следует из результатов работ [223, 314], такая ситуация является типичной для большинства релятивистских волновых уравнений, описывающих частицы с высшими спинами. И если трудности, перечисленные в пп. 1, 2 в основном можно обойти, потребовав, чтобы уравнения движения были уравнениями Эйлера — Лагранжа [184], то противоречия, связанные с нарушением принципа причинности, с неизбежностью следуют из того факта, что традиционно используемые релятивистские волновые уравнения в случае $s > 1/2$ включают лишние компоненты и при этом по существу являются нелокальными (так как гамильтониан частицы спина $s > 1$ является интегральным оператором — см. п. 2.3.7).

В связи с изложенным выше возникает естественный вопрос: пригодны ли для описания частиц с высшими спинами, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем, пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент и уравнения в форме Дирака, рассматриваемые в §§ 2.4, 2.5?

В этом и последующих параграфах мы покажем, что уравнения в форме Дирака для произвольного спина не приводят после замены (4.1.1) к нарушению принципа причинности. С использованием этих уравнений будет получено решение ряда важных задач о взаимодействии частицы произвольного спина с внешним электромагнитным полем — в том числе с полем точечного заряда.

4.1.2. Введение взаимодействия в уравнения первого порядка. В результате замены (4.1.1) уравнения (2.3.6) приводятся к виду

$$(\beta_\mu \pi^\mu - m)\Psi = 0. \qquad (4.1.2)$$

Если исходная система (2.3.6) пуанкаре-инвариантна, причем закон преобразования Ψ задается формулой (2.1.59), то такую же симметрию имеет и уравнение (4.1.2), поскольку преобразования Лоренца для p_μ и π_μ совпадают. Тем не менее в силу причин, изложенных выше, уравнения вида (4.1.2) для частиц произвольного спина в общем случае оказываются неудовлетворительными.

Здесь мы рассмотрим уравнения вида (4.1.2) для частиц со спинами $s=0$, 1/2, 1, определим соответствующие гамильтонианы и обсудим коротко проблемы, возникающие при использовании этих уравнений для решения конкретных физических задач.

Простейшим примером пуанкаре-инвариантного уравнения типа (4.1.2) является уравнение Дирака для электрона. Полагая в (4.1.2) $\beta_\mu = \gamma_\mu$ и умножая его слева на γ_0, приходим к уравнению в форме Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial x_0} \Psi = H(A_0, \boldsymbol{\pi})\Psi, \qquad (4.1.3)$$

где

$$H(A_0, \boldsymbol{\pi}) = \gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + eA_0. \qquad (4.1.4)$$

Гамильтониан заряженной частицы со спином 1/2 во внешнем электромагнитном поле представляет собой дифференциальный оператор, включающий производные не выше первого порядка, который формально эрмитов относительно скалярного произведения (1.2.40). Уравнение (4.1.3) удовлетворяет принципу причинности (см. об этом ниже п. 4.1.7) и служит адекватной математической моделью для широкого круга задач, в которых физически оправдана концепция внешнего поля.

Уравнения КДП для скалярных и векторных частиц, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем, также записываются в форме (4.1.2), где β_μ — матрицы КДП размерности 5×5 и 10×10 соответственно. Эти уравнения с помощью процедуры, аналогичной используемой в п. 2.3.6, могут быть сведены к форме Шредингера (4.1.3), где Ψ — волновая функция, имеющая $2(2s+1)$ компонент. Соответствующие гамильтонианы $H(A_0, \boldsymbol{\pi})$ имеют вид

$$s = 0, \qquad H = \sigma_1 m + (\sigma_1 - i\sigma_2)\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0, \qquad (4.1.5)$$

$$s = 1, \qquad H = \sigma_1 m + (\sigma_1 - i\sigma_2)\frac{\boldsymbol{\pi}^2 + e\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}}{2m} - i\sigma_2\frac{(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}{m} + eA_0, \quad (4.1.6)$$

где $\mathbf{H} = i\mathbf{p}\times\mathbf{A}$ — вектор напряженности магнитного поля, σ_1, σ_2 и $\mathbf{S}$ — матрицы (2.2.29), (2.4.12), (2.3.26).

Операторы (4.1.5), (4.1.6) эрмитовы относительно скалярного произведения (1.2.40) и в случае $e\to 0$ сводятся к гамильтонианам частиц спина 0 и 1 в форме (2.4.55), (2.4.57). Уравнения (4.1.3) с гамильтонианами (4.1.5), (4.1.6), как и уравнение Дирака, удовлетворяют принципу причинности.

Уравнение Дирака — Фирца — Паули после минимальной замены (4.1.1) теряет характер волнового уравнения, описывающего распространение волн с досветовой скоростью, и поэтому не будет рассматриваться ниже.

Таким образом, исходя из волновых уравнений первого порядка (4.1.2), мы получили уравнения в форме Шредингера без лишних компонент для частиц со спинами $s = 0,\ 1/2,\ 1$. Аналогичные уравнения для частиц с произвольным спином рассматриваются в следующем пункте.

4.1.3. Введение взаимодействия в уравнения типа Дирака. Уравнения для заряженной частицы произвольного спина во внешнем электромагнитном поле могут быть получены, исходя из уравнений движения для свободных частиц в форме Дирака (см. § 2.5).

Можно убедиться непосредственной проверкой, что минимальная замена (4.1.1) в уравнениях (2.5.1) и (2.5.14) приводит нас к такой системе уравнений, которая является непротиворечивой только в случае, когда тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ тождественно равен нулю. Чтобы обойти эту трудность, минимальное взаимодействие следует вводить в лагранжиан (2.5.24) или (что приводит к тому же результату) в уравнения (2.5.21). В результате получаем следующую систему второго порядка:

$$[B_s(\pi)(\Gamma_\mu\pi^\mu - m) + \varkappa(1 - B_s(\pi))]\Psi = 0, \tag{4.1.7}$$

где

$$B_s(\pi) = \frac{1}{16ms}\left(\Gamma_\mu\pi^\mu + m\right)(1 + i\Gamma_4)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]. \tag{4.1.8}$$

Умножая (4.1.7) на $B_s(\pi)$ и $1 - B_s(\pi)$ и принимая во внимание тождества

$$B_s(\pi)\,B_s(\pi) = B_s(\pi), \qquad B_s(\pi)\left(\Gamma_\mu\pi^\mu - m\right)B_s(\pi) =$$
$$= \left[\Gamma_\mu\pi^\mu + m + \frac{e}{4m}(1 - i\Gamma_4)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right)F^{\mu\nu}\right]B_s(\pi), \tag{4.1.9}$$

приходим к следующей эквивалентной системе уравнений первого порядка:

$$\left[\Gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}(1 - i\Gamma_4)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right)F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0, \tag{4.1.10}$$

$$[(\Gamma_\mu\pi^\mu + m)(1 + i\Gamma_4)[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)]\Psi = 16ms\Psi. \tag{4.1.11}$$

Таким образом, уравнения типа Дирака для частицы произвольного спина s во внешнем электромагнитном поле задаются формулами (4.1.11), (4.1.12). Мы видим, что введение минимального взаимодействия в лагранжиан (2.5.24) привело к появлению в уравнениях движения членов, пропорциональных тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$.

Покажем, что уравнения (4.1.11), (4.1.10) могут быть сведены к уравнениям типа Шредингера для $2(2s+1)$-компонентной волновой функции и некоторым дополнительным условиям, выражающим «лишние» (нефизические) компоненты функции Ψ через эту функцию. Умножив каждое из уравнений (4.1.10), (4.1.11) на Γ_0, приходим после несложных выкладок к системе в форме (2.5.15), где

$$H = \Gamma_0\Gamma_a\pi_a + \Gamma_0 m + \frac{e}{4m}\Gamma_0(1 - i\Gamma_4)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right)F^{\mu\nu}, \quad (4.1.12)$$

$$\widehat{P}_s = P_s + \frac{1}{2m}(1 - i\Gamma_4)\left[\Gamma_\mu\pi^\mu, P_s\right], \quad (4.1.13)$$

P_s — матрица из (2.5.16). Как нетрудно убедиться, используя тождество (2.5.18), уравнение (4.1.11) сводится к форме (2.5.16), (4.1.13), если принять во внимание уравнение (4.1.10).

Операторы (4.1.13) удовлетворяют условию $\widehat{P}_s^2 = \widehat{P}_s$ и являются проекторами на подпространство, соответствующее спину s. Как и в случае уравнений для свободных частиц, эти проекторы с помощью соответствующего преобразования типа (2.5.18), где V — оператор, получаемый из (2.5.18) заменой $\mathbf{p} \to \boldsymbol{\pi}$, могут быть сведены к числовым матрицам P_s (2.5.16). Одновременно гамильтониан (4.1.13) преобразуется к следующему виду:

$$H \to H' = VHV^{-1} = \Gamma_0 m + 2k_1\Gamma_4\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m}\Gamma_0(1 - i\Gamma_4) \times$$
$$\times \left\{\boldsymbol{\pi}^2 - 4k_1^2(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{s}\mathbf{S}\cdot[\mathbf{H} - i(1 - 2k_1 s)\mathbf{E}]\right\} + eA_0, \quad (4.1.14)$$

или, в представлении (2.5.20),

$$H = \sigma_1 m + \sigma_3 2k_1\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\Big[\boldsymbol{\pi}^2 - 4k_1^2(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 -$$
$$- \frac{1}{s}\mathbf{S}\cdot[\mathbf{H} - i(1 - 2k_1 s)\mathbf{E}] + eA_0. \quad (4.1.14')$$

Формула (4.1.14′) обобщает гамильтониан свободной частицы (2.4.48) на случай заряженной частицы, взаимодействующей с внешним полем. Таким образом, исходя из ковариантных уравнений первого порядка (4.1.10), (4.1.11), мы получили рецепт введения взаимодействия в уравнения без лишних компонент, которые не имеют явно ковариантной формы.

4.1.4. Четырехкомпонентные уравнения для бесспиновых частиц. Уравнения, рассматриваемые в предыдущем пункте, описывают частицы со спином 1/2, 1, 3/2, ... во внешнем электромагнитном поле. Здесь мы рассмотрим случай $s = 0$ и покажем, что бесспиновые частицы также могут быть описаны с помощью уравнений типа Дирака.

Как отмечалось в [199], уравнение Дирака для свободного электрона в принципе допускает интерпретацию как уравнение для бесспиновых частиц, поскольку на множестве его решений можно определить (нековариантное) представление алгебры Пуанкаре, соответствующее спину 0. Оказывается, такая интерпретация возможна и для уравнения, описывающего заряженную частицу во внешнем поле, если взаимодействие с этим полем учитывать специальным образом.

Рассмотрим уравнение

$$\left[\gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{iek}{4m}(1 - i\gamma_4)\,\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0, \qquad (4.1.15)$$

где γ_μ, γ_4 — четырехрядные матрицы Дирака, k — произвольный параметр.

Уравнение (4.1.15) явно ковариантно и в случае $k = 0$ совпадает с уравнением Дирака для электрона, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем. Слагаемое $\frac{iek}{4m}(1 - i\gamma_4)\,\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}$ можно интерпретировать как вклад от аномального взаимодействия типа Паули.

Покажем, что в случае $k = 1$ уравнение (4.1.15) описывает движение бесспиновой заряженной частицы. Для этого сначала умножим (4.1.17) на γ_0 и получим уравнение в форме Шредингера (4.1.3), где

$$H = \gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + eA_0 - \frac{ie}{4m}\gamma_0(1 - i\gamma_4)\,\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}.$$

Подвергая гамильтониан H преобразованию $H \to H' = VHV^{-1} - iV^{-1}\frac{\partial V}{\partial x_0}$, где

$$V = \exp\left[(1 - i\gamma_4)\frac{\gamma_a\pi_a}{2m}\right] = 1 + \frac{1}{2m}(1 - i\gamma_4)\,\gamma_a\pi_a,$$

получаем

$$H' = \gamma_0 m + \frac{1}{2m}\gamma_0(1 - i\gamma_4)\,\pi^2 + eA_0. \qquad (4.1.16)$$

Используя для матриц γ_μ, γ_4 представление (1.2.4), (1.2.16), гамильтониан H' можно записать в форме (4.1.5), где σ_1 и σ_2 — четырехрядные матрицы Паули (2.2.29). Иными словами, гамильтониан (4.1.16) представляет собой прямую сумму двух гамильтонианов для бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле.

4.1.5. Введение взаимодействия в уравнения без лишних компонент. Поскольку основные трудности с описанием частиц с высшими спинами во внешнем поле связаны с наличием лишних компонент в соответствующих релятивистских волновых уравнениях, возникает естественное желание научиться вводить взаимодействие непосредственно в уравнения движения с корректным числом компонент. Такие уравнения не имеют явно ковариантной формы, поэтому принцип минимального взаимодействия к ним, вообще говоря, неприменим, так как в результате замены (4.1.1) может нарушиться инвариантность относительно группы Пуанкаре.

Один из способов введения взаимодействия в дифференциальные уравнения движения без лишних компонент состоит в том, что минимальная замена (4.1.1) делается в соответствующем уравнении первого порядка, которое после устранения лишних компонент сводится к заданному уравнению в форме Шредингера. Именно таким путем были получены гамильтонианы (4.1.5)—(4.1.7), (4.1.16) для частиц произвольного спина во внешнем электромагнитном поле. Существуют, по-видимому, и другие возможности введения взаимодействия в уравнения без лишних компонент (см., например, [229]).

Здесь мы рассмотрим описание частиц произвольного спина во внешнем электромагнитном поле, которое базируется на уравнениях движения вида (2.4.1), где H_s — нелокальные интегральные гамильтонианы (2.4.43) или (2.4.39), (2.4.34). Ограничиваясь кругом задач, в которых импульсы частиц могут считаться малыми по сравнению с их массами покоя, представим гамильтонианы H_s^{I} и H_s^{II} в виде разложения по степеням $1/m$:

$$H_s^{\alpha} = \sigma_1\left[m + \frac{1}{4m} d_{ab}(p_a p_b + p_b p_a) + \sigma_3\left(2S_a p_a + \frac{1}{m^2} h^{\alpha}\right) + o\left(\frac{1}{m^3}\right),\right. \tag{4.1.17}$$

где

$$\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \qquad d_{ab} = \delta_{ab} - 4S_a S_b,$$
$$h^{\mathrm{II}} = -2h^{\mathrm{I}} = \frac{2}{3} S_a d_{bc} p_a p_b p_c. \tag{4.1.18}$$

Уравнения (2.4.1) с гамильтонианами (4.1.17), конечно, не инварианты относительно алгебры Пуанкаре и могут рассматриваться только в качестве некоторого квазирелятивистского приближения. Делая в этих уравнениях минимальную замену $p_\mu \to \pi_\mu$, приходим к следующим системам:

$$H^{\alpha}(\pi)\Psi = i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi,$$
$$H^{\alpha}(\pi) = \sigma_1[m + \boldsymbol{\pi}^2/2m - 2(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2/m + e\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}/m] + \tag{4.1.19}$$
$$+ \sigma_3[2\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + h^{\alpha}(\boldsymbol{\pi})/m^2] + eA_0 + o(1/m^3).$$

Как будет показано ниже, уравнения (4.1.19) удовлетворительно описывают поведение частицы произвольного спина в электромагнитном поле, учитывая такие хорошо известные физические эффекты, как дипольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия.

4.1.6. Разложение по степеням $1/m$. Как хорошо известно, релятивистские волновые уравнения допускают последовательную интерпретацию только во вторично квантованной теории, позволяющей избежать трудностей с интерпретацией отрицательной энергии. Однако для круга задач, в которых импульсы частиц малы по сравнению с их массами, эти уравнения могут служить вполне удовлетворительной математической моделью, так как в этом случае удается эффективно выделить решения, соответствующие положительным энергиям, которые допускают ясную физическую интерпретацию. Сказанное в полной мере относится к уравнениям движения частиц произвольного спина во внешнем электромагнитном поле, рассматриваемым в предыдущем пункте.

Гамильтонианы (4.1.4)—(4.1.6), (4.1.14′), (4.1.19) могут иметь как положительные, так и отрицательные собственные значения. Для того чтобы выделить состояния, соответствующие положительным энергиям, желательно преобразовать эти гамильтонианы к такому представлению, в котором оператор знака энергии $H/|H|$ диагонален. В случае $A_\mu \equiv 0$ преобразование гамильтонианов (4.1.4)—(4.1.6), (4.1.14), (2.4.44), (2.4.47), (2.4.52) к диагональной форме осуществляется обобщенными операторами типа Прайса — Фолди — Вуйтхойзена, рассматриваемыми в п. 2.4.6. При наличии же произвольного внешнего поля диагонализацию оператора знака энергии можно осуществить только приближенно, в предположении $\pi_\mu^2 \leqslant m^2$. Ниже мы осуществим такую диагонализацию и одновременно представим гамильтониан частицы произвольного спина в виде ряда по степеням $1/m$, удобном для вычислений по теории возмущений.

Рассмотрим сначала гамильтонианы (4.1.14′), (4.1.19), которые определены для произвольных значений спина s. Подвергая каждый из этих гамильтонианов серии последовательных преобразований

$$H^\alpha \to W^\alpha H\left(W^\alpha\right)^{-1} - i\,\frac{\partial W_1^\alpha}{\partial x_0}\left(W^\alpha\right)^{-1} = \left(H^\alpha\right)''',$$
$$\alpha = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}, \qquad W^\alpha = V_3^\alpha V_2^\alpha V_1^\alpha, \tag{4.1.20}$$

где

$$V_1^{\mathrm{II}} = V_1^{\mathrm{I}} = \exp\left(-\,i\sigma_2\,\frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right),$$
$$V_2^{\mathrm{I}} = V_2^{\mathrm{II}} = \exp\left(i\sigma_3\,\frac{e\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}}{2m^2}\right),$$
$$V_3^{\mu} = \exp\left\{-\,\frac{i}{2m^3}\,\sigma_2\left(h^\mu(\boldsymbol{\pi}) + \frac{4}{3}(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_0}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} - {}\right.\right.$$
$$\left.\left. -\,\frac{1}{2}\left[\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\pi}^2 - 2\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right]_+\right)\right\},$$
$$V_1^{\mathrm{III}} = \exp\left(-\,i\sigma_2\,\frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2sm}\right)\exp\left[\left(k_1 - \frac{1}{2s}\right)(\sigma_1 - i\sigma_2)\,\frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right], \tag{4.1.21}$$
$$V_2^{\mathrm{III}} = \exp\left\{-\,\frac{\sigma_3}{4m^2}\left[\boldsymbol{\pi}^2 - \left(\frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{s}\right)^2 - \frac{1}{s}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} + \frac{i}{s}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\right]\right\},$$
$$V_3^{\mathrm{III}} = \exp\left\{\frac{i\sigma_2}{8m^3}\left(\left[\frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{s},\ \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}}{s} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{s}\right)^2\right]_+ - {}\right.\right.$$
$$\left.\left. -\left[\boldsymbol{\pi}^2 - \left(\frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{s}\right)^2 - \frac{1}{s}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} + \frac{i}{s}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{E},\ \pi_0\right]_-\right)\right\}, \qquad \mu = \mathrm{I},\ \mathrm{II},$$

и пренебрегая на каждом этапе членами порядка $1/m^3$, получаем *)

$$(H^\alpha)''' = \sigma_1\left(m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - e\mu^\alpha \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}}{2m}\right) + eA_0 +$$

$$+ i\frac{e(\mu^\alpha)^2}{8m^2}[\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}, \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}] + \delta_{\alpha \mathrm{III}} i \frac{(2s-1)e}{4m^2s^2}[\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}, \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}] + o\left(\frac{1}{m^3}\right), \quad (4.1.22)$$

где

$$\mu^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{II}} = 2, \quad \mu^{\mathrm{III}} = 1/s. \quad (4.1.23)$$

Поскольку, по предположению, $m^2 \gg \pi_2^2$, гамильтониан (4.1.22) положительно определен на множестве функций Φ_+, удовлетворяющих условию $\sigma_1\Phi_+ = \Phi_+$. Для того чтобы выяснить физический смысл входящих в (4.1.22) слагаемых, воспользуемся тождеством

$$i[\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}, \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}] = \frac{1}{6}Q_{ab}\frac{\partial F_a}{\partial x_b} - \frac{1}{3}s(s+1)\operatorname{div}\mathbf{F} - \frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{F}), \quad (4.1.24)$$

где Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия,

$$Q_{ab} = 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1), \quad (4.1.25)$$

$\mathbf{F}$ — произвольный вектор, зависящий от x. В результате получаем

$$(H^\alpha)'''\Phi_+ = \left\{m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - e\mu^\alpha\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}}{2m} + eA_0 + \frac{e(\mu^\alpha)^2}{48m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - \right.$$

$$- \frac{e(\mu^\alpha)^2}{16m^2}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{E}) - \frac{e(\mu^\alpha)^2}{24m^2}s(s+1)\operatorname{div}\mathbf{E} +$$

$$\left. + \delta_{\alpha \mathrm{III}}\frac{(2s-1)e}{24m^2s^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} - \delta_{\alpha \mathrm{III}}\frac{(2s-1)e}{8m^2s^2}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{H})\right\}\Phi_+. \quad (4.1.26)$$

Формула (4.1.26) обобщает гамильтониан Паули для частицы со спином 1/2 во внешнем электромагнитном поле на случай частицы с произвольным спином. Гамильтониан $(H^\alpha)'''$ включает слагаемые, соответствующие дипольному $(\sim\mathbf{S}\cdot\mathbf{H})$, квадрупольному $\left(\sim Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$, спин-орбитальному $(\sim\mathbf{S}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{E}))$ и дарвиновскому $(\sim\operatorname{div}\mathbf{E})$ взаимодействиям частицы с полем, которые имеют ясный физический смысл. Для случая $\alpha = \mathrm{III}$ имеются дополнительные слагаемые (равные нулю при $s = 1/2$), которые можно интерпретировать как вклад от квадрупольного магнитного взаимодействия $\left(\sim Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right)$ и взаимодействия, которое сводится к спин-орбитальному для случая поля магнитного монополя.

Таким образом, исходя из уравнений без лишних компонент для частиц произвольного спина во внешнем электромагнитном

*) Более детальные выкладки, связанные с преобразованиями (4.1.20), приведены в [55, 66, 118].

поле, мы получили квазирелятивистские гамильтонианы (4.1.26). В рассматриваемом приближении $1/m^2$ гамильтонианы $(H^{\mathrm{I}})'''$ и $(H^{\mathrm{II}})'''$ совпадают, а гамильтониан $(H^{\mathrm{III}})'''$ отличается другим значением дипольного момента μ^α (см. (4.1.23)) и наличием дополнительных слагаемых, выражаемых через напряженность магнитного поля и производные от этой напряженности. В случае $s=1/2$ все три гамильтониана $(H^\alpha)'''$ сводятся к приближенному гамильтониану Фолди — Вуйтхойзена [188], получаемому при диагонализации уравнения Дирака.

Остановимся коротко на квазирелятивистском приближении для уравнений КДП, описывающих частицы со спинами $s=0$ и $s=1$ во внешнем электромагнитном поле. Применяя к гамильтонианам (4.1.5), (4.1.6) процедуру, аналогичную (4.1.20), можно показать [16], что с точностью до членов порядка $1/m^3$ они сводятся к следующей форме:

$$H''' = \sigma_1\left(m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right) + eA_0 - \frac{\sigma_1}{2m^3}\left\{\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2} + (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^4 - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\pi}^2, (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2]_+ - \frac{e}{4}[\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}, \boldsymbol{\pi}^2]_+ + \frac{e}{2}[\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}, (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2]_+ + e^2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{H})^2\right\}, \quad (4.1.27)$$

где $\mathbf{S}$ — матрицы, реализующие прямую сумму неприводимых представлений $D(1)\oplus D(1)$ алгебры AO(3) для случая, когда исходный гамильтониан имеет вид (4.1.6) и соответствует спину $s=1$, и $\mathbf{S}=0$ для случая нулевого спина.

Мы видим, что приближенные гамильтонианы, получаемые из уравнений КДП, не содержат членов, имеющих порядок $1/m^2$. Это означает, что уравнения КДП не описывают спин-орбитального взаимодействия частицы с полем — по крайней мере в рамках принципа минимального взаимодействия.

4.1.7. Причинность и волновые уравнения для частиц произвольного спина. В заключение этого параграфа покажем, что рассматриваемые здесь инвариантные уравнения не приводят к парадоксам с нарушением причинности.

Причинный характер уравнений типа Дирака проще всего установить с помощью перехода от (4.1.10), (4.1.11) к системе уравнений второго порядка для $(2s+1)$-компонентной волновой функции. Умножая каждое из этих уравнений на $\lambda^+ = \frac{1}{2}(1+i\Gamma_4)$ и $\lambda^- = \frac{1}{2}(1-i\Gamma_4)$ и выражая $\Psi_- = \lambda_-\Psi$ через $\Psi_+ = \lambda_+\Psi$, получаем

$$\left[\pi_\mu\pi^\mu - m^2 + \frac{e}{2s}S_\mu F^{\mu\nu}\right]\Psi_+ = 0, \quad (4.1.28)$$

$$[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s+1)]\Psi_+ = 0, \quad (4.1.29)$$

$$\Psi_- = \frac{1}{m}\Gamma_\mu\pi^\mu\Psi_+, \quad (4.1.30)$$

где мы воспользовались тождеством

$$(\Gamma_\mu \pi^\mu)^2 \equiv \pi_\mu \pi^\mu + \frac{ie}{2} \Gamma_\mu \Gamma_\nu F^{\mu\nu}.$$

Таким образом, уравнения (4.1.10), (4.1.11) могут быть сведены к системе уравнений (4.1.28), (4.1.29) для $4s$-компонентной функции Ψ_+, а остальные $4s$ компонент функции Ψ (т. е. Ψ_-) выражаются через Ψ_+ согласно (4.1.30).

На множестве функций Ψ_+ матрицы $S_{\mu\nu}$ реализуют прямую сумму представлений $D(s\ 0) \oplus D(s-1\ 0)$ алгебры АО(1, 3) (см. (2.5.7), (2.5.9)). Условие (4.1.29) означает, что $2s-1$ компонент функции Ψ_+ тождественно равны нулю, а оставшиеся $2s+1$ компонент образуют спинор из пространства представления $D(s\,0)$. С учетом вышесказанного уравнение (4.1.28) сводится к уравнению для функции $\Phi_s = P_s\Psi_+$, имеющей $2s+1$ отличных от нуля компонент, и при соответствующем выборе представления для матриц $S_{\mu\nu}$ может быть записано в виде

$$\left[\pi_\mu \pi^\mu - m^2 + \frac{e}{s} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} - i\mathbf{E})\right] \Phi_s = 0, \tag{4.1.31}$$

где Φ_s — $(2s+1)$-компонентная функция, $\mathbf{S}$ — матрицы размерности $(2s+1) \times (2s+1)$, реализующие неприводимое представление $D(s)$ алгебры АО(3).

Формула (4.1.31) определяет уравнение в частных производных второго порядка, описывающее частицу с произвольным спином s. Оператор в квадратных скобках включает оператор Клейна — Гордона — Фока $\pi_\mu\pi^\mu - m^2$ и дополнительное слагаемое, линейно зависящее от напряженности поля. Классические решения такого уравнения описывают причинное распространение волн с досветовой скоростью [240]. Таковы же, очевидно, свойства решений исходной системы (4.1.10), (4.1.11), выражаемых через Φ_s и производные от Φ_s.

Для анализа уравнений КДП, описывающих скалярные и векторные частицы, удобно воспользоваться шредингеровой формулировкой (4.1.1), (4.1.5), (4.1.6). Умножая левые и правые части этих уравнений на π_0, приходим к системам второго порядка следующего вида:

$$(\pi_\mu \pi^\mu - m^2 + B)\Psi = 0, \tag{4.1.32}$$

где

$$B = \frac{ie}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\pi}), \quad s = 0,$$

$$B = \frac{ie}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\left(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{\partial}{\partial x_0}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right) - i\sigma_2[\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}, \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}]_+, \quad s = 1. \tag{4.1.33}$$

Но согласно критерию, предложенному Вайтманом (см. [230]), решения уравнений второго порядка вида (4.1.32) удовлетворяют принципу причинности (т. е. соответствующее уравнение принадлежит гиперболическому типу), если оператор B включает операторы дифференцирования не выше первого порядка. Это в действительности имеет место для операторов (4.1.33), откуда следует вывод о причинном характере уравнений КПД с минимальным взаимодействием. Отметим, что для уравнений КДП, учитывающих аномальное взаимодействие частицы с внешним полем, принцип причинности несправедлив.

4.1.8. Уравнения для системы с переменным спином. Возвратимся еще раз к системе уравнений (4.1.10), (4.1.11) для частицы во внешнем электромагнитном поле и покажем, как ее следует видоизменить для случая, когда частица может находиться в состояниях с различным значением спина.

Уравнение (4.1.10) имеет ясный физический смысл даже без учета дополнительного условия (4.1.11). Действительно, как показано в п. 4.1.3, оно может быть сведено к прямой сумме уравнений (2.4.1), (4.1.14′) для частиц со спинами s и $s-1$.

Уравнение (4.1.10) сохраняет разумную интерпретацию и в том случае, когда матрицы $S_{\mu\nu}$ реализуют представление более общего вида, чем задаваемое формулой (2.5.10). Здесь мы рассмотрим случай, когда $S_{\mu\nu}$ принадлежат представлению

$$D=\left[D\left(0\,\frac{1}{2}\right)\oplus D\left(\frac{1}{2}\,0\right)\right]\otimes D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s-1}{2}\right)=$$
$$=D\left(\frac{s+1}{2}\,\frac{s-1}{2}\right)\oplus D\left(\frac{s-1}{2}\,\frac{s-1}{2}\right)\oplus D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s}{2}\right)\oplus D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s-2}{2}\right). \quad (4.1.34)$$

Подвергая соответствующий гамильтониан (4.1.12) преобразованию (4.1.14), получаем для $k_1=0$

$$H'=\Gamma_0 m+\frac{1}{2m}\Gamma_0(1-i\Gamma_4)\left(\pi^2-\frac{1}{s}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)+eA_0. \quad (4.1.35)$$

Для матриц Γ_4 и $S_{\mu\nu}$ справедливо тождество

$$(1-i\Gamma_4)S_{\mu\nu}\equiv(1-i\Gamma_4)\widehat{S}_{\mu\nu},$$

где $\widehat{S}_{\mu\nu}$ принадлежат представлению $D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s}{2}\right)\oplus D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s-2}{2}\right)\oplus$ $\oplus D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s-2}{2}\right)\oplus D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s}{2}\right)$. Выбирая Γ_0 и Γ_4 в форме (2.5.20), где σ_a и $\widetilde{\sigma}_a$ — матрицы Паули размерности $2(s+1)^2\times 2(s+1)^2$ и $2(s^2-1)\times 2(s^2-1)$, а $\widehat{S}_{\mu\nu}$ — в виде прямой суммы матриц $S^{(1)}_{\mu\nu}\subset$ $\subset D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s}{2}\right)$ и $S^{(2)}_{\mu\nu}\subset D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s-2}{2}\right)$, получаем гамильтониан H' в виде прямой суммы операторов H_1 и H_2, где

$$\begin{aligned}H_1&=\sigma_1 m+(\sigma_1-i\sigma_2)\frac{1}{2m}\left(\pi^2-\frac{1}{s}S^{(1)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)+eA_0,\\ H_2&=\widetilde{\sigma}_1 m+(\widetilde{\sigma}_1-i\widetilde{\sigma}_2)\frac{1}{2m}\left(\pi^2-\frac{1}{s}S^{(2)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)+eA_0.\end{aligned} \quad (4.1.36)$$

Соответствующее уравнение Шредингера распадается на два незацепляющихся уравнения с гамильтонианами H_1 и H_2. Выпишем первое из них:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi=\left[\sigma_1 m+(\sigma_1-i\sigma_2)\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\pi}^2-\frac{1}{s}S^{(1)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)+eA_0\right]\Psi. \quad (4.1.37)$$

Уравнение (4.1.37) отличается от рассматриваемого выше уравнения (2.4.1), (4.1.14′) только представлением, реализуемым матрицами $S_{\mu\nu}$. При редукции по подалгебре АО(3) представление $D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s}{2}\right)$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений

$$D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s}{2}\right)\Rightarrow D(s)\oplus D(s-1)\oplus\,\ldots\,\oplus D(0),$$

что дает основание интерпретировать (4.1.37) как уравнение для квазичастицы, которая может находиться в различных спиновых состояниях со значениями спина s, $s-1$, …, 0.

Уравнение (4.1.37) инвариантно относительно преобразований P, T и C. Операторы этих преобразований задаются формулами (2.4.17), где

$$\begin{gathered}r_1=\sigma_1\eta,\qquad r_2=\sigma_2\eta\Delta,\qquad r_3=\sigma_2\Delta,\\ \eta=\begin{pmatrix}\eta' & 0\\ 0 & \eta'\end{pmatrix},\qquad \Delta=\begin{pmatrix}\Delta' & 0\\ 0 & \Delta'\end{pmatrix},\end{gathered} \quad (4.1.38)$$

а η' и Δ' — матрицы, с точностью до закона определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\eta' S_{ab}=S_{ab}\eta',\qquad \eta' S_{0a}=-S_{0a}\eta',\\ \Delta' S_{\mu\nu}=-S^{*}_{\mu\nu}\Delta',\qquad (\Delta')^2=(-1)^{2s},\quad (\eta')^2=1.\end{gathered}$$

Явные выражения η' и Δ', которые нам не понадобятся, легко получить с использованием результатов п. 2.2.6.

С помощью процедуры, аналогичной (4.1.20)—(4.1.26), уравнение (4.1.37) может быть приведено к квазидиагональной форме. Соответствующий приближенный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}H'=\sigma_1\left(m+\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}-\frac{e}{2sm}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right)+eA_0-\frac{e}{16m^2s^2}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{E}\times\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E})-\\ -\frac{e}{24m^2s^2}\left[\frac{1}{2}Q'_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}-\mathbf{N}^2\operatorname{div}\mathbf{E}\right]+\\ +\frac{ie(2s-1)}{8m^2s^2}\mathbf{N}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H}-\mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi})+\frac{e}{24m^2s^2}Q''_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b},\end{aligned} \quad (4.1.39)$$

где

$$\begin{gathered}Q'_{ab}=-3[N_a,N_b]_{+}+2\delta_{ab}\mathbf{N}^2,\qquad N_a=S^{(1)}_{0a},\\ Q''_{ab}=-\frac{3}{2}i([N_a,S_b]_{+}+[N_b,S_a]_{+})+2i\mathbf{S}\cdot\mathbf{N}\delta_{ab},\qquad S_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S^{(1)}_{bc},\end{gathered}$$

а $S^{(1)}_{ab}$ — матрицы, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений $D\left(\frac{s}{2}\,\frac{s}{2}\right)$.

Все члены, входящие в гамильтониан (4.1.39), P-, C- и T-инвариантны. Пренебрегая в нем слагаемыми порядка $1/m^2$, получаем прямую сумму гамильтонианов Паули для частиц со спинами s, $s-1$, $s-2$, ..., 0, что подтверждает нашу интерпретацию уравнения (4.1.37) как уравнения для системы с переменным спином.

§ 4.2. Решение релятивистских волновых уравнений для частиц произвольного спина

4.2.1. Введение. Основное содержание этого параграфа — построение точных решений уравнений движения релятивистских частиц произвольного спина s во внешнем электромагнитном поле.

Даже для случаев $s=0$ и $s=1/2$ таких точных решений известно совсем немного. Наиболее интересными с точки зрения физики точно решаемыми задачами являются следующие: частица в поле Кулона [173], частица в постоянном магнитном поле [296], частица в поле плоской электромагнитной волны [311], частица в поле Редмонда (представляющая собой комбинацию постоянного магнитного и плосковолнового полей [299]) и, наконец, частица в поле магнитного заряда (монополя) [235]. Точным решениям релятивистских уравнений для частиц спина $s=0$ и $s=1/2$ посвящена отдельная монография [2] (см. также [1, 5], где важнейшие из таких решений изложены с достаточной полнотой).

Построение соответствующих точных решений для частиц со спином $s>1/2$, во-первых, осложняется в связи с ростом числа компонент волновой функции, а во-вторых, связано с преодолением дополнительных трудностей — нарушением причинности, отсутствием устойчивых решений в задаче Кулона для уравнения КДП и других [92]. Ряд точных решений уравнений для векторных частиц получен в работах [14, 15, 43, 80].

Оказывается, однако, что перечисленные выше задачи имеют физически разумные точные решения и для случая частиц с произвольным значением спина s, если исходить из уравнений движения таких частиц в обобщенной форме Дирака (4.1.11), (4.1.10) [69]. Важнейшее из этих решений приведено ниже.

4.2.2. Свободное движение частиц. Знание явного вида волновых функций невзаимодействующих частиц необходимо для многих задач теоретической физики [1, 5], поэтому приведем решения уравнений (4.1.10), (4.1.11) для случая, когда внешнее поле отсутствует (т. е. $A_\mu = F^{\mu\nu} = 0$).

Вместо уравнений (4.1.10), (4.1.11) удобнее рассматривать эквивалентную систему (4.1.28)—(4.1.30) (где в нашем случае $\pi_\mu = p_\mu$ и $F^{\mu\nu}=0$). Действительно, каждое решение системы (4.1.28)—(4.1.30) удовлетворяет (4.1.10), (4.1.11) и, наоборот, каждое решение уравнений (4.1.10), (4.1.11) одновременно является решением системы (4.1.28)—(4.1.30). В то же время нахождение решений системы (4.1.28)—(4.1.30) технически гораздо проще, так как по существу достаточно решить соответствующее уравнение (4.1.28), по решениям которого однозначно восстанавливается явный вид $8s$-компонентной функции Ψ.

В отсутствие электромагнитного поля система (4.1.28)—(4.1.30) принимает вид (см. (2.5.18))

$$(p_\mu p^\mu - m^2)\Psi^{(+)} = 0, \tag{4.2.1}$$

$$P_s \Psi^{(+)} = 0, \qquad P_s = \frac{1}{4s}[S_{ab}S_{ab} - 2s(s-1)], \tag{4.2.2}$$

$$\Psi^{(-)} = \frac{1}{m}\Gamma_\mu p^\mu \Psi^{(+)}, \qquad \Psi^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm i\Gamma_4)\Psi. \tag{4.2.3}$$

Будем исходить из представления матриц Γ_4, задаваемого соотношениями (2.6.18). Матрицы $S_{\mu\nu}$ выберем в форме

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \widetilde{S}_{ab} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{ab} \end{pmatrix}, \qquad S_{0a} = \begin{pmatrix} S'_{0a} & 0 \\ 0 & S''_{0a} \end{pmatrix}, \tag{4.2.4}$$

где $\{\widetilde{S}_{ab}, S'_{0a}\}$ и $\{\widetilde{S}_{ab}, S''_{0a}\}$ — наборы матриц, реализующие представления $D(s\ 0) \oplus D(s-1\ 0)$ и $D\left(s - \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$ алгебры АО(1, 3), которые могут быть записаны в виде (ср. (2.1.66))

$$\widetilde{S}_{ab} = \varepsilon_{abc}\widehat{S}_c = \begin{pmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S'_c \end{pmatrix}, \qquad S'_{0a} = -i\widehat{S}_a,$$
$$S''_{0a} = -i\begin{pmatrix} (s-1)S_a & K_a^\dagger \\ K_a & (s+1)S'_a \end{pmatrix}, \tag{4.2.5}$$

где S_a и S'_a — генераторы неприводимых представлений $D(s)$ и $D(s-1)$ соответственно группы $O(3)$, $K_a = K_a^s$ — матрицы размерности $(2s-1)\times(2s+1)$, явный вид которых приведен в (2.1.68). Тогда для матриц σ_a из (2.6.18) получаем следующие выражения (см. (2.5.7)):

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\widetilde{S}_{bc} - iS''_{0a} = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} S_a & -K_a^\dagger \\ K_a & -S'_a \end{pmatrix}. \tag{4.2.6}$$

Найдем общее решение системы уравнений (4.2.1)—(4.2.3) в представлении (2.6.18), (4.2.4)—(4.2.6). Поскольку каждая компонента функции $\Psi = \Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}$ удовлетворяет уравнению КГФ, такое решение удобно представить в виде интеграла Фурье

$$\Psi(x_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{dE}\left(\widetilde{\Psi}_+ \exp[i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Ex_0)] + \widetilde{\Psi}_- \exp[i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + Ex_0)]\right), \tag{4.2.7}$$

где $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, а фурье-компоненты $\widetilde{\Psi}_\pm$ удовлетворяют, согласно (4.2.1)—(4.2.3), следующим условиям:

$$P_s\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(+)} = \widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(+)}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{4.2.8}$$

$$(\varepsilon\Gamma_0 E - \mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{p})\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(+)} = m\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(-)}, \qquad \widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm i\Gamma_4)\widetilde{\Psi}_\varepsilon. \tag{4.2.9}$$

Здесь P_s — оператор проектирования на подпространство, соответствующее спину s (см. (4.2.2)).

В представлении (2.6.18), (4.2.4)—(4.2.6) $\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(\pm)}$ задаются столбцами следующего вида:

$$\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(+)} = \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{\Psi}}_\varepsilon^{(+)} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\widetilde{\Psi}}_\varepsilon^{(-)} \end{pmatrix}, \tag{4.2.10}$$

где $\widetilde{\widetilde{\Psi}}_\varepsilon^{(\pm)}$ — $4s$-компонентные спиноры, 0 — нулевые столбцы, имеющие $4s$ строк. Из (4.2.8), (4.2.9) заключаем, что

$$\widetilde{\widetilde{\Psi}}_\varepsilon^{(+)} = \begin{pmatrix} \Phi_\varepsilon^s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\widetilde{\Psi}}_\varepsilon^{(-)} = \frac{1}{m}(\varepsilon E + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\,\widetilde{\widetilde{\Psi}}_\varepsilon^{(+)} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \left(E + \frac{1}{s}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\right)\Phi_\varepsilon^s \\ -\frac{1}{s}\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}\Phi_\varepsilon^s \end{pmatrix}. \tag{4.2.11}$$

Здесь Φ_ε^s — $(2s+1)$-компонентный спинор, 0 — столбец из $2s-1$ нулей, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{K}$ — матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$ и $(2s-1)\times\times(2s+1)$ соответственно, явный вид которых задан в формулах (2.1.67), (2.1.68).

Таким образом, общее решение системы уравнений (4.2.1)—(4.2.3) может быть представлено в форме (4.2.7), где

$$\widetilde{\Psi}_\varepsilon = \widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(+)} + \widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(-)}, \tag{4.2.12}$$

а $\Psi_\varepsilon^{(\pm)}$ — спиноры, задаваемые формулами (4.2.10), (4.2.11). Это решение определено с точностью до двух произвольных функций Φ_+^s и Φ_-^s, каждая из которых имеет $2s+1$ компонент.

Спиноры Φ_ε^s представим в виде линейной комбинации линейно независимых величин $\widetilde{\Phi}_\mu^s$:

$$\Phi_\varepsilon^s = \sum_{\mu=-s}^{s} a_\mu^\varepsilon(\mathbf{p}) \frac{m}{\sqrt{2E\left(E + \frac{\mu}{s}\,p\right)}}\,\widetilde{\Phi}_\mu^s, \tag{4.2.13}$$

где $\{\widetilde{\Phi}_\mu^s\}$ — ортонормированный полный набор собственных функций оператора спиральности, так что

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\widetilde{\Phi}_\mu^s = \mu p \widetilde{\Phi}_\mu^s, \qquad \widetilde{\Phi}_\mu^{s\dagger}\widetilde{\Phi}_\nu^s = \delta_{\mu\nu}, \tag{4.2.14}$$

$\dfrac{m}{\sqrt{2E\left(E + \frac{\mu}{s}\,p\right)}}$ — нормировочный множитель, $a_\mu^\varepsilon(p)$ — произвольные квадратично интегрируемые функции. Соответствующие решения (4.2.7) записываются в виде

$$\Psi(x_0, \mathbf{x}) = \sum_{\mu,\varepsilon} \int \frac{d^3p}{2E}\, a_\mu^\varepsilon(\mathbf{p})\, \Psi^{\mu\varepsilon} \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\varepsilon x_0 E), \tag{4.2.15}$$

где $\Psi^{\mu\varepsilon}$ — $8s$-компонентные спиноры, задаваемые формулами (см.

(4.2.10) — (4.2.13), (2.1.68))

$$\Psi^{\mu\varepsilon} = \frac{m}{\sqrt{2E\left(E + \frac{\mu}{s}p\right)}}\begin{pmatrix}\Psi_1^{\mu}\\ \Psi_2^{\mu\varepsilon}\end{pmatrix}, \quad \Psi_1^{\mu} = \begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s}\\ 0\end{pmatrix}, \quad \Psi_2^{\mu\varepsilon} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix}\left(\varepsilon E + \frac{\mu}{s}p\right)\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s}\\ -\frac{1}{s}\sqrt{s^2-\mu^2}\,\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s-1}\end{pmatrix}. \tag{4.2.16}$$

Здесь $\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s}$ и $\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s-1}$ — собственные векторы оператора спиральности для спина s и $s-1$ соответственно. Функции $\Psi^{\mu\varepsilon}$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\widetilde{\Phi}^{\mu\varepsilon\dagger}\widetilde{\Phi}^{\mu'\varepsilon'} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{\mu\mu'}. \tag{4.2.17}$$

Приведем еще явный вид $\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s}$. Решения уравнений (4.2.14), с точностью до фазовых множителей, могут быть заданы формулой

$$(\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s})_{\lambda} = U_{s+1-\mu,\lambda}^{s}, \tag{4.2.18}$$

где $(\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s})_{\lambda}$ обозначает строку спинора $\widetilde{\Phi}_{\mu}^{s}$ с номером λ, $U_{a,b}^{s}$ — матричные элементы матрицы U^s (a — номер строки, b — столбца), диагонализующей оператор спиральности, т. е. удовлетворяющей условиям $(U^s)^{-1}\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}U^s = S_3 p$. Такую матрицу, не умаляя общности, можно выбрать в виде

$$U^s = \exp\left[i\frac{S_1p_2 - S_2p_1}{(p_1^2+p_2^2)^{1/2}}\operatorname{arctg}\frac{p_3}{(p_1^2+p_2^2)^{1/2}}\right] = \exp(iS\theta), \tag{4.2.19}$$

где

$$S = \frac{i}{2}\left[(S_1 + iS_2)\exp(i\varphi) - (S_1 - iS_2)\exp(-i\varphi)\right], \tag{4.2.20}$$

θ и φ — полярный угол и азимут вектора $\mathbf{p}$.

Матрица (4.2.19) сводится к полиному степени $2s$ от S и может быть записана в форме

$$U^s = \sum_{\nu=-s}^{s}[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)]\Lambda_\nu, \quad \Lambda_\nu = \prod_{\nu'=-s'}^{s}\frac{S-\nu'}{\nu-\nu'}. \tag{4.2.21}$$

Здесь Λ_ν — проекторы на подпространство собственных векторов матрицы S (ср. (2.4.25)), ν, $\nu' = -s, -s+1, \ldots, s$.

Для каждого конкретного значения спина s вычисление явного вида матрицы U^s не составляет особого труда, если воспользоваться соотношениями (2.4.27). В частности, для $s = 1/2$, 1, 3/2 получаем

$$U^{1/2} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\varphi}\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\,e^{2i\varphi} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta e^{-i\varphi} & \cos\theta & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta e^{i\varphi} \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta)e^{-2i\varphi} & \sqrt{2}\sin\theta e^{-i\varphi} & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \end{pmatrix},$$

$$U^{3/2} = \frac{1}{4}\times$$

$$\times \begin{pmatrix} 3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2} & -\sqrt{3}e^{i\varphi}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right) & -\sqrt{3}e^{2i\varphi}\left(\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right) & e^{3i\varphi}\left(\sin\frac{3\theta}{2}-3\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ \sqrt{3}e^{i\varphi}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{3\theta}{2} & e^{-i\varphi}\left(3\sin\frac{3\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right) & -\sqrt{3}e^{2i\varphi}\left(\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sqrt{3}e^{2i\varphi}\left(\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right) & e^{i\varphi}\left(3\sin\frac{3\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{3\theta}{2} & -\sqrt{3}e^{i\varphi}\left(\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ -e^{3i\varphi}\left(\sin\frac{3\theta}{2}-3\sin\frac{\theta}{2}\right) & -\sqrt{3}e^{2i\varphi}\left(\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right) & \sqrt{3}e^{i\varphi}\left(\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right) & 3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.2.22}$$

Столбец каждой из матриц (4.2.22) с номером ν совпадает с соответствующим спинором $\widetilde{\Phi}^s_{s+1-\nu}$, например,

$$\widetilde{\Phi}^{1/2}_{1/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi}^{1/2}_{-1/2} = \begin{pmatrix} -e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.2.23}$$

Формулы (4.2.15), (4.2.16) (при $s = 1/2$) и (4.2.23) определяют решение четырехкомпонентного уравнения Дирака для невзаимодействующей частицы.

Иногда вместо разложения (4.2.13) бывает удобнее представить Φ^s_ε в виде

$$\Phi^s_\varepsilon = \sum_{\nu=-s}^{s} b^\varepsilon_\mu(\mathbf{p})\,\Omega^s_\mu, \tag{4.2.24}$$

Ω^s_μ — собственные векторы матрицы S_3, соответствующие собственному значению μ. Не умаляя общности, можно выбрать Ω_s в виде

$(2s+1)$-компонентных столбцов

$$\Omega_s^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{s-1}^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \quad \Omega_{-s}^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.2.25)$$

Соответствующее представление общего решения уравнений (4.2.1) — (4.2.3) может быть получено из (4.2.15) заменой $a_\mu^\varepsilon(\mathbf{p}) \to b_\mu^\varepsilon(\mathbf{p})$, $\Psi^{\mu\varepsilon} \to \chi^{\mu\varepsilon}$, где

$$\chi^{\mu\varepsilon} = \frac{m}{\sqrt{2E\left(E + \frac{\mu}{s}p_3\right)}} \begin{pmatrix} \chi_1^\mu \\ \chi_2^{\mu\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \chi_1^\mu = \begin{pmatrix} \Omega_\mu^s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2^{\mu\varepsilon} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \varphi_\mu^\varepsilon \\ \tilde{\varphi}_\mu \end{pmatrix},$$

$$\varphi_\mu^\varepsilon = \left(\varepsilon E + \frac{\mu}{s}p_3\right)\Omega_\mu^s + \frac{1}{2s}\sqrt{s(s+1) - \mu(\mu+1)}\,(p_1 - ip_2)\,\Omega_{\mu+1}^s + \\ + \frac{1}{2s}\sqrt{s(s+1) - \mu(\mu-1)}\,(p_1 + ip_2)\,\Omega_{\mu-1}^s,$$

$$\tilde{\varphi}_\mu = -\frac{1}{s}\sqrt{s^2 - \mu^2}\,p_3\Omega_\mu^{s-1} - \frac{1}{2s}\sqrt{s(s-1) - \mu(\mu-1) + 2\mu s}\,(p_1 - \\ - ip_2)\,\Omega_{\mu+1}^{s-1} - \frac{1}{2s}\sqrt{s(s-1) + \mu(\mu+1) - 2\mu s}\,(p_1 + ip_2)\,\Omega_{\mu-1}^{s-1}.$$

$$(4.2.26)$$

Спиноры $\chi^{\mu\varepsilon}$ также удовлетворяют условиям нормировки $\chi^{\mu\varepsilon\dagger}\chi^{\mu'\varepsilon'} = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$ и задают базис решений уравнений типа Дирака для произвольного спина.

4.2.3. Релятивистская частица с произвольным спином в однородном магнитном поле. Рассмотрим движение частицы произвольного спина в постоянном и однородном магнитном поле. Не умаляя общности, можно считать, что вектор напряженности этого поля $\mathbf{H}$ параллелен третьей проекции импульса частицы p_3, т. е. компоненты тензора электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ равны

$$F_{0a} = 0, \quad F_{23} = F_{31} = 0, \quad F_{12} = H_3 = H. \qquad (4.2.27)$$

Соответствующий четырехвектор π_μ можно выбрать в виде

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_1 = p_1 - eHx_2, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3. \qquad (4.2.28)$$

Как и в случае свободной частицы, вместо уравнений (4.1.10), (4.1.11) будем решать эквивалентную систему (4.1.28) — (4.1.30). Используя представление (2.6.18), (4.2.4) — (4.2.6), заключаем, что общий вид решений для стационарных состояний с энергией ε

задается следующей формулой:

$$\Psi = \begin{Bmatrix} \Phi_s \\ \widehat{0} \\ \frac{1}{m}\left(\varepsilon + \frac{1}{s}\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}\right)\Phi_s \\ -\frac{1}{ms}\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\pi}\Phi_s \end{Bmatrix}, \tag{4.2.29}$$

где $\widehat{0}$ — столбец из $2s-1$ нулей, Φ_s — $(2s+1)$-компонентный спинор, удовлетворяющий, согласно (4.1.28), (4.2.27), (4.2.28), следующему уравнению:

$$\left[p^2 + e^2H^2x_2^2 - eH\left(\frac{1}{s}s_3 + 2x_2p_1\right)\right]\Phi_s = (\varepsilon^2 - m^2)\Phi_s. \tag{4.2.30}$$

Таким образом, описание движения заряженной частицы произвольного спина s в однородном и постоянном магнитном поле сводится в нашей постановке к решению уравнения (4.2.30) (т. е. нахождению возможных значений ε и явного вида соответствующих функций Φ_s и вычислению по формуле (4.2.29) функций Ψ).

Спинор Φ_s разложим по собственным векторам матрицы S_3, которые будем обозначать символом $\Omega_\nu^s (\nu = s, s-1, \ldots, -s)$. Не умаляя общности, можно положить

$$\Phi_s = \varphi_\nu^s\Omega_\nu^s, \tag{4.2.31}$$

где φ_ν^s — неизвестные функции, Ω_ν^s — $(2s+1)$-компонентные спиноры (4.2.25).

Для функций φ_ν^s получаем из (4.2.28) следующие уравнения:

$$\left[p^2 + e^2H^2x_2^2 - eH\left(\frac{\nu}{s} + 2x_2p_1\right)\right]\varphi_\nu^s = (\varepsilon^2 - m^2)\varphi_\nu^s, \tag{4.2.32}$$

решения которых можно искать в форме

$$\varphi_\nu^s = \exp\left[i(p_1x_1 + p_3x_3)\right]f_\nu^s(x_2), \tag{4.2.33}$$

где p_1 и p_3 — постоянные величины. Для функции $f_\nu^s(x_2)$ получаем уравнение

$$\left[-\frac{d^2}{dx_2^2} + (eHx_2 - p_1)^2 - e\frac{\nu}{s}H\right]f_\nu^s(x_2) = \left(\varepsilon^2 - m^2 - p_3^2\right)f_\nu^s(x_2), \tag{4.2.34}$$

которое с помощью замены переменных $x_2 = \frac{1}{eH}\left(p_1 + \sqrt{eH}\,y\right)$, $E^2 - m^2 - p_3^2 + e\frac{\nu}{s}H = e\eta H$ сводится к уравнению для гармонического осциллятора:

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^2\right)f_\nu^s(y) = \eta f_\nu^s(y). \tag{4.2.35}$$

Потребовав, чтобы функции $f_\nu^s(y)$ обращались в нуль при $y \to \to \pm\infty$, получаем условие на η:

$$\eta = 2n + 1, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{4.2.36}$$

откуда

$$\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + eH(2n + 1 - \nu/s). \tag{4.2.37}$$

Соотношение (4.2.37) обобщает известную формулу [1, 5] для уровней энергии электрона в постоянном и однородном магнитном поле на случай частиц произвольного спина.

Для выяснения физического смысла выражения (4.2.37) рассмотрим для ε нерелятивистское приближение

$$|\varepsilon| = \sqrt{m^2\, p_3^2 + eH(2n + 1 - \nu/s)} \approx m + \frac{p_3^2}{2m} + \Omega\left(n + \frac{s-\nu}{2s}\right), \tag{4.2.38}$$

где $\Omega = eH/m$ — циклотронная частота.

Мы видим, что выражение для $|\varepsilon|$ содержит кинетическую энергию движения частицы вдоль магнитного поля и квантованную часть, зависящую от двух дискретных параметров n и ν. В случае $s = 1/2$ ν принимает два значения $1/2$ и $-1/2$, и квантованная часть (определяющая уровни Ландау для электрона) оказывается пропорциональной целому числу $n' = n + 1/2 \pm 1/2$, причем соответствующие уровни энергии двукратно вырождены. Для $s = 0$ и $s = 1$ уровни Ландау пропорциональны полуцелым числам, причем в случае $s = 1$, $\nu = \pm 1$ имеется двукратное вырождение. В случае $s > 1$ возникает качественно новая картина, поскольку квантованная часть энергии оказывается пропорциональной дробному числу $\frac{1}{2s} \neq 1,\ \frac{1}{2}$.

Определим явный вид волновой функции Ψ (4.2.29). Решения уравнений (4.2.35), (4.2.36), как хорошо известно, задаются формулой

$$f_\nu^s = C_\nu^s U_n(y), \tag{4.2.39}$$

где C_ν^s — нормировочный множитель, $U_n(y)$ — функция Эрмита,

$$U_n(y) = \frac{(eH)^4}{(2^n n!\, \pi^{1/2})^{1/2}}\, e^{-y^2/2} H_n(y), \tag{4.2.40}$$

$H_n(y)$ — полином Эрмита, который можно записать в виде

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.2.41}$$

Таким образом, спинор Φ_s из (4.2.29) можно разложить по базисным функциям $\Phi_s = \varphi_\nu^s \Omega_\nu^s$, где φ_ν^s задаются формулами (4.2.33), (4.2.39). Для вычисления других компонент функции Ψ воспользуемся формулами (2.1.67), (2.1.68), задающими матричные элементы матриц $\mathbf{S}$ и $\mathbf{K}$, и рекуррентными соотношениями

$$\left(\frac{d}{dy} \pm y\right) U_n = \pm (2n + 1 \mp 1)^{1/2} U_{n\mp1}. \qquad (4.2.42)$$

Принимая во внимание следующее тождество (справедливое для произвольного вектора $\mathbf{A}$ и, в частности, для $\mathbf{A}=\mathbf{S}$ и $\mathbf{A}=\mathbf{K}$):

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}\Phi_\mu^s \equiv \left\{A_3 p_3 + \frac{\sqrt{eH}}{2}\left[(A_1 - iA_2)\left(y + \frac{d}{dy}\right) + (A_1 + iA_2)\left(y - \frac{d}{dy}\right)\right]\right\}\Phi_\mu^s \qquad (4.2.43)$$

и подбирая соответствующие нормировочные константы, получаем

$$\Psi_{\nu n} = \frac{\exp i(p_1 x_1 + p_3 x_3)}{\sqrt{L_1 L_3}\sqrt{2\varepsilon\left(\varepsilon + \frac{\nu}{s} p_3\right)}}\begin{pmatrix} mU_n(y)\,\Omega_\nu^s \\ \widehat{0} \\ \varphi_{\nu n} \\ \chi_{\nu n}\end{pmatrix}, \qquad (4.2.44)$$

где $\widehat{0}$ — $(2s-1)$-компонентный ненулевой столбец, $\varphi_{\nu n}$ и $\chi_{\nu n}$ — $(2s+1)$- и $(2s-1)$-компонентные спиноры вида

$$\varphi_{\nu n} = \left(\varepsilon + \frac{\nu}{s} p_3\right) U_n(y)\,\Omega_\nu^s + \frac{1}{2s}\sqrt{[s(s+1) - \nu(\nu+1)]\,2eH(n+1)}\,U_{n+1}(y)\,\Omega_{\nu+1}^s + \frac{1}{2s}\sqrt{[s(s+1) - \nu(\nu-1)]2eHn}\,U_{n-1}(y)\,\Omega_{\nu-1}^s,$$

$$\chi_{\nu n} = -\frac{1}{s}\sqrt{s^2 - \nu^2}\,p_3 U_n(y)\,\Omega_\nu^{s-1} - \frac{1}{2s}\sqrt{[s(s-1) - \nu(\nu-1) + 2\nu s]\,2eH(n+1)}\,U_{n+1}(y)\,\Omega_{\nu+1}^{s-1} + \frac{1}{2s}\sqrt{[s(s-1) + \nu(\nu-1) - 2\nu s]\,2eHn}\,U_{n-1}(y)\,\Omega_{\nu-1}^{s-1}.$$

Здесь U_n — функции Эрмита (4.2.40), Ω_ν^s — спиноры (4.2.25), $y = \sqrt{eH}\left(x_2 - \frac{p_1}{eH}\right)$.

Волновые функции (4.2.44) нормированы согласно условию

$$\int_0^{L_1} dx_1 \int_0^{L_3} dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\nu n}^\dagger \Psi_{\nu n}\,dx_2 = 1. \qquad (4.2.45)$$

4.2.4. Частицы с произвольным спином в поле плоской электромагнитной волны. Уравнения типа Дирака для частицы произвольного спина могут быть решены точно так же и для случая, когда внешнее поле определяется плоской электромагнитной волной.

Поле плоской волны, характеризуемое волновым вектором $k = (k_0, \mathbf{k})$ $(k_\mu k^\mu = 0)$, задается вектор-потенциалом следующего вида:

$$A_\mu = A_\mu(\varphi), \qquad \varphi = k_\mu x^\mu, \qquad (4.2.46)$$

удовлетворяющим условию калибровки Лоренца

$$p_\mu A^\mu = -ik_\mu A'^\mu, \qquad (4.2.47)$$

где штрих обозначает дифференцирование по φ.

Как и в предыдущем пункте, решения соответствующих уравнений (4.1.10), (4.1.11) можно представить в форме (4.2.29), где Φ^s — $(2s+1)$-компонентный спинор, удовлетворяющий уравнению второго порядка (4.1.28), которое в нашем случае принимает вид

$$\left(p_\mu p^\mu + 2eA_\mu p^\mu + e^2 A_\mu A^\mu - m^2 - \frac{e}{s}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}\right)\Phi^s = 0, \qquad (4.2.48)$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\times\mathbf{A}' - i\left(k_0\mathbf{A}' - \mathbf{k}A_0'\right).$$

Решение уравнения (4.2.28) ищем в форме

$$\Phi^s = \exp(-ip_\mu x^\mu)\,\Psi(\varphi), \qquad (4.2.49)$$

где p_μ — постоянный четырехвектор, причем, не умаляя общности, можно положить $p_\mu p^\mu = m^2$. Тогда, принимая во внимание соотношения

$$p_\mu \Psi(\varphi) = -ik_\mu \Psi'(\varphi), \quad p_\mu p^\mu \Psi(\varphi) = -k_\mu k^\mu \Psi''(\varphi),$$

получаем из (4.2.48) следующее уравнение для $\Psi(\varphi)$:

$$2ik_\mu p^\mu \Psi' + \left[-2ep_\mu A^\mu + e^2 A_\nu A^\nu - \frac{e}{s}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}\right]\Psi = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\Psi = \exp\left\{-i\int\limits_0^{k_\mu k^\mu}\left[\frac{e}{k_\mu p^\mu}\,p_\nu A^\nu - \frac{e^2}{2k_\mu p^\mu}\,A_\nu A^\nu\right]d\varphi - \frac{ie}{2sk_\mu p^\mu}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}\right\}U_p, \qquad (4.2.50)$$

где U_p — произвольный постоянный спинор.

Матрицы $\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}$, входящие в решения (4.2.50), удовлетворяют условиям (справедливым для любого вектора $\mathbf{F}$)

$$\begin{gathered}\prod_\lambda\left[(\mathbf{S}\cdot\mathbf{F})^2 - \lambda^2\mathbf{F}^2\right] = 0, \quad \lambda = 1/2,\, 3/2,\, \ldots,\, s,\\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{F}\prod_\nu\left[(\mathbf{S}\cdot\mathbf{F})^2 - \nu^2\mathbf{F}^2\right] = 0, \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, s.\end{gathered} \qquad (4.2.51)$$

Первая формула справедлива для полуцелых, а вторая — для целых значений спина s. Поскольку $\mathbf{F}^2 = k_\mu k^\mu A_\nu' A'^\nu$, то условия (4.2.51) можно записать в виде $(\mathbf{S}\cdot\mathbf{F})^{2s+1} = 0$, что позволяет свести решения (4.2.49), (4.2.50) к следующей форме:

$$\Phi^s = \exp(iS)U_p\sum_{n=0}^{2s}\frac{1}{n!}\left(\frac{ie\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}}{2sk_\mu p^\mu}\right)^n, \qquad (4.2.52)$$

где S — классическое действие частицы, движущейся в поле электромагнитной волны,

$$S = -p_\nu x^\nu - \int\limits_0^{k_\mu p^\mu} \left(\frac{e}{k_\mu p^\mu} p_\nu A^\nu - \frac{e^2}{2k_\mu p^\mu} A_\nu A^\nu \right) d\varphi.$$

Постоянный спинор U_p, входящий в решения (4.2.52), может быть выбран таким образом, чтобы соответствующая функция Ψ (4.2.29) в отсутствие взаимодействия (т. е. при $A_\mu = F^{\mu\nu} = 0$) сводилась к плосковолновому решению уравнения типа Дирака для свободной частицы произвольного спина. В результате получаем решения системы (4.2.1) — (4.2.3) вида

$$\widetilde{\Psi}^{\nu\varepsilon} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{ie\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}}{2sk_\mu p^\mu} \right)^n \exp(iS)\, \Psi^{\nu\varepsilon}, \qquad (4.2.53)$$

где $\Psi^{\nu\varepsilon}$ — спиноры (4.2.16), (4.2.18).

Мы видим, что, в отличие от известного решения Волкова [311] для электрона в поле плоской электромагнитной волны, решения уравнений для частиц с произвольным спином зависят от напряженности поля не линейно, а полиномиально.

Отметим, что уравнения (4.1.10), (4.1.11) могут быть точно решены также для случая поля Редмонда, представляющего собой комбинацию постоянного магнитного поля и поля плоской волны [219].

§ 4.3. Частица произвольного спина в поле Кулона

4.3.1. Разделение переменных в центральном поле. Задача описания движения заряженной спиновой частицы в центральном поле является одной из важнейших проблем квантовой механики. В случае электрона в поле Кулона это задача об атоме водорода.

В настоящее время задача описания водородоподобной системы, в которой орбитальная частица имеет спин $s > 1/2$, имеет не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку ведутся экспериментальные поиски экзотических атомов, имеющих в качестве орбитальной частицы Ω^--гиперон (спин которого равен 3/2).

Ниже получены точные решения уравнения для частиц произвольного спина в поле Кулона.

Рассмотрим уравнения (4.1.28) — (4.1.30) для случая кулоновского поля, когда $\mathbf{A} = 0$, $A_0 = ze^2/x$, $x = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$. Такие уравнения допускают разделение переменных, общая схема которого справедлива для любого центрального потенциала $A_0 = A_0(x)$.

Для уравнения (4.1.28) используем представление (4.1.31). Решения уравнения (4.1.31), соответствующие состоянию с энергией ε, могут быть записаны в виде

$$\Phi^s = \exp(-i\varepsilon t)\, \Phi^s(\mathbf{x}), \qquad (4.3.1)$$

где $\Phi^s(\mathbf{x})$ — $(2s+1)$-компонентный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$\left[\left(\varepsilon-\frac{ze^2}{x}\right)^2-p^2-m^2-\frac{ize^2}{s}\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}}{x^3}\right]\Phi^s(\mathbf{x})=0. \tag{4.3.2}$$

Принимая во внимание симметрию уравнения относительно группы $O(3)$, функцию $\Phi^s(\mathbf{x})$ удобно представить в виде линейной комбинации шаровых спиноров

$$\Phi^s(\mathbf{x})=\sum_\lambda \varphi^\lambda(x)\,\Omega^s_{j\,j-\lambda m}, \tag{4.3.3}$$

где $\Omega^s_{j\,j-\lambda m}=\Omega^s_{j\,j-\lambda m}(\mathbf{x}/x)$ — полный набор собственных функций операторов $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{L}^2$, J_3 и $\mathbf{S}^2$ ($\mathbf{J}=\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S}$ — оператор полного момента, $\mathbf{L}=\mathbf{x}\times\mathbf{p}$ — оператор орбитального момента):

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2\Omega^s_{j\,j-\lambda m}&=j(j+1)\,\Omega^s_{j\,j-\lambda m},\\
\mathbf{L}^2\Omega^s_{j\,j-\lambda m}&=(j-\lambda)(j-\lambda+1)\,\Omega^s_{j\,j-\lambda m},\\
\mathbf{S}^2\Omega^s_{j\,j-\lambda m}&=s(s+1)\,\Omega^s_{j\,j-\lambda m},\\
J_3\Omega^s_{j\,j-\lambda m}&=m\Omega^s_{j\,j-\lambda m}.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Здесь j — произвольные целые или полуцелые неотрицательные числа,

$$\begin{aligned}
m&=-j,\,-j+1,\,\ldots,\,j;\\
\lambda&=-s,\,-s+1,\,\ldots,\,-s+2m_{sj},\\
m_{sj}&=\min(s,\,j)=\begin{cases}s, & s\leqslant j,\\ j, & s>j.\end{cases}
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Мы сочли более удобным ввести вместо обычно рассматриваемого орбитального квантового числа l другое квантовое число $\lambda=j-l$, возможные значения которого приведены в (4.3.5). Явный вид шаровых спиноров $\Omega^s_{j\,j-\lambda m}$ см. ниже (п. 4.3.4).

Представление решений в виде (4.3.3) позволяет свести уравнение (4.3.2) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных функций φ^λ. Для получения этой системы необходимо знать результат действия оператора $\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{x}}$ ($\widehat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/x$) на произвольный шаровой спинор. Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\Omega^s_{j\,j-\lambda m}=d^{sj}_{\lambda'\lambda}\Omega^s_{j\,j-\lambda' m}, \tag{4.3.6}$$

где $d^{sj}_{\lambda'\lambda}$ — некоторые числовые коэффициенты, причем по повторяющемуся индексу λ' здесь и далее подразумевается суммирование по всем возможным значениям (4.3.5). Действительно, оператор $\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{x}}$ коммутирует с $\mathbf{J}$, поэтому в левой части равенства (4.3.6) стоит собственная функция операторов $\mathbf{J}^2$ и J_3 с собственными значениями $j(j+1)$ и m соответственно. Поскольку эта функция зависит только от угловых переменных (т. е. от нормированного вектора $\widehat{\mathbf{x}}$), то ее можно разложить по полной системе шаровых спиноров. Обозначая коэффициенты такого разложения через $d^{sj}_{\lambda'\lambda}$, приходим к формуле (4.3.6). Явный вид коэффициентов $d^{sj}_{\lambda'\lambda}$ для произвольных значений s и j, как будет доказано в п. 4.3.4, задается формулами

$$d^{sj}_{\lambda'\lambda} = -\frac{1}{2}\left(\delta_{\lambda'+1\lambda} a^{sj}_{s-\lambda} + \delta_{\lambda'-1\lambda} a^{sj}_{s-\lambda+1}\right), \tag{4.3.7}$$

где

$$a^{sj}_{\mu} = \left(\frac{\mu(2j+1-\mu)(2s+1-\mu)(2j+2s+2-\mu)}{(2s+2j+1-2\mu)(2s+2j+3-2\mu)}\right)^{1/2}. \tag{4.3.8}$$

Подставив (4.3.3) в (4.3.2) и принимая во внимание соотношение (4.3.6) и хорошо известное представление для оператора $p^2 = -\Delta$:

$$-p^2 = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\mathbf{L}^2}{x^2}, \tag{4.3.9}$$

приходим к следующей системе уравнений для радиальных функций:

$$D\varphi^{\lambda} = x^{-2} b^{sj}_{\lambda\lambda'}\varphi^{\lambda'}, \tag{4.3.10}$$

где

$$\begin{gathered} D = \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)^2 - m^2 + \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} - \frac{j(j+1)}{x^2}, \\ b^{sj}_{\lambda\lambda'} = [\lambda^2 - \lambda(2j+1)]\,\delta_{\lambda\lambda'} + \frac{i\alpha}{s} d^{sj}_{\lambda\lambda'}, \qquad \alpha = ze^2. \end{gathered} \tag{4.3.11}$$

Таким образом, задача описания движения заряженной частицы в поле Кулона сводится после отделения угловых переменных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3.10).

4.3.2. Решение уравнения для радиальных функций. Решение системы уравнений (4.3.10) облегчается тем обстоятельством, что матрица $\|b^{sj}_{\lambda\lambda'}\|$ коммутирует с оператором D и является нормальной, т. е.

$$\left(b^{sj}_{\lambda\lambda'}\right)^* b^{sj}_{\lambda\lambda''} = b^{sj}_{\lambda'\lambda}\left(b^{sj}_{\lambda''\lambda}\right)^*.$$

Это означает, что $\|b^{sj}_{\lambda\lambda'}\|$ можно преобразовать к диагональной форме и тем самым свести систему (4.3.10) к следующей цепочке незацепляющихся уравнений:

$$D\widetilde{\varphi} = x^{-2} b^{sj}_{\lambda}\widetilde{\varphi}, \tag{4.3.12}$$

где D — оператор (4.3.11), b^{sj}_{λ} — собственные значения матрицы $\|b^{sj}_{\lambda\lambda'}\|$. Каждое из этих уравнений в свою очередь сводится к хорошо известному уравнению [101]

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \left(\beta - \frac{z}{4} - \frac{k^2_{\lambda}}{4z}\right) y = 0, \tag{4.3.13}$$

где

$$y=\left(\frac{z}{m^2-\varepsilon^2}\right)^{1/2}\tilde{\varphi},\qquad z=2\left(m^2-\varepsilon^2\right)^{1/2}x,$$

$$\beta=\frac{\varepsilon\alpha}{(m^2-\alpha^2)^{1/2}},\qquad k_\lambda^2=(2j+1)^2+4\left(b_\lambda^{sj}\right)^2-4\alpha^2. \tag{4.3.14}$$

Уравнения вида (4.3.13) возникают в задаче об атоме водорода (при этом $s=1/2$, $b_\lambda^{sj}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{2j+1-4\alpha^2}$). В нашем случае, когда спин описываемой частицы произволен, изменилась только область значений параметра k_λ, которая зависит от величины спина.

Решения уравнения (4.3.13) для связанных состояний ($m^2>\varepsilon^2$) представим в виде

$$y=z^{k_\lambda/2}e^{-z/2}F, \tag{4.3.15}$$

где функция F должна удовлетворять уравнению

$$z\,\frac{d^2F}{dz^2}+(k_\lambda+1-x)\,\frac{dF}{dz}+\left(\beta-\frac{k_\lambda+1}{2}\right)F=0. \tag{4.3.16}$$

Формула (4.3.16) определяет уравнение для вырожденной гипергеометрической функции, следовательно,

$$F=C\mathscr{F}\left(\frac{k_\lambda+1}{2}-\beta,\ k_\lambda+1,\ z\right), \tag{4.3.17}$$

где C — произвольная постоянная, $\mathscr{F}$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Аналитическое выражение для $\mathscr{F}(a,\ b,\ z)$ имеет вид

$$\mathscr{F}(a,\ b,\ z)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)}\,\frac{z^n}{n!}, \tag{4.3.18}$$

где $\Gamma(a)$ — Г-функция Эйлера.

Из условия ограниченности решения (4.3.15) на бесконечности вытекает [5], что аргумент $a=(k_\lambda+1)/2-\beta$ должен быть отрицательным целым числом или нулем, т. е.

$$\beta=(k_\lambda+1)/2+n',\qquad n'=0,\ 1,\ \ldots \tag{4.3.19}$$

Таким образом, мы получили решения уравнений (4.3.12) в виде

$$\tilde{\varphi}_\lambda=C(m^2-\varepsilon^2)^{k_\lambda-1/2}x^{\frac{k_\lambda-1}{2}}e^{-(m^2-\varepsilon^2)^{1/2}x}\mathscr{F}\left(-n',\ k_\lambda+1,\ 2\left(m^2-\varepsilon^2\right)^{1/2}x\right), \tag{4.3.20}$$

где индекс λ введен для нумерации решений, соответствующих различным возможным значениям параметра k_λ, C — произвольная постоянная.

Исходя из (4.3.20), можно построить в явном виде полную систему функций, удовлетворяющих уравнениям (4.1.28)—(4.1.30) (для случая, когда внешнее поле сводится к кулоновскому потенциалу). Пусть $\|U_{\lambda\lambda'}\|$ — унитарная матрица, диагонализующая $\|b^{sj}_{\lambda\lambda'}\|$ из (4.3.11), так что

$$U_{\lambda\lambda'}U^{*}_{\lambda'\lambda''}b^{sj}_{\lambda''} = b^{sj}_{\lambda\lambda'}; \tag{4.3.21}$$

тогда решения уравнения (4.3.10) выражаются через $\widetilde{\varphi}_\lambda$ согласно следующему соотношению:

$$\varphi_\lambda = U_{\lambda\lambda'}\widetilde{\varphi}_{\lambda'}, \tag{4.3.22}$$

а решения уравнения (4.3.1) принимают вид

$$\Phi^s = U_{\lambda\lambda'}\widetilde{\varphi}_{\lambda'}\Omega^s_{j\,j-\lambda m}. \tag{4.3.23}$$

Соответствующие решения уравнений (4.1.28)—(4.1.30) в представлении (2.6.18), (4.2.4), (4.2.5) записываются в форме

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix}\Phi^s\\ \widehat{0}\end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = (\sigma_0\varepsilon + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\,\Psi_1, \tag{4.3.24}$$

где $\widehat{0}$ — нулевой столбец, включающий $2s-1$ строк, σ_a — матрицы размерности $4s\times 4s$, задаваемые соотношениями (4.2.6), σ_0 — единичная матрица такой же размерности.

Вставляя между $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$ и Ψ_1 тождественно равную единице матрицу $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}})$, нетрудно установить следующее тождество:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\Psi_1 \equiv \left[-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{x}\right) + \frac{i}{2x}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{p})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{x}\right]\Psi_1. \tag{4.3.25}$$

Результат действия операторов $\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}}$ и $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{p}$ на шаровые спиноры $\Omega^s_{j\,j-\lambda m}$ приведен ниже в формулах (4.3.61), с использованием которых получаем окончательно

$$\Psi_2 = U_{\lambda\lambda'}\Bigg\{\Bigg[\varepsilon\widetilde{\varphi}_{\lambda'} - \frac{i}{s}\,d^{sj}_{\lambda\lambda''}\left(\frac{d}{dx} + \frac{2}{x}\right) + \\ + \frac{i}{2s^2x}\left(d^{sj}_{\lambda\lambda''}f^{sj}_{\lambda} + ib^{s-1j}_{\lambda\lambda''}g^{sj}_{\lambda}\right)\Bigg]\widetilde{\varphi}_{\lambda''}\Omega^s_{j\,j-\lambda m} + \\ + \left[\frac{1}{s}\,d^{s-1j}_{\lambda\lambda''}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{x}\right) + \frac{i}{2s^2x}\left(d^{sj}_{\lambda''\lambda}g^{sj}_{\lambda} + ib^{s-1j}_{\lambda''\lambda}f^{s-1j}_{\lambda}\right)\right]\widetilde{\varphi}_{\lambda''}\Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda m}\Bigg\}. \tag{4.3.26}$$

Здесь $d^{sj}_{\lambda\lambda'}$, $b^{sj}_{\lambda\lambda'}$, f^{sj}_{λ}, g^{sj}_{λ} — коэффициенты, задаваемые соотношениями (4.3.7), (4.3.52), (4.3.56), (4.3.57).

Формулы (4.3.20), (4.3.22)—(4.3.24), (4.3.26) определяют решения уравнений движения в форме Дирака для частицы произвольного спина в поле Кулона. Для каждого значения спина s можно определить значение произвольной постоянной C из (4.3.20), исходя из условия нормировки соответствующих решений.

4.3.3. Уровни энергии релятивистской частицы с произвольным спином в поле Кулона. Исходя из условия (4.3.19), нетрудно определить возможные значения параметра ε, задающего энергию описываемой частицы. Действительно, согласно (4.3.14), (4.3.19),

$$\varepsilon = m\left[1+\frac{\alpha^2}{\left(n'+1/2+\left[(j+1/2)^2-\alpha^2-b_\lambda^{sj}\right]^{1/2}\right)^2}\right]^{-1/2}. \qquad (4.3.27)$$

Формула (4.3.27) задает уровни энергии частицы произвольного спина в поле Кулона и в этом смысле является обобщением формулы Зоммерфельда для электрона. Входящий в (4.3.27) параметр b_λ^{sj} принимает значения, совпадающие с корнями характеристического уравнения для матрицы $\| b_{\lambda\lambda'}^{sj} \|$:

$$\det\left\| \left[\lambda^2-\lambda(2j+1)-b_\lambda^{sj}\right]\delta_{\lambda\lambda'}+\frac{i\alpha}{s}d_{\lambda\lambda'}^{sj}\right\| = 0, \qquad (4.3.28)$$

где $d_{\lambda\lambda'}^{sj}$ — коэффициенты (4.3.7).

Итак, мы определили спектр энергий частицы с любым спином s в поле точечного заряда. Заметим, однако, что формула (4.3.28) задает алгебраическое уравнение, порядок которого равен $2s+1$ для $j \geqslant s$ и $2j+1$ для $s \geqslant j$. Это уравнение можно разрешить в радикалах только в тех случаях, когда хотя бы одна из величин s или j не превышает числа 3/2.

Для анализа спектра (4.3.27) в случае произвольных s и j достаточно рассмотреть приближенные решения уравнения (4.3.28), которые можно представить в виде

$$b_\lambda^{sj} = \lambda^2-(2j+1)\lambda+\tilde{b}_\lambda^{sj}\alpha^2+o(\alpha^4). \qquad (4.3.29)$$

Подставив (4.3.29) в (4.3.28) и принимая во внимание (4.3.7), нетрудно найти значения коэффициентов $\tilde{b}_\lambda^{sj}$ сразу для произвольных значений s, j и λ:

$$\tilde{b}_\lambda^{sj} = \frac{1}{8s^2}\left[\frac{\left(a_{\lambda+s}^{sj}\right)^2}{j-\lambda+1}-\frac{\left(a_{\lambda+s+1}^{sj}\right)^2}{j-\lambda}\right]. \qquad (4.3.30)$$

Здесь a_ν^{sj} ($\nu=\lambda+s$ либо $\lambda+s+1$) — коэффициенты (4.3.8).

Используя (4.3.29), (4.3.30) и разлагая функцию, стоящую в правой части формулы (4.3.27) в ряд по степеням α^2, получаем, с точностью до α^4,

$$\varepsilon = m\left(1-\frac{\alpha^2}{2n^2}+\frac{2\alpha^4\left(\tilde{b}_\lambda^{sj}-1\right)}{n^3(2l+1)}+\frac{3}{8}\frac{\alpha^4}{n^4}\right),$$
$$n = n'+j-\lambda+1 = 1, 2, \ldots; \qquad l = j-\lambda = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (4.3.31)$$

Соотношения (4.3.31) определяют тонкую структуру спектра энергий частицы произвольного спина в поле Кулона. Входящие в них параметры $\tilde{b}_\lambda^{sj}$ легко вычисляются по формулам (4.3.30), (4.3.8).

Наряду с несущественным постоянным слагаемым m формула (4.3.31) включает бальмеровский член $-\dfrac{m\alpha^2}{2n^2}$, а также дополнительные слагаемые, которые пропорциональны α^4 и представляют собой вклад от спин-орбитального взаимодействия частицы с внешним полем. Уровни энергии определяются тремя квантовыми числами n, l и λ (число j, задающее полный момент, выражается через l и λ: $j=l+\lambda$). Возможные значения n и l приведены в (4.3.31), а допустимые λ при заданном фиксированном s равны

$$\lambda=s,\ s-1,\ \ldots,\ s-2m_{sl},\quad m_{sl}=\min(s,\ l). \tag{4.3.32}$$

Мы видим, что каждый уровень энергии, соответствующий главному квантовому числу n, расщепляется на несколько подуровней тонкой структуры, отвечающих возможным наборам значений l и λ. Как нетрудно подсчитать, число таких подуровней N_n равно для фиксированного n:

$$N_n=(2s+1)n-[(s+1/2)^2],\quad n\geqslant s+1;\quad N_n=n^2,\ n\leqslant s, \tag{4.3.33}$$

где $[A]$ — целая часть числа A. Исключение составляет случай $s=1/2$, поскольку $\widetilde{b}_\lambda^{sj}=2\lambda/(2j+1)$, и число подуровней тонкой структуры оказывается равным n, причем каждый уровень с $j\neq n-1/2$ двукратно вырожден.

Приведем явные выражения параметров $\widetilde{b}_\lambda^{sj}$ для $s\leqslant 3/2$:

$$\widetilde{b}_\lambda^{0j}=0,\quad \lambda=0,\quad \widetilde{b}_\lambda^{\frac{1}{2}j}=\frac{2\lambda}{d_j},\quad \lambda=\pm\frac{1}{2},\quad d_j=2j+1,$$

$$\widetilde{b}_\lambda^{1j}=\lambda\frac{d_j+\lambda}{2d_j(d_j-\lambda)}+\frac{2(1-\lambda^2)}{1-d_j^2},\quad \lambda=\begin{cases}1,\ 0,\ -1, & j\neq 0,\\ -1, & j=0,\end{cases}$$

$$\widetilde{b}^{\frac{3}{2}j}_{\pm\frac{3}{2}}=\pm\frac{(d_j\pm 1)(5\pm 1)}{18(d_j\mp 1)(d_j\mp 2)}=-\widetilde{b}^{\frac{3}{2}j}_{\pm\frac{1}{2}}\mp\frac{2\left(d_j^2-4\right)}{9d_j\left(d_j^2-1\right)},\quad j\neq 1/2, \tag{4.3.34}$$

$$\widetilde{b}^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{-\frac{3}{2}}=-\widetilde{b}^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{54}.$$

Из (4.3.34) заключаем, что в случае $s=0$ формула (4.3.31) задает хорошо известный спектр энергий скалярной заряженной частицы (описываемой уравнением КГФ) в поле Кулона, а в случае $s=1/2$ (4.3.31) совпадает с формулой тонкой структуры спектра атома водорода, предсказываемой уравнением Дирака [1, 5].

Уровни энергии, соответствующие основному состоянию ($n=1$), не расщепляются. Если же $n=2$, то для $s=0$, $1/2$ имеется по два, а для $s=1$, $3/2$ — по четыре подуровня тонкой структуры. Используя (4.3.23), нетрудно подсчитать, что ширина расщепления ΔE (т. е. разность между наивысшим и наинизшим подуровнями) для $n=2$ равна

s	0	1/2	1	3/2
ΔE	$\frac{1}{12}m\alpha^4$	$\frac{1}{32}m\alpha^4$	$\frac{1}{24}m\alpha^4$	$\frac{5}{72}m\alpha^4$

Возвратимся теперь к точной формуле (4.3.27). Для случая $s \leqslant 3/2$ или $j \leqslant 3/2$ уравнение (4.3.28), определяющее возможные значения параметра b_λ^{sj}, можно разрешить в радикалах. Приведем соответствующие решения для $s \leqslant 1$ и $j \leqslant 1$:

$$b_\lambda^{0j} = 0, \quad b_\lambda^{\frac{1}{2}j} = 1/4 + \lambda \sqrt{d_j^2 + 4\alpha^2}, \quad \lambda = \pm 1/2, \tag{4.3.35}$$

$$\begin{aligned} &b_\lambda^{1j} = \frac{c}{3} + 2\sqrt{-c}\cos\left[\frac{1}{3}\left(\gamma + \lambda\frac{\pi}{2}\right)\right], \quad \lambda = 0, \pm 1, \ j \neq 0, \\ &b_\lambda^{10} = 0, \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

$$b_\lambda^{s0} = 0, \quad b_\lambda^{s\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(d_s^2 - 3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{d_s^2 + \left(\frac{\alpha}{s}\right)^2},$$

$$b_\lambda^{s1} = s(s+1) - 2 + \frac{d}{3} + 2\sqrt{-d}\cos\left[\frac{1}{3}\left(\xi + \lambda\frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{4.3.37}$$

$s \neq 0$, $d_s = 2s + 1$,

где

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{-c^3}}, \quad b = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}d_j^2 - \frac{1}{27}, \quad c = -\alpha^2 + b + \frac{4}{27},$$

$$\cos\xi = \frac{f}{\sqrt{-d^3}}, \quad f = \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^2 + \frac{1}{3}d^2 - \frac{1}{27}, \quad d = -\left(\frac{\alpha}{s}\right)^2 + f + \frac{4}{27}.$$

Подставив (4.3.35) в (4.3.27), приходим к формуле Зоммерфельда для атома водорода. Соотношения (4.3.27), (4.3.36), (4.3.37) обобщают формулу Зоммерфельда на случай частиц спина 1 и на случай частиц произвольного спина (для $j \leqslant 1$).

Используя (4.3.27), (4.3.28), нетрудно получить точные формулы для спектра в случае $s = 3/2$, j — произвольные и для $j = 3/2$ s — произвольные. Мы не приводим здесь соответствующие формулы из-за их громоздкости (см. [69]).

4.3.4. Шаровые спиноры. Приведем аналитические выражения для шаровых спиноров $\Omega^s_{j\,j-\lambda m}$, образующих базис в пространстве решений рассматриваемых выше уравнений движения.

Поскольку полный момент $\mathbf{J}$ является суммой коммутирующих операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$, шаровые спиноры могут быть выражены через шаровые функции $Y_{lm_1}(\widehat{\mathbf{x}})$ и спиновые амплитуды $\overset{s}{\varphi}_\mu$, которые являются собственными векторами операторов $\mathbf{L}^2$, L_3 и $\mathbf{S}^2$, S_3:

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}^2 Y_{lm_1} = l(l+1) Y_{lm_1}, \quad L_3 Y_{lm_1} = m_1 Y_{lm_1}, \\ &S^2 \overset{s}{\varphi}_\mu = s(s+1)\overset{s}{\varphi}_\mu, \quad S_3\overset{s}{\varphi}_\mu = \mu\overset{s}{\varphi}_\mu, \end{aligned} \tag{4.3.38}$$

где $l = 0, 1, \ldots;$ $m_1 = -l, -l+1, \ldots, l;$ $\mu = -s, -s+1, \ldots, s$. По общему правилу сложения моментов можно записать (обозначив $l = j - \lambda$)

$$\Omega^s_{j\,j-\lambda m} = \sum_{m_1,\mu} C^{jm}_{j-\lambda m_1 s\mu} Y_{j-\lambda\, m_1}\overset{s}{\varphi}_\mu, \tag{4.3.39}$$

где $C^{jm}_{j-\lambda\, m_1 s\mu}$ — коэффициенты векторного сложения (коэффициенты Вигнера) и $m = m_1 + \mu$ *).

Спиновые амплитуды φ^s_μ можно задать в виде $(2s+1)$-компонентных столбцов (4.2.25). Тогда шаровой спинор $\Omega^s_{j\,j-\lambda\, m}$ также будет представлять собой столбец, компоненты которого будем нумеровать индексом $\mu = -s, -s+1, \ldots$ Согласно (4.3.39)

$$\left(\Omega^s_{j\,j-\lambda\, m}\right)^\mu = C^{jm}_{j-\lambda\, m-\mu\, s\mu} Y_{j-\lambda\, m-\mu}. \tag{4.3.40}$$

Явное выражение Y_{lm} задается формулами [182]

$$Y_{lm}(\widehat{x}) = \frac{1}{2\pi} e^{im\varphi} (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(l+1/2)\,(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta),$$

$$P_l^{|m|}(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!} \sin^{|m|}\theta\, \frac{d^{|m|+l}}{(d\cos\theta)^{|m|}} (\cos^2\theta - 1)^l,$$

где θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора $\widehat{\mathbf{x}}$, а коэффициенты $C^{jm}_{lm_1 s\mu}$ равны [182]

$$C^{jm}_{lm_1 s\mu} = \delta_{m_1+\mu m} \left[\frac{(2j+1)!\,(l+s-j)!\,(l-m_1)!\,(s-\mu)!\,(j+m)!\,(j-m)!}{(l+s+j+1)!\,(l-s+j)!\,(j+s-l)!(l+m_1)!\,(s+\mu)!}\right]^{1/2} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{j-m} (-1)^{l-m_1+n} \frac{(l+m_1+n)!\,(s+j-m_1-n)!}{n!\,(l-m_1-n)!\,(j-m-n)(\,(s-j+m_1+n)!}.$$

Определенные выше шаровые спиноры удовлетворяют условию нормировки

$$\int \Omega^{s+}_{j\,j-\lambda\, m} \Omega^s_{j'\, j'-\lambda'\, m'} d\omega = \delta_{jj'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{mm'}, \tag{4.3.41}$$

где $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ — элемент телесного угла, в котором лежит вектор $\widehat{\mathbf{x}}$.

Выпишем для справочных целей шаровые спиноры, соответствующие $s = 1/2,\ 1,\ 3/2$:

$s = 1/2$:

$$\Omega^{1/2}_{j\,j-\frac{1}{2}\, m} = \frac{1}{2\sqrt{j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+m}\, Y_{j-\frac{1}{2}\, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{j-m}\, Y_{j-\frac{1}{2}\, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{1/2}_{j\,j+\frac{1}{2}\, m} = \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{j-m+1}\, Y_{j+\frac{1}{2}\, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{j+m+1}\, Y_{j+\frac{1}{2}\, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix};$$

*) См., например, [1]. Коэффициенты векторного сложения называют также коэффициентами Клейна — Гордона и используют для их обозначения символы $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 m j)$ или $C(j_1 j_2 j;\ m_1 m_2 m)$.

$s=1$:

$$\Omega^{1}_{j\,j-1\,m}=\frac{1}{\sqrt{2j\,(2j-1)}}\begin{pmatrix}\sqrt{(j+m-1)\,(j+m)}\;Y_{j-1\,m-1}\\ \sqrt{2\,(j^2-m^2)}\,Y_{j-1\,m}\\ \sqrt{(j-m)\,(j-m-1)}\;Y_{j-1\,m+1}\end{pmatrix},$$

$$\Omega^{1}_{j\,j\,m}=\frac{1}{\sqrt{2j\,(j+1)}}\begin{pmatrix}-\sqrt{(j+m)\,(j-m+1)}\;Y_{j\,m-1}\\ \sqrt{2m}\;Y_{jm}\\ \sqrt{(j-m)\,(j+m+1)}\;Y_{j\,m+1}\end{pmatrix},$$

$$\Omega^{1}_{j\,j+1\,m}=\frac{1}{\sqrt{2\,(j+1)\,(2j+3)}}\begin{pmatrix}\sqrt{(j-m+1)\,(j-m+2)}\;Y_{j+1\,m-1}\\ -\sqrt{2\,(j+1)^2-m^2}\,Y_{j+1\,m}\\ \sqrt{(j+m+1)\,(j+m+2)}\;Y_{j+1\,m+1}\end{pmatrix};$$

$s=3/2$:

$$\Omega^{3/2}_{j\,j-\frac{3}{2}\,m}=\frac{1}{2\sqrt{j\,(j-1)\,(2j-1)}}\left\{\begin{matrix}\sqrt{(j+m)\,(j+m-1)\,(j+m-2)}\,Y_{j-\frac{3}{2}\,m-\frac{3}{2}}\\ \sqrt{3\,(j^2-m^2)\,(j+m-1)}\;Y_{j-\frac{3}{2}\,m-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{3\,(j^2-m^2)\,(j-m-1)}\;Y_{j-\frac{3}{2}\,m+\frac{1}{2}}\\ \sqrt{(j-m)\,(j-m-1)\,(j-m-2)}\,Y_{j-\frac{3}{2}\,m+\frac{3}{2}}\end{matrix}\right\},$$

$$\Omega^{3/2}_{j\,j-\frac{1}{2}\,m}=\frac{1}{2\sqrt{j\,(j+1)\,(2j-1)}}\left\{\begin{matrix}-\sqrt{3\,(j+m)\,(j+m-1)\,(j-m+1)}\,Y_{j-\frac{1}{2}\,m-\frac{3}{2}}\\ -(j+1-3m)\,\sqrt{j+m}\;Y_{j-\frac{1}{2}\,m-\frac{1}{2}}\\ (j+1+3m)\,\sqrt{j-m}\;Y_{j-\frac{1}{2}\,m+\frac{1}{2}}\\ \sqrt{3\,(j-m)\,(j-m-1)(j+m-1)}\;Y_{j-\frac{1}{2}\,m+\frac{3}{2}}\end{matrix}\right\}, \tag{4.3.42}$$

$$\Omega^{3/2}_{j\,j+\frac{1}{2}\,m}=\frac{1}{2\sqrt{j\,(j+1)\,(2j+3)}}\left\{\begin{matrix}\sqrt{3\,(j+m)\,(j-m+1)(j-m+2)}\;Y_{j+\frac{1}{2}\,m-\frac{3}{2}}\\ -(j+3m)\,\sqrt{j-m+1}\;Y_{j+\frac{1}{2}\,m-\frac{1}{2}}\\ -(j-3m)\,\sqrt{j+m+1}\;Y_{j+\frac{1}{2}\,m+\frac{1}{2}}\\ \sqrt{3\,(j-m)\,(j+m+1)\,(j+m+2)}\;Y_{j+\frac{1}{2}\,m+\frac{3}{2}}\end{matrix}\right\},$$

$$\Omega^{3/2}_{j\,j+\frac{3}{2}\,m} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(j+1)(j+2)(2j+3)}} \begin{Bmatrix} -\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)(j-m+3)}\,Y_{j+\frac{3}{2}\,m-\frac{3}{2}} \\ \sqrt{3(j+m+1)(j-m+1)(j-m+2)}\,Y_{j+\frac{3}{2}\,m-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{3(j-m+1)(j+m+1)(j+m+2)}\,Y_{j+\frac{3}{2}\,m+\frac{1}{2}} \\ \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j+m+3)}\,Y_{j+\frac{3}{2}\,m+\frac{3}{2}} \end{Bmatrix}.$$

Формулы (4.3.42) справедливы только для достаточно больших j, $j \geqslant s$. Если же $j = s - 1$, $s = 1,\ 3/2$, то имеется единственный шаровой спинор Ω^1_{010} и два спинора $\Omega^{3/2}_{\frac{1}{2}1m}$, $\Omega^{3/2}_{\frac{1}{2}2m}$, поскольку возможные значения λ ограничены условием (4.3.5). Явные выражения этих спиноров могут быть получены из (4.3.42) при соответствующем выборе s, j и λ.

4.3.5. Явный вид $O(3)$-инвариантных матриц в базисе шаровых спиноров. Для доказательства соотношений (4.3.6) — (4.3.8), нахождения явного вида волновых функций частицы произвольного спина в поле Кулона и некоторых других целей нам понадобится получить решение следующей задачи.

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$ — набор числовых матриц, которые преобразуются как вектор при повороте системы координат. Последнее означает, что существуют такие матрицы $\mathbf{S} = (S_1,\ S_2,\ S_3)$, удовлетворяющие алгебре АО(3) (2.1.24), что для $\boldsymbol{\eta}$ выполняются следующие соотношения:

$$[S_a,\ \eta_b] = i\varepsilon_{abc}\eta_c. \tag{4.3.43}$$

Используя (4.3.43), нетрудно убедиться, что скалярные произведения

$$Q_a = \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{F}_{(a)},\quad \mathbf{F}_{(1)} = \widehat{\mathbf{x}},\quad \mathbf{F}_{(2)} = \mathbf{x}\times\mathbf{p},\quad \mathbf{F}_{(3)} = \mathbf{p} \tag{4.3.44}$$

коммутируют с оператором полного момента $\mathbf{J} = \mathbf{x}\times\mathbf{p} + \mathbf{S}$.

Требуется найти явный вид матриц (4.3.44) в базисе шаровых спиноров $\Omega^{si}_{jj-\lambda\,m}$, образующих полный набор собственных функций операторов (4.3.4) (индекс $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_s$ различает собственные векторы матрицы $\mathbf{S}^2$, соответствующие вырожденным собственным значениям $s(s+1)$, n_s — кратность вырождения). Иными словами, необходимо определить результат действия операторов (4.3.44) на произвольный шаровой спинор $\Omega^{si}_{jj-\lambda m}$.

В этом пункте приведено полное решение поставленной задачи.

В случае, когда матрицы S_a реализуют неприводимое представление $D(s)$ алгебры АО(3), η_a из (4.3.43) с необходимостью пропорциональны S_a. Если же матрицы $\mathbf{S}$ приводимы, то достаточно ограничиться случаем, когда они разлагаются в прямую сумму неприводимых представлений $D(s)$, где $s = l_0,\ l_0 + 1,\ \ldots,\ l_1$, l_0 и l_1 —

одновременно целые или полуцелые неотрицательные числа. При других наборах значений s матрицы $\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{F}_a$ будут полностью приводимы.

Принимая во внимание коммутативность Q_a с $\mathbf{J}$, заключаем, что в результате действия операторов (4.3.44) на вектор $\Omega^{si}_{jj-\lambda m}$ мы снова получим собственную функцию операторов $\mathbf{J}$ и J_3. Разлагая эту функцию по базису $\{\Omega^{sj}_{jj-\lambda m}\}$, получаем

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{F}_{(a)}\Omega^{si}_{jj-\lambda m}=\sum_{s',\lambda',i'}A^{js\lambda i}_{(a)s'\lambda' i'}\Omega^{s'i'}_{jj-\lambda' m}, \tag{4.3.45}$$

где $A^{js\lambda i}_{(a)s'\lambda' i'}$ — коэффициенты, подлежащие определению. Используя для $\boldsymbol{\eta}$ представление (6.3.7), (6.3.8), приходим к заключению, что

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{F}_{(\alpha)}\Omega^{si}_{jj-\lambda m}=\left(\frac{a^s_{ii'}}{s(s+1)}\mathbf{S}^{(s)}\cdot\mathbf{F}_{(\alpha)}+\frac{b^{s+1}_{ii'}}{2s+3}\mathbf{K}^{(s+1)}\cdot\mathbf{F}_{(\alpha)}+\right.$$
$$\left.+\frac{c^{s-1}_{ii'}}{2s-1}\mathbf{K}^{(s)\dagger}\cdot\mathbf{F}_{(\alpha)}\right)\Omega^{si}_{jj-\lambda m}, \tag{4.3.46}$$

где $a^s_{ii'}$, $b^{s+1}_{ii'}$, $c^s_{ii'}$ — произвольные коэффициенты, входящие в определение матрицы $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{S}^{(s)}$, $\mathbf{K}^{(s)}$ и $\mathbf{K}^{(s+1)}$ — матрицы (2.1.67), (2.1.68). Отсюда заключаем, что коэффициенты $A^{js\lambda i}_{(a)s'\lambda' i'}$ могут быть представлены в виде

$$A^{js\lambda i}_{(a)s'\lambda' i'}=\frac{\delta_{ss'}}{s(s+1)}a^s_{ii'}d^{sj}_{(a)\lambda\lambda'}+$$
$$+\frac{\delta_{s+1s'}}{2s+3}b^{s+1}_{ii'}b^{s+1j}_{(a)\lambda'\lambda}+\frac{\delta_{s-1s'}}{2s-1}c^s_{ii'}\left(b^{sj}_{(a)\lambda\lambda'}\right)^*, \tag{4.3.47}$$

где $d^{sj}_{(a)\lambda\lambda'}$ и $b^{sj}_{(a)\lambda\lambda'}$ — параметры, определяемые из соотношений

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}_{(a)}\Omega^{si}_{jj-\lambda m}=\sum_{\lambda'}d^{sj}_{(a)\lambda\lambda'}\Omega^{si}_{jj-\lambda' m}, \tag{4.3.48}$$

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}_{(a)}\Omega^{si}_{jj-\lambda m}=\sum_{\lambda'}b^{sj}_{(a)\lambda\lambda'}\Omega^{s-1i}_{jj-\lambda' m}. \tag{4.3.49}$$

Таким образом, задача определения явного вида матрицы $\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{F}_{(a)}$ в базисе $\Omega^{si}_{jj-\lambda m}$ сводится к нахождению коэффициентов $d^{sj}_{(a)\lambda\lambda'}$ и $b^{s-1j}_{(a)\lambda\lambda'}$ из разложений (4.3.48), (4.3.49).

Рассмотрим сначала случай $a=1$, $\mathbf{F}_{(\alpha)}=\widehat{\mathbf{x}}$ и вычислим соответствующие коэффициенты $d^{sj}_{(1)\lambda\lambda'}=d^{sj}_{\lambda\lambda'}$. Матрицы S из (4.3.48), не умаляя общности, можно считать неприводимыми, тогда $\Omega^{si}_{jj-\lambda m}$ — — $(2s+1)$-компонентный шаровой спинор, соответствующий спину s. Полагая $\widehat{\mathbf{x}}=\widehat{\mathbf{x}}'=(0,\ 0,\ 1)$ и выбирая S_3 в виде диагональной матрицы с собственными значениями μ, $-s\leqslant\mu\leqslant s$, получаем из (4.3.48) следующее уравнение:

$$\mu\left(\Omega^s_{jj-\lambda m}(\widehat{\mathbf{x}}')\right)^\mu=\sum_{\lambda'}d^{sj}_{\lambda\lambda'}\left(\Omega^s_{jj-\lambda' m}(\widehat{\mathbf{x}}')\right)^\mu,$$

где $(\Omega)^\mu$ означает строку шарового спинора Ω с номером μ $(\mu = s,\ s-1,\ \ldots,\ -s)$ и несущественный в данном случае индекс i опущен. Подставив в эту формулу разложение (4.3.39), полагая $\mu = m$ и принимая во внимание, что

$$Y_{j-\lambda 0}(\widehat{\mathbf{x}}') = \left(\frac{2j-2\lambda+1}{4\pi}\right)^{1/2}, \qquad (4.3.50)$$

приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений для $d^{sj}_{\lambda\lambda'}$:

$$\sum_{\lambda'} \left(d^{sj}_{\lambda\lambda'} - \mu\delta_{\lambda'\lambda}\right)(2j-2\lambda'+1)^{1/2} C^{j\mu}_{j-\lambda' 0\, s\mu} = 0,$$

где

$$\lambda,\ \lambda' = -s,\ -s+1,\ \ldots,\ -s+2m_{sj},$$

$$\mu = -m_{sj},\ -m_{sj}+1,\ \ldots,\ m_{sj},\ m_{sj} = \min(s,\ j).$$

Нетрудно подсчитать, что всего имеется $(2m_{sj}+1)^2$ неоднородных линейных уравнений для такого же количества неизвестных параметров $d^{sj}_{\lambda\lambda'}$. Общее решение этой системы задается формулой (4.3.7) [17, 69].

Обратимся теперь к уравнению (4.3.49). Полагая $F_{(a)} = F_{(1)} = \widehat{\mathbf{x}}'$ и разлагая спиноры в правой и левой частях по шаровым функциям согласно (4.3.39), приходим с использованием соотношений (4.3.50), (2.1.68) к следующей системе уравнений для $b^{sj}_{\lambda'\lambda} = b^{sj}_{(1)\lambda\lambda'}$:

$$\sum_{\lambda'} b^{sj}_{\lambda\lambda'}(2j-2\lambda'+1)^{1/2} C^{j\mu}_{j-\lambda' 0\, s-1\, \mu} = \left[(s^2-\mu^2)(2j-2\lambda+1)\right]^{1/2} C^{j\mu}_{j-\lambda 0\, s\mu}, \qquad (4.3.51)$$

где

$$\lambda = -s,\ -s+1,\ \ldots,\ -s+2m_{sj};$$

$$\lambda' = -s+1,\ -s+2,\ \ldots,\ -s+1+2m_{s-1};$$

$$\mu = -m_{s-1\, j},\ -m_{s-1\, j}+1,\ \ldots,\ m_{s-1\, j}.$$

Решения системы (4.3.51) для произвольных j и $s \neq l_0$ имеют вид [68]

$$b^{sj}_{\lambda\lambda'} = -\frac{1}{2}\left(\delta_{\lambda'\lambda'-1} g^{sj}_{\lambda} - \delta_{\lambda\lambda'+1} f^{sj}_{\lambda}\right), \qquad (4.3.52)$$

где

$$g^{sj}_{\lambda} = \left[\frac{(2j+s-\lambda+1)(s-\lambda-1)(s-\lambda)(2j+s-\lambda)}{(2j-2\lambda-1)(2j-2\lambda+1)}\right]^{1/2},$$

$$f^{sj}_{\lambda} = \left(\frac{(2j-s-\lambda+1)(2j-s-\lambda+2)(s+\lambda-1)(s+\lambda)}{(2j-2\lambda+1)(2j-2\lambda+3)}\right]^{1/2}. \qquad (4.3.53)$$

Таким образом, мы получили окончательно, что

$$\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\, m} = \sum_{\lambda'} d^{sj}_{\lambda\lambda'}\Omega^{s'}_{j\,j-\lambda'\, m},$$

$$\mathbf{K}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\, m} = \sum_{\lambda'} b^{sj}_{\lambda\lambda'}\Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda'\, m}, \qquad (4.3.54)$$

где $d^{sj}_{\lambda\lambda'}$, $b^{sj}_{\lambda\lambda'}$ — коэффициенты (4.3.7), (4.3.52). Формулы (4.3.54) (совместно с (4.3.46) для $\mathbf{F}_{(a)} = \widehat{\mathbf{x}}$) дают полное решение задачи о явном виде матрицы $\boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\mathbf{x}}$ в базисе шаровых спиноров.

Рассмотрим теперь уравнения (4.3.48), (4.3.49) для случая, когда $\mathbf{F}_{(a)} = \mathbf{F}_{(2)} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Используя тот факт, что спинор $\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}$ является собственным вектором операторов $\mathbf{J}^2 \equiv (\mathbf{x} \times \mathbf{p})^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, а также $\mathbf{S}^2$ и $(\mathbf{x} \times \mathbf{p})^2$, соотношение (4.3.48) можно записать в виде

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{p} \Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m} = h^{sj}_{\lambda} \Omega^{sj}_{j\,j-\lambda\,m}, \tag{4.3.55}$$

где

$$h^{sj}_{\lambda} = \frac{1}{2} (\lambda d_j - \lambda^2 - s(s+1)), \qquad d_j = 2j + 1. \tag{4.3.56}$$

Что же касается коэффициентов $b^{sj}_{(2)\lambda\lambda'}$, входящих в правую часть уравнения (4.3.49) для $\mathbf{F}_{(a)} = \mathbf{F}_{(2)} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, то они легко вычисляются с использованием соотношений (4.3.55) и (6.2.29): $b^{sj}_{(2)\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} q^{sj}_{\lambda}$, где

$$q^{sj}_{\lambda} = \frac{1}{2} [(s^2 - \lambda^2)(d_j + s - \lambda)(d_j - s - \lambda)]^{1/2}. \tag{4.3.57}$$

В результате формула (4.3.49) принимает вид

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{p} \Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m} = q^{sj}_{\lambda} \Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda\,m}, \tag{4.3.58}$$

где q^{sj}_{λ} — коэффициенты (4.3.57).

Соотношения (4.3.46) (для $a = 2$ $\mathbf{F}_{(a)} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$) и (4.3.54), (4.3.58) полностью определяют результат действия оператора $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ на шаровой спинор $\Omega^{sj}_{j\,j-\lambda\,m}$.

Обратимся теперь к случаю, когда вектор $\mathbf{F}_{(a)}$ в (4.3.45) равен $\mathbf{p}$, и приведем в явном виде соответствующие формулы (4.3.48), (4.3.49):

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m} = -\frac{i}{x} \sum_{\lambda'} \left[d^{sj}_{\lambda\lambda'} \left(2 + \frac{1}{s} h^{sj}_{\lambda'}\right) + \frac{1}{s} b^{sj}_{\lambda\lambda'} g^{sj}_{\lambda'} \right] \Omega^{s}_{j\,j-\lambda'\,m},$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{p} \Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m} = -\frac{i}{x} \sum_{\lambda'} \left[\frac{1}{s} d^{sj}_{\lambda\lambda'} g^{sj}_{\lambda'} + b^{sj}_{\lambda\lambda'} \left(2 + \frac{1}{s} h^{s-1\,j}_{\lambda'}\right) \right] \Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda'\,m}, \tag{4.3.59}$$

$$\mathbf{K}^{\dagger} \cdot \mathbf{p} \Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda\,m} = \frac{i}{x} \sum_{\lambda'} \left[\frac{1}{s} d^{sj}_{\lambda'\lambda} g^{sj}_{\lambda'} + b^{sj}_{\lambda'\lambda} \left(2 + \frac{1}{s} h^{s-1\,j}_{\lambda'}\right) \right] \Omega^{s}_{j\,j-\lambda'\,m}.$$

Здесь $d^{sj}_{\lambda\lambda'}$, $b^{sj}_{\lambda\lambda'}$, $g^{sj}_{\lambda'}$, $f^{sj}_{\lambda'}$ — коэффициенты (4.3.7), (4.3.52), (4.3.56), (4.3.57).

Для доказательства соотношений (4.3.59) достаточно рассмотреть случай, когда матрицы S_a из (4.3.43) имеют вид

$$S_a = S^{(1)}_a + S^{(2)}_a, \tag{4.3.60}$$

где $S^{(1)}_a$ и $S^{(2)}_a$ — коммутирующие между собой генераторы неприводимых представлений $D(s_1)$ и $D(s_2)$ группы $O(3)$, т. е. матрицы размерности $(2s_1+1)(2s_2+1)\times(2s_1+1)(2s_2+1)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\left[S_a^{(\alpha)}, S_b^{(\beta)}\right] = i\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{abc}S_c^{(\alpha)}, \quad \sum_a S_a^{(\alpha)}S_a^{(\alpha)} = s_\alpha(s_\alpha+1), \quad \alpha = 1, 2.$$

Матрицы (4.3.60) образуют приводимое представление алгебры АО(3), которое разлагается в невырожденную прямую сумму неприводимых представлений $D(s)$, $s = s_1+s_2$, s_1+s_2-1, ..., $|s_1-s_2|$. При этом, как хорошо известно, матрицы $S_a^{(1)}$ и $S_a^{(2)}$ могут быть представлены в форме

$$S_a^{(1)} = \frac{1}{2}(S_a - iS_{0a}), \qquad S_a^{(2)} = \frac{1}{2}(S_a + iS_{0a}), \tag{4.3.61}$$

где $S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}$ и S_{0a} — генераторы конечномерного неприводимого представления $D(l_0, l_1) = D(|s_1-s_2|, (s_1+s_2+1)\operatorname{sign}(s_1-s_2))$ группы $O(1, 3)$, явный вид которых задается формулами (2.1.66). В частности, для $s_2 = 1/2$ получаем, обозначив $\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{S}^{(2)}$,

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\Omega^s_{j\,j-\lambda\,m} = \frac{1}{s}\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\Omega^s_{j\,j-\lambda\,m} - i\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}\Omega^s_{j\,j-\lambda\,m}\right), \tag{4.3.62}$$

где $\mathbf{S}$ — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы O(3), $s = s_1 + 1/2$, $\mathbf{K}$ — соответствующие матрицы (2.1.68).

Левую часть формулы (4.3.62) можно представить в виде

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\Omega^s_{j\,j-\lambda\,m} \equiv (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}})\,\Omega^s_{j\,j-\lambda\,m} =$$
$$= -\frac{i}{x}(2+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{p})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\Omega^s_{j\,j-\lambda\,m}. \tag{4.3.63}$$

Используя далее результаты (4.3.46), (4.3.54), (4.3.55), (4.3.58) и разлагая векторы в правой части (4.3.62) согласно (4.3.48), (4.3.49), приходим после приравнивания коэффициентов при одинаковых шаровых спинорах к формулам (4.3.59).

Таким образом, мы полностью определили явный вид скалярных матриц (4.3.44) в базисе шаровых спиноров. Полученные результаты имеют достаточно общий характер и могут использоваться при решении широкого круга задач, связанных с разделением переменных в уравнениях, инвариантных относительно группы $O(3)$.

Рассмотрим примеры матриц (4.3.44), которые встречаются в настоящей книге.

В случае, когда матрицы S_a реализуют неприводимое представление $D(s)$ алгебры АО(3), общее решение соотношений (4.3.43) имеет вид $\eta_a = kS_a$, где k — произвольный параметр. Явный вид соответствующих матриц $\boldsymbol{\eta}\cdot\widehat{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\eta}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\times\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{p}$ может быть получен из (4.3.54), (4.3.55), (4.3.59) с помощью умножения левых и правых частей соответствующих равенств на k.

Рассмотрим более сложный пример, когда матрицы S_a в (4.3.43) имеют вид (4.3.60). Тогда, согласно (2.1.66), (4.3.61), (4.3.54),

$$\mathbf{S}^{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}=\sum_{\lambda'}\Big(B^{(\alpha)}_{ss}d^{sj}_{\lambda\lambda'}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda'\,m}+iB^{(\alpha)}_{s\,s+1}b^{sj}_{\lambda'\lambda}\Omega^{s+1}_{j\,j-\lambda\,m}-$$
$$-iB^{(\alpha)}_{s-1\,s}b^{s-1j}_{\lambda\lambda'}\Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda'\,m}\Big),\qquad(4.3.64)$$

где $d^{sj}_{\lambda\lambda'}$ и $b^{sj}_{\lambda\lambda'}$ — коэффициенты (4.3.7), (4.3.52),

$$B^{(\alpha)}_{ss'}=\frac{1}{2s}+(-1)^{\alpha}\frac{[(s_1+s_2+1)(s_1-s_2)]^{1/2}}{2s\,(s+1)^{1/2}},\qquad\alpha=1,\,2,$$
$$B^{(\alpha)}_{s-1\,s}=(-1)^{\alpha+1}\frac{\left[(s_1+s_2+1)^2-s^2\right]^{1/2}\left[s^2-(s_1-s_2)^2\right]^{1/2}}{2s\,(4s^2-1)^{1/2}},\qquad(4.3.65)$$
$$B^{(\alpha)}_{s\,s+1}=B^{\alpha}_{s'-1\,s'},$$
$$s'=s+1;\qquad s=s_1+s_2;\qquad s_1+s_2-1,\,\ldots,\,|s_1-s_2|.$$

Для матриц $\mathbf{S}^{(\alpha)}\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{p}$ получаем аналогично

$$\mathbf{S}^{(\alpha)}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\times\mathbf{p}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}=B^{(\alpha)}_{ss}h^{sj}_{\lambda}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}+$$
$$+iB^{(\alpha)}_{s\,s+1}q^{sj}_{\lambda}\Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda\,m}-iB^{(\alpha)}_{s-1\,s}q^{s+1\,j}_{\lambda}\Omega^{s+1}_{j\,j-\lambda\,m},\qquad(4.3.66)$$

где $B^{(\alpha)}_{ss}$, $B^{(\alpha)}_{s\,s+1}$, $B^{(\alpha)}_{s\,s-1}$, h^{sj}_{λ}, q^{sj}_{λ} — коэффициенты (4.3.65), (4.3.56), (4.3.57).

В частности, для $s_2=1/2$, $S^{(2)}_a=\frac{1}{2}\sigma_a$, $s=s_1+s_2$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}&=\frac{1}{s}\sum_{\lambda'}\Big(d^{sj}_{\lambda\lambda'}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda'\,m}-ib^{s-1}_{\lambda\lambda'}\Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda'\,m}\Big),\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\times\mathbf{p}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}&=\frac{1}{s}\left(h^{sj}_{\lambda}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}-iq^{sj}_{\lambda}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}\right),\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\times\mathbf{p}\Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda\,m}&=\frac{1}{s}\left(h^{s-1\,j}_{\lambda}\Omega^{s-1}_{j\,j-\lambda\,m}+iq^{sj}_{\lambda}\Omega^{s}_{j\,j-\lambda\,m}\right).\end{aligned}\qquad(4.3.67)$$

Соотношения (4.3.67) уже использовались выше в п. 4.3.2 для определения явного вида решений уравнений движения частицы произвольного спина в поле Кулона. Эти соотношения будут применяться также в гл. 7 при решении двухчастичных уравнений.

В заключение этой главы отметим, что уравнения (4.1.10), (4.1.11) могут быть решены точно сразу для произвольных значений спина и для других важных типов внешних полей — скрещенных электрического и магнитного, а также для поля магнитного монополя [219].

Г Л А В А 5

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

В настоящей главе излагаются основные сведения об обобщенных группах Пуанкаре $P(1, n)$, которые представляют собой совокупность преобразований, сохраняющих длину интервала в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского. Описаны неприводимые представления алгебр Ли, соответствующих таким группам, произведена редукция неприводимых представлений этих алгебр по алгебрам Пуанкаре и Галилея. Обсуждается связь $P(1, n)$-инвариантных уравнений с релятивистскими и нерелятивистскими уравнениями для частиц переменной массы и спина.

§ 5.1. Группа $P(1, 4)$

5.1.1. Введение. Как показано в гл. 1, максимальной (в смысле Ли) группой инвариантности уравнений Дирака и КГФ является 10-параметрическая группа Пуанкаре $P(1, 3)$. Здесь мы рассмотрим естественное обобщение этой группы на случай пространства с большим числом измерений. Обобщенная группа Пуанкаре $P(1, n)$ может быть определена как полупрямое произведение групп $SO(1, n)$ и T, где T — аддитивная группа $(1+n)$-мерных вещественных векторов $p_0, p_1, \ldots, p_n$, а $SO(1, n)$ — связная компонента единицы в группе всех линейных преобразований T на T, сохраняющих квадратичную форму $p_0^2 - p_1^2 - \ldots - p_n^2$.

Группы $P(1, n)$, $n > 3$, можно использовать для описания физических систем с переменной массой и спином — например, систем из двух релятивистских частиц. Так, в гл. 7 для описания состояний пары взаимодействующих частиц применяются уравнения, инвариантные относительно группы $P(1, 6)$. Кроме того, обобщенные группы Пуанкаре имеют прямое отношение к задаче о расширении S-матрицы за массовую оболочку [31, 247] и к описанию частиц с внутренней структурой [167, 193].

Группа $P(1, n)$, $n > 3$, содержит такие важнейшие с физической точки зрения подгруппы, как группа Пуанкаре $P(1, 3)$ и группа Галилея $G(1, 3)$. Поскольку неприводимые представления группы $P(1, n)$ являются приводимыми относительно $P(1, 3)$ и $G(1, 3)$, то естественно рассмотреть задачу о редукции этих представлений по неприводимым представлениям групп Пуанкаре и Галилея. Такая редукция позволит ответить на вопрос, какие релятивистские (и нерелятивистские) частицы описывают уравнения, инвариантные относительно группы $P(1, n)$, и найти спектр энергии и спиновые состояния этих частиц. Эти (и смежные с ними) вопросы рассматриваются в §§ 5.2—5.4. Настоящий параграф посвящен описанию неприводимых представлений группы $P(1, 4)$.

5.1.2. Алгебра Ли группы $P(1, n)$. Операторы Казимира. Алгебра Ли группы $P(1, n)$ задается коммутационными соотношениями

$$[P_m, P_n] = 0, \quad [P_m, J_{nk}] = i(g_{mn}P_k - g_{mk}P_n), \tag{5.1.1}$$
$$[J_{mn}, J_{m'n'}] = i(g_{mn'}J_{nm'} + g_{nm'}J_{mn'} - g_{mm'}J_{nn'} - g_{nn'}J_{mm'}),$$

где $m, n, m', n', k = 0, 1, \ldots, n$, g_{mn} — метрический тензор в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского: $g_{mn} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$.

Задача построения локальных представлений группы $P(1, n)$ сводится к описанию неэквивалентных представлений алгебры Ли (5.1.1) в терминах самосопряженных операторов. Мы ограничимся исследованием неприводимых представлений этой алгебры. Для классификации неприводимых представлений необходимо найти *независимые операторы Казимира алгебры* (5.1.1) *и определить их спектр*.

Нахождение операторов Казимира алгебры $P(1, n)$ не является тривиальным обобщением соответствующей процедуры для алгебры AP(1, 3) на случай пространства с большим числом переменных. В частности, при $n > 3$ не существует $(1+n)$-мерного вектора — аналога вектора Любанского — Паули, вместо которого приходится вводить тензоры второго, третьего,... и т. д. рангов.

В этом пункте найдены независимые операторы Казимира алгебры AP(1, 4).

Определим фундаментальный антисимметричный тензор третьего ранга

$$V_{\lambda\rho\sigma} = P_\lambda J_{\rho\sigma} + P_\rho J_{\sigma\lambda} + P_\sigma J_{\lambda\rho}. \tag{5.1.2}$$

Именно тензор $V_{\lambda\rho\sigma}$ является естественным обобщением вектора Любанского — Паули на случай группы Пуанкаре в пространстве произвольной размерности. В случае, когда $J_{\rho\lambda}$, P_μ принадлежат алгебре AP(1, 3), тензору (5.1.2) можно однозначно сопоставить вектор $W_\mu = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}V^{\nu\rho\sigma}$ (ср. (2.1.3)). Для алгебры AP(1, 4) тензор $V^{\nu\rho\sigma}$ оказывается эквивалентен тензору второго ранга

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}V^{\rho\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}P^\rho J^{\sigma\lambda}. \tag{5.1.3}$$

Здесь $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}$ — единичный антисимметричный тензор, $\varepsilon_{01234} = 1$.

Наряду с $W_{\mu\nu}$ рассмотрим вектор

$$\Gamma_\sigma = J_{\sigma\nu}P^\nu. \tag{5.1.4}$$

Согласно (5.1.1)—(5.1.4) операторы $W_{\mu\nu}$ и Γ_σ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} P_\mu W^{\mu\nu}=0, \quad \Gamma_\mu P^\mu=0, \\ [P_\mu,\ W_{\nu\lambda}]=0, \quad [\Gamma_\mu,\ P_\lambda]=i(g_{\mu\lambda}P_\nu P^\nu-P_\mu P_\lambda), \\ [\Gamma_\mu,\ \Gamma_\lambda]=-iJ_{\mu\lambda}P_\nu P^\nu, \quad [\Gamma_\mu,\ J_{\nu\lambda}]=i(-g_{\mu\lambda}\Gamma_\nu+g_{\mu\nu}\Gamma_\lambda), \\ [W_{\mu\nu},\ J_{\lambda\sigma}]=i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda}+g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma}-g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma}-J_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}), \end{gathered} \tag{5.1.5}$$

$$[W_{\mu\alpha},\ W_{\nu\beta}]=i(g_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma\lambda}+g_{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}-g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma\lambda}-g_{\alpha\nu}\varepsilon_{\mu\beta\rho\sigma\lambda})W^{\rho\sigma}P_\lambda. \tag{5.1.6}$$

Исходя из (5.1.5), (5.1.6), нетрудно убедиться, что скалярные операторы [102, 193]

$$C_1=P_\mu P^\mu, \tag{5.1.7}$$

$$C_2=\frac{1}{2}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=\frac{1}{2}P_\mu P^\mu J_{\nu\lambda}J^{\nu\lambda}-P^\mu P_\nu J_{\mu\sigma}J^{\nu\sigma}, \tag{5.1.8}$$

$$C_3=-\frac{1}{4}J_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=-\frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma}P^\lambda \tag{5.1.9}$$

коммутируют со всеми базисными элементами алгебры AP(1, 4). Более того, с помощью (5.1.5), (5.1.6) можно показать, что формулы (5.1.7)—(5.1.9) задают все независимые операторы Казимира алгебры AP(1, 4), принадлежащие обертывающей алгебре этой алгебры. Операторы C_1 и C_2 представляют собой обобщение соответствующих операторов Казимира алгебры AP(1, 3) (см. (2.1.3), (2.1.6)), в то время как оператор C_3 не имеет аналога в группе Пуанкаре.

Отметим, что, помимо операторов (5.1.6)—(5.1.8), для каждого класса неприводимых представлений существуют дополнительные операторы Казимира, которые, однако, не принадлежат обертывающей алгебре — подобно тому, как это имеет место для представлений алгебры AP(1, 3) (см. п. 2.1.3).

5.1.3. Неэквивалентные представления тензора $W_{\mu\nu}$. Подобно тому, как это делалось при описании представлений алгебры Пуанкаре (см. § 2.1), найдем все возможные (с точностью до эквивалентности) реализации тензора $V_{\mu\nu\lambda}$ (5.1.2) (или, что то же, тензора $W_{\mu\nu}$ (5.1.3)), а затем определим явный вид операторов P_μ и $J_{\mu\nu}$, соответствующих найденным представлениям фундаментального тензора $V_{\mu\nu\lambda}$.

Представления тензора $W_{\mu\nu}$ будем искать в базисе собственных векторов коммутирующих операторов P_μ:

$$P_\mu|\tilde{p},\ \lambda\rangle=p_\mu|\tilde{p},\ \lambda\rangle, \quad \tilde{p}=(p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4), \tag{5.1.10}$$

где символом λ обозначены собственные значения коммутирующих операторов, образующих совместно с P_μ полный набор, который мы пока не конкретизируем. В базисе $|\tilde{p},\ \lambda\rangle$ коммутационные соотношения для компонент тензора $W_{\mu\nu}$ принимают вид

$$[W_{\mu\alpha}, W_{\nu\beta}] = i\,(g_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda\sigma} + g_{\alpha\nu}\varepsilon_{\beta\mu\rho\lambda\sigma} - \\ - g_{\mu\nu}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\lambda\sigma} - g_{\alpha\beta}\varepsilon_{\nu\mu\nu\lambda\sigma})W^{\rho\lambda}\,p^{\sigma}, \tag{5.1.11}$$

$$[W_{\mu\nu}, p_\sigma] = 0, \qquad W_{\mu\nu}p^\nu = 0, \tag{5.1.11'}$$

где p_σ ($\sigma = 0, 1, 2, 3, 4$) являются не операторами, но произвольными вещественными числами.

Для каждого конкретного значения $\tilde{p}$ соотношения (5.1.11) определяют некоторую алгебру Ли $A_{\tilde{p}}$, структурные константы которой выражаются через p_μ. При этом, как будет показано ниже, для всех p_μ, удовлетворяющих одному из условий

$$p_\mu p^\mu > 0, \tag{5.1.12}$$

$$p_\mu p^\mu = 0, \tag{5.1.13}$$

$$p_\mu p^\mu < 0, \tag{5.1.14}$$

алгебры $A_{\tilde{p}}$ оказываются изоморфными.

Для конструктивного описания представлений алгебры $A_{\tilde{p}}$, образуемой компонентами тензора $W_{\mu\nu}$, преобразуем коммутационные соотношения (5.1.11) к такой форме, в которой структурные константы зависят только от одного параметра $c_1 = p_\mu p^\mu$. Для этого подвергнем вектор $\tilde{p}$ и тензор $W_{\mu\nu}$ линейному преобразованию

$$p_\mu \to p'_\mu = R_{\mu\nu}p^\nu, \qquad W_{\mu\nu} \to W'_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda}R_{\nu\sigma}W^{\lambda\sigma}, \tag{5.1.15}$$

где

$$\begin{gathered} R_{00} = 1, \quad R_{0k} = R_{k0} = 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4, \\ R_{kc} = -\,\delta_{kc} + \frac{\theta_{kc}}{2p} - \frac{\theta_{kn}\theta_{nc}}{2p\,(2p + p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}, \\ \theta_{kc} = p_k - p_c, \quad p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right)^{1/2}. \end{gathered} \tag{5.1.16}$$

Преобразование (5.1.15) обратимо, причем

$$\begin{gathered} R^{-1}_{00} = 1, \quad R^{-1}_{0k} = R^{-1}_{k0} = 0, \\ R^{-1}_{kc} = -\,\delta_{kc} - \frac{\theta_{kc}}{2p} - \frac{\theta_{kn}\theta_{nc}}{2p\,(2p + p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}, \end{gathered} \tag{5.1.17}$$

и представляет собой не что иное, как поворот системы координат, соответствующий переходу к новому базису, в котором

$$p'_0 = p_0, \quad p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'_4 = p/2. \tag{5.1.18}$$

Используя (5.1.15), (5.1.18) и (5.1.11), нетрудно записать коммутационные соотношения для $W'_{\mu\nu}$. Эти соотношения можно значительно упростить, воспользовавшись тем фактом, что из 10 компонент тензора $W'_{\mu\nu}$ линейно независимы только 6 (как это вытекает из (5.1.11')). А именно, полагая

$$W'_{0a} = -p\left(\frac{1}{2}\eta + \eta_a\right), \quad W'_{04} = \frac{1}{2}p\eta,$$
$$W'_{ab} = \frac{1}{2}(\lambda - \varepsilon_{abc}\lambda_c) + \frac{1}{2}p_0(\eta_a - \eta_b), \tag{5.1.19}$$
$$W'_{4a} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{abc}(\lambda_b - \lambda_c) - p_0(\eta - \eta_a)),$$

где

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad a,\ b = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.1.20}$$

приходим к следующей алгебре операторов η_a и λ_b:

$$[\eta_a,\ \eta_b] = i\varepsilon_{abc}\eta_c, \quad [\eta_a,\ \lambda_b] = i\varepsilon_{abc}\lambda_c, \quad [\lambda_a,\ \lambda_b] = ic_1\varepsilon_{abc}\eta_c. \tag{5.1.21}$$

Соотношения (5.1.19) определяют изоморфизм алгебры Ли, которой удовлетворяют компоненты тензора $W'_{\mu\nu}$, алгебре операторов η_a и λ_a, характеризуемой коммутационными соотношениями (5.1.21). Структурные константы алгебры (5.1.21) зависят только от одного параметра c_1 (собственного значения инвариантного оператора $C_1 = P_\mu P^\mu$). В пространстве неприводимого представления алгебры AP(1, 4) это собственное значение фиксировано, и соотношения (5.1.21) задают алгебру Ли.

Если задаться каким-либо представлением операторов η_a и λ_a, то формулы (5.1.19), (5.1.20) однозначно определяют соответствующее представление тензора $W'_{\mu\nu}$ в системе отсчета, где $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$. Для получения этого тензора в произвольной системе отсчета воспользуемся преобразованием.

$$W'_{\mu\nu} \to W_{\mu\nu} = UR^{-1}_{\mu\mu'}R^{-1}_{\nu\nu'}W'_{\mu'\nu'}U^\dagger, \tag{5.1.22}$$

где U — унитарный оператор,

$$U = \exp\left(\frac{i\eta_k p_k}{\widehat{p}}\operatorname{arctg}\frac{\widehat{p}}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}\right), \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{5.1.23}$$
$$\widehat{p} = [(p_1 - p_2)^2 + (p_3 - p_1)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_4 - p_1)^2 + (p_4 - p_2)^2 + (p_4 - p_3)^2]^{1/2},$$

а $R^{-1}_{\mu\nu}$ заданы в (5.1.17). В результате получаем

$$W_{0k} = \Sigma_{kl}p_l,$$
$$W_{kl} = p_0\Sigma_{kl} + \frac{1}{p^2}[p_0(p_kW_{0l} - p_lW_{0k}) - p_k\lambda_{en}p_n + p_e\lambda_{kn}p_n], \tag{5.1.24}$$

где

$$\Sigma_{ab} = \varepsilon_{abc}\eta_c, \quad \Sigma_{4a} = \eta_a, \quad \lambda_{ab} = \varepsilon_{abc}\lambda_c, \quad \lambda_{4a} = \lambda_a. \tag{5.1.25}$$

Формулы (5.1.24), (5.1.25) задают представление тензора $W_{\mu\nu}$ в терминах операторов λ_a и η_a, удовлетворяющих алгебре (5.1.21). Последняя же алгебра оказывается эквивалентной хорошо изученным алгебрам Ли группы ортогональных матриц четвертого порядка $O(4)$, группы Лоренца $O(1, 3)$ или группы Евклида $E(3)$ — в зависимости от значения параметра c_1, входящего в структурные константы.

Теорема 5.1. *Алгебра Ли* (5.1.21) *в случае* $c_1 > 0$ *изоморфна алгебре* AO(4), *в случае* $c_1 = 0$ — *алгебре* AE(3) *и в случае* $c_1 < 0$ — *алгебре* AO(1, 3).

Доказательство. Сформулированный изоморфизм может быть установлен явно с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &\eta_a = \Sigma_a,\ \lambda_a = m\widetilde{\Sigma}_a, \quad \text{если} \quad c_1 = m^2 > 0; \\ &\eta_a = \Sigma_a,\ \lambda_a = T_a, \quad \text{если} \quad c_1 = 0; \\ &\eta_a = \Sigma_a,\ \lambda_a = k\zeta_a, \quad \text{если} \quad c_1 = -k^2 < 0, \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

где $\{\widetilde{\Sigma}_a, \Sigma_b\}$, $\{\Sigma_a, T_b\}$, $\{\Sigma_a, \zeta_b\}$ — базисные элементы алгебр AO(4), AE(3) и AO(1, 3) соответственно, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[\Sigma_a, \Sigma_b] = i\varepsilon_{abc}\Sigma_c, \\ &[\Sigma_a, \widetilde{\Sigma}_b] = i\varepsilon_{abc}\widetilde{\Sigma}_c, \quad [\widetilde{\Sigma}_a, \widetilde{\Sigma}_b] = i\varepsilon_{abc}\Sigma_c, \\ &[\Sigma_a, T_b] = i\varepsilon_{abc}T_c, \quad [T_a, T_b] = 0, \\ &[\Sigma_a, \zeta_b] = i\varepsilon_{abc}\zeta_c, \quad [\zeta_a, \zeta_b] = -i\varepsilon_{abc}\Sigma_c. \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

Действительно, как нетрудно убедиться, из (5.1.21), (5.1.26) следуют условия (5.1.27) и, наоборот, из (5.1.26), (5.1.27) вытекают соотношения (5.1.21) для операторов λ_a и η_a. ■

Итак, для нахождения неэквивалентных реализаций тензора $W_{\mu\nu}$ достаточно перечислить представления алгебр AO(4), AE(3) и AO(1, 3), а затем воспользоваться изоморфизмом, установленным в приведенной выше теореме. Неприводимые представления этих алгебр хорошо известны (см., например, [4, 23]), а сведения о конечномерных представлениях приведены выше в § 2.1 и ниже в § 6.2.

5.1.4. Базис неприводимого представления. Для конструктивного описания представлений тензора $W_{\mu\nu}$ и базисных элементов алгебры AP(1, 4) необходимо задать базис в пространстве неприводимого представления. В качестве такого базиса удобно выбрать собственные функции некоторого полного набора коммутирующих операторов.

Зададимся следующим набором коммутирующих величин:

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4, \quad \overline{S}_3, \quad \overline{S}_a\overline{S}_a, \quad C, \tag{5.1.28}$$

где

$$\overline{S}_a = \varepsilon_{abc}P_bW_{0c} - P_4W_{0a} + P_aW_{04}, \tag{5.1.29}$$

а символом C обозначены все имеющиеся в данном представлении операторы Казимира, т. е. C_1, C_2, C_3 (5.1.7) — (5.1.9) и, возможно, дополнительные операторы, существование которых было оговорено в п. 5.1.2.

Используя соотношения (5.1.29), нетрудно убедиться, что операторы $\tilde{S}_a$ удовлетворяют условиям

$$[\tilde{S}_a,\ \tilde{S}_b] = ip^4\varepsilon_{abc}\tilde{S}_c. \tag{5.1.30}$$

Для представлений тензора $W_{\mu\nu}$, задаваемых соотношениями (5.1.24), операторы $\tilde{S}_a$ выражаются через Σ_a согласно следующему соотношению:

$$\tilde{S}_a = p^2\Sigma_a. \tag{5.1.31}$$

Общие собственные функции коммутирующих операторов (5.1.28) будем обозначать символом $|c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle$, где $c = (c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots)$ — собственные значения операторов Казимира, $\tilde{p} = (p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$ — собственные значения операторов P_μ, s и μ характеризуют собственные значения операторов $\tilde{S}_3$ и $\tilde{S}_a\tilde{S}_a$, так что

$$\begin{aligned} C_\alpha\,|\,c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle &= c_\alpha\,|\,c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle, \\ P_\mu\,|\,c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle &= p_\mu\,|\,c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle, \\ \tilde{S}_a\tilde{S}_a\,|\,c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle &= p^4 s(s+1)\,|\,c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle, \end{aligned} \tag{5.1.32}$$

где s — целые или полуцелые неотрицательные числа, $\mu = -s,\ -s+1,\ \ldots,\ s$.

В пространстве неприводимого представления алгебры AP(1, 4) числа c_α (собственные значения инвариантных операторов) фиксированы, а значения p_μ связаны соотношением $p_\mu p^\mu = c_1$. Определенные ограничения накладываются и на возможные значения s (см. п. 5.1.6).

Для представлений, соответствующих $c_1 \geqslant 0$ (c_1 — собственное значение оператора Казимира C_1), наложим на векторы $|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle$ следующие условия нормировки:

$$\langle c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\,|\,c,\ \tilde{p}',\ s',\ \mu'\rangle = 2\hat{p}_0\delta\left(p_4 - p_4'\right)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{ss'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{5.1.33}$$

где $\hat{p}_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + c_1}$. Если же $c_1 < 0$, то условия нормировки удобно выбрать в виде

$$\langle c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\,|\,c,\ \tilde{p}',\ s',\ \mu'\rangle = 2\hat{p}_4\delta\left(p_0 - p_0'\right)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{ss'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{5.1.34}$$

где $\hat{p}_4 = \sqrt{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - c_1}$.

Ортонормированный базис $|c,\ \tilde{p},\ s,\ \mu\rangle$, определяемый соотношениями (5.1.32) — (5.1.34), будет использоваться ниже для нахождения явного вида операторов, реализующих неприводимые представления алгебры AP(1, 4).

5.1.5. Явный вид базисных элементов алгебры AP(1, 4). Определим общий вид операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$, задающих базис алгебры AP(1, 4), которые соответствуют найденным выше представлениям тензора $W_{\mu\nu}$.

Теорема 5.2. *Пусть* $\{P_\mu,\ J_{\mu\nu}\}$ — *базисные элементы представления алгебры* AP(1, 4), *соответствующего одному из возможных наборов собственных значений операторов Казимира* (5.1.7) —

(5.1.9). *Тогда, с точностью до преобразований эквивалентности,*

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \Sigma_{kl},$$
$$J_{0k} = x_0 p_k - x_k p_0 + \frac{1}{p^2}(\lambda_{kl} p_l - p_0 \Sigma_{kl} p_l), \tag{5.1.35}$$

где p_μ — *независимые переменные, связанные соотношением* $p_0^2 - p_k p_k = c_1$, $x_\mu = i\frac{\partial}{\partial p\mu}$, λ_{kl} *и* Σ_{kl} — *матрицы, образующие неприводимое представление алгебры* (5.1.21), (5.1.25).

Доказательство. Легко убедиться непосредственной проверкой, что операторы (5.1.35) удовлетворяют коммутационным соотношениям (5.1.1) и, следовательно, образуют представление алгебры AP(1, 4).

Покажем, что каждому возможному набору собственных значений операторов Казимира (5.1.7)—(5.1.9) можно сопоставить представление алгебры AP(1, 4) в форме (5.1.35). Подставив (5.1.35) в (5.1.3), получаем для вектора $W_{\mu\nu}$ представление (5.1.24). Для операторов Казимира из (5.1.24), (5.1.35), (5.1.7)—(5.1.9) получаем следующие выражения:

$$c_1 = p_\nu p^\nu = c_1, \quad c_2 = -(c_1\eta_a\eta_a + \lambda_a\lambda_a), \quad c_3 = \eta_a\lambda_a, \tag{5.1.36}$$

которые с использованием изоморфизма (5.1.26) могут быть сведены к одной из следующих форм:

$$c_1 = m^2 > 0, \quad c_2 = -m^2(\mathbf{\Sigma}^2 + \widetilde{\mathbf{\Sigma}}^2), \quad c_3 = m\mathbf{\Sigma}\cdot\widetilde{\mathbf{\Sigma}},$$
$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\mathbf{T}^2, \quad c_3 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{\Sigma}, \tag{5.1.37}$$
$$c_1 = -k^2 < 0, \quad c_2 = k^2(\mathbf{\Sigma}^2 - \boldsymbol{\zeta}^2), \quad c_3 = k\mathbf{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\zeta}.$$

Мы видим, что операторы Казимира алгебры AP(1, 4) в представлении (5.1.35) сводятся к инвариантным операторам групп $O(4)$, $E(3)$ и $O(1, 3)$, которые являются малыми группами группы $P(1, 4)$ [102]. Следовательно, каждому возможному набору собственных значений операторов C_1, C_2 и C_3 можно сопоставить представление алгебры AP(1, 4), задаваемое операторами (5.1.35). ■

Итак, базисные элементы алгебры AP(1, 4) для каждого класса неприводимых представлений могут быть представлены в единой форме (5.1.35). Входящие в (5.1.35) матрицы λ_{kl} и Σ_{kl} удовлетворяют алгебре (5.1.21), (5.1.25), которая изоморфна алгебрам AO(4), AE(3) или AO(1, 3) — в зависимости от того, является ли вектор p_μ времениподобным, светоподобным или пространственноподобным.

5.1.6. Связь с другими реализациями. Рассмотрим более подробно представления обобщенной алгебры Пуанкаре для различных областей собственных значений оператора Казимира $C_1 = P_\mu P^\mu$ и обсудим связь реализации (5.1.35) с другими представлениями, известными в литературе.

а) $P_\mu P^\mu = c_1 = m^2 > 0$. В этом случае алгебра операторов Σ_{kl} и λ_{kl}, входящих в генераторы $J_{\mu\nu}$, изоморфна алгебре AO(4). Неприводимые представления алгебры $AO(4)$ конечномерны и реализуются матрицами размерности $[(2j+1)(2\tau+1)][(2j+1)(2\tau+1)]$, где j и τ — целые или полуцелые неотрицательные числа, следующим образом связанные с собственными значениями операторов Казимира C_2 и C_3:

$$c_1 = -m^2\left(l_0^2 + l_1^2 - 1\right) = -2m^2[j(j+1) + \tau(\tau+1)],$$
$$c_2 = 2ml_0l_1 = 2m\,[j(j+1) - \tau(\tau+1)]. \tag{5.1.38}$$

Явный вид матриц Σ_{kl}, λ_{kl} в базисе $|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle$ задается соотношениями

$$\Sigma_{ab}|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle = \varepsilon_{abc}\Sigma_{4c}|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle = S_{ab}|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle,$$
$$\lambda_{ab}|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle = \varepsilon_{abc}\lambda_{4c}|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle = -i\varepsilon_{abc}S_{0c}|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle, \tag{5.1.39}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие представление $D(l_0, l_1)$ алгебры $AO(1, 3)$ и действующие на индексы s, μ вектора $|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle$ согласно формулам (2.1.66). При этом возможные значения s и μ равны

$$\mu = -s, -s+1, \ldots, s, \quad s = l_0, l_0+1, \ldots, |l_1| - 1. \tag{5.1.40}$$

Представления, соответствующие $c_1 > 0$, имеют дополнительный оператор Казимира — оператор знака энергии

$$C_4 = P_0/|P_0| = p_0/\hat{p}_0, \quad \hat{p}_0 = E = \sqrt{p^2 + m^2}. \tag{5.1.41}$$

В пространстве неприводимого представления $C_4 = \varepsilon = \pm 1$ и

$$p_0 = \varepsilon E. \tag{5.1.42}$$

Используя (5.1.41) и принимая во внимание изоморфизм (5.1.26), операторы (5.1.35) можно представить в следующей форме:

$$P_0 = \varepsilon E, \quad P_k = p_k, \quad J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \Sigma_{kl},$$
$$J_{0k} = x_0 p_k - x_k \varepsilon E + \frac{1}{p^2}(m\lambda_{kl}p_l - \varepsilon E\Sigma_{kl}p_l), \tag{5.1.43}$$

где λ_{kl}, Σ_{kl} — матрицы, явный вид которых задается формулами (5.1.39), (2.1.66).

Операторы (5.1.43) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \sum_{s,\mu}\int \frac{d^4p}{2E}\Psi_1^*(\mathbf{p}, p_4, s, \mu)\,\Psi_2(\mathbf{p}, p_4, s, \mu), \tag{5.1.44}$$

где s и μ принимают значения, приведенные в формуле (5.1.40).

С помощью унитарного преобразования $P_\mu \to P_\mu^K = UP_\mu U^\dagger$, $J_{\mu\nu} \to J_{\mu\nu}^K = UJ_{\mu\nu}U^{-1}$, где

$$U = \exp\left[\frac{i}{4p}\varepsilon_{abc}(\Sigma_{ab} - \varepsilon\lambda_{ab})\,p_c \operatorname{arctg}\frac{2|\mathbf{p}|\,p_4}{p_4^2 - \mathbf{p}^2}\right], \tag{5.1.45}$$

операторы (5.1.43) могут быть приведены к форме, найденной в [102]:

$$P_0^K = \varepsilon E, \quad P_l^K = p_l^K,$$
$$J_{kl}^K = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \qquad (5.1.46)$$
$$J_{0k}^K = x_0 p_k - \varepsilon E x_k - \varepsilon \frac{S_{kl} p_l}{E+m},$$

где $S_{ab} = \Sigma_{ab}$, $S_{4a} = \lambda_{4a}$ — базисные элементы алгебры AO(4). Представление (5.1.46) является естественным обобщением канонического представления Вигнера — Широкова — Фолди алгебры AP(1, 3) и поэтому будет называться далее каноническим.

б) $P_\mu P^\mu = c_1 \equiv 0$. Такие представления также имеют дополнительный оператор Казимира, задаваемый формулой (5.1.41) (где $m \equiv 0$). Поэтому явный вид базисных элементов алгебры AP(1, 4), реализующих неприводимое представление такого типа, может быть выбран в форме (см. (5.1.26), (5.1.28), (5.1.32))

$$P_0 = \varepsilon E, \quad P_a = p_a, \quad J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \Sigma_{kl},$$
$$J_{0k} = x_0 p_k - \varepsilon E x_k + (T_{kl} p_l - \varepsilon p \Sigma_{kl} p_l)/p^2, \qquad (5.1.47)$$

где $\Sigma_{ab} = \varepsilon_{abc}\Sigma_c$, $\Sigma_{4a} = \Sigma_a$, $T_{ab} = \varepsilon_{abc} T_c$, $T_{4a} = T_a$, Σ_a и T_a — матрицы, удовлетворяющие алгебре (5.1.27).

Алгебра операторов Σ_a и T_a, характеризуемая коммутационными соотношениями (5.1.27), изоморфна алгебре AE(3). Эта алгебра имеет два оператора Казимира, приведенные в формуле (5.1.37). Собственные значения этих операторов, соответствующие эрмитовым представлениям, равны

$$-c_2 = r^2 \geqslant 0, \quad c_3 = \lambda r, \quad \lambda = 0,\ 1/2,\ 1,\ \ldots \qquad (5.1.48)$$

Представления алгебры AE(3) качественно различны для случаев $r^2 = 0$ и $r^2 > 0$. Если $r^2 = 0$, то

$$T_a \equiv 0 \qquad (5.1.49)$$

и алгебра AE(3) сводится к алгебре Ли группы ортогональных матриц $O(3)$. Эта алгебра имеет дополнительный оператор Казимира

$$C_5 = \Sigma_a \Sigma_a, \qquad (5.1.50)$$

собственные значения которого равны $s(s+1)$, где s — целые или полуцелые неотрицательные числа. Соответствующие представления конечномерны и задаются матрицами размерности $(2s+1)\times$ $\times(2s+1)$, явный вид которых приведен в (2.1.30) (где $S_a \equiv \Sigma_a$).

Выражения для базисных элементов алгебры AP(1, 4), задаваемые формулами (5.1.47), в случае $c_2 = 0$, заметно упрощаются ввиду (5.1.49) и сводятся к форме, полученной в [102, 193]. Эти операторы эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \sum_{\mu} \int \frac{d^4 p}{2p} \Psi_1^* (\mathbf{p}, p_4, \mu)\, \Psi_2 (\mathbf{p}, p_4, \mu), \qquad (5.1.51)$$

где $\mu = -s, -s+1, \ldots, s$, а s — целое или полуцелое число, задающее собственные значения оператора Казимира (5.1.50).

Если $-c_2 = r^2 > 0$, то представления алгебры AE(3) бесконечномерны. Неприводимые представления характеризуются парой чисел r, λ, удовлетворяющих условиям (5.1.48).

Используя результаты, приведенные в [4], нетрудно записать в явном виде действие операторов Σ_a и T_a (образующих неприводимое представление алгебры AE(3)) на базисные элементы $|c, \tilde{p}, s, \mu\rangle$. Мы приведем другую реализацию этой алгебры, имеющую простую и компактную форму.

Обозначим символом $|\tilde{p}, c, r\rangle$ собственный вектор полного набора коммутирующих операторов P_μ, C_1, C_2, C_3 (5.1.36), $C_4 = p_0/|p_0|$ и T_1, T_2, T_3. Явный вид операторов T_a, Σ_a, образующих неприводимое представление алгебры AE(3), а также операторов Казимира в базисе $|\tilde{p}, c, r\rangle$ может быть задан следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&C_1|\tilde{p}, c, r\rangle = 0, \quad C_2|\tilde{p}, c, r\rangle = r^2|\tilde{p}, c, r\rangle,\\
&C_3|\tilde{p}, c, r\rangle = \lambda|\tilde{p}, c, r\rangle, C_4|\tilde{p}, c, r\rangle = \varepsilon|\tilde{p}, c, r\rangle,\\
&T_a|\tilde{p}, c, r\rangle = r_a|\tilde{p}, c, r\rangle,\\
&\Sigma_a|\tilde{p}, c, r\rangle = \left[-i\left(\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)_a + \frac{\lambda(rn_a + r_a)}{r + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\right]|\tilde{p}, c, r\rangle,
\end{aligned}
\tag{5.1.52}
$$

где r, λ задаются в (5.1.48), n_a — произвольные вещественные числа, связанные условием $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, $r = \sqrt{r^2}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Таким образом, неприводимые представления алгебры P(1, 4), соответствующие $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, могут быть натянуты на базис (5.1.47), где Σ_a и T_a — операторы (5.1.52).

в) $P_\mu P^\mu = c_1 = -\eta^2 < 0$. В этом случае матрицы λ_{kl} и Σ_{kl}, через которые выражаются базисные элементы представления алгебры AP(1, 4) (см. (5.1.35)), образуют алгебру Ли, изоморфную AO(1, 3). Неприводимые конечномерные представления этой алгебры описаны выше в § 2.1. Эрмитовы представления алгебры AO(1, 3) бесконечномерны.

Используя изоморфизм (5.1.26), получаем из (5.1.35) следующие явные выражения базисных элементов алгебры AP(1, 4):

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = p_\mu, \quad J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \Sigma_{kl},\\
&J_{0k} = x_0 p_k - x_k p_0 + \frac{1}{p^2}(k\xi_{kl}p_l - p_0\Sigma_{kl}p_c),
\end{aligned}
\tag{5.1.53}
$$

где $\xi_{ab} = \varepsilon_{abc}\zeta_c$, $\xi_{4a} = \zeta_a$, $\Sigma_{ab} = \varepsilon_{abc}\Sigma_c$, $\Sigma_{4a} = \Sigma_a$, а Σ_a и ζ_a — базисные элементы алгебры AO(1, 3), удовлетворяющие перестановочным соотношениям (5.1.27).

§ 5.2. Представления алгебры AP(1, 4) в пуанкаре-базисе

5.2.1. Подгрупповая структура группы $P(1, 4)$. Одной из важнейших задач теоретико-группового анализа уравнений квантовой механики является исследование подгрупповой структуры встречающихся групп симметрии. Эта задача представляет интерес как с точки зрения «чистой» теории групп, так и для многочисленных приложений — например, для отыскания частных точных решений линейных и нелинейных уравнений.

В работах [19, 305] исследована подгрупповая структура таких важных с физической точки зрения групп, как $E(3)$, $P(1,3)$, $O(1,3)$. Что же касается обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, то ее непрерывные подгруппы исследованы в [99]. Оказалось, что эта группа имеет более 400 непрерывных подгрупп, важнейшие из которых суть следующие:

а) группа Евклида в четырехмерном пространстве $E(4)$;

б) группа Пуанкаре $P(1,3)$;

в) группа Галилея $G(1,3)$.

Иными словами, именно группа $P(1, 4)$ естественно объединяет группы движений релятивистской и нерелятивистской квантовой механики и группу движений евклидовой теории поля.

Неприводимые представления группы $P(1, 4)$ в общем случае оказываются приводимыми относительно входящих в нее подгрупп. Поэтому несомненный интерес представляет задача о редукции представлений обобщенной группы Пуанкаре по ее важнейшим с физической точки зрения подгруппам.

Под редукцией неприводимых представлений группы (алгебры) $P(1,4)$ по подгруппам (подалгебрам) $E(4)$, $P(1,3)$ мы будем понимать преобразование генераторов группы (базисных элементов алгебры AP(1, 4)) к такому базису, в котором операторы Казимира соответствующих подалгебр диагональны. Преобразование к такому базису позволяет легко ответить на вопросы, какие представления той или иной подалгебры входят в заданное представление алгебры AP(1, 4) и с какой кратностью, а также найти явный вид базисных элементов алгебры AP(1, 4) в представлении, где диагональны операторы Казимира заданной подалгебры.

5.2.2. Пуанкаре-базис. Операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) образуют подалгебру алгебры AP(1, 4), которая, как нетрудно заметить (ср. (5.1.1) и (1.1.13)), изоморфна алгебре Ли группы Пуанкаре. Если P_μ и $J_{\mu\nu}$ принадлежат неприводимому представлению алгебры AP(1, 4), то соответствующее представление алгебры Пуанкаре будет приводимо, так как операторы Казимира

$$C_1' = P_0^2 - \boldsymbol{P}^2 \equiv c_1 + P_4^2, \quad C_2' = W_\mu W^\mu \equiv W_{4\mu} W^{4\mu} \qquad (5.2.1)$$

не кратны единичным операторам. Здесь W_μ — компоненты вектора Любанского — Паули (2.1.3), которые в силу (5.1.3) следующим образом выражаются через компоненты тензора $W_{\mu\nu}$: $W_\mu = W_{4\mu}$.

Поскольку с физической точки зрения именно подалгебра Пуанкаре представляет основной интерес в алгебре AP(1, 4), желательно найти такие реализации этой алгебры, в которых представление подалгебры AP(1, 3) разлагается в прямую сумму неприводимых. Базис неприводимого представления алгебры AP(1, 4), обладающего указанным выше свойством, будем называть пуанкаре-базисом (или $P(1, 3)$-базисом).

Дадим более точное

Определение 5.1. Будем говорить, что *неприводимое представление алгебры* AP(1, 4) *задано в пункаре-базисе*, если

1) операторы Казимира подалгебры AP(1, 3) диагональны;

2) пространство неприводимого представления алгебры AP(1, 4) разлагается в прямой интеграл гильбертовых пространств, инвариантных относительно неприводимых представлений алгебры AP(1, 3).

В последующих пунктах мы конструктивно зададим пуанкаре-базис и найдем явный вид соответствующих операторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ для всех классов неприводимых представлений.

5.2.3. Редукция $P(1, 4) \to P(1, 3)$ для представлений I класса. Рассмотрим неприводимые представления алгебры AP(1, 4), соответствующие положительным значениям оператора Казимира C_1: $P_\mu P^\mu = \varkappa^2 > 0$. Будем исходить из канонической реализации таких представлений, задаваемых формулами (5.1.46).

Операторы (5.1.46) заданы в базисе $|\varkappa, l_0, l_1, \varepsilon; \mathbf{p}, p_4, s, \lambda\rangle$, образованном собственными векторами операторов Казимира (5.1.37), (5.1.41), а также коммутирующих операторов P_1, P_2, P_3, P_4, Σ^2 и Σ_3. Этот базис будем называть каноническим.

Очевидно, существует множество других базисов, в которых можно определить представление алгебры AP(1, 4). Очень важным для физических приложений является пуанкаре-базис, в качестве которого может быть выбран набор собственных функций операторов P_1, P_2, P_3, операторов Казимира подалгебры AP(1, 3) (5.2.1) и, скажем, оператора третьей проекции спина S_3:

$$S_3 = \frac{W_3}{M} - \frac{P_3\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{W})}{M\,(E+M)}, \quad M = \sqrt{\varkappa^2 + P_4^2}. \tag{5.2.2}$$

Для обозначения базисных векторов будем использовать символ $|\varkappa, l_0, l_1, \varepsilon; \mathbf{p}, m, s, s_3\rangle$, где первые четыре члена задают собственные значения операторов Казимира (5.1.7)—(5.1.9), (5.1.41), а остальные характеризуют собственные значения P_a, C_1', C_2' (5.2.1) и S_3 (5.2.2).

Базисные векторы нормируем согласно

$$\langle\varkappa, l_0, l_1, \varepsilon; \boldsymbol{p}, m, s, s_3 | \varkappa, l_0, l_1, \varepsilon; \mathbf{p}', m', s', s_3'\rangle = \\ = 2E\delta(m - m')\,\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\,\delta_{ss'}\delta_{s_3s_3'},$$

что приведет нас к следующему определению скалярного произведения:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_s \int_{\varkappa^2}^{\infty} \frac{dm^2}{2m} \int \frac{d^3p}{2E}\, \varphi_1^\dagger(\mathbf{p}, m, s, s_3)\,\varphi_2(\mathbf{p}, m, s, s_3), \tag{5.2.3}$$

где $\varphi_1(\mathbf{p}, m, s, s_3)$, $\varphi_2(\mathbf{p}, m, s, s_3)$ — произвольные векторы из пространства неприводимого представления алгебры AP(1, 4), заданного в пуанкаре-базисе. Как нетрудно заметить, билинейная форма (5.2.3) представляет собой сумму по дискретной переменной s и интеграл по параметру m скалярных произведений, заданных в ортогональных подпространствах неприводимых представлений алгебры AP(1, 3).

Наша задача состоит в том, чтобы определить спектр возможных собственных значений операторов M^2 и $W_\mu W^\mu$, найти явный вид операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ в пункаре-базисе и отыскать унитарный оператор, связывающий базисы $|\varkappa, l_0, l_1, \varepsilon; \mathbf{p}, p_4, s, \lambda\rangle$ и $|\varkappa, l_0, l_1, \varepsilon; \mathbf{p}, m, s, s_3\rangle$.

Мы увидим ниже, что операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ (5.1.46), образующие подалгебру AP(1, 3), могут быть преобразованы к канонической форме (2.1.49), где $m=\sqrt{p_4^2+\varkappa^2}$, а S_{ab} — матрицы, входящие в неприводимое представление $D(l_0, l_1)$ алгебры AO(4) (l_0, l_1 — одновременно целые или полуцелые числа). При редукции представления $D(l_0, l_1)$ по алгебре AO(3) получаем прямую сумму представлений $D(s)$, где s — целые или полуцелые числа, лежащие в интервале $l_0\leqslant s\leqslant |l_1|-1$. Отсюда заключаем, что пространство H неприводимого представления $D^\varepsilon(\varkappa, l_0, l_1)$ разлагается на подпространства, соответствующие неприводимым представлениям $D^\varepsilon(m, s)$ алгебры AP(1, 3) со следующими значениями m и s:

$$\varkappa^2\leqslant m^2<\infty,\quad l_0\leqslant s\leqslant |l_1|-1.$$

Оператор V, связывающий канонический базис с $P(1, 3)$-базисом, будем искать в виде

$$V=R\exp\left(i\,\frac{S_{4a}p_a}{|\boldsymbol{p}|}\,\theta\right), \tag{5.2.4}$$

где R и θ — неизвестные функции от $|\mathbf{p}|$ и p_4, S_{4a} — матрицы, входящие в базисные элементы канонического представления алгебры AP(1, 4) (5.1.46). С помощью оператора (5.2.4) можно определить новое представление алгебры AP(1, 4), эквивалентное (5.1.46):

$$P_n'=VP_nV^{-1},\quad J_{mn}'=VJ_{mn}V^{-1}. \tag{5.2.5}$$

По определению, оператор V должен быть таким, чтобы операторы Казимира группы $P(1, 3)$, задаваемые соотношениями (5.2.1), были диагональны в штрихованном представлении. Мы наложим на V более сильные условия, потребовав, чтобы P_μ' и $J_{\mu\nu}'$ ($\mu, \nu=0, 1, 2, 3$), которые образуют базис подалгебры AP(1, 3), имели каноническую форму Вигнера — Широкова (2.1.49). Подставив (5.1.46), (2.1.49) в (5.2.5), приходим к следующим уравнениям для V:

$$\begin{gathered}VP_0V^{-1}=\varepsilon\sqrt{p^2+m^2},\quad VP_aV^{-1}=p_a,\\ VJ_{ab}V^{-1}=J_{ab}\equiv x_ap_b-x_bp_a+S_{ab},\end{gathered} \tag{5.2.6}$$

$$VJ_{0a}V^{-1} \equiv V\left(tp_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon\,\frac{S_{ab}p_b + S_{a4}p_4}{E+\varkappa}\right)V^{-1} =$$
$$= tp_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon\,\frac{S_{ab}p_b}{E+m}, \quad m = \sqrt{\varkappa^2 + p_4^2}. \qquad (5.2.7)$$

Условия (5.2.6) для оператора (5.2.4) удовлетворяются тождественно. Что же касается уравнений (5.2.7), то с использованием формулы Кампбелла — Хаусдорфа

$$\exp(A)\,B\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{A,\,B\}^n,$$
$$\{A,\,B\}^n = \left[A,\{A,\,B\}^{n-1}\right], \qquad \{A,\,B\}^0 = B, \qquad (5.2.8)$$

получаем для операторов, стоящих в правой части:

$$Vx_aV^{-1} = x_a + i\,\frac{\partial R}{\partial p_a}R^{-1} + \frac{p_aS_{4b}p_b}{\mathbf{p}^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\,|\mathbf{p}|} - \frac{\sin\theta}{|\mathbf{p}|}\right) +$$
$$+ \frac{S_{ab}p_b}{\mathbf{p}^2}(1-\cos\theta) + \frac{1}{|\mathbf{p}|}S_{4a}\sin\theta,$$
$$VS_{4a}V^{-1} = S_{4a}\cos\theta + \frac{p_aS_{4b}p_b}{\mathbf{p}^2}(1-\cos\theta) + \frac{S_{ab}p_b}{|\mathbf{p}|}\sin\theta, \qquad (5.2.9)$$
$$VS_{ab}p_bV^{-1} = S_{ab}p_b\cos\theta + \left(\frac{1}{|\mathbf{p}|}p_aS_{4b}p_b - |\mathbf{p}|\,S_{4a}\right)\sin\theta.$$

Подставив (5.2.9) в (5.2.7) и приравняв коэффициенты при линейно независимых матрицах, приходим к следующим уравнениям для θ и R:

$$E(E+\varkappa)\sin\theta + |\mathbf{p}|\,p_4\cos\theta - \mathbf{p}^2\sin\theta = 0,$$
$$E(E+\varkappa)(1-\cos\theta) - |\mathbf{p}|\,p_4\sin\theta + \mathbf{p}^2\cos\theta = \frac{\mathbf{p}^2(E+\varkappa)}{E+m},$$
$$E(E+\varkappa)\left(\frac{\partial\theta}{\partial\,|\mathbf{p}|} - \frac{\sin\theta}{|\mathbf{p}|}\right) - p_4(1-\cos\theta) + |\mathbf{p}|\sin\theta = 0,$$
$$\frac{\partial R}{\partial p_a} = 0,$$

общее решение которых имеет вид

$$R = R(p_4), \qquad \theta = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{|\mathbf{p}|\,p_4}{(E+m)(m+\varkappa)}. \qquad (5.2.10)$$

Полагая $R = \sqrt{m/p_4}$ (что вытекает из требования, чтобы скалярное произведение в пуанкаре-базисе имело вид (5.2.3)) и подставляя (5.2.10) в (5.2.4), получаем оператор преобразования к пуанкаре-базису в форме

$$V = \sqrt{\frac{m}{p_4}}\exp\left(2i\,\frac{S_{4a}p_a}{|\mathbf{p}|}\,\mathrm{arctg}\,\frac{|\mathbf{p}|\,p_4}{(E+m)(m+\varkappa)}\right). \qquad (5.2.11)$$

Оператор (5.2.11) преобразует генераторы P_μ и $J_{\mu\nu}$ к канонической форме Вигнера — Широкова (5.2.6), (5.2.7). Явный вид остальных генераторов группы $P(1,4)$ (т. е. операторов J'_{04} и J'_{4a}) нетрудно найти, используя соотношения (5.2.5), (5.2.9), (5.2.10) и приведенное ниже тождество

$$Vx_4V^{-1} = x_4 - \frac{i\varkappa^2}{2m^2p_4} + \frac{S_{4b}p_b\left(\varkappa E - p_4^2\right)}{Em^2(E+\varkappa)} \tag{5.2.12}$$

с последующей заменой $p_4 \to \varepsilon'\sqrt{m_2 - \varkappa^2}$, $\varepsilon' = p_4/|p_4| = \pm 1$.

Приведенные выше результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пространство H неприводимого представления $D^\varepsilon(\varkappa, l_0, l_1)$ алгебры* AP(1, 4) *с $P_kP^k > 0$ разлагается на подпространства, соответствующие неприводимым представлениям $D^\varepsilon(m, s)$ алгебры* AP(1, 3) *со следующими значениями операторов Казимира $P_\mu P^\mu$ и $W_\mu W^\mu$: $\varkappa \leqslant m^2 < \infty$, $l_0 \leqslant s \leqslant |l_1| - 1$. Оператор перехода от канонического базиса к пуанкаре-базису задается формулой* (5.2.11), *а операторы P'_n, J'_{mn} в $P(1,3)$-базисе имеют вид*

$$P'_0 = \varepsilon\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \qquad P'_4 = \varepsilon'\sqrt{m^2 - \varkappa^2}, \qquad P'_a = p_a,$$

$$J'_{ab} = x_ap_b - x_bp_a + S_{ab}, \qquad J'_{0a} = x_0p_a - iP'_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \varepsilon\frac{S_{ab}p_b}{E+m},$$

$$J'_{04} = x_0p'_4 - iP'_0\left[\varepsilon'\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right]_+ - \frac{\varepsilon\varkappa}{m^2}S_{4a}p_a, \tag{5.2.13}$$

$$J'_{4a} = \frac{i}{2}p_a\left[\varepsilon'\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right]_+ - iP'_4\frac{\partial}{\partial p_a} + \\ + \frac{\varkappa p_aS_{4b}p_b}{m^2(E+m)} + P'_4\frac{S_{ab}p_b}{m(E+m)} + \frac{\varkappa}{m}S_{4a}.$$

Операторы (5.2.13) эрмитовы относительно скалярного произведения (5.2.3) и реализуют такое представление алгебры AP(1, 4), в котором диагональны операторы Казимира ее важнейшей подалгебры — алгебры Пуанкаре.

5.2.4. Редукция $P(1,4) \to P(1,2)$. В некоторых физических задачах (когда нарушена симметрия относительно группы Пуанкаре, но сохраняется симметрия относительно ее подгруппы $P(1,2)$) бывает удобно использовать $P(1, 2)$-базис, в котором диагональны операторы Казимира алгебры AP(1, 2). В связи с этим представляет интерес продолжить редукцию алгебры AP(1, 4) до подалгебры AP(1, 2). Такая редукция может быть осуществлена с помощью перехода к такому базису, в котором операторы P_0, J_{12}, P_α, $J_{0\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) имеют каноническую форму

$$P_0 = \varepsilon E = \varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_1^2}, \quad P_\alpha = p_\alpha, \quad m_1^2 = m^2 + p_3^2,$$

$$J_{12} = i\left(p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}\right) + S_{12}, \tag{5.2.14}$$

$$J_{01} = x_0 p_1 - iP_0 \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{S_{12} p_2}{E + m_1}, \qquad J_{02} = x_0 p_2 - iP_0 \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{S_{12} p_1}{E + m_1}.$$

Здесь S_{12} — матрица из неприводимого представления $D(l_0, l_1)$ алгебры АО(4), которую, не умаляя общности, можно выбрать диагональной.

Найдем вид остальных базисных элементов алгебры АР(1, 4), соответствующих представлению (5.2.14). Для этого достаточно определить оператор $\widetilde{V}$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{gathered} \widetilde{V} P_0' \widetilde{V}^{-1} = \varepsilon E, \quad \widetilde{V} P_\alpha' \widetilde{V}^{-1} = p_\alpha, \quad \widetilde{V} J_{12}' \widetilde{V}^{-1} = J_{12}', \\ \widetilde{V} J_{0\alpha}' \widetilde{V}^{-1} = x_0 p_\alpha - i\varepsilon E \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \varepsilon \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta}{E + m_1}, \end{gathered} \tag{5.2.15}$$

где P_0', P_α', J_{12}', $J_{0\alpha}'$ — генераторы группы $P(1, 4)$ в пуанкаре-базисе (см. (5.2.13)), $\alpha, \beta = 1, 2$.

Представим $\widetilde{V}$ в виде

$$\widetilde{V} = \widetilde{R} \exp\left(i \frac{S_{3\alpha} p_\alpha}{|p|_3} \widetilde{\theta}\right), \qquad |p|_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \tag{5.2.16}$$

где $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\theta}$ — функции от p_3, $|p|_3$ и m. Чтобы определить эти функции, подставим (5.2.16) в (5.2.15) и проделаем вычисления, аналогичные (5.2.8) — (5.2.11). В результате получаем

$$\widetilde{\theta} = 2 \operatorname{arctg} \frac{p_3 |p|_3}{(E + m)(m + m_1)}. \tag{5.2.17}$$

Множитель $\widetilde{R}$ выберем в виде $\widetilde{R} = \sqrt{m_1/p_3}$, что приведет нас к следующему скалярному произведению:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{\varkappa^2}^{\infty} \frac{dm^2}{2m} \int\limits_{m^2}^{\infty} \frac{dm_1^2}{2m_1} \int \frac{d^2 p}{2E} \varphi_1^{+} \varphi_2, \tag{5.2.18}$$

где φ_1, φ_2 — вектор-функции, представляющие собой линейные комбинации собственных векторов матрицы S_{12}.

Используя оператор преобразования (5.2.16), (5.2.17) и делая замену переменных $p_3 \to \varepsilon'' \sqrt{m_1^2 - m^2}$, нетрудно найти явный вид генераторов J_{03} и J_{43} в $P(1, 2)$-базисе:

$$\begin{gathered} J_{03} = x_0 m_1 \lambda_{mm_1} - \frac{i}{2} \varepsilon E \left[\lambda_{mm_1}, \frac{\partial}{\partial m_1}\right] - \frac{m S_{3a} p_a}{m_1^2}, \\ J_{43} = -\frac{im}{2} \left[\lambda_{\varkappa m}, \lambda_{mm_1}, \frac{\partial}{\partial m}\right] + \frac{\varkappa m_1}{m^2} S_{43}, \end{gathered} \tag{5.2.19}$$

где $\lambda_{\varkappa m} = \varepsilon' \sqrt{1 - \varkappa^2/m^2}$, $\lambda_{mm_1} = \varepsilon'' \sqrt{1 - m^2/m_1^2}$, ε', $\varepsilon'' = \pm 1$.

Остальные генераторы группы $P(1, 4)$ могут быть получены из (5.2.14), (5.2.19) с использованием коммутационных соотношений (5.1.1).

5.2.5. Редукция представлений с $c_1 = 0$. В этом пункте мы преобразуем к пуанкаре-базису представления алгебры АР(1, 4), соответствующие нулевым собственным значениям оператора Казимира C_1: $C_1 = P_\mu P^\mu = 0$. Базисные элементы такого представления, не умаляя общности, можно выбрать в виде, задаваемом формулой (5.1.47).

Рассмотрим сначала конечномерные представления, соответствующие нулевым значениям оператора Казимира C_2 (5.1.37). Операторы P_n, J_{mn}, согласно (5.1.47), (5.1.49), принимают следующий вид:

$$P_0 = \varepsilon E, \quad P_k = p_k, \quad E = p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2},$$
$$J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \Sigma_{kl}, \quad J_{0k} = x_0 p_k - \varepsilon p x_k - \varepsilon \frac{\Sigma_{kl} p_l}{p}, \tag{5.2.20}$$

где Σ_{kl} — матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s0)$ алгебры АО(4).

Как нетрудно убедиться, операторы Казимира подалгебры АР(1, 3) (в которую входят операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ с индексами, не равными 4) в представлении (5.2.20) оказываются диагональными:

$$P_\mu P^\mu = p_4^2 = m^2, \quad -W_\mu W^\mu = m^2 \Sigma_a \Sigma_a = m^2 s(s+1),$$

где $\Sigma_a = \Sigma_{4a} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\Sigma_{bc}$, поэтому для перехода к пуанкаре-базису достаточно сделать в (5.2.20) замену $p_4 \to \varepsilon' m$, $\varepsilon' = \pm 1$. В результате получаем

$$P_0 = \varepsilon E, \quad P_a = p_a, \quad P_4 = \varepsilon' m, \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$
$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \Sigma_{ab}, \tag{5.2.21}$$
$$J_{0a} = x_0 p_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon \frac{\Sigma_{ab} p_b + \varepsilon' \Sigma_{a4} m}{E},$$

$$J_{4a} = \varepsilon' \left(p_a \frac{\partial}{\partial m} - m \frac{\partial}{\partial p_a} \right) + \Sigma_{4a},$$
$$J_{04} = \varepsilon' \left(x_0 m - \varepsilon p \frac{\partial}{\partial m} \right) - \varepsilon \frac{\Sigma_{4a} p_a}{E}. \tag{5.2.22}$$

При каждом фиксированном значении m операторы (5.2.21) образуют базис неприводимого представления $D^\varepsilon(m, s)$ алгебры АР(1, 3). Представления алгебры Пуанкаре в форме (5.2.21) рассматривались в [198] (см. также [243]).

С помощью преобразования (5.2.5), где

$$V = V' = \exp\left(\frac{i \Sigma_a p_a}{|\mathbf{p}|} \operatorname{arctg} \frac{|\mathbf{p}|}{m} \right), \tag{5.2.23}$$

операторы (5.2.21), (5.2.22) могут быть приведены к форме (5.2.13), где $\varkappa \equiv 0$, а S_{kl} — матрицы неприводимого представления

$D(s0)$ алгебры АО(4). Отсюда заключаем, что результат, сформулированный в теореме 5.3, оказывается справедливым также для представлений II класса, соответствующих нулевым собственным значениям операторов Казимира C_1 и C_2 (5.1.7), (5.1.8) (при этом $\varkappa = 0$, $l_0 = s$ и $l_1 = s+1$).

Обратимся теперь к представлениям третьего класса, соответствующим $C_1 = P_n P^n = 0$, $-C_2 = -W_{mn}W^{mn}/2 = r^2 > 0$. Базисные элементы такого представления в базисе собственных векторов коммутирующих операторов (5.1.28) имеют вид, приведенный в формулах (5.1.47). Подвергая операторы (5.1.47) унитарному преобразованию (5.2.5), где

$$V = \exp\left(-i\frac{\mathbf{T}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|p_4}\right)V', \tag{5.2.24}$$

V' — оператор вида (5.2.23) с соответствующими бесконечномерными матрицами Σ_a, и делая замену переменных $p_4 \to \varepsilon' m$, приходим к следующей реализации:

$$\begin{aligned}
&P_0' = \varepsilon E, \quad P_a' = p_a, \quad P_4' = \varepsilon' m, \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},\\
&J_{ab}' = x_a p_b - x_b p_a + \Sigma_{ab},\\
&J_{0a}' = x_0 p_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon\frac{\Sigma_{ab}p_b}{E+m},\\
&J_{04}' = \varepsilon'\left(x_0 m - i\varepsilon E\frac{\partial}{\partial m}\right) - \frac{\mathbf{T}\cdot\mathbf{p}}{m^2},\\
&J_{4a}' = \varepsilon'\left(ip_a\frac{\partial}{\partial m} - im\frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{\Sigma_{ab}p_b}{E+m} + \frac{E}{m^2}T_a\right) + \frac{(2E+m)\,p_a\mathbf{T}\cdot\mathbf{p}}{m^3(E+m)}.
\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

Операторы (5.2.25) заданы в пуанкаре-базисе $|r, \lambda, \varepsilon;\ \mathbf{p}, m, l, l_3\rangle$, который образован собственными векторами полного набора коммутирующих операторов C_1, C_2, C_3 (5.1.8), (5.1.9), (5.1.41), а также P_1, P_2, P_3, P_μ $P_\mu{=}P_4^2$, $W_\mu W^\mu = -\frac{1}{2}m^2\Sigma_{ab}\Sigma_{ab}$ и Σ_{12}. При этом собственные числа операторов Казимира подалгебры Р(1, 3) принимают, согласно (5.1.52), следующие значения:

$$\begin{aligned}
&P_\mu P^\mu|r, \lambda, \varepsilon;\ \mathbf{p}, m, s, s_3\rangle = m^2|r, \lambda, \varepsilon;\ \mathbf{p}, m, s, s_3\rangle,\\
&W_\mu W^\mu|r, \lambda, \varepsilon;\ \mathbf{p}, m, s, s_3\rangle = -m^2 s(s+1)|r, \lambda, \varepsilon;\ \mathbf{p}, m, s, s_3\rangle,
\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

где

$$0 \leqslant m^2 < \infty,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \text{либо}\ s = 1/2,\ 3/2,\ \ldots. \tag{5.2.27}$$

Операторы (5.2.25) эрмитовы относительно скалярного произведения (5.2.3), где $\varkappa = 0$, а s принимает значения, приведенные в формуле (5.2.27). В случае $\mathbf{T} = 0$ (что соответствует предельному значению $r^2 = 0$) эти операторы реализуют представления алгебры АР(1, 4), принадлежащие II классу.

Сформулируем приведенные результаты.

Т е о р е м а 5.4. *Пространство неприводимого представления $D^\varepsilon(r, \lambda)$ алгебры* АР(1, 4) *с $P_nP^n = 0$ разлагается на подпростран-*

ства, соответствующие неприводимым представлениям $D^\varepsilon(m, s)$ *алгебры* АР(1, 3) *со значениями операторов Казимира* $W_\mu W^\mu$ *и* $P_\mu P^\mu$, *задаваемыми формулами* (5.2.27). *Операторы* P_n *и* J_{mn} *в пуанкаре-базисе задаются формулами* (5.2.25), *где* T_a *и* Σ_{ab} — *базисные элементы неприводимого представления* $D(r, \lambda)$ *алгебры* АЕ(3).

5.2.6. Редукция представлений IV класса. Обратимся теперь к представлениям алгебры АР(1, 4) IV класса, соответствующим отрицательным собственным значениям оператора Казимира $C_1 = P_n P^n = -k^2 < 0$.

Преобразование таких представлений к пуанкаре-базису имеет свою специфику, обусловленную тем обстоятельством, что при редукции по подалгебре АР(1, 3) возникают представления, принадлежащие различным классам (т. е. соответствующие как положительным, так и нулевым и отрицательным значениям оператора квадрата массы $P_\mu P^\mu$) — в зависимости от того, какие значения принимает оператор

$$M^2 = P_4^2 - k^2. \tag{5.2.28}$$

Мы рассмотрим случай, когда область возможных значений p_4 ограничена условием $p_4^2 > k^2$, и исследуем вопрос, какие представления алгебры АР(1, 3) встречаются при редукции АР(1, 4) $\to$ АР(1, 3), если представление алгебры АР(1, 4) принадлежит IV классу.

Будем исходить из реализации представлений алгебры АР(1, 4), задаваемой соотношениями (5.1.53). Как нетрудно убедиться, операторы Казимира подалгебры АР(1, 3) недиагональны. Однако с помощью преобразования (5.2.5), где

$$V = \exp\left(-i\frac{S_{0a}P_a}{|\mathbf{p}|}\operatorname{arth}\frac{k\,|\mathbf{p}|}{p_0 p_4}\right)\exp\left[i\frac{S_a p_a}{|\mathbf{p}|}\operatorname{arctg}\frac{|p|}{p_4} + \frac{i\pi}{2}(1-\varepsilon)\right], \tag{5.2.29}$$

где $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $m^2 = p_4^2 - k^2$, $S_{0a} = \zeta_a$, $S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc} = \Sigma_a$, и последующей замены переменных $p_0 \to \varepsilon E$, $p_4 \to \varepsilon'\sqrt{m^2 + k^2}$ эти операторы приводятся к форме

$$\begin{aligned}
&P_0 = \varepsilon\sqrt{p^2 + m^2}, \quad P_a = p_a, \quad P_4 = \varepsilon'\sqrt{m^2 + k^2},\\
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a} = x_0 p_a - i\varepsilon E x_a - \varepsilon\frac{S_{ab}p_b}{E + m},\\
&J_{04} = -i\varepsilon E\left[\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right]_+ + x_0 P_4 + \frac{kS_{0a}p_a}{m^2},\\
&J_{a4} = -\frac{i\varepsilon'}{2}p_a\left[\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right]_+ + x_a P_4 + \frac{k}{m}S_{0a} +\\
&\qquad + \left(\varepsilon'\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}} + \varepsilon\frac{kE}{m^2}\right)\frac{S_{ab}p_b}{E + m}.
\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

Операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ (5.2.30) имеют каноническую форму Вигнера — Широкова, но матрицы S_{ab} являются элементами неприводимого представления $D(l_0, l_1)$ алгебры AO(1, 3). Отсюда заключаем, что неприводимые представления IV класса при редукции по алгебре AP(1, 3) для каждого фиксированного значения p_4 такого, что $p_4^2 < k^2$, разлагаются в прямую сумму неприводимых представлений $D^\varepsilon(s, m)$, где

$$m^2 = p_4^2 - k^2 > 0, \quad s = l_0, l_0 + 1, l_0 + 2, \ldots, |l_1| - 1. \tag{5.2.31}$$

Аналогично можно рассмотреть случаи, когда $|p_4| = k$ и $|p_4| < k$ [108]. Мы не приводим здесь соответствующих выкладок из-за их громоздкости.

5.2.7. Редукция $P(1, n) \to P(1, 3)$. Результаты, приведенные выше, опускают непосредственное обобщение на случай групп $P(1, n)$, определенных в $(n+1)$-мерном пространстве Минковского. Здесь мы рассмотрим неприводимые представления алгебры AP(1, n), соответствующие положительным значениям основного инвариантного оператора $P^2 = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - \ldots - P_n^2$, и найдем реализацию таких представлений в пуанкаре-базисе.

Покажем сначала, как представление алгебры AP(1, n) может быть задано в $P(1, n-1)$-базисе. Каноническая реализация неприводимых представлений, соответствующих $P^2 = \varkappa^2 > 0$, определяется следующими соотношениями [193]:

$$\begin{gathered}
P_0 = \varepsilon E = \varepsilon \sqrt{p_k p_k + \varkappa^2}, \quad P_k = p_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n, \\
J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad a, b = 1, 2, \ldots, n-1, \\
J_{0a} = x_0 p_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon \frac{S_{ab} p_b + S_{an} p_n}{E + \varkappa},
\end{gathered} \tag{5.2.32}$$

$$J_{0n} = x_0 p_n - \varepsilon E x_n - \varepsilon \frac{S_{na} p_a}{E + \varkappa}, \quad J_{an} = x_a p_n - x_n p_a + S_{an}. \tag{5.2.33}$$

Здесь S_{kl} — матрицы, образующие неприводимое представление $D(m_1, m_2, \ldots, m_{[n/2]})$ алгебры AO(n), $m_1, m_2, \ldots$ — числа Гельфанда — Цетлина. Операторы (5.2.32), (5.2.33) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \frac{d^n p}{2E} \Psi_1^+ \Psi_2. \tag{5.2.34}$$

Подалгебра $P(1, n-1)$ является линейной оболочкой операторов (5.2.32). В $P(1, n-1)$-базисе эти операторы, по определению, должны представляться как прямая сумма генераторов группы $P(1, n-1)$. Если представление алгебры AO(n) задано в базисе $O(n) \supset O(n-1) \supset O(n-2) \ldots$, то эти операторы можно выбрать в форме

$$\begin{gathered}
P_0' = \varepsilon E = \varepsilon \sqrt{p_a p_a + m_n^2}, \quad m_n^2 = \varkappa^2 + p_n^2, \\
P_a' = p_a, \quad J_{ab}' = J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\
J_{0a}' = x_0 p_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon \frac{S_{ab} p_b}{E + m_n}.
\end{gathered} \tag{5.2.35}$$

Действительно, как будет показано ниже, операторы (5.2.32) могут быть преобразованы к форме (5.2.35), где S_{ab} — генераторы группы $O(n-1)\subset O(n)$, реализующие прямую сумму неприводимых представлений.

Задача нахождения явного вида генераторов P_n, J_{mn} в $P(1, n-1)$-базисе сводится к отысканию изометрического оператора, связывающего представления (5.2.32) и (5.2.35). По аналогии с (5.2.4) — (5.2.11) можно показать, что такой оператор имеет вид

$$V_n = \sqrt{\frac{m_n}{p_n}}\exp\left(i\,\frac{S_{na}p_a}{|p|_n}\,\theta_n\right), \tag{5.2.36}$$

где

$$\theta_n = 2\operatorname{arctg}\frac{p_n\,|p|_n}{(E+m_n)(m_n+\varkappa)}, \qquad |p|_n = \sqrt{p_1^2 + \ldots + p_{n-1}^2}. \tag{5.2.37}$$

С помощью оператора V_n нетрудно найти выражения для генераторов группы $P(1, n)$ в $P(1, n-1)$-базисе. Действительно, принимая во внимание тождества (легко проверяемые с использованием формулы Кампбелла — Хаусдорфа)

$$V_n x_a V_n^{-1} = x_a' = x_a - \frac{p_a p_n S_{nb} p_b}{E m_n (E+m_n)(E+\varkappa)} +$$

$$+ \frac{S_{ab}p_b(m_n-\varkappa)}{m_n(E+m_n)(E+\varkappa)} + \frac{p_n S_{na} p_a}{m_n(E+\varkappa)}, \quad V_n p_k V_n^{-1} = p_k,$$

$$V_n S_{ab} V_n^{-1} = S_{ab} - p_a\left(x_b' - x_b\right) + p_b\left(x_a' - x_a\right), \tag{5.2.38}$$

$$V_n S_{na} V_n^{-1} = \frac{S_{na}\left(m_n^2 + \varkappa E\right)}{m_n(E+\varkappa)} + \frac{p_n S_{nb} p_b (m_n-\varkappa)}{m_n |p|_n (E+m_n)(E+\varkappa)} + \frac{p_n S_{ab} p_b}{m_n(E+\varkappa)},$$

$$V_n x_n V_n^{-1} = x_n + \frac{S_{na}p_a\left(\varkappa E - p_n^2\right)}{E m_n^2 (E+\varkappa)} - \frac{i\varkappa^2}{2p_n m_n^2},$$

получаем

$$V_n P_0 V_n^{-1} = P_0', \qquad V_n J_{ab} V_n^{-1} = J_{ab}',$$

$$V_n J_{0a} V_n^{-1} = J_{0a}', \qquad V_n P_a V_n^{-1} = P_a',$$

где P_0', P_a', J_{ab}', J_{0a}' — операторы (5.2.35). Аналогично, с использованием последующей замены $p_n \to \varepsilon_n\sqrt{m_n^2 - \varkappa^2}$, $\varepsilon_n = \pm 1$ находим остальные базисные элементы алгебры AP(1, n):

$$P_n' = \varepsilon_n\sqrt{m_n^2 - \varkappa^2},$$

$$J_{0n}' = x_0 P_n' - \frac{i}{2}\,\varepsilon E\left[\frac{P_n'}{m_n}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right]_+ - \frac{\varkappa S_{na}p_a}{m_n^2}, \tag{5.2.39}$$

$$J_{na}' = \frac{ip_a}{2}\left[\frac{p_n'}{m_n}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right]_+ - P_n' x_a + \frac{\varkappa p_a S_{nb} p_b}{m_n^2(E+m_n)} + \frac{P_n' S_{ab} p_b}{m_n(E+m_n)} + \frac{\varkappa}{m_n} S_{na}.$$

Итак, мы получили явные выражения для генераторов группы $P(1, n)$ в $P(1, n-1)$-базисе в форме (5.2.35), (5.2.39). Эти генераторы эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\eta} \int_{\varkappa}^{\infty} dm_n \int \frac{d^{n-1}p}{2E} \varphi_1^{+}(\eta, m)\, \varphi_2(\eta, m). \qquad (5.2.40)$$

Здесь η — набор чисел, характеризующих неприводимые представления алгебры $\mathrm{AO}(n-1)$, на которые разлагается представление $D(m_1, m_2, \ldots, m_{[n/2]})$ при редукции $O(n) \to O(n-1)$.

Найдем теперь представление алгебры $\mathrm{AP}(1, n)$ в $P(1, n-2)$-базисе. Используя приведенные выше результаты, заключаем, что оператор

$$V_{n-1} = \sqrt{\frac{m_{n-1}}{P_{n-1}}} \exp\left(i \frac{2S_{n-1\,a}p_a}{|p|_{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{p_{n-1}\,|p|_{n-1}}{(E+m_n)(m_n+m_{n-1})} \right),$$

где $m_{n-1} = \sqrt{\varkappa^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2}$, $\quad |p|_{n-1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{n-2}^2}$, $a = 1, 2, \ldots, n-2$, преобразует генераторы (5.2.35) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&P_0 = E = \varepsilon \sqrt{|p|_{n-1}^2 + m_{n-1}^2}, \qquad P_a = p_a, \qquad a = 1, 2, \ldots, n-2,\\
&P_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \sqrt{m_{n-1}^2 - m_n^2}, \qquad P_n = \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2},\\
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\\
&J_{0a} = x_0 p_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon \frac{S_{ab}p_b}{E + m_{n-1}},\\
&J_{0\,n-1} = x_0 P_{n-1} - \frac{i}{2} \varepsilon E \left[\frac{P_{n-1}}{m_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial m_{n-1}} \right] - \frac{m_n S_{n-1\,a} p_a}{m_{n-1}^2}.
\end{aligned} \qquad (5.2.41)$$

Для того чтобы определить представление алгебры $\mathrm{AP}(1, n)$ в $P(1, n-2)$-базисе, достаточно указать явный вид $J_{n\,n-1}$ (остальные генераторы находятся из коммутационных соотношений (5.1.1)). Используя тождества

$$\begin{aligned}
&V_{n-1} x_n V_{n-1}^{-1} = x_n - \frac{p_n p_{n-1} S_{n-1\,a} p_a}{m_n m_{n-1}^2 E} - \frac{i}{2} \frac{p_n}{m_{n-1}^2},\\
&V\, S_{n\,n-1} V_{n-1}^{-1} = S_{n\,n-1} \frac{m_{n-1}^2 + E m_n}{m_{n-1}(E + m_n)} + \frac{S_{na} p_a P_{n-1}}{m_{n-1}(E + m_n)}
\end{aligned} \qquad (5.2.42)$$

и последнее из соотношений (5.2.38) для $n \to n' = n-1$, $\varkappa \to m_n$, получаем

$$J_{n\,n-1} = \frac{i}{2} \left[\frac{P_n P_{n-1}}{m_n}, \frac{\partial}{\partial m_{n-1}} \right]_{+} + \frac{\varkappa m_{n-1}}{m_n^2} S_{n\,n-1}. \qquad (5.2.43)$$

Операторы (5.2.42), (5.2.43) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{\varkappa}^{\infty} dm_n \int\limits_{m_n}^{\infty} dm_{n-1} \sum_{\alpha} \int \frac{d^{n-2}p}{E} \varphi_1^{+}(m_{n-1}, \alpha)\, \varphi_2(m_{n-1}, \alpha),$$

где символом α обозначены наборы чисел, нумерующие неприводимые представления алгебры $\mathrm{AO}(n-2)$, содержащиеся в представлении $D\left(m_1, m_2, \ldots, m_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$ алгебры $\mathrm{AO}(n)$.

Аналогично определяется представление алгебры $\mathrm{AP}(1, n)$ в $P(1, n-3)$-, $P(1, n-4)$-, …, $P(1, n-k)$-базисах. Подвергая генераторы (5.2.41), (5.2.43) последовательно преобразованиям $P_\mu \to V_{n-l} P_m V_{n-l}^{-1}$, $J_{mk} \to V_{n-l} J_{mk} V_{n-l}^{-1}$, где

$$V_{n-l} = \sqrt{\frac{m_{n-l}}{p_{n-l}}} \exp\left(\frac{2iS_{n-l\,a}p_a}{|p|_{n-l}} \operatorname{arctg} \frac{p_{n-l}\,|p|_{n-l}}{(E+m_{n-l})(m_{n-l}+m_{n-l+1})}\right),$$

$$|p|_{n-l} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{n-l-1}^2},$$

$$m_{n-l} = \sqrt{\varkappa^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2 + \ldots + p_{n-l}^2},$$

$$a = 1, 2, \ldots, n-l-1; \quad l = 2, 3, \ldots, k,$$

и используя результаты, изложенные выше, получаем

$$\begin{aligned}
&P_0 = \varepsilon E = \varepsilon \sqrt{|p|_{n-k+1}^2 + m_{n-k+1}^2}, \qquad P_a = p_a,\\
&P_{n-\alpha} = \varepsilon_{n-\alpha} \sqrt{m_{n-\alpha}^2 - m_{n-\alpha+1}^2}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, k,\\
&J_{0a} = x_0 p_a - \varepsilon E x_a - \varepsilon \frac{S_{ab}p_b}{E + m_{n-k+1}}, \qquad a, b \leqslant n-k,\\
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\\
&J_{0\,n-\alpha} = x_0 P_{n-\alpha} - \frac{i\varepsilon}{2}\left[\frac{P_{n-\alpha}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_{n-\alpha}}\right]_+ - \frac{m_{n-\alpha+1} S_{n-\alpha\,a} p_a}{m_{n-\alpha}^2},\\
&J_{n-\alpha\, n-\alpha+1} = \frac{i}{2}\left[\frac{P_{n-\alpha}P_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right]_+ + \frac{\varkappa m_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}^2} S_{n-\alpha\, n-\alpha+1}.
\end{aligned} \tag{5.2.44}$$

Генераторы (5.2.44) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{\varkappa}^{\infty} dm_n \int\limits_{m_n}^{\infty} dm_{n-1} \ldots \int\limits_{m_{n-k+1}}^{\infty} dm_{n-k} \sum_{\lambda} \int \frac{d^{n-k}p}{2E} \times$$
$$\times \varphi_1^{+}(m_{n-k}, \lambda)\, \varphi_2(m_{n-k}, \lambda) \tag{5.2.45}$$

и образуют представление алгебры $\mathrm{AP}(1, n)$ в базисе $P(1, n) \supset \supset P(1, n-1) \supset \ldots \supset P(1, n-k)$. В случае $n-k=3$ формулы (5.2.44) задают представление алгебры $\mathrm{AP}(1, n)$ в пуанкаре базисе.

§ 5.3. Представления алгебры AP(1, 4) в $G(1, 3)$- и $E(4)$-базисах

5.3.1. $G(1,3)$-базис. Как уже отмечалось выше в п. 5.2.1, алгебра AP(1, 4) включает подалгебры AP(1, 3), AG(1, 3) и AE(4), т. е. алгебры Ли основных групп симметрии квантовой физики.

В предыдущем параграфе произведена редукция неприводимых представлений алгебры AP(1, 4) по подалгебре AP(1, 3) и найден явный вид генераторов обобщенной группы Пуанкаре $P(1, 4)$ в пуанкаре-базисе. Однако не меньший интерес для физических приложений представляет описание представлений алгебры AP(1, 4) в галилеевском базисе, в котором диагональны операторы Казимира группы Галилея.

Здесь мы получим явный вид операторов P_n, J_{mn} в $G(1, 3)$-базисе для всех классов неприводимых представлений алгебры $P(1, 4)$, описанных в § 5.1. Будет найден также унитарный оператор, с помощью которого осуществляется редукция представлений групп Пуанкаре по группе Галилея в трехмерном пространстве-времени (т. е. редукция $P(1, 3) \rightarrow G(1, 2)$), которая играет важную роль в формализме нулевой плоскости (см., например, [262]). В п. 5.3.5 обсуждается преобразование представлений алгебры AP(1, 4) к $E(4)$-базису, в котором диагональны операторы Казимира алгебры Ли группы Евклида в пространстве четырех измерений.

Для того чтобы в алгебре AP(1, 4) явно выделить подалгебру Галилея, перейдем от P_n, J_{mn} к новому базису

$$\begin{gathered}\widehat{P}_0 = \frac{1}{2}(P_0 - P_4), \qquad M = P_0 + P_4, \qquad \widehat{P}_a = P_a, \\ J_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}, \qquad G_a^{\pm} = J_{0a} \pm J_{4a}, \qquad K = J_{04},\end{gathered} \tag{5.3.1}$$

где, как обычно, $a = 1, 2, 3$.

Из (5.1.1) вытекает, что операторы (5.3.1) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}\left[\widehat{P}_0, \widehat{P}_a\right] = \left[\widehat{P}_0, M\right] = \left[\widehat{P}_a, M\right] = \left[\widehat{P}_a, \widehat{P}_b\right] = 0, \\ \left[\widehat{P}_0, J_a\right] = [M, J_a] = \left[G_a^+, G_b^+\right] = \left[M, G_a^+\right] = 0, \\ \left[\widehat{P}_a, J_b\right] = i\varepsilon_{abc}\widehat{P}_c, \qquad \left[G_a^+, P_b\right] = i\delta_{ab}M, \\ [J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \qquad \left[\widehat{P}_0, G_b^+\right] = i\widehat{P}_b,\end{gathered} \tag{5.3.2}$$

$$\begin{gathered}\left[\widehat{P}_0, G_a^-\right] = \left[G_a^-, G_b^-\right] = 0, \qquad \left[G_a^-, M\right] = -2i\widehat{P}_a, \\ \left[G_a^-, J_b\right] = i\varepsilon_{abc}G_c^-, \qquad \left[G_a^-, P_b\right] = -2i\delta_{ab}\widehat{P}_0, \\ \left[G_a^+, G_b^-\right] = 2i(\varepsilon_{abc}J_c + \delta_{ab}K), \\ \left[\widehat{P}_a, K\right] = [J_a, K] = 0, \qquad \left[\widehat{P}_0, K\right] = -i\widehat{P}_0, \\ [M, K] = iM, \qquad \left[G_a^{\pm}, K\right] = \pm iG_a^{\pm}.\end{gathered} \tag{5.3.3}$$

Коммутационные соотношения (5.3.2) характеризуют алгебру Ли группы Галилея $G(1, 3)$ (ср. (6.1.6)). Эта алгебра имеет три основных оператора Казимира, приведенные в формулах (6.1.16). С использованием изоморфизма (5.3.1) эти операторы можно представить в виде

$$\widehat{C}_1 = 2M\widehat{P}_0 - \widehat{P}_a\widehat{P}_a \equiv C_1,$$
$$\widehat{C}_2 = (M\mathbf{J} - \widehat{\mathbf{P}}\times \mathbf{G}^+)^2 \equiv (W_{4a} + W_{0a})(W_{4a} + W_{0a}), \qquad (5.3.4)$$
$$\widehat{C}_3 = M \equiv P_0 + P_4,$$

где C_1 — оператор Казимира алгебры AP(1, 4) (5.1.7), W_{4a}, W_{0a} — компоненты тензора $W_{\mu\eta}$ (5.1.3).

Наша задача — преобразовать представления алгебры AP(1, 4), описанные в § 5.1, к такому базису, в котором операторы (5.3.4) диагональны. В качестве такого базиса выберем набор собственных функций коммутирующих операторов P_1, P_2, P_3, $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$, $\widehat{C}_3$ и $\Sigma_3 = W_{43} + W_{03}$ с собственными значениями p_1, p_2, p_3, $2mm_0$, $m^2s(s+1)$, m и ms_3 соответственно (спектр этих операторов будет определен ниже); для соответствующих собственных векторов используем обозначение $|\mathbf{p}, m_0, s, m, s_3; c\rangle$, где c — набор собственных значений операторов Казимира алгебры AP(1, 4), характеризующий неприводимое представление.

Базисные векторы нормируем согласно

$$\langle \mathbf{p}, m_0, s, m, s_3; c\,|\,\mathbf{p}', m_0', s', m', s_3'; c\rangle = \\ = 2m\delta(m - m')\,\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\,\delta_{s's}\delta_{s_3s_3'}, \qquad (5.3.5)$$

что приводит к следующему определению скалярного произведения в гильбертовом пространстве, натянутом на базис $|\mathbf{p}, m_0, s, m, s_3; c\rangle$:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \sum_s \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dm}{2m} \int d^3p\,\Phi_1^\dagger(m, \mathbf{p}, s, s_3)\,\Phi_2(m, \mathbf{p}, s, s_3). \qquad (5.3.6)$$

Области значений m и s различны для различных классов неприводимых представлений и будут определены ниже.

5.3.2. Представления с $P_nP^n > 0$. Будем исходить из канонической реализации таких представлений, задаваемой операторами (5.1.46).

Наша цель состоит в том, чтобы найти явный вид операторов P_n, J_{mn} в галилеевском базисе и определить унитарный оператор, связывающий этот базис с каноническим.

Подставив (5.1.46) в (5.3.2)—(5.3.4), получаем галилеевские генераторы $\widehat{P}_\mu$, J_a, G_a^+, M, операторы Казимира алгебры AG(1, 3) $\widehat{C}$ и остальные базисные элементы алгебры AP(1, 4) в форме

$$\widehat{P}_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon E - p_4), \quad M = \varepsilon E + p_4, \quad E = \sqrt{p^2 + p_4^2 + \varkappa^2},$$

$$J_a = \varepsilon_{abc}\left(x_bp_c + \frac{1}{2}S_{bc}\right),$$

$$G_a^+ = (x_4 + x_0)p_a - Mx_a - \frac{\varepsilon S_{ab}p_b - S_{4a}(E + \varkappa + \varepsilon p_4)}{E + \varkappa},$$

$$\widehat{C}_1 = \varkappa^2, \quad \widehat{C}_3 = M, \tag{5.3.7}$$

$$\widehat{C}_2 = \{\mathbf{S}^2[M(E + \varkappa) - \varepsilon\mathbf{p}^2]^2 + [p^2\mathbf{N}^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{N})^2](E + \varkappa + \varepsilon p_4)^2 + \\ + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2[2\varepsilon M(E + \varkappa) - \mathbf{p}^2]\}(E + \varkappa)^{-2},$$

$$K = x_0 p_4 - \varepsilon E x_4 - \varepsilon\frac{S_{4a}p_a}{E + \varkappa},$$

$$G_a^- = (x_0 - x_4)p_a - 2\widehat{P}_0 x_a - \frac{\varepsilon S_{ab}p_b + S_{4a}(E + \varkappa - \varepsilon p_4)}{E + \varkappa},$$

где

$$S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \quad N_a = S_{4a}, \quad x_k = -i\frac{\partial}{\partial p^k}.$$

Операторы Казимира $\widehat{C}_1$ и $\widehat{C}_3$ в каноническом базисе $|\varkappa, l_0, l_1, \varepsilon; \mathbf{p}, p_4, s, s_3\rangle$ диагональны, в то время как $\widehat{C}_2$ в общем случае является матрицей, матричные элементы которой зависят от $\mathbf{p}$ и p_4. Для диагонализации этой матрицы воспользуемся оператором

$$U_1 = \exp\left(i\frac{S_{4a}p_a}{|\mathbf{p}|}\theta\right), \tag{5.3.8}$$

где θ — неизвестная пока функция от $\mathbf{p}$ и p_4.

С помощью унитарного оператора (5.3.8) можно задать целый класс представлений, эквивалентных (5.3.7):

$$\widehat{P}'_\mu = U_1\widehat{P}_\mu U_1^\dagger = \widehat{P}_\mu, \quad J'_a = U_1 J_a U_1^\dagger = J_a, \tag{5.3.9}$$

$$M' = U_1 M U_1^\dagger = M,$$

$$(G_a^+)' = U_1 G_a^+ U_1^\dagger = (x_0 + x'_4)p_a - x'_a M - \frac{\varepsilon S'_{ab}p_b - S'_{4a}(E + \varkappa + \varepsilon p_4)}{E + \varkappa},$$

$$(G_a^-)' = U_1 G_a^- U_1^\dagger, \quad K' = U_1 K U_1^\dagger, \tag{5.3.10}$$

где $x'_a, x'_4, S'_{ab}, S'_{4a}$ задаются формулами (5.2.9) (с $R \equiv 1$). В частности, для $(G_a^+)'$ получаем

$$(G_a^+)' = (x_0 + x_4)p_a - Mx_a + \frac{p_a S_{4b}p_b}{|\mathbf{p}|}\left[\frac{\partial\theta}{\partial p_4} - \frac{M}{|\mathbf{p}|}\left(\frac{\partial\theta}{\partial|\mathbf{p}|} - \frac{1}{|\mathbf{p}|}\sin\theta\right) - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{E + \varkappa}\sin\theta + \frac{E + \varkappa + \varepsilon p_4}{(E + \varkappa)|\mathbf{p}|}(1 - \cos\theta)\right] + \frac{S_{ab}p_b}{|\mathbf{p}|}\left[\left(\frac{M}{|\mathbf{p}|} - \frac{\varepsilon|\mathbf{p}|}{E + \varkappa}\right)\cos\theta - \right. \\ \left. - \frac{M}{|\mathbf{p}|} + \frac{E + \varkappa + \varepsilon p_4}{E + \varkappa}\sin\theta\right] + S_{4a}\left[\left(\frac{\varepsilon|p|}{E + \varkappa} - \frac{M}{|\mathbf{p}|}\right)\sin\theta + \frac{E + \varkappa + \varepsilon p_4}{E + \varkappa}\cos\theta\right]. \tag{5.3.11}$$

Формула (5.3.11) принимает простой вид, если положить

$$\theta = 2\operatorname{arctg}\frac{|\mathbf{p}|}{E + \varkappa + \varepsilon p_4} + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\pi, \tag{5.3.12}$$

при этом

$$\left(G_a^{+}\right)' = (x_0 + x_4)\, p_a - Mx_a. \tag{5.3.13}$$

Подставив (5.1.10), (5.1.13) в (5.3.4), убеждаемся, что оператор Казимира $\widehat{C}_2$ в результате такого преобразования приводится к диагональной форме

$$(\widehat{C}_2)' = M^2\mathbf{S}^2, \tag{5.3.14}$$

где $\mathbf{S}^2 = S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2$ — диагональная матрица с собственными значениями $s(s+1)$ $(l_0 \leqslant s \leqslant |l_1| - 1)$.

Для нахождения явного вида генераторов группы $P(1,4)$ в галилеевском базисе $|\mathbf{p}, m_0, s, m, s_3;\ \varkappa, l_0, l_1, \varepsilon\rangle$ осталось подставить (5.2.9), (5.3.2) в (5.3.10) и перейти от переменных (p_1, p_2, p_3, p_4) к (p_1, p_2, p_3, m), где $m = E + \varepsilon p_4$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial p_4} \to \varepsilon \frac{m}{E} \frac{\partial}{\partial m}, \qquad \frac{\partial}{\partial p_a} \to \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{p_a}{E} \frac{\partial}{\partial m},$$

и операторы $\widehat{P}_\mu'$, J_a', $\left(G_a^{\pm}\right)'$, K', $\widehat{G}_a'$ принимают следующую форму:

$$\widehat{P}_0' = m_0 + \varepsilon \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \qquad \widehat{P}_a' = p_a, \qquad M' = \varepsilon m,$$

$$J_a' = \varepsilon_{abc} x_b p_c + S_a, \qquad \left(G_a^{+}\right)' = x_0 p_a - i\varepsilon m \frac{\partial}{\partial p_a}, \tag{5.3.15}$$

$$K' = -im\frac{\partial}{\partial m} + x_0\left(\frac{\varepsilon m}{2} - \widehat{p}_0\right),$$

$$\left(G_a^{-}\right)' = x_0 p_a - 2i\left[+\varepsilon p_a \frac{\partial}{\partial m} + \widehat{P}_0' \frac{\partial}{\partial p_a}\right] + \frac{2\,(S_{a4}\varkappa - S_{ab} p_b)\,\varepsilon}{m}, \tag{5.3.16}$$

$$\widehat{C}_1' = \varkappa^2, \qquad \widehat{C}_2' = m^2 s(s+1), \qquad \widehat{C}_3' = \varepsilon m,$$

где

$$\varkappa \leqslant m < \infty, \qquad m_0 = \varepsilon \frac{\varkappa^2}{2m}, \qquad l_0 \leqslant s \leqslant |l_1| - 1. \tag{5.3.17}$$

Таким образом, мы приходим к реализации представления $D^\varepsilon(\varkappa, l_0, l_1)$, задаваемой формулами (5.3.15). Отличительной чертой данной реализации является то, что при каждом фиксированном значении m и s операторы $\widehat{P}_\mu'$, J_a', $\left(G_a^{+}\right)'$, M' образуют неприводимое представление алгебры Галилея в канонической реализации (6.2.17) (см. ниже гл. 6), а при произвольных m и s образуют прямую сумму (по s) и прямой интеграл (по m) таких представлений. Операторы (5.3.15) эрмитовы относительно скалярного произведения (5.3.6), где $\lambda_1 = \varkappa$, $\lambda_2 \to \infty$, $l_0 \leqslant s \leqslant |l_1| - 1$.

Сформулируем приведенный выше результат в виде следующей теоремы.

Теорема 5.5. *Гильбертово пространство неприводимого представления $D^\varepsilon(\varkappa, l_0, l_1)$ алгебры* AP(1, 4), *принадлежащего* I *классу, разлагается в прямой интеграл подпространств, соответствующих* *неприводимым представлениям алгебры* AG(1, 3) *со значениями операторов Казимира, перечисленными в* (5.3.16), (5.3.17). ***Явный вид генераторов группы*** $P(1,4)$ ***в*** $G(1,3)$***-базисе и оператора перехода от канонического к галилеевскому базису задается формулами*** (5.3.15), (5.3.8), (5.3.12). ■

5.3.3. Представления II—IV классов. Покажем, что такие представления также могут быть преобразованы к галилеевскому базису, и найдем соответствующие реализации операторов $\widehat{P}_\mu$, M, $G_a^\pm$ и J_a.

Рассмотрим сначала представления, соответствующие $P_nP^n = 0$, одновременно для II и III классов. Базисные элементы неприводимого представления алгебры AP(1, 4), принадлежащего II или III классу, могут быть выбраны в форме (5.1.47). Переходя к базису (5.3.1), получаем из (5.1.47)

$$\widehat{P}_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon p - p_4), \quad M = \varepsilon p + p_4, \quad P_a = p_a,$$

$$J_a = \varepsilon_{abc}x_bp_c + \Sigma_a,$$

$$G_a^+ = (x_0 + x_4)\,p_a - Mx_a + \frac{1}{p^2}(\varepsilon_{abc}p_b(T_c - \varepsilon p\Sigma_c) + \Sigma_a(p^2 + \varepsilon pp_4)],$$

$$\tag{5.3.18}$$

$$K = x_0p_4 - \varepsilon px_4 + \frac{1}{p^2}(T_ap_a - \varepsilon p\Sigma_ap_a),$$

$$G_a^- = (x_0 - x_4)\,p_a - 2\widehat{P}_0x_a + \frac{1}{p^2}[\varepsilon_{abc}\,p_b(T_c - \varepsilon p\Sigma_c) + \Sigma_a(\varepsilon pp_4 - p^2)].$$

Приведем явный вид оператора, преобразующего представление (5.3.18) к галилеевскому базису:

$$V = \exp\left[-i\frac{\mathbf{T}\cdot\mathbf{p}}{p(p+\varepsilon p_4)} + i\frac{\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\left(\operatorname{arctg}\frac{|\mathbf{p}|}{p_4} + \pi\frac{(1-\varepsilon)}{2}\right)\right]. \tag{5.3.19}$$

В результате преобразования (5.3.9), (5.3.19) и последующей замены переменных $(p_1, p_2, p_3, p_4) \to (p_1, p_2, p_3, m)$, $m = p + \varepsilon p_4$ операторы (5.3.18) принимают вид

$$\begin{gathered}
\widehat{P}_0 = \varepsilon\frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \qquad \widehat{P}_a = p_a, \qquad M = \varepsilon m,\\
J_{ab} = \varepsilon_{abc}(x_bp_c + \Sigma_a), \qquad G_a^+ = x_0p_a - i\varepsilon m\frac{\partial}{\partial p_a},\\
K = x_0\left(\frac{\varepsilon m}{2} - \widehat{p}_0\right) - im\frac{\partial}{\partial m} + \frac{(m^2 - \mathbf{p}^2)\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2(m^2 + \mathbf{p}^2)};\\
\frac{1}{2}G_a^- = -i\varepsilon p_a\frac{\partial}{\partial m} - i\widehat{p}_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{T_a + \varepsilon_{abc}p_b\Sigma_c}{\varepsilon m}.
\end{gathered} \tag{5.3.20}$$

Представление алгебры AP(1, 4), реализуемое операторами (5.3.20), задано в галилеевском базисе $|\mathbf{p}, m_0, s, m, s_3; r, \lambda\rangle$, в котором диагональны операторы Казимира подалгебры AG(1, 3). Действительно, согласно (5.3.4), (5.3.20),

$$\widehat{C}_1 \equiv 0, \ \widehat{C}_2 = m^2\Sigma_a\Sigma_a, \ \widehat{C}_3 = \varepsilon m, \tag{5.3.21}$$

откуда заключаем, что собственные значения $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ и $\widehat{C}_3$ равны

$$c_1 = m_0 = 0,\ c_2 = m^2 s(s+1),\ c_3 = m,$$
$$0 \leqslant m < \infty,\ s = \lambda,\ \lambda+1,\ \ldots,\ r^2 \neq 0. \qquad (5.3.22)$$

Если же представление алгебры P(1, 4) характеризуется нулевым значением оператора Казимира C_2 (5.1.8) (т. е. принадлежит II классу), то $r^2 = 0$, а s — произвольное целое или полуцелое число (собственное значение дополнительного оператора Казимира C_5 (5.1.50)). В этом случае форма генераторов (5.3.20) заметно упрощается, поскольку $T_a \equiv 0$.

Операторы (5.3.20) эрмитовы относительно скалярного произведения (5.3.6), где $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \to \infty$, а сумма по s либо сводится к единственному слагаемому (для представлений II класса), либо s пробегает значения, приведенные в формуле (5.3.22).

Мы видим, что представления II и III классов также могут быть заданы в галилеевском базисе. Существенно новым фактором по сравнению с представлениями I класса является возможность нулевых собственных значений оператора массы и бесконечное число представлений с различными спинами s, возникающих при редукции $P(1, 4) \to G(1, 3)$.

В заключение приведем явный вид генераторов неприводимого представления группы $P(1, 4)$ IV класса в $G(1,3)$-базисе. Эти генераторы могут быть выбраны в форме (5.3.15), (5.3.23):

$$K' = x_0\left(\frac{\varepsilon m}{2} - \widehat{p}_0\right) - im\frac{\partial}{\partial m},$$

$$\frac{1}{2}\left(G_a^-\right)' = i\left(\varepsilon p_a \frac{\partial}{\partial m} - \widehat{P}_0' \frac{\partial}{\partial p_a}\right) - \frac{S_{ab}p_b - kS_{0a}}{\varepsilon m}, \qquad (5.3.23)$$

где $S_{\mu\nu}$ — генераторы неприводимого представления группы Лоренца $O(1, 3), m_0 = -\frac{k^2}{\varepsilon 2m}, -\eta^2 < m < 0,\ 0 < m < \infty$.

5.3.4. Ковариантные представления алгебры AP(1, 4). Одной из самых важных задач с точки зрения практических приложений, возникающих при редукции $P(1, 4) \to G(1, 3)$, является преобразование к галилеевскому базису ковариантных представлений алгебры AP(1, 4), характеризуемых следующей формой базисных элементов:

$$P_n = p_n,\ J_{mn} = x_m p_n - x_n p_m + S_{mn}, \qquad (5.3.24)$$

где S_{mn} — матрицы, образующие представление алгебры AO(1, 4), x_m и p_n — канонически сопряженные переменные,

$$[p_m,\ x_n] = ig_{mn}.$$

Мы не будем конкретизировать реализацию p_m и x_n, так что приведенные ниже результаты справедливы и для p-, и для x-представления.

Операторы (5.3.24) принадлежат классу $\mathfrak{M}_1$ и, следовательно, порождают локальные конечные преобразования из группы $P(1,4)$.

Именно ковариантные представления алгебры AP(1, 4) используются при описании $P(1, 4)$-инвариантных волновых уравнений [102, 103] (см. § 5.4).

Ограничимся случаем, когда спектр оператора Казимира P_nP^n положителен (такая ситуация часто возникает, когда пространство представления (5.3.24) определяется как замыкание множества решений $P(1, 4)$-инвариантного волнового уравнения). Переходя от P_n, J_{mn} к базису (5.3.1), получаем

$$\widehat{P}_0 = \frac{1}{2}(p_0 - p_4),\ \widehat{P}_a = p_a,\ M = p_0 + p_4,$$

$$J_a = \varepsilon_{abc}x_bp_c + S_a, G_a^+ = \widetilde{x}_0p_a - x_aM + \lambda_a^+, \tag{5.3.25}$$

$$K = \widetilde{x}_4M - \widetilde{x}_0P_0 + S_{04},$$

$$G_a^- = 2\widetilde{x}_4p_a - 2x_a\widehat{P}_0 + \lambda_a^-, \tag{5.3.26}$$

где $\lambda_a^{\pm} = S_{0a} \pm S_{4a}$, $\widetilde{x}_0 = x_0 - x_4$, $\widetilde{x}_4 = \frac{1}{2}\left(x_0 + x_4\right)$, $S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}$.

Как нетрудно убедиться прямой проверкой, операторы Казимира подалгебры AG(1, 3), натянутой на базис (5.3.26), недиагональны. Для приведения представления (5.3.25), (5.3.26) к галилеевскому базису используем оператор

$$V = \exp\left(i\,\frac{\lambda_a^+p_a}{m}\right). \tag{5.3.27}$$

В результате преобразования (5.3.9), (5.3.10), (5.3.27) приходим к следующей реализации:

$$\begin{aligned}
&\widehat{P}_0' = \frac{1}{2}(p_0 - p_4), \quad \widehat{P}_a' = p_a, \quad M' = p_0 + p_4,\\
&J_a' = \varepsilon_{abc}x_bp_c + S_a, \quad G_a^{+\prime} = \widetilde{x}_0p_a - x_aM,\\
&K' = \widetilde{x}_4M - \widetilde{x}_0\widehat{P}_0' + S_{04},\\
&G_a'^- = 2\widetilde{x}_4p_a - 2x_a\widehat{P}_0' + 2\lambda_a^- - \frac{2}{M}(S_{ab}p_b + S_{40}p_a) - 4\lambda_a^+\frac{\widehat{P}_0}{M} + 2\lambda_a^+\frac{\mathbf{p}^2}{M^2}.
\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

Согласно (5.3.28), (5.3.4) операторы Казимира подалгебры AG(1, 3) принимают в новом представлении следующий вид:

$$\widehat{C}_1 = p_\mu p^\mu = 2M\widehat{P}_0 - \mathbf{p}^2,\ \widehat{C}_2 = M^2S_aS_a,\ \widehat{C}_3 = M. \tag{5.3.29}$$

Как видно из (5.3.29), собственные значения $\widehat{C}_1$ совпадают с собственными значениями оператора $C_1 = p_\mu p^\mu$ (которые, по определению, положительны), собственные значения $\widehat{C}_2$ характеризуются спектром оператора Казимира алгебры $AO(3) \subset AO(1, 3)$, а собственные значения C_3 лежат в интервале $\sqrt{c_1} \leqslant c_3 < \infty$.

Таким образом, ковариантное представление алгебры AP(1, 4) может быть преобразовано к эквивалентной форме (5.3.28), для которой операторы Казимира подалгебры AG(1, 3) оказываются диагональными. Оператор преобразования (5.3.27) может быть использован также для диагонализации систем дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы $P(1, 4)$ (см. ниже п. 5.4.2).

5.3.5. $E(4)$-базис. Помимо подалгебр AP(1, 3) и AG(1, 3), очень интересной с физической точки зрения подалгеброй алгебры AP(1, 4) является алгебра Ли группы Евклида в четырехмерном (плоском) пространстве-времени. Эта группа (обозначаемая ниже, как и соответствующая алгебра Ли, символом $E(4)$) играет важную роль в квантовой теории поля и квантовой статистике.

В этом пункте рассматривается задача о редукции неприводимых представлений алгебры AP(1, 4) по подалгебре AE (4). В силу специфики выбранной нами «универсальной» реализации представлений алгебры AP(1, 4) такая задача решается относительно просто, без использования специальных преобразований типа (5.3.9).

Подалгебру AE(4) образуют десять операторов P_k и J_{kl} ($k, l = 1, 2, 3, 4$), удовлетворяющих, согласно (5.1.1), следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{gathered}[P_k, P_l] = 0, \quad [P_k, J_{nl}] = i(\delta_{kl}P_n - \delta_{kn}P_l),\\ [J_{kl}, J_{k'l'}] = i(\delta_{kk'}J_{ll'} + \delta_{ll'}J_{kk'} - \delta_{kl'}J_{lk'} - \delta_{lk'}J_{kl'}).\end{gathered} \tag{5.3.30}$$

Алгебра (5.3.30) имеет два оператора Казимира:

$$\widehat{C}_1 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2, \quad \widehat{C}_2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 + W_4^2, \tag{5.3.31}$$

где $W_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klmn}P_lJ_{mn}$. В пространстве неприводимого представления алгебры AE (4) эти операторы кратны единичным.

Подставив (5.1.35) в (5.3.31), получаем следующие выражения для операторов Казимира $\widehat{C}_1$ и $\widehat{C}_2$:

$$\widehat{C}_1 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = p^2, \ \widehat{C}_2 = p^2\Sigma_a\Sigma_a, \tag{5.3.32}$$

где Σ_a — матрицы, реализующие представление алгебры (5.1.27). Мы видим, что для представления (5.1.35) операторы (5.3.31) имеют диагональную форму (поскольку матрица $\Sigma_a\Sigma_a$, не умаляя общности, всегда может быть выбрана диагональной).

Обозначим символом $|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle$ собственный вектор полного набора коммутирующих операторов P_1, P_2, P_3, P_4, $\widehat{C_1}$, $\widehat{C_2}$, Σ_3 и операторов Казимира алгебры AP(1, 4), так что

$$\begin{aligned}&\widehat{C}_1|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle = p^2|\tilde{p}, s, s_3, c\rangle,\\ &\widehat{C}_2|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle = p^2s(s+1)|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle,\\ &\Sigma_3|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle = s_3|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle,\\ &P_k|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle = p_k|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle,\\ &C_\alpha|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle = c_\alpha|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle,\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

где $s_3 = -s, -s+1, \ldots, s$, s — целые или полуцелые неотрицательные числа, c_α — собственные значения операторов Казимира алгебры $AP(1, 4)$, число которых зависит от типа неприводимого представления, $\tilde{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, $c = (c_1, c_2, \ldots)$.

Наложим на $|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle$ условия нормировки

$$\langle \tilde{p}, s, s_3;\ c \,|\, \tilde{p}', s', s_3';\ c\rangle = M_{c_1} \delta^4 (\tilde{p} - \tilde{p}')\, \delta_{ss'} \delta_{s_3 s_3'}, \qquad (5.3.34)$$

где

$$M_{c_1} = \begin{cases} 2p_0, & c_1 \geqslant 0, \\ 2p_4, & c_1 < 0. \end{cases} \qquad (5.3.35)$$

Так определенные векторы $|\tilde{p}, s, s_3; c\rangle$ образуют ортонормированный базис, называемый ниже «$E(4)$-базисом».

Явный вид генераторов группы $P(1, 4)$ в $E(4)$-базисе задается формулами (5.1.43), (5.1.47), (5.1.53) для $c_1 > 0$, $c_1 = 0$ и $c_1 < 0$ соответственно. При этом собственные значения операторов Казимира подалгебры AE (4) бесконечно вырождены и задаются формулами (5.3.33), где $0 \leqslant p^2 < \infty$, а значения s совпадают с числами, нумерующими неприводимые представления группы $O(3)$, которые возникают при редукции $O(4) \to O(3)$, $E(3) \to O(3)$ и $O(1, 3) \to O(3)$ для $c_1 > 0$, $c_1 = 0$ и $c_1 < 0$ соответственно.

5.3.6. Представления алгебры Пуанкаре в базисе G (1, 2). Обратимся теперь к представлениям алгебры Пуанкаре $AP(1, 3)$ и рассмотрим задачу преобразования таких представлений к базису, в котором диагональны операторы Казимира подалгебры $AG(1,2)$ — алгебры Ли группы Галилея в двумерном пространстве. Такой базис оказывается очень важным для различных приложений; в частности, именно этот базис явно или неявно используется в формализме нулевой плоскости [262].

Преобразование представлений I класса $(P_\mu P^\mu = \varkappa^2 > 0)$ к $G(1,2)$-базису может быть осуществлено в полной аналогии с соответствующим преобразованием для алгебры $AP(1, 4)$, рассматриваемым в п. 5.3.2. Будем исходить из канонической реализации таких представлений, задаваемой формулами (2.1.44). Базисные элементы подалгебры $AG(1, 2)$ могут быть выражены через P_μ, $J_{\mu\nu}$ с помощью следующих соотношений:

$$\begin{gathered} \widehat{P}_0 = \frac{1}{2}(P_0 - P_3), \qquad M = (P_0 + P_3), \qquad \widehat{P}_\alpha = p_\alpha, \\ \widehat{J}_3 = J_{12}, \qquad G_\alpha^+ = J_{0\alpha} + J_{3\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2. \end{gathered} \qquad (5.3.36)$$

Остальные базисные элементы алгебры $AP(1, 3)$ выберем в форме

$$G_\alpha^- = J_{0\alpha} - J_{3\alpha}, \qquad K = J_{03}. \qquad (5.3.37)$$

Операторы (5.3.36), (5.3.37) (где P_μ, $J_{\mu\nu}$ имеют вид (2.1.44)) реализуют представление алгебры Пуанкаре в каноническом базисе. Для перехода к $G(1, 2)$-базису воспользуемся преобразованием (5.3.9), где

$$U = \exp\left[\frac{2iS_{3\alpha}p_\alpha}{|p|_2}\left(\operatorname{arctg}\frac{|p|_2}{|p_0| + \varepsilon p_3 + \varkappa} + \frac{(1-\varepsilon)\pi}{4}\right)\right], \qquad (5.3.38)$$

и сделаем замену переменных $(p_1, p_2, p_3) \to (p_1, p_2, m)$, $m = \varepsilon p_3 + (p_1^2 + p_2^2 + \varkappa^2)^{1/2}$. В результате получаем генераторы группы Пуанкаре в представлении, в котором операторы Казимира подалгебры AG(1, 2) (т. е. операторы $\widehat{C}_1 = \widehat{P}_0 - \frac{|p|_2^2}{2M}$, $\widehat{C}_2 = (\widehat{J}_{12} - \widehat{P}_1 G_2^+ + \widehat{P}_2 G_1^+)^2$ и $\widehat{C}_3 = M$) диагональны:

$$\widehat{P}_0' = \varepsilon\left(\frac{\varkappa^2}{2m} + \frac{|p|_2^2}{2m}\right), \quad \widehat{P}_\alpha' = p_\alpha, \quad |p|_2 = (p_1^2 + p_2^2)^{1/2},$$

$$J_3' = i\left(p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}\right) + S_{12}, \quad M' = \varepsilon m, \tag{5.3.39}$$

$$G_\alpha'^{+} = x_0 p_a - i\varepsilon m \frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \quad \varkappa \leqslant m < \infty,$$

$$K' = x_0\left(\frac{\varepsilon m}{2} - \widehat{P}_0'\right) - im\frac{\partial}{\partial m},$$

$$\frac{1}{2} G_\alpha' = -i\left(\varepsilon p_\alpha \frac{\partial}{\partial m} + \widehat{P}_0' \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right) - \varepsilon \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta + S_{3\alpha}\varkappa}{m}. \tag{5.3.40}$$

Мы не приводим подробных выкладок, которые совершенно аналогичны (5.3.7) — (5.3.17).

Операторы (5.3.39) совпадают с генераторами кинематической группы, используемой в формализме нулевой плоскости (см., например, [262]). Соотношения (5.3.40) задают явный вид операторов, пополняющих $\widehat{P}_0'$, $\widehat{P}_\alpha'$, J_3', $G_\alpha'^{+}$ и M до базиса алгебры AP(1, 3).

Используя результаты, приведенные в пп. 5.3.3, 5.3.4, нетрудно преобразовать к $G(1, 2)$-базису также такие представления алгебры AP(1, 3), которые соответствуют светоподобным и пространственноподобным четырехимпульсам. Мы не приводим здесь соответствующих вычислений, но рассмотрим более важный с точки зрения физических приложений класс ковариантных представлений, базисные элементы которых задаются формулами (2.1.57). Соответствующий оператор перехода к $G(1, 2)$-базису в случае $P_\mu P^\mu > 0$ имеет вид (ср. (5.3.29))

$$V = \exp\left[i\frac{(S_{0\alpha} + S_{3\alpha})\, p_\alpha}{M}\right], \quad M = p_0 + p_3. \tag{5.3.41}$$

В результате преобразования (5.3.9), (5.3.41) операторы (2.1.57), (5.3.36), (5.3.37) приводятся к форме

$$\widehat{P}_0 = \frac{1}{2}(p_0 - p_3), \quad M = p_0 + p_3, \quad \widehat{P}_\alpha = p_\alpha,$$

$$J_3 = i\left(p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}\right) + S_{12}, \quad G_\alpha^+ = \tilde{x}_0 p_\alpha - x_\alpha \widehat{M} + \lambda_a^+,$$

$$K = \tilde{x}_3 M - \tilde{x}_0 \widehat{P}_0 + S_{03}, \tag{5.3.42}$$

$$2G_\alpha^- = \tilde{x}_3 p_\alpha - x_\alpha \widehat{P}_0' + \frac{1}{2}\lambda_\alpha^- - \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta + S_{30} p_\alpha}{M} - \lambda_\alpha^+ \frac{2\widehat{P}_0}{M} + \lambda_a^+ \frac{p_1^2 + p_2^2}{M^2},$$

где $\lambda_\alpha^\pm = S_{0\alpha} \pm S_{3\alpha}$, $\tilde{x}_0 = i\left(\frac{\partial}{\partial p_0} - \frac{\partial}{\partial p_3}\right)$, $\tilde{x}_3 = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial p_0} + \frac{\partial}{\partial p_3}\right)$. Как нетрудно убедиться, операторы Казимира подалгебры AG(1, 2), натянутой на базис $\{\widehat{P}_0', \widehat{M}, \widehat{P}_\alpha, J_3, G_\alpha^+\}$, в представлении (5.3.42) диагональны.

Оператор (5.3.41) может быть использован при решении различных задач в формализме нулевой плоскости. А именно, с помощью этого оператора осуществляется преобразование к каноническому диагональному виду систем пуанкаре-инвариантных уравнений движения частиц произвольного спина — как свободных, так и взаимодействующих с внешним полем некоторых специальных конфигураций (полем плоской волны, однородным магнитным полем и некоторыми другими); в последнем случае необходимо сделать в (5.3.41) замену $p_\alpha \to p_\alpha - eA_\alpha$, где A_α — компоненты потенциала электромагнитного поля. Примеры уравнений, допускающих такую диагонализацию, рассмотрены в § 4.2.

§ 5.4. Уравнения, инвариантные относительно обобщенных групп Пуанкаре

5.4.1. Вводные замечания. В этом параграфе рассматриваются волновые уравнения, обладающие симметрией относительно обобщенных алгебр Пуанкаре AP(1, n), в первую очередь — относительно алгебры AP(1, 4). Такие уравнения представляют несомненный интерес для физики, поскольку они автоматически оказываются инвариантными как относительно группы Пуанкаре, так и группы Галилея и могут быть интерпретированы в качестве уравнений движения релятивистской (или галилеевской) частицы с переменной массой [193].

К настоящему времени теория $P(1, 4)$-инвариантных уравнений еще далека от завершения. А именно, полностью описаны только некоторые классы таких уравнений (см., например, [102, 103]). Поэтому мы ограничимся обсуждением простейших (и одновременно важнейших) уравнений типа Дирака, Кеммера — Деффина и некоторых других.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$L\Psi(x) \equiv (\Gamma_m p^m - \varkappa)\Psi(x) = 0, \tag{5.4.1}$$

где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $p^m = i\frac{\partial}{\partial x_m}$, Γ_m — числовые матрицы. Уравнение (5.4.1), по определению, инвариантно относительно алгебры AP(1, n), если оператор L удовлетворяет условиям

$$[L, P_m] = [L, J_{mk}] = 0, \tag{5.4.2}$$

где P_m, J_{mk} — генераторы группы $P(1, n)$, имеющие ковариантную форму (5.3.24). Подставив (5.3.24), (5.4.1) в (5.4.2) и приравняв коэффициенты при линейно независимых операторах дифференцирования, приходим к следующим уравнениям для Γ_m:

$$[\Gamma_m, S_{ln}] = i(g_{ml}\Gamma_n - g_{mn}\Gamma_l). \tag{5.4.3}$$

Здесь S_{ln} — матрицы, реализующие представление алгебры $AO(1, n)$. $g_{mn} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, \ldots)$.

Таким образом, задача описания $P(1, n)$-инвариантных уравнений вида (5.4.1) может быть сведена к решению системы соотношений (5.4.3). Мы не будем искать общее решение этих соотношений, ограничившись рассмотрением нескольких примеров.

5.4.2. Обобщенное уравнение Дирака. Простейшее (т. е. реализуемое матрицами минимальной размерности) решение уравнений (5.4.3) в случае $n = 4$ имеет вид

$$\Gamma_m = \gamma_m, \qquad S_{ln} = \frac{i}{4}[\gamma_l, \gamma_n], \tag{5.4.4}$$

где γ_m — матрицы Дирака размерности 4×4, удовлетворяющие алгебре Клиффорда (1.2.3). Подставив (5.4.4) в (5.4.1), приходим к обобщенному уравнению Дирака в пятимерном пространстве:

$$(\gamma_m p^m - \varkappa)\Psi(x) = 0, \qquad m = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{5.4.5}$$

Уравнение (5.4.5) обладает явной симметрией относительно алгебры $AP(1, 4)$. Однако, в отличие от соответствующего уравнения в четырехмерном подходе, обобщенное уравнение Дирака оказывается неинвариантным относительно преобразования $x_a \to -x_a$, $a = 1, 2, 3$ [102]. Уравнение, инвариантное относительно полной (т. е. включающей все возможные отражения координат) группы $P(1, 4)$, может быть получено из (5.4.5) с помощью удвоения числа компонент волновой функции $\Psi(x)$ и замены [193]

$$\gamma_m \to \Gamma_m = \begin{pmatrix} \gamma_m & 0 \\ 0 & -\gamma_m \end{pmatrix}. \tag{5.4.6}$$

Обсудим более подробно свойства симметрии уравнения (5.4.5) и его возможную интерпретацию как уравнения движения релятивистской (и нерелятивистской) частицы с переменной массой.

В полной аналогии с изложенным в § 1.2 можно показать, что алгебра $AP(1, 4)$ является максимальной а. и. уравнения (5.4.5) в классе $\mathfrak{M}_1$. Определим, какое именно представление этой алгебры реализуется на множестве решений обобщенного уравнения Дирака. Для этого воспользуемся тем фактом, что в силу (5.4.5) генераторы (5.3.24) на множестве $\{\Psi(x)\}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&P_0\Psi(x) = H\Psi(x), \qquad H = \gamma_0\gamma_k p_k + \gamma_0\varkappa,\\
&P_k\Psi(x) = p_k\Psi(x), \qquad k, l = 1, 2, 3, 4,\\
&J_{kl}\Psi(x) = (x_k p_l - x_l p_k + S_{kl})\Psi(x),\\
&J_{0k}\Psi(x) = \left(x_0 p_k - \frac{1}{2}[x_k, H]_+\right)\Psi(x),
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

и найдем соответствующие операторы Казимира (5.1.7)—(5.1.9).

Поскольку, согласно (5.4.7), тензор W_{mn} (5.1.3) равен

$$W_{0k} = S_{kl}p_l, \quad W_{kl} = +\frac{1}{2}[H, \gamma_0 S_{kl}]_+, \tag{5.4.8}$$

то

$$\begin{aligned} C_1 &= P_\mu P^\mu = \varkappa^2, \\ C_2 &= \frac{1}{2} W_{mn}W^{mn} = -\frac{1}{2}\varkappa^2 S_{kl}S_{kl}, \\ C_3 &= -\frac{1}{4} J_{mn}W^{mn} = \frac{1}{4}\varkappa\varepsilon_{klk'l'}S_{kl}S_{k'l'}. \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

Что же касается дополнительного оператора Казимира $C_4 = P_0/|P_0|$, то, согласно (5.4.7), $C_4 \equiv H/E$, где $E = \sqrt{\varkappa^2 + p^2}$.

Собственные значения оператора C_4, очевидно, равны ± 1. Чтобы определить спектр C_1 и C_3, выберем конкретную реализацию γ-матриц, задаваемую соотношениями (1.2.4), (1.2.16). Тогда, очевидно, $\frac{1}{2}S_{kl}S_{kl} = \frac{1}{8}\gamma_0\varepsilon_{klk'l'}S_{kl}S_{k'l'} = 3$ и $-c_1 = \frac{\varkappa}{2}c_2 = 3\varkappa^2$, откуда заключаем, что генераторы (5.4.7) реализуют представление $D^+\left(\frac{1}{2}\,0\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2}\,0\right)$ алгебры AP(1, 4).

Поскольку алгебра AP(1, 4) включает подалгебры AP(1, 3) и AG(1, 3), обобщенное уравнение Дирака (5.4.5) оказывается инвариантным относительно групп Пуанкаре и Галилея. Покажем, как это уравнение связано с уравнением Дирака для частицы переменной массы. Представляя $\Psi(x)$ в виде

$$\Psi(x) = \int \exp(ip_4x_4)\,\Psi_{p_4}(x_0, \mathbf{x})\,dp_4, \tag{5.4.10}$$

получаем из (5.4.5) следующее уравнение для $\Psi_{p_4}(x_0, \mathbf{x})$:

$$[\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - (\varkappa + \gamma_4 p_4)]\,\Psi_{p_4} = 0. \tag{5.4.11}$$

Умножив (5.4.11) на $(\varkappa - \gamma_4 p_4)m^{-1}$, где $m = \sqrt{\varkappa^2 + p_4^2}$, получаем

$$\left(\gamma'_\mu p^\mu - m\right)\Psi_{p_4} = 0, \tag{5.4.12}$$

где γ'_μ — матрицы, также удовлетворяющие алгебре Клиффорда (1.2.3), которые связаны с γ_μ следующим соотношением:

$$\gamma'_\mu = (\varkappa - \gamma_4 p_4)\,m^{-1}\gamma_m.$$

Мы видим, что при каждом фиксированном значении p_4 уравнение (5.4.5) эквивалентно уравнению Дирака для частицы с массой $m = \sqrt{\varkappa^2 + p^4}$. Это дает основание интерпретировать (5.4.5) как уравнение движения релятивистской частицы с переменной массой.

Другая возможность интерпретации уравнения (5.4.5) открывается при использовании его симметрии относительно алгебры Ли группы Галилея. Переходя к новым переменным

$$t = x_0 + x_4, \quad \xi = \frac{1}{2}(x_0 - x_4), \tag{5.4.13}$$

это уравнение можно переписать в виде

$$\left(\widehat{\beta}_0 i\frac{\partial}{\partial t}-\widehat{\beta}_a p_a+2\widehat{\beta}_5 i\frac{\partial}{\partial \xi}-\varkappa\right)\Psi(t,\mathbf{x},\xi)=0, \tag{5.4.14}$$

где

$$\widehat{\beta}_0=\gamma_0+\gamma_4,\ \widehat{\beta}_5=\gamma_0-\gamma_4,\ \widehat{\beta}_a=\gamma_a. \tag{5.4.15}$$

Уравнение (5.4.14) инвариантно относительно преобразований Галилея, совершаемых над переменными t и $\mathbf{x}$ (см. ниже п. 6.1.3). Если наложить на $\Psi(t,\mathbf{x},\xi)$ галилеевски инвариантное дополнительное условие

$$i\frac{\partial}{\partial \xi}\Psi(t,\mathbf{x},\xi)=m\Psi(t,\mathbf{x},\xi), \tag{5.4.16}$$

то для каждого фиксированного значения m уравнение (5.4.14) сводится к виду

$$L\Psi\equiv\left(\widehat{\beta}_0 i\frac{\partial}{\partial t}-\widehat{\beta}_a p_a+2\beta_5 m+\varkappa\right)\Psi=0. \tag{5.4.17}$$

В случае $\varkappa=0$ формулы (5.4.15), (5.4.17) определяют уравнение Леви — Леблонда [260] для галилеевской частицы со спином $s=1/2$.

Отметим, что с использованием оператора (5.3.29) уравнение (5.4.17) может быть преобразовано к канонической диагональной форме, поскольку

$$VLV^{-1}=\widehat{\beta}_0\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)+2\beta_5 m-\varkappa. \tag{5.4.18}$$

Согласно (5.4.18) функция $\Phi_+=\frac{1}{2}(1+\gamma_0\gamma_4)V\Psi$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\frac{\varkappa}{2m}\right)\Phi_+=0, \tag{5.4.19}$$

а функция $\Phi_-=\frac{1}{2}(1-\gamma_0\gamma_4)V\Psi$ выражается через Φ_+: $\Phi_-=-\frac{\varkappa}{2m}\Phi_+$.

Мы видим, что $P(1,4)$-инвариантное уравнение Дирака может служить основой для описания как релятивистской частицы с переменной массой, так и нерелятивистской частицы, удовлетворяющей принципу относительности Галилея. Такая интерпретация возможна также для обобщенного уравнения Дирака, включающего потенциал внешнего поля. Например, делая в (5.4.5) замену $p_k\to p_k-eA_k$, где $A_k=A_k(n\cdot x)$, $n=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$,— потенциал плоской волны, мы приходим к уравнению, сохраняющему симметрию относительно преобразований Галилея, решения которого удобно представить в виде разложения по системе функций, удовлетворяющих (5.4.16). Если же $A_k=A_k(x_4)$, то соответствующее уравнение можно использовать для моделирования релятивистских частиц, обладающих спектром масс.

Уравнения Дирака в $(1+4)$-мерном пространстве подробно проанализированы в работах [103, 193].

В заключение остановимся коротко на уравнениях типа Дирака, инвариантных относительно групп $P(1, n)$. Речь идет об уравнениях вида (5.4.5), где суммирование по индексу m распространяется от 0 до n, а γ_m — матрицы, образующие базис алгебры Клиффорда размерности $n+1$.

Уравнения (5.4.5) существуют для любых $n>0$. Минимальная размерность матриц γ_m при заданном n равна $2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, где символ $[a]$ означает целую часть числа a. В случае полуцелых n соответствующие уравнения инвариантны относительно полной группы $\tilde{P}(1, n)$, включающей всевозможные отражения координат. Если же n — целые, то требование инвариантности относительно группы $\tilde{P}(1, n)$ приводит к необходимости удвоить число компонент волновой функции [193].

Уравнения Дирака, инвариантные относительно группы $P(1,n)$, $n=5, 6, \ldots$, также могут служить основой математических моделей частиц с переменной массой.

5.4.3. Обобщенное уравнение Кеммера — Деффина — Петье. Как и уравнение Дирака, уравнение КДП допускает прямое обобщение на случай $(1+4)$-мерного пространства де Ситтера, поскольку уравнениям (5.4.3), очевидно, удовлетворяют матрицы

$$\Gamma_\mu=\beta_\mu,\ \Gamma_4=\beta_4,\ S_{mn}=i\,[\beta_m,\ \beta_n]. \tag{5.4.20}$$

Здесь β_μ — десятирядные матрицы КДП (которые могут быть выбраны, скажем, в форме (2.3.25)), $\beta_4=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$ — пятая матрица, удовлетворяющая совместно с β_μ алгебре КДП.

Уравнение (5.4.3) с матрицами (5.4.20) инвариантно относительно алгебры $AP(1, 4)$ и, следовательно, пуанкаре- и галилеевски инвариантно. Как и пятимерный аналог уравнения Дирака (5.4.5), это уравнение оказывается, однако, неинвариантным относительно полной группы $\tilde{P}(1,\ 4)$, включающей пространственно-временные отражения.

Обобщенное уравнение КДП можно интерпретировать как уравнение движения релятивистской частицы с переменной массой. Чтобы сделать такую интерпретацию более наглядной, рассмотрим представление решений этого уравнения в форме (5.4.10). Тогда для Ψ_{p_4} получаем следующее уравнение:

$$[\beta_0 p_0-\beta_a p_a-\varkappa-\beta_4 p_4]\,\Psi_{p_4}=0. \tag{5.4.21}$$

При каждом фиксированном значении p_4 матрица $\varkappa+\beta_4 p_4$ обратима, причем

$$M=(\varkappa+\beta_4 p_4)^{-1}=\frac{1}{\varkappa}+\frac{p_4^2}{\varkappa m^2}\beta_4^2-\frac{p_4}{m^2}\beta_4. \tag{5.4.22}$$

Умножив (5.4.22) на M, приходим к эквивалентному уравнению

$$(\beta'_\mu p^\mu - m)\Psi_{p_4} = 0, \qquad m = \sqrt{\varkappa^2 + p_4^2}, \tag{5.4.23}$$

где $\beta'_\mu = M\beta_\mu$ — новые матрицы КДП, удовлетворяющие алгебре (2.3.23). Уравнение (5.4.23) совпадает с уравнением КДП для частицы с массой $m = \sqrt{\varkappa^2 + p_4^2}$.

Уравнение КДП в $(1+4)$-мерном пространстве де Ситтера можно интерпретировать как уравнение движения галилеевской частицы со спином 1 и переменной массой. Для этого удобно перейти к новым переменным (5.4.13) и наложить на волновую функцию галилеевски инвариантное дополнительное условие (5.4.16). В результате приходим к уравнению (5.4.17), где

$$\widehat{\beta_0} = \beta_0 + \beta_4, \ \ \widehat{\beta_5} = \beta_0 - \beta_4, \ \ \widehat{\beta_a} = \beta_a. \tag{5.4.24}$$

При каждом фиксированном значении m уравнение (5.4.17), (5.4.24) совпадает с уравнением движения для векторной частицы, инвариантным относительно группы Галилея $G(1, 3)$ (см. ниже § 6.3).

Таким образом, обобщенное уравнение КДП, подобно уравнению Дирака в $(1+4)$-мерном пространстве де Ситтера, может иметь широкие приложения при описании объектов с переменной массой.

Уравнение КДП допускает обобщения также на случай пространства произвольной размерности $1+n$. Соответствующие представления алгебры β-матриц (2.3.23) описаны в [42].

Достаточно очевидные обобщения на случай $(1+4)$-мерного пространства де Ситтера допускают также релятивистские волновые уравнения типа Бабá, т. е. уравнения вида (2.3.2), где $\beta_5 = I$, а $\beta_\mu = S_{5\mu}$ — матрицы, образующие совместно с $S_{\mu\nu}$ представление алгебры AO(1, 5). Соответствующее уравнение, инвариантное относительно группы $P(1, 4)$, имеет вид

$$(S_{5\mu}p^\mu - S_{54}p_4 + \varkappa)\Psi = 0. \tag{5.4.25}$$

В случае, когда матрицы $S_{\mu\nu}$ равны $\frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ или $i[\beta_\mu, \beta_\nu]$ (т. е. реализуют представления алгебры AO(1, 5) размерности 4×4 или 10×10), уравнение (5.4.25) сводится к обобщенным уравнениям Дирака или КДП. Если же $S_{\mu\nu}$ реализуют произвольное конечномерное представление алгебры AO(1, 5), то формула (5.4.25) определяет обобщенное $P(1, 4)$-инвариантное уравнение типа Бабá общего вида [84].

5.4.4. Ковариантные системы уравнений. Одна из возможных формулировок $P(1, n)$-инвариантных уравнений движения предполагает использование систем дифференциальных уравнений следующего вида [84, 147]:

$$p_n\Psi(x) = P_n\Psi(x), \ \ P_n = L_{nm}p^m + \varkappa L_n, \tag{5.4.26}$$

где $L_{mn} = -L_{nm}$, L_n — некоторые числовые матрицы, которые должны быть такими, чтобы система уравнений (5.4.26) оставалась инвариантной при преобразованиях из группы $P(1, n)$.

Мы уже видели выше (см. п. 1.2.2), что в форме (5.4.26) можно записать уравнение Дирака для электрона. В отличие от стандартной формулировки (1.2.1), каждое из уравнений (1.2.12) не остается инвариантным относительно преобразований Лоренца, но переходит в линейную комбинацию этих уравнений с различными значениями n.

По нашему мнению, ковариантные системы волновых уравнений (как в случае четырехмерного пространства де Ситтера, так и определенные в пространстве произвольной размерности $1+n$) являются не менее перспективными для различных физических приложений, чем уравнения в инвариантной формулировке. Напомним, что уравнение Дирака для частиц с положительной энергией [178] допускает только ковариантную формулировку вида (5.4.26)*).

Теория ковариантных уравнений (5.4.26) изложена в работах [84, 147]. Мы рассмотрим здесь только один класс таких уравнений, обладающих симметрией относительно алгебры АР $(1, n)$. Положив $i\,dL_{mn} = S_{mn}$, $i\,dL_n = S_{5n}$, где S_{mn} — матрицы, удовлетворяющие алгебре АО$(1, 5)$, приходим к уравнениям следующего вида:

$$p_m \Psi(x) = \frac{1}{id}\left(S_{mn}p^n + \varkappa S_{m_5}\right)\Psi(x). \qquad (5.4.27)$$

Уравнения (5.4.27) имеют явно ковариантную форму, поскольку операторы

$$P_m = \frac{1}{id}\left(S_{mn}p^n + \varkappa S_{m_5}\right)$$

с очевидностью удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_{mn},\ P_k] = i\left(g_{nk}P_m - g_{mk}P_n\right), \qquad (5.4.28)$$

где J_{mn} — операторы (5.3.24).

Потребуем, чтобы функция $\Psi(x)$ покомпонентно удовлетворяла уравнению Клейна — Гордона. Умножая (5.4.27) на P^m с последующим суммированием по m и принимая во внимание антисимметричность матриц S_{mn} относительно перестановки индексов m и n, заключаем, что это требование приводит к следующему дополнительному уравнению для $\Psi(x)$:

$$\left(\frac{1}{id}\, S_{\mu_5}p^{\mu} - \varkappa\right)\Psi(x) = 0. \qquad (5.4.29)$$

Можно показать [147], что уравнение (5.4.29) является необходимым и достаточным условием совместности системы (5.4.27), если матрицы S_{mn} конечномерны.

Итак, пусть S_{mn} — конечномерные матрицы, реализующие неприводимое представление алгебры АО$(1, 3)$, а (5.4.27) — система ковариантных уравнений, которую можно поставить в соответствие такому представлению. Оказывается, эта система уравнений имеет

*) В работе [76] уравнение Дирака [178] обобщено на случай частиц произвольного спина.

нетривиальные решения только в следующих исключительных случаях:

$$\text{а)}\qquad S_{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\quad S_{5\mu}=\gamma_\mu,\quad \mu,\nu=0,1,2,3,4,$$
$$\text{б), в)}\qquad S_{\mu\nu}=i[\beta_\mu,\beta_\nu],\quad S_{5\mu}=\beta_\mu,\tag{5.4.30}$$

где γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака, β_μ — десяти-(случай б)) или шестирядные (случай в)) матрицы Кеммера — Деффина — Петье.

В случае а) необходимо положить $d=1/2$, и система (5.4.27) оказывается эквивалентной обобщенному уравнению Дирака (см. п. 5.4.2). В случаях б) и в) нетривиальные решения существуют только при $d=1$. В случае б) соответствующая система ковариантных уравнений оказывается эквивалентной обобщенному уравнению КДП (см. п. 5.4.3), а в случае в) имеем систему уравнений для бесспиновых частиц.

Если же матрицы S_{mn} из (5.4.27) реализуют неприводимое представление алгебры АО(1, 5), которое неэквивалентно перечисленным в (5.4.30), то условие совместности (5.4.29) имеет только тривиальные решения $\Psi(x)\equiv 0$. Доказательство этого факта может быть проведено по схеме, предложенной в [30*].

Таким образом, класс ковариантных конечномерных систем уравнений вида (5.4.27) исчерпывается тремя представителями, перечисленными выше. Аналогичный результат справедлив и для ковариантных уравнений в рамках группы Пуанкаре [30*].

Ковариантные системы уравнений для частиц произвольного спина могут быть получены либо при использовании бесконечномерных представлений алгебры АО(1, 5) (подобные уравнения, ковариантные относительно группы $P(1,3)$, рассматривались в [76]), либо при выборе матриц L_{nm} и L_n из (5.4.26) в более общей форме, чем рассматриваемая выше. Пример таких уравнений приведен в [30*].

В работах [102—104] подробно исследованы также другие типы уравнений, инвариантных относительно обобщенных групп Пуанкаре (уравнения типа Баргмана — Вигнера, уравнения с собственным временем, канонические уравнения, инвариантные относительно представлений II — IV классов и т. д.). Анализ этих уравнений выходит за рамки настоящей книги.

ГЛАВА 6

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ГАЛИЛЕЯ И ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Одним из основных требований, предъявляемых к уравнениям нерелятивистской физики, является инвариантность относительно преобразований Галилея. Это обстоятельство предопределяет фундаментальную роль, которую играют представления группы Галилея в нерелятивистской квантовой механике.

Настоящая глава посвящена описанию представлений алгебры Ли группы Галилея и волновых уравнений для частиц произвольного спина, инвариантных относительно этой группы. Мы увидим, что понятие спина органически присуще нерелятивистской квантовой механике, и большинство эффектов, связанных с наличием у частиц спина (дипольное, спин-орбитальное и другие взаимодействия), могут быть последовательно и эффективно описаны с помощью уравнений, удовлетворяющих принципу относительности Галилея. § 6.1 посвящен исследованию симметрии основного уравнения нерелятивистской квантовой механики — уравнения Шредингера.

§ 6.1. Симметрия уравнения Шредингера

6.1.1. Уравнение Шредингера. В нерелятивистской квантовой механике состояние системы с n степенями свободы, описываемой набором координат $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полностью определяется ее волновой функцией $\Psi(t, \mathbf{x})$, являющейся вектором комплексного гильбертова пространства. При этом эволюция физической системы во времени описывается уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \mathbf{x}) = H(t, \mathbf{x})\Psi(t, \mathbf{x}), \tag{6.1.1}$$

где $H(t, \mathbf{x})$ — оператор Гамильтона, или гамильтониан системы. Здесь, как и ранее, мы используем систему единиц Хевисайда, в которой $\hbar = c = 1$.

Простейшей квантомеханической системой, имеющей реальное физическое содержание, является свободная бесспиновая частица. Волновая функция такой частицы зависит от трех пространственных переменных $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, а соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m}, \tag{6.1.2}$$

где m — числовой параметр, задающий массу частицы, $p^2 = p_1^2 +$

$+ p_2^2 + p_3^2$, p_a $(a = 1, 2, 3)$ — операторы дифференцирования, $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$. Подставив (6.1.2) в (6.1.1), приходим к уравнению Шредингера для свободной нерелятивистской частицы:

$$L\Psi(t, \mathbf{x}) \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\right)\Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \tag{6.1.3}$$

которое и будет являться объектом нашего исследования.

Одним из основных постулатов нерелятивистской квантовой механики является галилеевский принцип относительности, который может быть сформулирован в виде требования инвариантности уравнения Шредингера относительно преобразований Галилея. Этому требованию, конечно, удовлетворяет и простейшее квантомеханическое уравнение эволюции (6.1.3). Более того, как было установлено сравнительно недавно [233, 284], уравнение (6.1.3) обладает несколько более широкой симметрией, оставаясь инвариантным при специфических преобразованиях изменения масштаба и конформных преобразованиях.

Ниже мы подробно исследуем симметрийные свойства уравнения Шредингера. Это позволит пояснить на сравнительно простом примере, какой смысл вкладывается в понятие инвариантности уравнений нерелятивистской квантовой механики относительно преобразований Галилея, и одновременно доказать, что группа инвариантности уравнения (6.1.3) — так называемая группа Шредингера — определяет в некотором смысле максимальную симметрию этого уравнения.

Задача исследования симметрии уравнения Шредингера может быть сформулирована по аналогии с соответствующей задачей для уравнения КГФ (см. § 1.1). Снова достаточно ограничиться рассмотрением только таких решений уравнений (6.1.3), которые определены на некотором открытом множестве D четырехмерного многообразия R^4 и принадлежат векторному пространству $\mathscr{F}$ комплекснозначных функций, аналитических на D. Тогда множество $\mathscr{F}_0$ решений уравнения (6.1.3) можно определить как нуль-пространство дифференциального оператора

$$L = p_0 - \frac{p^2}{2m}, \quad p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{6.1.4}$$

определенного на $\mathscr{F}$: $\Psi \in \mathscr{F}_0$, если $\Psi \in \mathscr{F}$ и $L\Psi = 0$. Определения операторов симметрии и а. и. для уравнения Шредингера совпадают с соответствующими определениями 1.1 и 1.2 для уравнения КГФ, если символу L сопоставить дифференциальный оператор (6.1.4).

6.1.2. Алгебра инвариантности уравнения Шредингера. Основным пунктом в наших исследованиях симметрии уравнений Шредингера является нахождение а. и. этого уравнения в классе $\mathfrak{M}_1$ — классе дифференциальных операторов первого порядка.

Теорема 6.1. *Максимальной а. и. уравнения Шредингера в классе $\mathfrak{M}_1$ является 13-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой могут быть выбраны в виде*

$$
\begin{gathered}
P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_a = \varepsilon_{abc}x_b p_c, \\
G_a = tp_a - mx_a, \quad D = 2tp_0 + x^a p_a + \frac{3}{2}i, \quad M = Im, \qquad (6.1.5) \\
A = t^2 p_0 - tD + \frac{1}{2}mx_a x^a,
\end{gathered}
$$

где $x^a = -x_a$, I — единичный оператор, и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Доказательство. Тот факт, что операторы (6.1.5) образуют базис а. и. уравнения Шредингера, может быть легко проверен непосредственно. Действительно, как нетрудно убедиться, каждый из операторов (6.1.5) удовлетворяет условию инвариантности (1.1.5), где L — оператор Шредингера (6.1.4), $\alpha_M = \alpha_{p_0} = \alpha_{p_a} = \alpha_{J_a} = \alpha_{G_a} = 0$, $\alpha_D = -2i$, $\alpha_A = -2it$. Легко проверить также, что операторы (6.1.5) образуют базис алгебры Ли, удовлетворяя следующим коммутационным соотношениям:

$$
\begin{gathered}
[P_a, P_b] = [P_a, P_0] = [M, P_a] = [M, P_0] = [M, J_a] = [M, G_a] = [P_0, J_a] = 0, \\
[P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}P_c, \ [P_0, G_a] = iP_a, \qquad (6.1.6) \\
[P_a, G_b] = i\delta_{ab}M, \ [J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \\
[G_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}G_c, \ [G_a, G_b] = 0, \qquad (6.1.6')
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
[D, J_a] = [D, M] = [A, G_a] = [A, M] = [A, J_a] = 0, \\
[D, P_a] = -iP_a, \ [D, G_a] = iG_a, \\
[D, P_0] = -2iP_0, \ [A, P_a] = iG_a, \qquad (6.1.7) \\
[A, P_0] = iD, \ [A, D] = -2iA.
\end{gathered}
$$

По аналогии с доказательством теоремы 1.2 можно показать также, что алгебра Ли, натянутая на базис (6.1.5), является максимальной а. и. уравнения Шредингера в классе $\mathfrak{M}_1$, т. е. что любой оператор симметрии вида (1.1.4) является линейной комбинацией операторов (6.1.5). Мы не будем приводить деталей доказательства, отметим только, что подстановка операторов (1.1.4), (6.1.4) в (1.1.5) приводит к следующей системе определяющих уравнений для функций α, A^μ и B:

$$
\begin{gathered}
A_a^a = A_b^b, \quad A_a^b + A_b^a = 0, \quad b \neq a, \\
A_a^0 = 0, \quad \dot{A}^0 = -2A_a^a, \quad \alpha = 2iA_a^a, \qquad (6.1.8)
\end{gathered}
$$

$$
i\dot{A}^a + \frac{1}{2m}\Delta A^a + \frac{i}{m}B_a = 0, \qquad i\dot{B} + \frac{1}{2m}\Delta B = 0, \qquad (6.1.9)
$$

где точкой обозначено дифференцирование по t, нижний индекс означает производную по соответствующей координате: $A^a_b = \frac{\partial A^a}{\partial x^b}$, $B_a = \frac{\partial B}{\partial x_a}$, Δ — трехмерный оператор Лапласа. В соотношениях (6.1.8), (6.1.9) суммирования по повторяющимся индексам не подразумевается.

Интегрирование системы (6.1.8), (6.1.9) в принципе ничем не отличается от решения уравнений (1.1.8), (1.1.9). В частности, для функций A^b мы снова имеем систему уравнений Киллинга (6.1.8). Общее решение уравнений (6.1.8), (6.1.9) задается формулами

$$\begin{aligned} &A^0 = ht^2 + 2jt + c, \quad \alpha = 2i(ht + j),\\ &A^a = c^{ab}x_b + htx^a + jx^a + tn^a + m^a,\\ &B = m\left(\frac{h}{2}x_b x^b - n^a x_a + g\right) + \frac{3}{2}i(ht + j), \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

где c^{ab}, h, j, c, n^a, m^a, g — произвольные постоянные. Подставив (6.1.10) в (1.1.4), получаем общий вид оператора симметрии для уравнения Шредингера

$$\begin{aligned} Q = cp_0 + m^a p_a + c^{ab}x_b p_a + n^a(tp_a - mx_a) + gm +\\ + h\left(t^2 p_0 + tx^a p_a + \frac{m}{2}x_b x^b + \frac{3}{2}it\right) + j\left(2tp_0 + x_a p^a + \frac{3}{2}i\right) \equiv\\ \equiv cP_0 + m_a P_a + c^b J_b + n^a G_a + gM + hA + jD, \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

где $c^b = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}c^{ac}$, а P_0, P_a, J_a, G_a, A, D, M — операторы (6.1.5).

Мы убедились, что произвольный оператор симметрии уравнения Шредингера может быть представлен в виде линейной комбинации операторов (6.1.5), которые, таким образом, задают базис максимально широкой а. и. этого уравнения в классе $\mathfrak{M}_1$. ■

6.1.3. Алгебра Шредингера и алгебра Галилея. Итак, мы нашли а. и. уравнения Шредингера, которая является линейной оболочкой 13 независимых операторов симметрии, задаваемых формулами (6.1.5). Операторы (6.1.5) образуют базис алгебры Ли, которую мы будем называть алгеброй Шредингера и обозначать символом ASch(1, 3). Абстрактным определением алгебры Шредингера могут служить коммутационные соотношения (6.1.6), (6.1.7) для базисных элементов.

Для более ясного понимания структуры алгебры ASch(1, 3) представим ее в виде цепочки максимальных идеалов (напомним, что идеалом алгебры Ли G называется такая подалгебра A, что $[a, b] \in A$ для любого $b \in G$, если $a \in A$; идеал A называется максимальным, если алгебра G не имеет идеалов $A' \not\subset A$). Исходя из (6.1.6), (6.1.7), нетрудно убедиться, что максимальный идеал $A^{(1)}$ алгебры ASch(1, 3) включает 11 элементов P_0, P_a, J_a, G_a и M. Символически этот факт может быть записан в виде

$$\text{ASch}(1, 3) = A^{(1)} \circledast \mathcal{G}, \quad A^{(1)} \supset P_0, P_a, G_a, J_a, M, \ \mathcal{G} \supset D, A. \tag{6.1.12}$$

В подалгебре $A^{(1)}$ в свою очередь можно выделить максимальный идеал $A^{(2)} \supset M$, P_0, P_a, G_a, а в $A^{(2)}$ — идеал $T_5 \supset M$, P_0, P_a, что отражает следующая символическая запись:

$$\mathrm{ASch}(1, 3) = [[T_5 \circledast T_3] \circledast \mathrm{AO}(3)] \circledast \mathscr{G}, \tag{6.1.13}$$

где $T_3 \supset G_a$, $\mathrm{AO}(3) \supset J_a$, $\mathscr{G} \supset D$, A, $a = 1, 2, 3$.

Формула (6.1.13) наглядно отражает структуру алгебры Шредингера, выделяя ее важнейшие подалгебры. Подалгебры T_5 и T_3 являются коммутативными (абелевыми) алгебрами размерности 5 и 3 соответственно, $\mathrm{AO}(3)$ — трехмерная алгебра, изоморфная алгебра Ли группы вращений трехмерного пространства, $\mathscr{G}$ — двумерная алгебра Ли, натянутая на базисные элементы D и A (6.1.5). Укажем еще одну важную для физических приложений подалгебру алгебры $\mathrm{ASch}(1, 3)$, базисные элементы которой имеют вид

$$Q_1 = \frac{1}{2}(A + P_0), \quad Q_2 = -\frac{1}{2}D, \quad Q_3 = \frac{1}{2}(P_0 - A). \tag{6.1.14}$$

Операторы (6.1.14) удовлетворяют коммутационным соотношениям, характеризующим алгебру Ли группы $O(1, 2)$ (группы Лоренца в трехмерном пространстве).

Самой интересной с физической точки зрения подалгеброй алгебры $\mathrm{ASch}(1, 3)$ является ее максимальный идеал, который мы будем называть алгеброй Галилея и обозначать символом $\mathrm{AG}(1, 3)$. Смысл такого названия прояснится в следующем пункте.

Алгебра $\mathrm{AG}(1, 3)$ является линейной оболочной базисных элементов P_0, P_a, J_a, G_a, M (6.1.5), удовлетворяющих соотношениям (6.1.6). Как мы увидим ниже, именно инвариантность относительно алгебры $\mathrm{AG}(1, 3)$ является математическим выражением галилеевского принципа относительности. Что же касается операторов D и A (6.1.5), пополняющих алгебру Галилея до алгебры Шредингера, то на множестве решений уравнения (6.1.3) они сводятся к комбинациям P_a, G_a и M. Действительно, нетрудно убедиться, что

$$D\Psi = (2M)^{-1}(P_aG_a + G_aP_a)\Psi, \quad A\Psi = (2M)^{-1}(G_aG_a)\Psi. \tag{6.1.15}$$

Иными словами, симметрия уравнения (6.1.3) относительно операторов D и A является следствием инвариантности относительно алгебры $\mathrm{AG}(1, 3)$.

Алгебра Галилея имеет три основных оператора Казимира:

$$\begin{gathered} C_3 = 2MP_0 - P_aP_a, \; C_1 = M, \\ C_2 = (MJ_a - \varepsilon_{abc}P_bG_c)(MJ_a - \varepsilon_{ade}P_dG_e). \end{gathered} \tag{6.1.16}$$

Забегая несколько вперед, заметим, что собственные значения операторов (6.1.16) ассоциируются с внутренней энергией, массой и спином нерелятивистской частицы. Подставив (6.1.5) в (6.1.16), нетрудно убедиться, что собственные значения операторов C_1, C_2 и C_3 на множестве $\Psi \in \mathscr{F}_0$ равны $c_1 = 0$, $c_2 = m$, $c_3 = 0$, откуда заключаем, что уравнение Шредингера описывает нерелятивистскую частицу с массой m и нулевыми внутренней энергией и спином.

В заключение этого пункта отметим, что связь между базисными элементами алгебры Галилея и алгебры Шредингера, задаваемая соотношениями (6.1.15), оказывается справедливой для любых представлений этих алгебр. Точнее говоря, имеет место следующая лемма (в справедливости которой несложно убедиться непосредственной проверкой).

Лемма 6.1. *Пусть* $\{P_0, P_a, G_a, J_a, M\}$ — *совокупность операторов, удовлетворяющих алгебре Галилея* (6.1.6), *причем оператор* M *имеет обратный. Тогда операторы* $\{D, A, \widehat{P}_0, P_a, J_a, G_a, M\}$, *где* $\widehat{P}_0 = P_0 - (2M)^{-1}C_1$, *а* D *и* A *выражаются через* P_a, G_a *и* M *с помощью соотношений* (6.1.15), *образуют алгебру Шредингера, удовлетворяя коммутационным соотношениям* (6.1.6), (6.1.7).

Согласно сформулированной лемме произвольное представление алгебры Галилея (соответствующее $c_2 \neq 0$) может быть пополнено до представления алгебры Шредингера (подобно тому, как представление группы $P(1,3)$ II класса может быть пополнено до представления конформной группы; см. § 1.4).

6.1.4. Группа Шредингера. Симметрия уравнения Шредингера относительно 13-мерной алгебры ASch(1, 3) является фундаментальным фактом, опираясь на который можно построить все здание нерелятивистской кинематики. В этом пункте мы рассмотрим одно из важнейших следствий этой инвариантности, которое проясняет ее физический смысл.

Используя принятую в физике терминологию, упомянутое следствие можно сформулировать так: для уравнения Шредингера справедлив принцип относительности Галилея.

Как и в § 1, воспользуемся тем фактом, что алгебре инвариантности в классе $\mathfrak{M}_1$ можно сопоставить локальное представление группы Ли. Для нахождения в явном виде соответствующих однопараметрических подгрупп преобразований (1.1.20) используем уравнения Ли (1.1.21), (1.1.22), которые легко интегрируются для операторов симметрии (6.1.5). Действительно, сравнивая (1.1.4) и (6.1.5), заключаем, что для операторов P_μ и J_a $B = 0$ и, следовательно, решения соответствующих уравнений (1.1.22) имеют вид

$$\Psi'(x') = \Psi(x), \quad \text{или} \quad \Psi'(x) = \Psi\left(g_\theta^{-1}(x)\right), \qquad (6.1.17)$$
$$x = (t, x_1, x_2, x_3).$$

Легко интегрируются также соответствующие уравнения (1.1.21), описывающие преобразования независимых переменных. По аналогии с (1.1.28), (1.1.29) получаем

$$x'_\mu = x_\mu + b_\mu \qquad (6.1.18)$$

для $Q = P_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$, $x_0 = t$) и

$$\begin{gathered} x'_0 = x_0, \quad x'_a = x_a, \\ x'_b = x_b \cos\theta_a + x_c \sin\theta_a, \\ x'_c = x_c \cos\theta_a - x_b \sin\theta_a \end{gathered} \qquad (6.1.19)$$

для $Q=J_a$. Здесь b_ν, θ_a — вещественные параметры, (a, b, c) — тройка чисел из цикла $(1, 2, 3)$.

Интегрируя уравнения (1.1.21), (1.1.22), находим преобразования, порождаемые остальными базисными элементами а. и. уравнения Шредингера:

$$\Psi'(x') = \exp\left(imv_a x_a + i\frac{mv_a v_a}{2}\right)\Psi(x),$$
$$x_0' = x_0, \quad x_a' = x_a + v_a t, \quad x_b' = x_b, \quad b \neq a, \tag{6.1.20}$$

если $Q=G_a$;

$$\Psi'(x') = \exp(imc)\Psi(x), \quad x' = x, \tag{6.1.21}$$

если $Q=M$;

$$\Psi'(x') = \exp\left(-\frac{3}{2}\lambda\right)\Psi(x),$$
$$x_0' = \exp(+2\lambda)x_0, \quad x_a' = \exp(+\lambda)x_a, \tag{6.1.22}$$

если $Q=D$;

$$\Psi'(x') = (1+\xi x_0)^{3/2}\exp\left[\frac{-imx_a x_a\xi}{2(1+\xi x_0)}\right]\Psi(x),$$
$$x_0' = \frac{x_0}{1+\xi x_0}, \quad x_a' = \frac{x_a}{1+\xi x_0}, \tag{6.1.23}$$

если $Q=A$.

Здесь G_a, M, A, D — операторы (6.1.5), а v_a c, λ, ξ — параметры соответствующих преобразований.

Формулы (6.1.18) — (6.1.23) определяют семейство однопараметрических преобразований, образующих 13-параметрическую группу Ли, которую называют группой Шредингера. Преобразования (6.1.18) представляют собой сдвиг по пространственным или временной переменным на постоянную величину, формулы (6.1.19) определяют поворот системы координат на угол θ_a вокруг оси с номером a, а соотношения (6.1.20) можно интерпретировать как переход к новой инерциальной системе отсчета, движущейся со скоростью v_a вдоль оси a. Наконец, преобразования (6.1.22) и (6.1.23) отражают симметрию уравнения Шредингера относительно изменения масштаба и относительно специфической нелинейной замены переменных $x_\mu \to \dfrac{x_\mu}{1+\xi x_0}$.

Будем предполагать, что параметры b_μ, θ_a, v_a, ξ, c, η принимают только вещественные значения, так как в противном случае преобразования (6.1.18) — (6.1.23) выводили бы независимые переменные из множества R^4.

Используя (6.1.6), (6.1.7), (6.1.18) — (6.1.23), нетрудно получить общее преобразование из группы Шредингера в виде

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = \exp[if(x)]\Psi(x), \tag{6.1.24}$$

где $f(x)=\frac{3}{2}\ln(1+\xi x_0)-\frac{imx_ax_a\xi}{2(1+\xi x_0)}+mv_ax_a+$

$$+\frac{1}{2}mv_av_ax_0+\frac{3}{2}i\lambda+mc,$$

$$x_a'=\frac{\exp(+\lambda)R_{ab}x_b}{1+\exp(+2\lambda)\xi x_0}+v_ax_0+b_a,\quad x_0'=\frac{x_0}{\xi x_0+\exp(-2\lambda)}+b_0, \tag{6.1.25}$$

R_{ab} — оператор трехмерного поворота,

$$R_{ab}=\delta_{ab}\cos\theta+\frac{\varepsilon_{abc}\theta_c}{\theta}\sin\theta+\frac{\theta_a\theta_b}{\theta^2}(1-\cos\theta), \quad \theta=\left(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2\right)^{1/2}, \tag{6.1.26}$$

v_a, θ_a, b_0, b_a, ξ, λ, c — произвольные вещественные параметры.

Можно убедиться непосредственной проверкой, что уравнение Шредингера (6.1.3) остается инвариантным при преобразованиях (6.1.24), поскольку для $\Psi'(x')$ выполняется

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x_0'}-\frac{p'^2}{2m}\right)\Psi'(x')=0,\quad p_\mu'=i\frac{\partial}{\partial x'^\mu}. \tag{6.1.27}$$

Точно так же можно удостовериться, что преобразования (6.1.24)—(6.1.26) образуют группу, причем групповому произведению соответствует произведение преобразований.

Мы видим, что преобразованная функция $\Psi'(x')$ (6.1.24) отличается от исходной функции $\Psi(x)$ наличием фазового множителя $\exp[if(x)]$. Можно показать, однако, что преобразования (6.1.24)—(6.1.26) не изменяют нормы волновой функции

$$\|\Psi\|^2=(\Psi,\Psi)=\int d^3x\Psi^\dagger\Psi=(\Psi',\Psi')\equiv\int d^3x'\Psi'^\dagger\Psi'. \tag{6.1.28}$$

Отметим, что применение формул (6.1.24), (6.1.25) требует определенной осторожности, так как может оказаться, что x_0' и x'^a не принадлежат D, хотя $x_0\in D$ и $x_a\in D$, и функция $\Psi'(x')$ не будет определена. При фиксированных $x_0\in D$ и $x_a\in D$ x_0' и x_a' будут также принадлежать области определения функций $\Psi\in\mathcal{F}_0$, если преобразование (6.1.25) лежит в достаточно малой окрестности единичного (тождественного) преобразования. Поэтому (а также ввиду того, что выражения (6.1.25) теряют смысл при $\xi=-x_0^{-1}\exp(-2\lambda)$), соотношения (6.1.24)—(6.1.27) определяют только локальное представление группы Шредингера.

6.1.5. Группа Галилея. Рассмотрим подробнее важнейшую подгруппу группы Шредингера, которая соответствует следующим значениям параметров ξ и λ: $\xi=\lambda\equiv0$. При этом преобразования (6.1.24)—(6.1.26) принимают вид

$$\Psi(x)\to\Psi'(x')=\exp[i\varphi(x)]\Psi(x), \tag{6.1.29}$$

где

$$\varphi(x) = mv_a x_a + \frac{1}{2} mv_a v_a x_0 + mc, \tag{6.1.30}$$

$$x_a' = R_{ab} x_b + v_a x_0 + b_a, \quad x_0' = x_0 + b_0. \tag{6.1.31}$$

Преобразования координат и времени $t = x_0$, задаваемые соотношениями (6.1.31), называют преобразованиями Галилея. Нетрудно убедиться, что преобразования (6.1.29) — (6.1.31) образуют группу. Действительно, пусть $(R, \mathbf{v}, \mathbf{b}, b_0, c)$ — произвольное преобразование (6.1.29) — (6.11.31) ($R = R(\theta)$ обозначает матрицу преобразования трехмерного вращения (6.1.26)); тогда групповое умножение определяется формулой

$$\begin{aligned}\left(R^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{b}^{(2)}, b_0^{(2)}, c^{(2)}\right)\left(R^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)}, b_0^{(1)}, c^{(1)}\right) = \\ = \Big(R^{(2)} \cdot R^{(1)},\ \mathbf{v}^{(1)} + R^{(1)}\mathbf{v}^{(2)},\ \mathbf{b}^{(1)} + R^{(1)}\,\mathbf{b}^{(2)} + \mathbf{v}^{(1)} b_0^{(2)}, \\ b_0^{(1)} + b_0^{(2)},\ c^{(1)} + c^{(2)} + v_a^{(1)} R_{ab}^{(1)} b_b^{(2)} + \frac{1}{2} b_0^{(2)} \left(\mathbf{v}^{(1)}\right)^2\Big),\end{aligned} \tag{6.1.32}$$

где $R\mathbf{v} = \mathbf{v}' = (v_1', v_2', v_3')$, $v_a' = R_{ab} v_b$. Единичный элемент группы задается тождественным преобразованием

$$E = (\mathrm{I}, 0, 0, 0, 0), \tag{6.1.33}$$

а элемент, обратный к $(R, \mathbf{v}, \mathbf{b}, b_0, c)$, имеет вид

$$\begin{aligned}(R, \mathbf{v}, \mathbf{b}, b_0, c)^{-1} = \Big(R^{-1}, -R^{-1}\mathbf{v}, -R^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{v} b_0), -b_0, -c + \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} - \\ - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{v}^2\Big).\end{aligned} \tag{6.1.34}$$

Группа преобразований (6.1.29) — (6.1.31) называется расширенной группой Галилея. Абстрактным определением этой группы могут служить правила групповой композиции (6.1.32) — (6.1.34).

Мы видим, что расширенная группа Галилея является 11-параметрической группой Ли, в то время как формулы (6.1.31), задающие преобразования пространственно-временного континуума, включают только 10 параметров. Совокупность преобразований (6.1.31) также образует группу, называемую группой Галилея. Групповой закон для преобразований (6.1.31) имеет вид

$$\begin{aligned}g\left(R^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{b}^{(2)}, b_0^{(2)}\right) g\left(R^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)}, b_0^{(1)}\right) = \\ = g\left(R^{(2)} R^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} + R^{(1)}\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{b}^{(1)} + R^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} + \mathbf{v}^{(1)} b_0^{(2)},\ b_0^{(1)} + b_0^{(2)}\right).\end{aligned} \tag{6.1.35}$$

Операторы преобразований (6.1.29) образуют представление группы Галилея, если положить в (6.1.30) $c \equiv 0$. Нетрудно убедиться, что это представление будет не точным, а только проективным, поскольку

$$\begin{aligned}\left(R^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{b}^{(2)}, b^{(2)}, 0\right)\left(R^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)}, b_0^{(1)}, 0\right) = \\ = \exp(i\omega_{12})\Big(R^{(2)} R^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} + R^{(1)}\mathbf{v}^{(2)}, \\ \mathbf{b}^{(1)} + R^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} + b_0^{(2)}\mathbf{v}^{(1)}, b_0^{(1)} + b_0^{(2)}, 0\Big),\end{aligned} \tag{6.1.36}$$

где $\exp(i\omega_{12})$ — фазовый множитель,

$$\omega_{12} = v_a^{(1)} R_{ab} b_b^{(2)} + \frac{1}{2} b_0^{(2)} (\mathbf{v}^{(1)})^2. \tag{6.1.37}$$

Согласно (6.1.36) преобразования (6.1.29), (6.1.30) с $c \equiv 0$ удовлетворяют закону групповой композиции (6.1.35) только с точностью до множителя $\exp(i\omega_{12})$, который не изменяет нормы волновой функции (6.1.28).

Отметим еще, что преобразования (6.1.29) — (6.1.31) можно рассматривать как глобальное представление группы Галилея, если область определения функций Ψ совпадает со всем четырехмерным многообразием R_4.

6.1.6. Преобразования P и T. Рассмотренные выше а.и. и группа симметрии уравнения Шредингера полностью описывают инвариантные свойства этого уравнения относительно непрерывных преобразований независимых и зависимых переменных. Здесь мы обсудим симметрию уравнения Шредингера относительно дискретных преобразований следующего вида:

$$\mathbf{x} \to -\mathbf{x}, \qquad t \to t, \tag{6.1.38}$$

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}, \qquad t \to -t. \tag{6.1.39}$$

Нетрудно убедиться, что преобразования (6.1.38), (6.1.39) не принадлежат классу, описываемому соотношениями (6.1.31) или (6.1.25). Тем не менее уравнение Шредингера остается инвариантным относительно этих преобразований, если волновая функция одновременно изменяется по следующему закону:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \to P\Psi(t, \mathbf{x}) = \eta_1 \Psi(t, -\mathbf{x}), \tag{6.1.40}$$

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \to T\Psi(t, \mathbf{x}) = \eta_2 \Psi^*(-t, \mathbf{x}), \tag{6.1.41}$$

где $*$ — знак комплексного сопряжения, η_1 и η_2 — комплексные числа, равные по модулю 1. Не умаляя общности, можно положить

$$\eta_1 = \pm 1, \ \eta_2 = \pm 1. \tag{6.1.42}$$

Совокупность преобразований P, T, $P \cdot T$ и единичного (тождественного) преобразования образует группу симметрии уравнения Шредингера. Объединение этой дискретной группы и непрерывной группы Шредингера, как несложно убедиться, также образует группу, называемую полной группой Шредингера.

На этом мы заканчиваем краткое обсуждение свойств симметрии основного уравнения нерелятивистской квантовой механики. Результаты, приведенные в настоящем параграфе, будут многократно использоваться ниже при выводе уравнений движения различных квантовомеханических объектов, группа симметрии которых совпадает с группой инвариантности уравнения Шредингера.

6.1.7. Симметрия квазирелятивистского уравнения эволюции. В заключение этого параграфа обсудим коротко симметрию уравнения в частных производных четвертого порядка, которое можно интерпретировать как квазирелятивистское обобщение уравнения

Шредингера:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = H\Psi, \qquad H = a_0 m + \frac{p^2}{2m} - a_4\frac{p^4}{8m^3}, \tag{6.1.43}$$

где Ψ — дифференцируемая комплексная функция, a_0, m, a_4 — постоянные вещественные коэффициенты.

При $a_0 = a_4 = 0$ (6.1.43) совпадает с уравнением Шредингера для свободной частицы, а при $a_0 = a_4 = 1$ гамильтониан H включает три первых члена разложения в ряд Тейлора релятивистского гамильтониана $\mathscr{H} = (m^2 + p^2)^{1/2}$.

Максимальной а. и. уравнения (6.1.43) в классе $\mathfrak{M}_1$ является восьмимерная алгебра Ли A_8, включающая базисные элементы P_0, P_a, J_a, M (6.1.5). Отсюда следует, что это уравнение не инвариантно ни относительно преобразований Галилея, ни относительно преобразований Лоренца. Однако это не означает, что симметрия уравнения (6.1.43) исчерпывается алгеброй A_8. Это уравнение обладает нелокальной симметрией, определяемой 20-мерной алгеброй Ли $A_{20} \supset A_8$, базисные элементы которой — операторы P_0, P_a, J_a, M (6.1.5) и приведенные ниже операторы V_a, G_a, R_{ab}:

$$V_a = i\,[H, x_a] = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a_4}{2}\frac{p^2}{m^2}\right)p_a, \tag{6.1.44}$$

$$G_a = (x_0 V_a - x_a)\,m, \quad R_{ab} = -\frac{a_4}{m}\left(p_a p_b + \frac{1}{2}\delta_{ab}p^2\right).$$

Действительно, используя тождества $[H, V_a] = [P_0, x_a] = 0$, не трудно убедиться, что операторы (6.1.44) удовлетворяют условию (1.1.5) совместно с $L = i\frac{\partial}{\partial x_0} - H$ и коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[P_0, G_a] = imV_a, \ [V_a, G_b] = im\left(R_{ab} - \delta_{ab}\frac{1}{m^2}M\right),\\
&[J_a, R_{bc}] = i\,(\varepsilon_{abn}R_{cn} + \varepsilon_{acn}R_{bn}), \quad [P_0, R_{bc}] = 0,\\
&[J_a, V_b] = i\varepsilon_{abc}V_c, \quad [P_a, V_b] = [P_a, R_{bc}] = 0,\\
&[G_a, i] = R_{bc}\frac{a_4}{m}(\delta_{ab}P_c + \delta_{bc}P_a + \delta_{ac}P_b),
\end{aligned} \tag{6.1.45}$$

а остальные коммутационные соотношения P_0, P_a, J_a, M и G_a друг с другом задаются формулами (6.1.6), (6.1.6′).

Мы видим, что квазирелятивистское уравнение эволюции (6.1.43) действительно инвариантно относительно 20-мерной алгебры Ли, порождаемой операторами P_0, P_a, J_a, M (6.1.5) и V_a, G_a, R_{ab} (6.1.44). При этом операторы симметрии (6.1.44) являются дифференциальными операторами третьего порядка и, следовательно, не порождают локальных преобразований функций $\Psi(x)$ типа (6.1.17). Однако можно показать (см. [15*]), что операторы G_a генерируют нелокальные преобразования вида

$$\Psi'(x') = \exp\left\{im\left[x_a v_a + \frac{1}{2}x_0 v^2 - \frac{1}{2}\frac{a_4}{m^3}x_0 v_a p_a p^2\right]\right\}\Psi(x), \tag{6.1.46}$$

где v_a — параметры преобразования, x' связаны с x преобразованиями Галилея (6.1.20). В случае $a_4 = 0$ формула (6.1.46) задает обычные преобразования Галилея (6.1.20) для функции $\Psi(x)$.

Покажем, что если уравнение (6.1.43) интерпретировать как уравнение движения свободной частицы с массой покоя m, то полная масса $\tilde{m}$ зависит от скорости движения. Квантовомеханический оператор такой частицы — это оператор V_a (6.1.44). Классическим аналогом операторов P_a и V_a будут импульс p_a и скорость v_a. Согласно (6.1.44) скорость зависит от импульса следующим образом:

$$v_a = \frac{p_a}{m} - \frac{1}{2}\frac{a_4}{m^3} p_a p^2. \tag{6.1.47}$$

Но с другой стороны, согласно классическому определению скорости,

$$v_a = \frac{p_a}{\tilde{m}}, \tag{6.1.48}$$

где $\tilde{m}$ — полная масса частицы. Подставив (6.1.48) в (6.1.47), приходим к кубическому уравнению

$$\frac{\tilde{m}}{m} - \frac{1}{2} a_4 v^2 \left(\frac{\tilde{m}}{m}\right)^3 - 1 = 0. \tag{6.1.49}$$

Решения этого уравнения для физически интересного случая $a_4 = 1$ имеет вид [117]

$$\tilde{m} = \frac{3m}{W} \sin\left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{W}{\sqrt{1 - W^2}}\right), \quad W = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3 m^3 |a_4|}\,|v|. \tag{6.1.50}$$

Из (6.1.50) вытекает, что в механике, основанной на уравнении (6.1.43), как и в релятивистской механике, существует предельная скорость $v = \left(\sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^3 |a_4|}\right)^{-1}$. При этом $\tilde{m}$ стремится не к бесконечности, а к постоянному числу: $\tilde{m} \xrightarrow[W \to 1]{} \frac{3}{2} m$.

В заключение отметим, что аналогичный анализ можно провести и для уравнения вида (6.1.47) с гамильтонианом более общего вида $H = \sum\limits_{n=0}^{N} a_{2n} p^{2n}$.

§ 6.2. Представления алгебры Ли группы Галилея

6.2.1. Принцип относительности Галилея и уравнения квантовой механики. Как показано выше в § 6.1, основное уравнение квантовой механики — нерелятивистское уравнение Шредингера — обладает симметрией относительно преобразований координат, соответствующих переходу к новой инерциальной системе отсчета.

Принцип относительности, утверждающий равноправие всех инерциальных систем отсчета, был сформулирован Галилео Галилеем более 350 лет назад. Конечно, Галилей не указал в явном виде соответствующие преобразования пространственных и временной переменных (поскольку в то время еще не было известно само понятие координат, введенное значительно позднее Декартом). Тем не менее эти преобразования с полным основанием носят его имя, а совокупность таких преобразований называют группой Галилея.

Не может не вызвать удивления то обстоятельство, что структура группы Галилея и ее представления начали изучаться сравнительно недавно, значительно позже, чем были исследованы соответствующие вопросы для группы Пуанкаре. В 1952 г. Иноню и Вигнер [241] описали точные представления этой группы. Баргман [149] впервые указал на фундаментальную роль проективных представлений группы $G(1, 3)$ в нерелятивистской квантовой механике. Любопытно отметить, что проективные представления группы Галилея на самом деле открыты значительно раньше. Действительно, еще в 1890 г. Ли [265] вычислил группу инвариантности уравнения теплопроводности, которое, с точностью до значений постоянных коэффициентов, совпадает с одномерным уравнением Шредингера без потенциала. На множестве решений уравнения теплопроводности реализуется проективное представление группы $G(1, 1)$.

После фундаментальных работ [149, 241] новый импульс к исследованию вопросов, связанных с галилеевской инвариантностью квантовой механики, дал Леви — Леблонд, получивший нерелятивистский аналог уравнения Дирака — систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, обладающую симметрией относительно группы Галилея, которая, как и уравнение Дирака, предсказывает правильное значение гиромагнитного соотношения. Более подробно об уравнении Леви — Леблонда и его возможных обобщениях говорится в §§ 6.4, 6.3. Здесь мы отметим только, что существуют галилеевски инвариантные волновые уравнения, которые правильно описывают такой тонкий эффект, как спин-орбитальное взаимодействие.

Для исследования волновых уравнений, инвариантных относительно группы Галилея, необходимо знать представления этой группы. Основные сведения об этих представлениях излагаются в настоящем и последующем параграфах.

6.2.2. Классификация неприводимых представлений. Наша задача состоит в описании представлений алгебры Ли группы Галилея, задаваемой коммутационными соотношениями (6.1.6). В этом параграфе рассматриваются только вполне приводимые представления алгебры (6.1.6), поэтому достаточно ограничиться случаем, когда представления алгебры AG(1, 3) неприводимы.

Следуя [123], мы найдем такую реализацию всех неэквивалентных неприводимых представлений этой алгебры, которую отличает единая и достаточно простая форма генераторов группы Галилея для всех классов неприводимых представлений. Используемый при этом подход тесно связан с тем, который применялся в гл. 2 при построении представлений алгебры AP(1, 3), что позволит избежать излишних подробностей изложения.

Основные операторы Казимира алгебры AG(1, 3) приведены в формуле (6.1.16). Мы увидим ниже, что представления этой алгебры качественно различны для нулевых и отличных от нуля собственных значений c_1, c_2 операторов C_1 и C_2 (6.1.16). А именно, можно выделить пять классов представлений, соответствующих следующим собственным значениям c_1 и c_2:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & c_1^2>0. & \\
\text{II.} & c_1=0, \quad c_2=0, \quad P_\mu\neq 0. & \\
\text{III.} & c_1=0, \quad c_2=r^2>0. & (6.2.1)\\
\text{IV.} & c_1^2<0. & \\
\text{V.} & P_\mu\equiv 0. &
\end{array}
$$

Первые три класса представлений могут быть реализованы эрмитовыми операторами. Представления IV класса неэрмитовы, но тем не менее также находят известное применение в физике.

В случае $P_\mu\equiv 0$ мы приходим к представлениям однородной группы Галилея, которая изоморфна группе движений трехмерного евклидова пространства $E(3)$. Такие представления (отнесенные нами к V классу) рассматриваются в следующем параграфе.

В качестве базиса неприводимого представления выберем набор собственных векторов $|c, \tilde{p}, \lambda\rangle$ коммутирующих операторов C_1, C_2, C_3 (6.1.16), P_0, P_1, P_2, P_3, $W_0=\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}$ и дополнительных операторов Казимира C_4, C_5, ..., которые будут различными для разных классов представлений. Формальным определением векторов $|c, \tilde{p}, \lambda\rangle$ могут служить соотношения (2.1.8) (следует помнить, однако, что символами P_μ, C_α и W_0 обозначаются теперь другие операторы, относящиеся к алгебре AG(1, 3)).

Описание представлений алгебры AG(1, 3) в базисе $|c, \tilde{p}, \lambda\rangle$ сводится к нахождению явного вида неэквивалентных операторов J_a и G_a, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6.1.6) совместно с заданными операторами P_μ и M. Подобно тому, как это делалось нами при исследовании неприводимых представлений алгебры AP(1, 3) (см. § 2.1), удобно перейти от векторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{G}$ к четырехвекторам $\widehat{W}=(\widehat{W}_0, \widehat{\mathbf{W}})$ и $\widehat{\Gamma}=(\widehat{\Gamma}_0, \widehat{\mathbf{\Gamma}})$, где

$$
\begin{aligned}
\widehat{W}_0&=\mathbf{P}\cdot\mathbf{J}, \qquad \widehat{\mathbf{W}}=M\mathbf{J}-\mathbf{P}\times\mathbf{G},\\
\widehat{\Gamma}_0&=\mathbf{P}\cdot\mathbf{G}, \qquad \widehat{\mathbf{\Gamma}}=M\mathbf{G}-\mathbf{P}\times\mathbf{J}.
\end{aligned}
\tag{6.2.2}
$$

В случае, когда оператор M^2+P^2 имеет обратный, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{G}$ следующим образом выражаются через $\widehat{W}$ и $\widehat{\Gamma}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}&=(M^2+\mathbf{P}^2)^{-1}(\mathbf{P}\times\widehat{\mathbf{\Gamma}}+M\widehat{\mathbf{W}}+\mathbf{P}\widehat{W}_0),\\
\mathbf{G}&=(M^2+\mathbf{P}^2)^{-1}(\mathbf{P}\times\widehat{\mathbf{W}}+c_1\widehat{\mathbf{\Gamma}}+\mathbf{P}\widehat{\Gamma}_0),
\end{aligned}
\tag{6.2.3}
$$

явный вид всех неэквивалентных операторов $\widehat{W}$ и $\widehat{\Gamma}$ (а следовательно, и $\mathbf{J}$, $\mathbf{G}$) приведен в следующем пункте.

6.2.3. Явный вид базисных элементов алгебры AG(1, 3). Операторы (6.2.2) удовлетворяют, согласно (6.1.6), следующим соотношениям:

$$
M\widehat{W}_0-\mathbf{P}\cdot\widehat{\mathbf{W}}=0, \qquad M\widehat{\Gamma}_0-\mathbf{P}\cdot\widehat{\mathbf{\Gamma}}=0, \tag{6.2.4}
$$

$$
[\widehat{W}_a, \ \widehat{W}_b]=ic_1\varepsilon_{abc}\widehat{W}_c, \qquad [\widehat{W}_0, \ \widehat{W}_a]=-i\varepsilon_{abc}P_b\widehat{W}_c, \tag{6.2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{\Gamma}_a, \widehat{\Gamma}_b] = i\varepsilon_{abc}(2c_1\widehat{W}_c + p_c\widehat{W}_0) - i(\widehat{\Gamma}_a p_b - \widehat{\Gamma}_b p_a),\\
&[\widehat{\Gamma}_0, \widehat{\Gamma}_a] = -ic_1\widehat{\Gamma}_a, \quad [\widehat{\Gamma}_0, \widehat{W}_a] = 0, \quad [\widehat{\Gamma}_0, \widehat{W}_0] = -ic_1\widehat{W}_0,\\
&[\widehat{W}_a, \widehat{\Gamma}_b] = i(\delta_{ab}c_1\widehat{W}_0 - p_a\widehat{W}_b),\\
&[\widehat{W}_0, \widehat{\Gamma}_a] = -ic_1\widehat{W}_a, \quad [P_0, \widehat{\Gamma}_a] = ic_1 p_a, \qquad (6.2.6)\\
&[\widehat{W}_\mu, p_\nu] = 0,\\
&[P_a, \widehat{\Gamma}_b] = i\delta_{ab}\left(c_1^2 + 2c_1p_0 - c_3\right) - ip_ap_b,\\
&[P_a, \widehat{\Gamma}_0] = ic_1p_a, \ [P_0, \Gamma_0] = i(2c_1p_0 - c_3).
\end{aligned}
$$

Здесь c_1, c_2 и p_μ — числа, задающие собственные значения коммутирующих операторов C_1, C_2 и P_μ в базисе $|c, \tilde{p}, \tilde{\lambda}\rangle$.

Как будет видно из дальнейшего, для описания неэквивалентных неприводимых представлений алгебры AG(1, 3) достаточно найти все возможные (с точностью до эквивалентности) реализации вектора $\widehat{W}$, который может рассматриваться как нерелятивистский аналог вектора Любанского — Паули, а затем указать явный вид **J** и **G**, соответствующий найденным $\widehat{W}_0$, $\widehat{\mathbf{W}}$. Поэтому наша ближайшая задача состоит в описании представлений алгебры (6.2.5).

В системе отсчета, где $\mathbf{p} = p(n_1, n_2, n_3)$ (n_a — постоянные числа, удовлетворяющие условию $n_an_a = 1$), коммутационные соотношения (6.2.5) принимают следующий вид:

$$
\left[\widehat{W}'_a, \widehat{W}'_b\right] = ic_1\varepsilon_{abc}\widehat{W}'_c, \qquad \left[\widehat{W}'_0, \widehat{W}'_a\right] = -ip\varepsilon_{abc}n_b\widehat{W}'_c \qquad (6.2.7)
$$

и определяют алгебру Ли, структурные константы которой зависят от двух параметров c_1 и p. Переходя к новому базису

$$
\widehat{W}'_0 = p\lambda_0, \quad \widehat{W}'_a = c_1n_a\lambda_0 + \lambda_a, \qquad (6.2.8)
$$

получаем следующие коммутационные соотношения для операторов λ_0 и λ_a:

$$
[\lambda_0, \lambda_a] = i\varepsilon_{abc}n_b\lambda_c, \qquad [\lambda_a, \lambda_b] = ic_1\varepsilon_{abc}n_c\lambda_0. \qquad (6.2.9)
$$

Алгебра (6.2.9) и ее представления уже рассматривались нами выше в п. 2.1.5. Каждому неприводимому представлению этой алгебры мы сопоставляем вектор $\widehat{W}'$ в системе отсчета, где $\mathbf{p} = \mathbf{n}p$, задаваемый формулой (6.2.8). Явный вид вектора $\widehat{W}$ в произвольной системе отсчета получаем с помощью преобразования

$$
\begin{aligned}
&\widehat{W}'_0 \to \widehat{W}_0 = \widehat{W}'_0 = p\lambda_0,\\
&\widehat{W}'_a \to \widehat{W}_a = R^{-1}_{ab}\widehat{W}'_b = \frac{c_1p_a\lambda_0}{p} - \frac{\left(\widehat{p}_a + n_a\right)\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{p}}{1 + \mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{p}}} + \lambda_a,
\end{aligned} \qquad (6.2.10)
$$

где R_{ab} — оператор поворота системы координат, задаваемый формулой (2.1.16), $\widehat{p}_a = p_a/p$.

Нетрудно заметить, что аналитические выражения для вектора (2.1.20) и вектора $\widehat{W}$ почти совпадают. А именно, сделав в (2.1.20) замену $p_0 \to c_1$, приходим к соотношениям (6.2.10). Сравнивая (2.1.3) и (6.2.2), заключаем, что явные выражения для J_a и G_a могут быть получены из (2.1.44) с помощью следующего правила соответствия: $p_0 \to c_1$, $J_{ab} \to \varepsilon_{abc}J_c$, $J_{0a} \to G_a - ip_a \frac{\partial}{\partial p_0}$. В результате приходим к представлению алгебры Галилея, базисные элементы которого имеют вид

$$P_0 = p_0, \quad P_a = p_a, \quad M = c_1 = m,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \lambda_0 \frac{\widehat{\mathbf{p}} + \mathbf{n}}{1 + \mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{p}}}, \\ \mathbf{G} &= -i\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial p_0} - m\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{p}p^{-2} - \frac{\widehat{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}\left(\lambda_0 m - \boldsymbol{\lambda}\cdot\widehat{\mathbf{p}}\right)}{p + \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}. \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

В пространстве неприводимого представления m — фиксированное число, а переменные p_0, p_a связаны соотношением

$$2mp_0 - p^2 = c_3. \tag{6.2.12}$$

Итак, каждому неприводимому представлению алгебры (6.2.9) мы сопоставляем с помощью соотношений (6.2.11) класс неприводимых представлений алгебры Галилея, которые различаются только значениями операторов Казимира $c_1 = m$ и $c_3 = 2mp_0 - p^2$. Этот результат может быть сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема 6.2. *Неприводимые эрмитовы представления алгебры* AG(1, 3) *нумеруются набором чисел* $c_1, c_2, \ldots$ (*собственных значений операторов Казимира*), *возможные значения которых равны*

$$\begin{aligned} &c_1^2 = m^2 > 0,\ c_2 = m^2 s(s+1), \quad -\infty < c_3 < \infty, \quad s = 0, 1/2, 1, \ldots, \\ &c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = -k^2 < 0,\ c_4 = 0, 1/2, 1, \ldots, \\ &c_1 = 0,\ c_2 = r^2 > 0,\ c_3 = -k^2 < 0. \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Явный вид базисных элементов неприводимого представления задается формулами (6.2.11), *где* $m = c_1$ — *фиксированное вещественное число*, λ_μ — *матрицы* (2.1.39) — (2.1.42), *а* p_0 *и* p_a *связаны соотношением* (6.2.12) (*где* c_3 *также фиксировано*).

Доказательство. Справедливость теоремы следует непосредственно из рассуждений, изложенных выше. Мы здесь отметим только, что прямой проверкой можно убедиться в справедливости коммутационных соотношений для операторов (6.2.11). Точно так же убедимся, что операторы Казимира (6.1.16) для представления (6.2.11) имеют вид

$$C_1 = m,\ C_2 = m^2\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,\ C_3 = 2mp_0 - p^2. \tag{6.2.14}$$

Оператор C_2 совпадает с оператором Казимира (2.1.21), собственные значения которого приведены в формулах (2.1.39) — (2.1.42). Отсюда заключаем, что собственные значения операторов C_a, нумерующие неприводимые представления, задаются соотношениями (6.2.13). В случае $c_1 = c_2 = 0$ имеется дополнительный оператор Казимира $C_4 = \widehat{W}_0/p = \lambda_0$, собственные значения которого являются целыми или полуцелыми числами — см. (2.1.41). ■

Мы видим, что с точностью до преобразований эквивалентности базисные элементы алгебры Галилея всегда могут быть выбраны в форме (6.2.11), где λ_0, λ_a — матрицы, образующие представление алгебры (6.2.9) (неприводимые представления этой алгебры задаются соотношениями (2.1.39)—(2.1.43)). В следующем пункте мы обсудим коротко различные классы неприводимых представлений алгебры $AG(1,3)$ и укажем связь реализации (6.2.11) с другими представлениями, известными в литературе.

6.2.4. Связь с другими реализациями. Рассмотрим последовательно каждый из классов неприводимых представлений, перечисленных в формуле (6.2.1).

1. Представления I класса ($m \neq 0$, $m^2 > 0$) характеризуются тремя числами m, s и ε_0, где m и ε_0 — вещественные, $s > 0$ — целые или полуцелые числа. Такие представления реализуются в пространстве квадратично интегрируемых функций $\Phi(\mathbf{p}, \lambda)$, где $\lambda = -s, -s+1, \ldots, s$, т. е. размерность $\Phi(\mathbf{p}, \lambda)$ по индексу λ равна $2s+1$. Пространство неприводимого представления алгебры $AG(1,3)$ I класса обычно ассоциируется с пространством состояний свободной нерелятивистской частицы с массой m, спином s и внутренней энергией $\varepsilon_0/(2m)$. Соответствующие базисные элементы алгебры Галилея могут быть выбраны в форме (6.2.11), где λ_0, λ_a — матрицы размерности $(2s+1)(2s+1)$, следующим образом связанные с генераторами ортогональной группы S_1, S_2, S_3 (см. (2.1.23)):

$$\begin{gathered}\lambda_0 = S_3,\ \lambda_a = R_{ab}^{-1}\lambda_b',\ \lambda_1' = mS_1,\ \lambda_2' = mS_2,\ \lambda_3' = 0,\\ R_{ab}^{-1} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'\delta_{ab} + n_a n_b' - n_b n_a' + (n \times n')_a (n \times n')_b (1 + \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^{-1},\\ n' = (0,\ 0,\ 1).\end{gathered} \tag{6.2.15}$$

Явный вид матриц λ_0, λ_a в базисе Гельфанда — Цетлина приведен в формулах (2.1.39), (2.1.40).

С помощью унитарного преобразования

$$P_\mu \to \widehat{U}P_\mu\widehat{U}^+, \quad J_a \to \widehat{U}J_a\widehat{U}^+, \quad G_a \to \widehat{U}G_a\widehat{U}^+, \tag{6.2.16}$$

где U — оператор (2.1.48), генераторы (6.2.11) приводятся к форме, обычно используемой в физической литературе,

$$\begin{gathered}P_0 = \varepsilon_0 + \frac{p^2}{2m},\quad P_a = p_a,\quad M = m,\\ J_a = -i\varepsilon_{abc}p_b\frac{\partial}{\partial p_c} + S_a,\ G_a = -mx_a + x_0 p_a.\end{gathered} \tag{6.2.17}$$

2. Представления II класса задаются парой чисел $c_3 < 0$ и $c_4 = 0, 1/2, 1, \ldots$ Эти представления одномерны и задаются в пространстве квадратично интегрируемых функций $\varphi(p_0, \mathbf{p})$. Форма генераторов (6.2.11) для таких представлений значительно упро-

щается. Действительно, полагая в (6.2.11) $m=0$ и $\lambda_a=0$, получаем

$$G_a = -ip_a \frac{\partial}{\partial p_0}. \tag{6.2.18}$$

Остальные базисные элементы алгебры $AG(1,3)$ (т. е. J_a и P_μ) сохраняют форму (6.2.11), где $\lambda_0 = c_4$ — целое или полуцелое число, $p^2 = -k^2 = \text{const}$.

С помощью унитарного преобразования (6.2.16), где $\widehat{U}$ — оператор (2.1.51) или (2.1.52), $\mathbf{n}' = (0, 0, 1)$, генераторы P_μ, J_a (6.2.11) и G_a (6.2.18) могут быть приведены к форме, найденной в [302]. Мы не приводим здесь явные выражения соответствующих базисных элементов алгебры $AG(1,3)$ в представлении [302], которые имеют гораздо более сложную и несимметричную форму, чем найденные выше генераторы P_μ, J_a, G_a в универсальном представлении (6.2.11), (6.2.18).

Представления алгебры Галилея, принадлежащие II классу, реализуются на решениях уравнений, описывающих нерелятивистские *поля* с *нулевой массой покоя* — например, галилеевски инвариантное электромагнитное поле [259—261].

3. Обратимся теперь к представлениям III класса, которые, согласно (6.2.13), нумеруются парой положительных чисел r^2 и k^2. Эти представления реализуются в пространстве квадратично интегрируемых функций $\varphi(p_0, \mathbf{p}, \lambda)$, где λ пробегает бесконечный ряд значений, задаваемых одной из формул (2.1.41). Явные выражения базисных элементов неприводимого представления задаются соотношениями (6.2.11), где $m=0$, $p^2=k^2$, а λ_0, λ_a — бесконечномерные матрицы, следующим образом связанные с генераторами двумерной группы Евклида T_0, T_1, T_2 (см. (2.1.23)):

$$\lambda_0 = T_0, \quad \lambda_a = R_{ab}^{-1}\lambda_b', \quad \lambda_1' = T_1, \quad \lambda_2' = T_2, \quad \lambda_3' = 0, \tag{6.2.19}$$

где R_{ab}^{-1} — числа, заданные в формуле (6.2.15). Явный вид матриц λ_0, λ_a может быть определен согласно (2.1.39), (2.1.42).

Представления алгебры Галилея III класса пока не имеют непосредственных приложений в физике. Если по аналогии с представлениями I и II классов сопоставить пространству неприводимого представления (6.2.11), (6.2.19) пространство состояний квантовомеханического объекта (частицы), то проекция спина такой частицы на произвольно заданную ось могла бы иметь бесконечно много различных значений.

4. Рассмотренные выше классы представлений алгебры $AG(1,3)$ исчерпывают все неэквивалентные эрмитовы неприводимые представления этой алгебры. Здесь мы отметим, что формулы (6.2.11) определяют явный вид базисных элементов алгебры Галилея и в том случае, когда $c_1^2 < 0$. Соответствующие матрицы λ_μ реализуют представление алгебры $AO(1,2)$ — конечномерное или бесконечномерное (см. (2.1.23)).

Представления алгебры $AG(1,3)$, соответствующие $c_1^2 < 0$, очевидно, не могут быть реализованы эрмитовыми операторами, поскольку генератор $M=C_1$ имеет чисто мнимые собственные значения. Это обстоятельство ограничивает использование таких представлений в квантовой механике. Однако представления такого типа естественно возникают во многих задачах классической физики. В частности, представление алгебры Галилея с $c_1^2<0$ реализуется на множестве решений уравнения теплопроводности.

6.2.5. Ковариантные представления. Неприводимые представления алгебры Галилея, рассматриваемые выше, определены в гильбертовых пространствах квадратично интегрируемых функций $\varphi(p_0, \mathbf{p})$. Однако для многих прикладных целей (например, при описании классов дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея) удобнее оперировать с представлениями, заданными в пространстве функций $\Psi(t, \mathbf{x})$, в которых генераторы P_0 и P_a ассоциируются с операторами дифференцирования. Мы будем называть такие представления ковариантными, если все их базисные элементы принадлежат классу $\mathfrak{M}_1$ (т. е. являются дифференциальными операторами не выше первого порядка).

Можно показать, что базис ковариантного представления образуют операторы следующего вида:

$$\begin{aligned} &P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_a = -i\varepsilon_{abc}x_b\frac{\partial}{\partial x_c} + S_a, \quad M = \widehat{m}, \\ &G_a = tp_a - \widehat{m}x_a + \eta_a, \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

где S_a, η_a и $\widehat{m}$ — числовые матрицы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[\widehat{m}, S_a] = [\widehat{m}, \eta_a] = 0, \tag{6.2.21}$$

$$[S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c, \tag{6.2.22}$$

$$[S_a, \eta_b] = i\varepsilon_{abc}\eta_c, \quad [\eta_a, \eta_b] = 0. \tag{6.2.23}$$

Формулы (6.2.20) задают общий вид генераторов P_μ, J_a, G_a, M, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6.1.6) и принадлежащих классу $\mathfrak{M}_1$.

Операторы (6.2.20) могут быть определены на множестве, всюду плотном в пространстве бесконечно дифференцируемых функций

$$\Psi = \text{столбец } (\Psi_1(t, \mathbf{x}), \Psi_2(t, \mathbf{x}), \ldots, \Psi_n(t, \mathbf{x})), \tag{6.2.24}$$

где число n определяется размерностью матриц S_a, η_a и M. В качестве такого множества можно выбрать функции вида $\varphi =$ столбец $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, где $\varphi_\alpha \in C_\infty^0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$.

Интегрируя соответствующие уравнения Ли (см. (1.1.20) — (1.1.22)), получаем, что конечные преобразования из группы Галилея, порождаемые генераторами (6.2.20), имеют вид

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \to \Psi'(t', \mathbf{x}') = D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta})\exp[i\varphi(x)]\Psi(t, \mathbf{x}), \tag{6.2.25}$$

где t', $\mathbf{x}'$ и $\varphi(x)$ задаются соотношениями (6.1.30), (6.1.31),

$D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta})$ — матрица, зависящая от параметров преобразования (6.1.31),

$$D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}) = \exp(i\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{v})\exp(i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\theta}). \qquad (6.2.26)$$

В случае $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{S} = 0$ приходим к формуле (6.1.29), определяющей закон преобразования скалярной функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера.

Согласно (6.2.24) преобразованная функция $\Psi'(t', \mathbf{x}')$ выражается через $\Psi(t, \mathbf{x})$, умноженную на фазовый множитель $\exp[i\varphi(x)]$ и числовую матрицу $D(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v})$. Иными словами, значение функции $\Psi'(t', \mathbf{x}')$ полностью определяется значением непреобразованной функции в точке $(t, \mathbf{x})$ и параметрами преобразования. Преобразования такого типа называют локально ковариантными (или просто ковариантными), отличая их от нелокальных преобразований, когда $\Psi'(t', \mathbf{x}')$ зависит от значений t и $\mathbf{x}$ в некоторой области. Формулы (6.2.20), (6.2.23) определяют общий вид генераторов ковариантного представления группы Галилея.

Мы видим, что описание ковариантных представлений алгебры $AG(1, 3)$ сводится к нахождению неэквивалентных матриц S_a, η_a, $\widehat{m}$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6.2.21) — (6.2.23). Представления алгебры (6.2.21) — (6.2.23) рассматриваются в следующем пункте.

Наряду с представлениями собственной группы Галилея, включающими непрерывные преобразования вида (6.1.24), определенный интерес вызывают такие представления полной группы $\widetilde{G}(1, 3)$, которая включает дискретные преобразования P, T и C. Анализ таких представлений, однако, выходит за рамки настоящей книги. Отметим только, что представления группы $\widehat{G}(1, 3)$, включающей преобразования P и T, описаны в работе [166], а представления полной группы $\widetilde{G}(1, 3)$ рассматривались в статье [123].

6.2.6. Конечномерные представления алгебры Ли однородной группы Галилея. Алгебру Ли однородной группы Галилея образуют шесть генераторов S_a, η_a, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6.2.22), (6.2.23). Эта алгебра изоморфна алгебре Ли группы Евклида (см. (5.1.27)) и поэтому будет обозначаться символом AE(3).

Как будет видно далее, проблема описания неэквивалентных неразложимых представлений алгебры AE(3) может быть сведена к чисто алгебраической задаче, которая не может быть решена известными к настоящему времени методами. Поэтому мы ограничимся описанием некоторого класса конечномерных представлений этой алгебры, который является достаточно широким для вывода содержательных уравнений движения частиц произвольного спина, инвариантных относительно преобразований Галилея.

Алгебра AE(3), характеризуемая коммутационными соотношениями (6.2.22), (6.2.23), содержит подалгебру AO(3), образуемую матрицами S_a. Поскольку представления алгебры AO(3) хорошо известны, удобно воспользоваться $O(3)$-базисом $|\lambda;\ l, m\rangle$, образованным собственными векторами коммутирующих матриц $\mathbf{S}^2$ и S_3.

Явные выражения для матриц $\mathbf{S}^2$, S_a в таком базисе задаются формулами (2.1.65), (2.1.66), где l_0, $l_1 \to \lambda$, λ — индекс, который введен для нумерации собственных векторов матрицы $\mathbf{S}^2$, соответствующих вырожденным значениям l.

Общее выражение для матриц η_a, коммутирующих с S_a по правилу (6.2.23), задается в используемом базисе следующей формулой:

$$\eta_a |\lambda; l, m\rangle = \sum_{l', m', \lambda'} \left[\frac{\delta_{ll'} a^l_{\lambda\lambda'}}{l(l+1)} (S^l_a)_{mm'} + \frac{\delta_{l-1\,l'} b^l_{\lambda\lambda'}}{2l-1} (K^l_a)^\dagger_{mm'} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta_{l+1\,l'} c^{l+1}_{\lambda\lambda'}}{2l+3} (K^{l+1}_a)_{mm'} \right] |\lambda'; l', m'\rangle, \quad (6.2.27)$$

где $a^l_{\lambda\lambda'}$, $b^l_{\lambda\lambda'}$, $c^l_{\lambda\lambda'}$ — произвольные комплексные числа, $(S^l_a)_{mm'}$ и $(K^l_a)_{mm'}$ — матричные элементы, задаваемые соотношениями (2.1.67), (2.1.68). Возможные значения l, соответствующие неразложимым конечномерным матрицам η_a, имеют вид [23]

$$l = l_0, \quad l_0 + 1, \ldots, l_1, \quad (6.2.28)$$

где l_0 и l_1 — одновременно целые или полуцелые неотрицательные числа.

Мы выделили в (6.2.27) матричные элементы $(K^l_a)_{mm'}$ и $(S^l_a)_{mm'}$ матриц K^l_a и S^l_a и ввели специальные множители при произвольных параметрах, входящих в определение общего выражения матрицы, коммутирующей как вектор [23]. Матрицы S^l_a и K^l_a обладают удобными алгебраическими свойствами, приведенными ниже [239]:

$$\begin{aligned}
&K^l_a S^l_b - S^{l-1}_b K^l_a = i\varepsilon_{abc} K^l_c,\\
&S^l_a S^l_b + K^{l\dagger}_a K^l_b = il\varepsilon_{abc} S^l_c + l^2 \delta_{ab},\\
&S^l_a S^l_b - S^l_b S^l_a = i\varepsilon_{abc} S^l_c,\\
&K^l_a K^{l\dagger}_b + S^{l-1}_a S^{l-1}_b = l^2 \delta_{ab} - il\varepsilon_{abc} S^{l-1}_c,\\
&K^{l\dagger}_a K^l_b - K^{l\dagger}_b K^l_a = i(2l-1)\varepsilon_{abc} S^l_c, &(6.2.29)\\
&K^l_a S^l_b - K^l_b S^l_a = i(l+1)\varepsilon_{abc} K^l_c,\\
&S^{l-1}_a K^l_b - S^{l-1}_b K^l_a = i(1-l)\varepsilon_{abc} K^l_c,\\
&K^l_a K^{l\dagger}_b - K^l_b K^{l\dagger}_a = -i(2l+1)\varepsilon_{abc} S^{l-1}_c,\\
&K^l_a S_b - S^{l-1}_b K^l_a = i\varepsilon_{abc} K^l_c,\\
&S^{l-1}_a S^{l-1}_b - S^{l-1}_b S^{l-1}_a = i\varepsilon_{abc} S^{l-1}_c.
\end{aligned}$$

Первые три соотношения (6.2.29) могут служить (совместно с (2.1.65)) определением матриц S^l_a и K^l_a, а остальные являются следствием первых трех. Именно соотношения (6.2.29) (а не явные выражения для матриц S^l_a и K^l_a) используются ниже для описания представлений алгебры AE(3).

Алгебра АЕ(3) имеет два оператора Казимира:

$$C_1 = S_a \eta_a, \qquad C_2 = \eta_a \eta_a, \tag{6.2.30}$$

которые, как можно убедиться, с использованием (6.2.29), (2.1.65) принимают в базисе $|\lambda;\, l,\, m\rangle$ следующий вид:

$$C_1 |\lambda;\, l,\, m\rangle = a^l_{\lambda\lambda'} |\lambda';\, l,\, m\rangle,$$

$$C_2 |\lambda;\, l,\, m\rangle = \left[\frac{l}{2l+3} c^{l+1}_{\lambda\nu} b^{l+1}_{\nu\lambda'} (1 - \delta_{l_0 l}) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^l_{\lambda\nu} a^l_{\nu\lambda'}}{l(l+1)} + \frac{l b^l_{\lambda\nu} c^l_{\nu\lambda'}}{2l+1} (1 - \delta_{l_1 l})\right] |\lambda';\, l,\, m\rangle, \tag{6.2.31}$$

где l_0 и l_1 — числа, задающие область изменения l (6.2.28).

Покажем, что условие коммутативности матриц η_a (см. (6.2.23)) сводится к системе квадратных уравнений для матриц $a^l = \| a^l_{\lambda\lambda'} \|$, $b^l = \| b^l_{\lambda\lambda'} \|$ и $c^l = \| c^l_{\lambda\lambda'} \|$. Действительно, используя соотношение (6.2.27), нетрудно вычислить коммутатор:

$$[\eta_a, \eta_b] |\lambda;\, l,\, m\rangle = \left\{\left[\frac{c^{l+1}_{\lambda\nu} a^{l+1}_{\nu\lambda'}}{(2l+1)(l+1)(l+2)} \left(K^{l+1}_a S^{l+1}_b - K^{l+1}_b S^{l+1}_a\right)_{mm'} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{a^l_{\lambda\nu} c^{l+1}_{\nu\lambda'}}{l(l+1)(2l+1)} \left(S^l_a K^{l+1}_b - S^l_b K^{l+1}_a\right)_{mm'}\right] \delta_{l' l+1} +$$

$$+ \left[\frac{c^{l+1}_{\lambda\nu} b^{l+1}_{\nu\lambda'}}{(2l+1)(2l+3)} \left(K^{l+1}_a K^{l+1\dagger}_b - K^{l+1}_b K^{l+1\dagger}_a\right)_{mm'} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^l_{\lambda\nu} a^l_{\nu\lambda'}}{l^2 (l+1)^2} \left(S^l_a S^l_b - S^l_b S^l_a\right)_{mm'} + \frac{b^l_{\lambda\nu} c^l_{\nu\lambda'}}{4l^2 - 1} \left(K^{l\dagger}_a K^l_b - K^{l\dagger}_b K^l_a\right)_{mm'}\right] \delta_{ll'} +$$

$$+ \left[\frac{a^l_{\lambda\nu} b^l_{\nu\lambda'}}{l(l+1)(2l+1)} \left(S^l_a K^{l\dagger}_b - S^l_b K^{l\dagger}_a\right)_{mm'} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{b^l_{\lambda\nu} a^{l-1}_{\nu\lambda'}}{l(l-1)(2l+1)} \left(K^{l\dagger}_a S^{l-1}_b - K^{l\dagger}_b S^{l-1}_a\right)_{mm'}\right] \delta_{l' l-1}\right\} |\lambda';\, l',\, m'\rangle. \tag{6.2.32}$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Приравнивая (6.2.32) нулю и принимая во внимание соотношения (6.2.29), приходим к следующей системе уравнений для матриц a^l, b^l и c^l:

$$c^l a^l = a^{l-1} c^l, \qquad a^l b^l = b^l a^{l-1}, \tag{6.2.33}$$

$$c^{l+1} b^{l+1} - b^l c^l = k_l (a^l)^2, \tag{6.2.34}$$

где

$$k_l = \frac{2l+1}{l^2 (l+1)^2}. \tag{6.2.35}$$

Формулы (6.2.33)—(6.2.35) задают необходимые и достаточные условия коммутативности матриц η_a (6.2.27).

Таким образом, задача описания конечномерных представлений алгебры AE(3) сводится к нахождению неэквивалентных решений системы квадратных уравнений (6.2.33) — (6.2.35) для матриц a^l, b^l и c^l. При этом возможные значения l задаются формулой (6.2.28) и, по определению,

$$a^{l_1+1} = b^{l_1+1} = c^{l_1+1} = a^{l_0-1} = b^{l_0} = c^{l_0} = 0.$$

Числа l_0 и l_1, задающие область изменения l, могут принимать произвольные неотрицательные значения, одновременно целые или полуцелые. Это означает, что цепочка уравнений (6.2.33) — (6.2.35) может включать произвольное число звеньев. Размерность матриц a^l, b^l и c^l равна $n_l \times n_l$, $n_l \times n_{l-1}$ и $n_{l-1} \times n_l$, где n_l и n_{l-1} — кратности собственных значений $l(l+1)$ и $l(l-1)$ оператора $\mathbf{S}^2$.

Приведенные выше результаты можно суммировать следующим образом:

Конечномерные представления алгебры AE(3) *в* O(3)-*базисе* $|\lambda;\, l,\, m\rangle$ *задаются формулами* (6.2.27), (2.1.67), (2.1.68), *где* a^l, b^l, c^l — *матрицы, удовлетворяющие системе уравнений* (6.2.33) — (6.2.35).

К сожалению, эффективно описать все неэквивалентные решения системы (6.2.33) — (6.2.35) не представляется возможным. Действительно, в частном случае $(a^l)^2 = 0$ уравнение (6.2.34) сводится к задаче описания всех неэквивалентных пар коммутирующих матриц B и C, определяемых согласно следующим соотношениям:

$$B|\lambda;\, l,\, m\rangle = b^l|\lambda;\, l-1,\, m\rangle, \qquad C|\lambda;\, l,\, m\rangle = c^l|\lambda;\, l+1,\, m\rangle.$$

Такая задача является «дикой» и не поддается решению известными к настоящему времени методами [25].

Налагая на a^l некоторые дополнительные ограничения, можно описать различные классы решений уравнений (6.2.33) — (6.2.39). Одним из таких ограничений (позволяющим полностью описать соответствующий класс решений) является требование, чтобы матрицы были неразложимыми. Мы рассмотрим здесь еще более узкий класс решений уравнений (6.2.33) — (6.2.35), соответствующий случаю, когда l принимает только два значения:

$$l = s,\ s-1. \tag{6.2.36}$$

Для обозначения этого класса решений и соответствующих представлений алгебры AE(3) будем использовать символ D_2.

Неразложимые представления класса D_2 могут быть описаны следующим образом.

Утверждение 6.1. *Неэквивалентные решения уравнений* (6.2.33) — (6.2.36), *где* a^l — *неразложимые матрицы, а возможные значения* l *задаются формулой* (6.2.36), *нумеруются тройками целых чисел* $(k,\, \alpha,\, n)$, *где*

$$k \leqslant 4,\ n \leqslant 4,\ |k-n| \leqslant 2, \quad k \cdot n < 9, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & |k-n| = 2, \\ 1,\, 2, & |k-n| \neq 2. \end{cases} \tag{6.2.37}$$

Соответствующие матрицы a^s, a^{s-1}, b^s *и* c^s *имеют размерность* $k\times k$, $n\times n$, $k\times n$ *и* $n\times k$, *а их матричные элементы для* $\alpha=1$ *равны*

$$a^s_{\lambda\lambda'}=\delta_{\lambda-1\lambda'},\quad a^{s-1}_{\nu\nu'}=\delta_{\nu-1\nu'},\quad \lambda,\lambda'\leqslant k,\quad \nu,\nu'\leqslant n,$$

$$b^s_{\lambda\nu}=\begin{cases} i\sqrt{k_s}\,\delta_{\lambda-2\nu}, & k>n,\\ i\sqrt{k_s}\,\delta_{\lambda\nu}, & k\leqslant n,\ k\cdot n\neq 4,\\ \mu\delta_{\lambda\nu+1}, & k=n=2,\end{cases}\tag{6.2.38}$$

$$c^s_{\lambda\nu}=\begin{cases} i\sqrt{k_s}\,\delta_{\nu\lambda}, & k>n,\\ i\sqrt{k_s}\,\delta_{\nu\lambda+2}, & k\leqslant n,\end{cases}$$

где k_s — *коэффициенты* (6.2.35) *при* $l=s$; μ — *произвольное комплексное число. Если же* $\alpha=2$, *то соответствующие матричные элементы могут быть получены из* (6.2.38) *с помощью замены* $a^s_{\lambda\lambda'}\to\to a^s_{\lambda'\lambda}$, $b^s_{\lambda\nu}\to c^s_{\nu\lambda}$, $c^s_{\nu\lambda}\to b^s_{\lambda\nu}$.

Доказательство не приводим ввиду его громоздкости. Отметим только, что в рассматриваемом случае из соотношений (6.2.33)—(6.2.35) следует, что $(a^s)^4=(a^{s-1})^4=0$, откуда вытекает, что максимальная размерность матриц a^l равна 4×4. Выбирая такие матрицы в виде жордановых клеток, прямым вычислением получаем условие разрешимости рассматриваемой системы в виде (6.2.37). Соответствующие решения, с точностью до преобразований эквивалентности, могут быть выбраны в форме (6.2.38).

Нетрудно подсчитать, что для каждого значения $s\neq 0$, $1/2$ имеются 18 неэквивалентных решений (два из которых зависят от произвольного комплексного параметра μ).

Каждому решению уравнений (6.2.33)—(6.2.35) можно поставить во взаимно однозначное соответствие представление алгебры AE(3). Поэтому следствием утверждения 6.2.1 является следующее

Утверждение 6.2. *Неразложимые представления алгебры* AE(3), *принадлежащие классу* D_2, *нумеруются тройками целых чисел* (k,α,n), *удовлетворяющих условиям* (6.2.37). *Явный вид соответствующих базисных элементов* S_a *и* η_a *в базисе* $|\lambda;\,l,\,m\rangle$ *задается формулами* (2.1.66)—(2.1.68), (6.2.27), (6.2.38).

Таким образом, мы полностью описали класс D_2 неразложимых представлений алгебры Ли однородной группы Галилея. Эти представления будут использоваться в следующем параграфе при выводе волновых уравнений, инвариантных относительно группы Галилея.

Отметим, что числа k и n, нумерующие совместно с α неразложимые представления класса D_2, определяют индекс нильпотентности операторов Казимира (6.2.30), так как, согласно (6.2.31), (6.2.38),

$$C_1^N=C_2^{N/2}=0,\quad N=\max(k,n).$$

Как легко заметить, для представлений класса D_2 $N\leqslant 4$.

§ 6.3. Галилеевски инвариантные волновые уравнения

6.3.1. Введение. Со времени выхода в свет работы Баргмана [149] известно, что с теоретико-групповой точки зрения понятие спина частицы возникает в перелятивистской квантовой механике так же естественно, как в релятивистской квантовой теории, поскольку один из операторов Казимира группы Галилея можно интерпретировать как оператор квадрата спина. Поэтому не может не вызвать удивления тот факт, что в мировой физической литературе почти полностью отсутствуют работы, посвященные галилеевски инвариантным волновым уравнениям. Это кажется особенно странным на фоне огромного количества публикаций, посвященных релятивистским волновым уравнениям.

Важный импульс к исследованию галилеевски инвариантных волновых уравнений дали работы Леви-Леблонда [260, 261], впервые получившего такие уравнения для частицы со спином 1/2. Уравнение Леви-Леблонда, подобно релятивистскому уравнению Дирака, учитывает взаимодействие Паули и предсказывает правильное значение гиромагнитного соотношения. К сожалению, это уравнение (как и его простейшее обобщение на случай частиц произвольного спина, полученное в работах Хагена и Герли [232, 239]) не описывает такого важного физического эффекта, как спин-орбитальное взаимодействие, и поэтому может претендовать только на роль очень приближенной математической модели частицы со спином 1/2.

В настоящем параграфе описан класс галилеевски инвариантных уравнений первого порядка вида (2.3.2), включающий уравнения Леви-Леблонда и Хагена — Герли (ЛХГ) и другие уравнения, соответствующие приведенным в предыдущем пункте неразложимым представлениям алгебры Ли однородной группы Галилея. В их число входят уравнения, описывающие спин-орбитальное и квадрупольное взаимодействия частицы произвольного спина с внешним полем, что доказывает принципиальную возможность интерпретации этих взаимодействий как нерелятивистских эффектов.

Рассматриваемые ниже галилеевски инвариантные волновые уравнения во многих случаях могут являться удачной альтернативой релятивистским уравнениям для частиц с высшими спинами, которые приводят к большим трудностям при описании взаимодействия частицы с внешним полем; см. гл. 4.

6.3.2. Условия галилеевской инвариантности уравнений (2.3.2). Задача описания галилеевски инвариантных уравнений первого порядка сводится к ответу на вопрос: каковы должны быть матрицы β_μ, β_4, чтобы система (2.3.2) была инвариантна относительно алгебры Галилея?

Для удобства перепишем уравнение (2.3.2) в форме

$$L\Psi = 0, \quad L = \beta^p p_p + \beta_4 m. \tag{6.3.1}$$

Инвариантность относительно алгебры Галилея означает, что уравнение (6.3.1) имеет 11 операторов симметрии, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6.1.6), (6.1.6′). Мы ограничимся случаем, когда эти операторы симметрии реализуют ковариантное представление алгебры AG(1, 3), общий вид базисных элементов которого задается формулами (6.2.20). Предположим также, что оператор массы M в (6.2.20) кратен единичной матрице и имеет собственное значение $m > 0$.

Операторы (6.2.20), по определению, являются операторами симметрии уравнения (6.3.1), если они удовлетворяют соотношениям (1.1.5) совместно с оператором L из (6.3.1). В случае, когда β_μ, β_4 — квадратные матрицы, эти соотношения сводятся к уравнениям (2.3.3), где Q_A — любой из операторов (6.2.20). Подставляя в (2.3.3) *последовательно* $Q_A = P_a$, J_a, G_a, M, приходим к следующим уравнениям для матриц β_μ, β_4 (ср. (2.3.4), (2.3.5)):

$$\begin{gathered}\tilde{S}_a\beta_0 - \beta_0 S_a = 0, \quad \tilde{S}_a\beta_4 - \beta_4 S_a = 0,\\ \tilde{\eta}_a\beta_b - \beta_b\eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \quad \tilde{\eta}_a\beta_4 - \beta_4\eta_a = -i\beta_a,\\ \tilde{\eta}_a\beta_0 - \beta_0\eta_a = 0, \quad a,\ b = 1,\ 2,\ 3.\end{gathered} \tag{6.3.2}$$

Здесь $\tilde{S}_a = S_a - \beta_{J_a}$, $\tilde{\eta}_a = \eta_a - \beta_{G_a}$, S_a и η_a — матрицы, реализующие представление алгебры AE(3) (6.2.22), (6.2.23), β_{J_a} и β_{G_a} — числовые матрицы, которые, как и β_0, β_a, β_4, пока рассматриваются как неизвестные.

Используя коммутационные соотношения (6.2.22), (6.2.23), нетрудно получить из (6.3.2) следующие условия для матриц $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$:

$$[\tilde{S}_a,\ \tilde{S}_b]\,\beta_k = i\varepsilon_{abc}\tilde{S}_c\beta_k, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{6.3.3}$$

$$[\tilde{\eta}_a,\ \tilde{S}_b]\,\beta_k = i\varepsilon_{abc}\tilde{\eta}_c\beta_\lambda, \quad [\tilde{\eta}_a,\ \tilde{\eta}_b]\,\beta_k = 0. \tag{6.3.4}$$

Достаточным условием выполнения соотношений (6.3.3), (6.3.4) является требование, чтобы матрицы $\tilde{S}_a$ и $\tilde{\eta}_a$ задавали представление алгебры AE(3) (6.2.22), (6.2.23).

Таким образом, мы пришли к следующему определению (ср. определение 2.2 на с. 86).

Определение 6.1. *Уравнение* (6.3.1) *S-инвариантно относительно алгебры Галилея*, если существуют такие матрицы $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$ и S_a, η_a, образующие представления (в общем случае неэквивалентные) алгебры $AE(3)$, которые удовлетворяют совместно с β_μ и β_4 соотношениям (6.3.2).

Как и в случае уравнений, инвариантных относительно группы Пуанкаре, мы будем использовать достаточные условия галилеевской инвариантности уравнений (6.3.1), задаваемые определением 6.1. Эти условия, однако, не являются необходимыми, так как существуют уравнения, инвариантные относительно нековариантных представлений алгебры Галилея, и, кроме того, можно в принципе отказаться от требования, чтобы матрицы $\tilde{S}_a$ и $\tilde{\eta}_a$ задавали представление алгебры AE(3), заменив его более слабым условием (6.3.3), (6.3.4).

Отметим, что определение 6.1 задается условиями галилеевской инвариантности уравнений (6.3.1) и в том случае, когда матрицы β_μ, β_4 являются прямоугольными с размерностью $m \times n$, $m \neq n$. При этом матрицы $\widetilde{S}_a$ и $\widetilde{\eta}_a$ должны реализовать представление алгебры AE(3) в пространстве матриц размерности $m \times m$, а S_a, η_a — в пространстве $n \times n$-мерных матриц.

6.3.3. Дополнительные ограничения на матрицы β_k. Определим условия, налагаемые на матрицы β_μ, β_4 некоторыми дополнительными физическими требованиями.

Во-первых, ограничимся рассмотрением только таких уравнений вида (6.3.1), которые допускают лагранжеву формулировку. Как и в случае релятивистских уравнений первого порядка, это означает, что мы предполагаем существование несингулярной эрмитизующей матрицы η, удовлетворяющей условиям

$$\eta\beta_\mu = \beta_\mu^\dagger\eta^\dagger, \qquad \eta\beta_4 = \beta_4^\dagger\eta^\dagger. \tag{6.3.5}$$

Оказывается, что, не умаляя общности, вместо соотношений (6.3.5) можно наложить на матрицы β_4, β_μ более сильное требование:

$$\beta_\mu^\dagger = \beta_\mu, \quad \beta_4^\dagger = \beta_4, \tag{6.3.6}$$

как это следует из приведенной ниже леммы.

Лемма 6.2. *Пусть* $\{\widetilde{S}_a, \widetilde{\eta}_a, S_a, \eta_a, \beta_k\}$ — *набор матриц, удовлетворяющих соотношениям* (6.3.2). *Тогда матрицы*

$$\beta_k' = \eta\beta_k, \quad \widetilde{\eta}_a' = \eta\eta_a\eta^{-1}, \quad \widetilde{S}_a' = \eta\widetilde{S}_a\eta^{-1}, \quad S_a' = S_a, \quad \eta_a' = \eta_a, \tag{6.3.7}$$

где η — *произвольная невырожденная матрица, также удовлетворяют этим соотношениям.*

Доказательство почти очевидно. Умножая каждое из соотношений (6.3.2) слева на η и вставляя между $\widetilde{S}_a$, $\widetilde{\eta}_a$ и β_μ, β_4 тождественно равную единице матрицу $\eta^{-1}\eta$, приходим к соотношениям (6.3.2) для матриц (6.3.7).

Таким образом, наряду с уравнением (6.3.1), S-инвариантным относительно алгебры Галилея, оказывается целый класс эквивалентных уравнений вида $(\beta_\mu' p_\mu + \beta_4' m)\Psi = 0$, где β_μ' и β_4' связаны с β_μ и β_4 преобразованиями (6.3.7). Отсюда следует, что если для галилеевски инвариантного уравнения (6.3.1) существует эрмитизующая матрица, то, умножив его слева на эту матрицу, мы всегда можем перейти к эквивалентному галилеевски инвариантному уравнению, в котором матрицы β_μ и β_4 эрмитовы. Поэтому впредь мы будем предполагать, что матрицы, входящие в оператор L (6.3.1), удовлетворяют условию (6.3.6).

Лагранжиан, соответствующий уравнению (6.3.1), не умаляя общности, может быть выбран в виде

$$L_0 = \frac{i}{2}\left(\Psi^\dagger\beta_\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x_\mu}\beta_\mu\Psi\right) + m\Psi^\dagger\beta_4\Psi. \tag{6.3.8}$$

Нетрудно убедиться, что требование инвариантности этого лагранжиана относительно преобразований из группы Галилея (6.2.25), порождаемых генераторами (6.2.20), сводится к уравнениям (6.3.2) для матриц β_μ, β_4, где

$$\tilde{S}_a = S_a^\dagger = S_a, \quad \tilde{\eta}_a = \eta_a^\dagger. \tag{6.3.9}$$

Таким образом, задача описания уравнений вида (6.3.1), инвариантных относительно алгебры Галилея и допускающих лагранжеву формулировку, сводится к нахождению эрмитовых матриц β_μ, β_4, удовлетворяющих соотношениям (см. (6.3.2), (6.3.6), (6.3.9))

$$[S_a, \beta_0] = 0, \quad [S_a, \beta_4] = 0, \tag{6.3.10}$$

$$\eta_a^\dagger \beta_4 - \beta_4 \eta_a = -i\beta_a, \tag{6.3.11}$$

$$\eta_a^\dagger \beta_b - \beta_b \eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0. \tag{6.3.12}$$

Что же касается последнего из соотношений (6.3.2) (с дополнительными условиями (6.3.6), (6.3.9)), то оно выполняется тождественно, если справедливы уравнения (6.3.10)—(6.3.12).

Потребуем дополнительно, чтобы представление алгебры Галилея, которое реализуется на множестве решений уравнения (6.3.1), было неприводимо и принадлежало I классу. Это требование означает, что функция $\Psi(x)$ должна удовлетворять условиям (которые должны быть следствием уравнения (6.3.1))

$$\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right)\Psi = \varepsilon_0 \Psi, \quad \left(\mathbf{S} - \frac{1}{m}\mathbf{p} \times \boldsymbol{\eta}\right)^2 \Psi = s(s+1)\Psi, \tag{6.3.13}$$

где ε_0 и s — фиксированные числа.

Условия (6.3.13) означают, что операторы Казимира (6.1.16), соответствующие ковариантному представлению (6.2.20) алгебры Галилея, имеют фиксированные собственные значения на множестве решений уравнения (6.3.1). Это дает основание интерпретировать уравнение (6.3.1) как квантовомеханическое уравнение движения нерелятивистской частицы со спином s, массой m и внутренней энергией ε_0. Анализ ограничений, налагаемых на матрицы β_μ и β_4 условиями (6.3.13), будет проведен ниже.

6.3.4. Общий вид матриц β_μ и β_4 в базисе $|\lambda; \mathrm{l}, \mathrm{m}\rangle$. Резюмируя изложенное в предыдущих пунктах, задачу описания галилеевски инвариантных уравнений (6.3.1) можно разбить на следующие этапы:

1) описание конечномерных представлений алгебры АЕ(3), т. е. нахождение всех неэквивалентных матриц S_a и η_a, входящих в уравнения (6.3.10)—(6.3.12);

2) отбор таких представлений, для которых уравнения (6.3.10)—(6.3.12) имеют нетривиальные решения;

3) нахождение явного вида соответствующих неэквивалентных матриц β_μ, β_4;

4) отбор таких решений уравнений (6.3.10)—(6.3.12), которые обеспечивают выполнение условий (6.3.13).

Мы ограничимся представлениями алгебры АЕ(3) класса D_2, описанными в предыдущем параграфе, которые заданы в базисе

$|\lambda;\ l,\ m\rangle$, образованном собственными векторами матриц $\mathbf{S}^2$ и S_3. Определим общий вид матриц β_μ и β_4 в этом базисе. Матрицы β_0 и β_4 коммутируют с S_1, S_2 и S_3, откуда в силу леммы Шура заключаем, что

$$\begin{aligned}\beta_4\,|\,\lambda;\,l,\,m\rangle &= (2l+1)\,X_{\lambda\lambda'}\,|\,\lambda';\,l,\,m\rangle|,\\ \beta_0\,|\,\lambda;\,l,\,m\rangle &= A^l_{\lambda\lambda'}\,|\,l,\,m,\,\lambda'\rangle,\end{aligned}\tag{6.3.14}$$

где $X^l_{\lambda\lambda'}$ и $A^l_{\lambda\lambda'}$ — неизвестные пока коэффициенты. Матрицы с матричными элементами $X^l_{\lambda\lambda'}$ и $A'_{\lambda\lambda'}$ будем обозначать символами x_l и A_l соответственно.

Используя соотношение (6.3.11) и представление (6.2.27) для матриц η_a, получаем общий вид матриц β_a $(a=1,\ 2,\ 3)$ в базисе $|\lambda;\ l,\ m\rangle$:

$$\begin{aligned}-\,i\beta_a\,|\,\lambda;\,l,\,m\rangle = -\,B^{l+}_{\lambda\lambda'}\left(K^{l+}_a\right)_{mm'}|\,\lambda';\,l-1,\,m'\rangle\,+\\ +\,D^l_{\lambda\lambda'}\left(S^l_a\right)_{mm'}|\lambda';\,l,\,m'\,\rangle + B^{l+1}_{\lambda\lambda'}\left(K^{l+1}_a\right)_{mm'}|\,\lambda',\,l+1,\,m'\rangle,\end{aligned}\tag{6.3.15}$$

где $\left(K^l_a\right)_{mm'}$ — матричные элементы (2.1.68), $B^l_{\lambda\lambda'}$ и $D^l_{\lambda\lambda'}$ — матричные элементы матриц B_l и D_l, следующим образом связанных с x_l, $a_l=a^l=\left\|a^l_{\lambda\lambda'}\right\|$, $\quad b_l=b^l=\left\|b^l_{\lambda\lambda'}\right\|$, $\quad c_l=c^l=\left\|c^l_{\lambda\lambda'}\right\|$

$$D_l=\frac{2l+1}{l\,(l+1)}\left(a^\dagger_l x_l-x_l a_l\right),\qquad B_l=c^\dagger_l x_{l-1}-x_l b_l.\tag{6.3.16}$$

Потребуем, чтобы матрицы (6.3.14), (6.3.15) удовлетворяли условиям (6.3.12). Принимая во внимание соотношения (6.2.27), (6.2.33), (6.2.32), получаем после несложных вычислений следующие уравнения для матриц x_l и A_l:

$$\begin{aligned}2l^2\,(2l+1)\,c^\dagger_l x_{l-1}c_l = l^2\,(2l+1)\left(x_l b_l c_l + c^\dagger_l b^\dagger_l x_l\right)-\\ -\,(4l^2-1)\,(a\cdot x)_l + l^2\,(2l-1)\,A_l,\end{aligned}\tag{6.3.17}$$

$$\begin{aligned}2l^2\,(2l-1)\,b^\dagger_l x_l b_l = l^2\,(2l-1)\left(b^\dagger_l c^\dagger_l x_l + x_l c_l b_l\right)+\\ +\,(4l^2-1)\,(a\cdot x)_{l-1} - l^2\,(2l+1)\,A_{l-1},\end{aligned}\tag{6.3.18}$$

$$b^\dagger_l\left[l a^\dagger_l x_l-(l-1)\,x_l a_l\right]=\left[(l+1)\,a^\dagger_{l-1}x_{l-1}-l x_{l-1}a_{l-1}\right]c_l,\tag{6.3.19}$$

где

$$(a\cdot x)_l = a^\dagger_l\left(a^\dagger_l x_l - x_l a_l\right)-\left(a^\dagger_l x_l - x_l a_l\right)a_l.$$

Формулы (6.3.17) — (6.3.19) задают необходимые и достаточные условия выполнения соотношений (6.3.10) — (6.3.12) для матриц η_a (6.2.27), β_0 и β_4 (6.3.14). Таким образом, задача описания галилеевски инвариантных уравнений вида (6.3.1) сводится к нахождению неэквивалентных решений системы линейных уравнений (6.3.17) — (6.3.19) для матриц x_l и A_l, где a_l, b_l и c_l — матрицы, удовлетворяющие системе зацепляющихся квадратных уравнений (6.2.33) — (6.2.35).

Обсудим теперь ограничения, налагаемые на матрицы x_l и A_l условиями (6.3.13). Подвергая функцию Ψ преобразованию $\Psi\rightarrow$

$\to V\Psi = \Phi$, где

$$V = \exp\left(\frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{p}\right), \tag{6.3.20}$$

перейдем от уравнения (6.3.1) к эквивалентному уравнению для Φ:

$$L'\Phi = \left[\beta_0\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + \beta_4 m\right]\Phi = 0. \tag{6.3.21}$$

Действительно, используя формулу Кемпбелла — Хаусдорфа (5.2.8) и принимая во внимание соотношения (6.3.10) — (6.3.12), нетрудно убедиться, что операторы L (6.3.2) и L' (6.3.21) связаны преобразованием $L' = V^{\dagger}LV^{-1}$, где V — оператор (6.3.20).

Поскольку оператор V коммутирует с $p_0 - p^2/(2m)$ и удовлетворяет условию $V\left(\mathbf{S} - \frac{1}{m}\mathbf{p}\times\boldsymbol{\eta}\right)^2 V^{-1} = \mathbf{S}^2$, из уравнения (6.3.13) получаем $\mathbf{S}^2\Phi = s(s+1)\Phi$. Полагая $\Phi = \sum\limits_{l}\varphi_l\,|\,l, m, \lambda\rangle$ и используя представление (6.3.14) для β_0 и β_4, приходим к выводу, что условия (6.3.13) являются следствием уравнения (6.3.1) в том и только том случае, когда

$$\det(\beta x_l + \alpha A_l) = \begin{cases} c_l \neq 0, & l \neq s, \\ \sum\limits_{i=0}^{n_l} k_i(\alpha - \varepsilon_0)^i, & l = s, \end{cases} \tag{6.3.22}$$

где c_l и k_i — постоянные, не зависящие от β (k_i не равны одновременно нулю), n_l — число строк в матрицах x_l, A_l.

Итак, задача описания галилеевски инвариантных уравнений вида (6.3.1) сводится к решению системы линейных уравнений (6.3.17) — (6.3.19) для матриц x_l и A_l. Кроме того, эти матрицы должны удовлетворять дополнительному условию (6.3.22).

Отметим, что условие (6.3.22) можно записать непосредственно в терминах матриц β_0 и β_4, не конкретизируя базиса, в котором эти матрицы заданы. А именно, можно потребовать, чтобы выполнялось

$$\det\left[(\alpha\beta_0 + \beta_4 m)P_\lambda + 1 - P_\lambda\right] = \begin{cases} c_l \neq 0, & \lambda \neq s, \\ \sum\limits_{i=0}^{n_l} k_i(\alpha - \varepsilon_0)^i, & \lambda = s, \end{cases} \tag{6.3.23}$$

где

$$P_\lambda = \prod_{\lambda' \neq \lambda} \frac{\mathbf{S}^2 - \lambda'(\lambda'+1)}{\lambda(\lambda+1) - \lambda'(\lambda'+1)}, \quad \lambda, \lambda' = l_0, \quad l_0+1, \ldots, l_1. \tag{6.3.24}$$

Как нетрудно убедиться, в базисе $|\lambda;\, l, m\rangle$ условие (6.3.23) сводится к (6.3.22).

6.3.5. Уравнения минимальной размерности. Рассмотрим сначала простейший вариант системы уравнений (6.3.17) — (6.3.19), когда индекс l может принимать только два значения: $l = l_0$, $l_0 + 1$. Этот случай является практически наиболее интересным, так как соответствует галилеевски инвариантным уравнениям движения частицы произвольного спина с минимальным числом компонент.

Представления алгебры АЕ(3), которые при редукции по подалгебре АО(3) включают не более двух неэквивалентных представлений, подробно рассматривались в п. 6.2.6, где приведен явный вид соответствующих неэквивалентных матриц a_l, b_l и c_l. Уравнения (6.3.17)—(6.3.19) для рассматриваемого случая с учетом соотношений (6.2.36) сводятся к следующей системе уравнений для двух неизвестных матриц x_l и x_{l-1}:

$$
\begin{gathered}
c_l^\dagger x_{l-1} c_l = -k_l a_l^\dagger x_l a_l - l k_l (a \cdot x)_l, \\
b_l^\dagger x_l b_l = k_{l-1} a_{l-1}^\dagger x_{l-1} a_{l-1} - l k_{l-1} (a \cdot x)_{l-1}, \qquad (6.3.25) \\
b_l^\dagger \left[l a_l^\dagger x_l - (l-1) x_l a_l \right] = \left[(l+1) a_{l-1}^\dagger x_{l-1} - l x_{l-1} a_{l-1} \right] c_l,
\end{gathered}
$$

где $k_l = \dfrac{2l+1}{l^2 (l+1)^2}$. Что же касается матриц A_l и A_{l-1}, то они однозначно выражаются через x_l и x_{l-1}:

$$
A_l = \frac{2l+1}{(l+1)^2} (a \cdot x)_l, \quad A_{l-1} = \frac{2l-1}{(l-1)^2} (a \cdot x)_{l-1}.
$$

Все возможные (с точностью до эквивалентности) решения системы уравнений (6.3.25), удовлетворяющие дополнительному условию (6.3.23) (и соответствующие матрицы a_l, b_l, c_l, а также A_l, A_{l-1} (6.3.24) и D_l, B_l (6.3.16)), приведены в таблице 6.1, где x, x_1, x_2 — произвольные вещественные параметры.

Мы видим, что из восемнадцати классов представлений алгебры АЕ(2), перечисленных в п. 6.2.6, нетривиальные уравнения вида (6.3.1) порождают лишь четыре: $D_l(3, 1, 2)$, $D_l(2, 1, 1)$, $D_l(2, 1, 3)$ и $D_l(1, 1, 2)$. Матрицы a_l, b_l и c_l, соответствующие другим представлениям, приводят к противоречивой системе уравнений (6.3.22), (6.3.25). В справедливости последнего утверждения можно убедиться прямой проверкой.

Приведенные выше результаты можно резюмировать в виде следующего утверждения.

Теорема 6.3. *Пусть S_a и η_a $(a = 1, 2, 3)$ — матрицы, образующие представление алгебры* АЕ(3) *класса* $\hat{D}_2$, *а* β_μ, β_4 — *матрицы, удовлетворяющие совместно с S_a и η_a соотношениям* (6.3.10)—(6.3.12), (6.3.23). *Тогда, с точностью до преобразований эквивалентности, явный вид этих матриц в базисе $|\lambda;\, l,\, m\rangle$ определяется формулами* (2.1.66), (6.2.27), (6.3.14), (6.3.15) *и таблицей* 6.1.

Таким образом, мы получили четыре класса галилеевски инвариантных уравнений первого порядка вида (6.3.1), задаваемых соотношениями (6.3.14), (6.3.15) и таблицей 6.1. Решениям класса R_1 соответствуют уравнения, в которых функция $\Psi(x)$ имеет $6s+1$ компонент. Такие уравнения эквивалентны уравнениям Хагена — Герли [239] для нерелятивистской частицы со спином $s = l$, массой m и внутренней энергией x.

Уравнения (6.3.1) с матрицами β_k, определяемыми соотношениями (6.3.14), (6.3.15) и столбцом R_2 из таблицы 6.1, имеют $6l-1$ компонент и описывают галилеевскую частицу со спином $s = l - 1$,

Таблица 6.1

Обозначения матриц	Серия решений			
	R_1	R_2	R_3	R_4
a_l	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$
a_{l-1}	0	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
b_l	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\sqrt{k_l}\,(1\ \ 0)$	$i\sqrt{k_l}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\sqrt{k_{l-1}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
c_l	$i\sqrt{k_l}\,(1\ \ 0)$	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$i\sqrt{k_l}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\sqrt{k_{l-1}}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}$
x_l	$\begin{pmatrix}0&\varkappa\\\varkappa&1\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}0&\varkappa_1&\varkappa_2\\\varkappa_1&\varkappa_2&1\\\varkappa_2&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\varkappa_2&l+1\\l+1&0\end{pmatrix}$
x_{l-1}	$2l-1$	$\begin{pmatrix}0&\varkappa\\\varkappa&1\end{pmatrix}$	$-\begin{pmatrix}\varkappa_2&l-1\\l-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&\varkappa_1&\varkappa_2\\\varkappa_1&\varkappa_2&1\\\varkappa_2&1&0\end{pmatrix}$
A_l	$\dfrac{2(2l+1)}{(l+1)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	0	$\dfrac{2l+1}{(l+1)^2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
A_{l-1}	0	$\dfrac{2(2l-1)}{(l-1)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\dfrac{2l-1}{(l-1)^2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
D_l	$\dfrac{2l+1}{l(l+1)}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	0	$\dfrac{2l+1}{l(l+1)}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
D_{l-1}	0	$\dfrac{2l-1}{l(l-1)}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\dfrac{2l-1}{l(l-1)}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$
B_l	$-(2l-1)\times$ $\times\, i\sqrt{k_l}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$-(2l+1)\times$ $\times\sqrt{k_{l-1}}\,(1\ \ 0)$	$i\sqrt{k_l}\begin{pmatrix}0&1-l\\-l&0\\0&0\end{pmatrix}$	$-\sqrt{k_{l-1}}\times$ $\times\begin{pmatrix}0&l&0\\l+1&0&0\end{pmatrix}$

массой m и внутренней энергией $\varkappa^2s^2m/2$. Ниже увидим, что эти уравнения предсказывают другое (по сравнению с уравнениями Леви-Леблонда — Хагена — Герли) значение константы дипольного взаимодействия заряженной спиновой частицы с внешним полем.

Уравнения (6.3.1) представляют наибольший интерес в том случае, когда матрицы x_l, A_l, D_l и B_l принадлежат сериям R_3 и R_4 из таблицы 6.1. Такие уравнения можно интерпретировать как квантовомеханические уравнения движения нерелятивистской частицы со спином $s=l$ (или $s=l-1$), массой m и внутренней энергией

$(1/2)(s+1)^2(\varkappa_2^2-2\varkappa_1)m$ (или $(1/2)(\varkappa_2^2-2\varkappa_1)s^2m$). Как будет показано ниже, именно эти уравнения могут служить основой для построения галилеевски инвариантного описания спин-орбитального взаимодействия частицы с электромагнитным полем.

Приведем явный вид простейших из найденных уравнений в покомпонентной записи:

$s=l-1=0$, $\Psi=$ столбец $(\Psi_0,\ \Psi_1,\ \Psi_2,\ \Psi_3)=$ столбец $(\Psi_0,\ \boldsymbol{\Psi})$:

$$\begin{cases} p_0\Psi_0+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\Psi}=0,\\ 2m\boldsymbol{\Psi}+\mathbf{p}\Psi_0=0;\end{cases} \tag{6.3.26}$$

$s=l=1/2$, $\Psi=$ столбец $(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \chi_1,\ \chi_2)$:

$$\begin{cases} 2p_0\varphi+\frac{3}{2}\left(i\sigma\cdot\mathbf{p}+\frac{3}{2}\varkappa m\right)\chi=0,\\ \left(\frac{3}{2}\varkappa m-i\sigma\cdot\mathbf{p}\right)\varphi+\frac{3}{2}m\chi=0;\end{cases} \tag{6.3.27}$$

$s=l=1$, $\Psi=$ столбец $(\varphi,\ \chi,\ \boldsymbol{\Phi},\ \Phi_0)$:

$$\begin{cases} (1/2)p_0\boldsymbol{\chi}+\mathbf{p}\times\boldsymbol{\Phi}+2\varkappa_1 m\boldsymbol{\chi}+2\varkappa_2 m\boldsymbol{\Phi}=0,\\ (1/2)p_0\boldsymbol{\varphi}-\mathbf{p}\Phi_0+2\varkappa_1 m\boldsymbol{\varphi}+2\varkappa_2 m\boldsymbol{\chi}+2m\boldsymbol{\Phi}=0,\\ (i\sqrt{3})\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\chi}-2\varkappa_2 m\Phi_0=0,\\ \mathbf{p}\times\boldsymbol{\varphi}-2\varkappa_2 m\boldsymbol{\varphi}-2m\boldsymbol{\chi}=0,\end{cases} \tag{6.3.28}$$

где $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$ — матрицы Паули.

Система (6.3.1) сводится к уравнениям (6.3.26) — (6.3.28) в случаях, когда матрицы x_l, A_l, D_l и B_l имеют вид R_1 (для $s=1/2$) и R_3 (для $s=1$); см. таблицу 6.1. Система (6.3.26) — особый случай.

6.3.6. Уравнения для представлений с произвольным индексом нильпотентности. Здесь мы рассмотрим класс галилеевски инвариантных уравнений вида (6.3.1), который может быть получен, исходя из уравнений, инвариантных относительно обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$. Эти уравнения соответствуют представлениям алгебры AE(3), которые характеризуются произвольным значением индекса нильпотентности оператора Казимира C_1 (6.1.16), и описывают в общем случае целый набор частиц с различными массами и спинами.

Будем исходить из обобщенного уравнения Баба́ (5.4.25). Наряду с симметрией относительно группы $P(1,4)$ это уравнение, очевидно, инвариантно относительно группы Галилея (которая является подгруппой группы $P(1,4)$). Для того чтобы записать уравнение (5.4.25) в форме, явно инвариантной относительно преобразований Галилея, сделаем замену переменных

$$x_0=\frac{1}{2}\left(2\tilde{x}_0+\tilde{x}_4\right),\quad x_4=\frac{1}{2}\left(2\tilde{x}_0-\tilde{x}_4\right), \tag{6.3.29}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x_0}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_0}+\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_4},\quad \frac{\partial}{\partial x_4}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_0}-\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_4}. \tag{6.3.30}$$

В результате приходим к уравнению в форме

$$0=(\tilde{\beta}_0\tilde{p}_0-\tilde{\beta}_4\tilde{p}_4-\beta_0 p_a+\varkappa)\Psi(\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_4,\ \mathbf{x}),\tag{6.3.31}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{p}_0=i\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_0},\quad \tilde{p}_4=-i\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_4},\quad p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},\\ \tilde{\beta}_0=\frac{1}{2}(S_{50}+S_{54}),\quad \tilde{\beta}_4=S_{50}-S_{54},\quad \tilde{\beta}_a=S_{5a},\end{gathered}\tag{6.3.32}$$

а S_{kl} — матрицы, реализующие представление алгебры АО(1, 5).

Галилеевскую инвариантность уравнения (6.3.31) нетрудно проверить непосредственно, воспользовавшись следующей реализацией алгебры AG(1, 3):

$$\begin{gathered}P_0=\tilde{p}_0,\quad P_a=\tilde{p}_a,\quad M=\tilde{p}_4,\\ J_a=\varepsilon_{abc}\left(x_b p_c+\frac{1}{2}S_{bc}\right),\quad G_a=\tilde{x}_0 p_a-x_a M+\eta_a,\end{gathered}\tag{6.3.33}$$

где

$$\eta_a=\frac{1}{2}(S_{0a}+S_{4a}).$$

Оператор $L=\tilde{\beta}_0\tilde{p}_0-\tilde{\beta}_4\tilde{p}_4-\beta_a p_a$ и генераторы (6.3.33) удовлетворяют условиям (1.1.5) (с $\alpha_Q\equiv 0$).

Накладывая на решения уравнения (6.5.31) галилеевски инвариантное дополнительное условие $\tilde{p}_4\Psi(\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_4,\ \mathbf{x})=\lambda\varkappa\Psi(\tilde{x}_a,\ \tilde{x}_4,\ \mathbf{x})$, получаем галилеевски инвариантное уравнение в форме (6.3.1), где

$$\beta_0=\tilde{\beta}_0,\quad \beta_4=-\tilde{\beta}_4+\lambda^{-1}I,\quad m=\varkappa\lambda,\tag{6.3.34}$$

I — единичная матрица. Генераторы группы Галилея на множестве решений уравнений (6.3.1), (6.3.34) имеют ковариантную форму (6.2.20), где

$$M=\varkappa\lambda,\quad \eta_a=\frac{1}{2}(S_{4a}+S_{0a}),\quad S_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}.\tag{6.3.35}$$

Конечномерные представления алгебры АО(1, 5) (которая изоморфна алгебре АО(6)) задаются тройками чисел $(n_1,\ n_2,\ n_3)$, одновременно целыми или полуцелыми [23]. Если матрицы S_{kl} из (6.3.37) образуют представления $D\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)$ алгебры АО(1, 5), то уравнения (6.3.1), (6.3.35) эквивалентны уравнению Леви-Леблонда [260] (см. (6.3.25)) для галилеевской частицы со спином $s=1/2$. Представление $D(1\ 1\ 1)$ приводит к уравнениям для частицы спина $s=1$ в форме (6.3.28) (с $\varkappa_1=-\varkappa\lambda,\ \varkappa_2=\varkappa$). При этом матрицы $\beta_0,\ \beta_a,\ \beta_4$ выражаются через десятирядные матрицы Кеммера — Деффина $\hat{\beta}_k$ согласно

$$\beta_0=\frac{1}{2}(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_4),\quad \beta_4=\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_4+\lambda^{-1}\mathrm{I},\quad \beta_a=\hat{\beta}_a.$$

В общем случае уравнения (6.3.1), (6.3.32), (6.3.34) описывают мультиплет нерелятивистских частиц со спинами s_1, s_2, ..., где числа s_i характеризуют представления алгебры АО(3), входящие в заданное представление алгебры АО(1, 5), реализуемое матрицами S_{kl}.

Можно показать, что матрицы (6.3.35) удовлетворяют условиям

$$(\eta_a S_a)^{2s+1} = 0, \qquad (\eta_a S_a)^{2s} \neq 0,$$

где s — максимальное значение спина частиц, описываемых уравнениями (6.3.1), (6.3.32), (6.3.34). Таким образом, рассматриваемые здесь уравнения соответствуют представлениям алгебры АЕ(3), характеризуемым индексом нильпотентности оператора Казимира C_1 (6.3.19) $n = 2s + 1$, где s может быть произвольно большим.

Отметим, что уравнения (6.3.1), (6.3.32), (6.3.34) остаются инвариантными относительно группы Галилея и в том случае, когда матрицы S_{kl} из (6.3.32) реализуют бесконечномерное эрмитово представление алгебры АО(1, 5). Таким путем мы естественно приходим к бесконечнокомпонентным уравнениям нерелятивистской квантовой механики, которые можно рассматривать как галилеевски инвариантный аналог соответствующих релятивистских уравнений [123].

§ 6.4. Уравнения в форме Шредингера, инвариантные относительно группы Галилея

6.4.1. Постановка задачи. Исследуем альтернативную возможность описания частицы произвольного спина с помощью галилеевски инвариантных уравнений в форме Шредингера (6.1.1). Такие уравнения могут оказаться более удобными для различных приложений по сравнению с системами, рассматриваемыми в предыдущем параграфе, так как содержат в явном виде оператор эволюции (гамильтониан). При этом, в отличие от случая релятивистских волновых уравнений, выделенность временной переменной согласуется к законом преобразования (6.1.31) при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

Будем искать уравнение движения нерелятивистской частицы произвольного спина s в форме Шредингера (6.1.1), где Ψ — $2(2s+1)$-компонентная волновая функция, H — пока неизвестный дифференциальный оператор. Мы увидим, что такое число компонент Ψ является минимальным для нетривиального уравнения движения частицы с фиксированным спином $s \neq 0$.

Уравнение (6.1.1), по определению, инвариантно относительно алгебры Галилея (или галилеевски инвариантно), если оно допускает одиннадцать операторов симметрии, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6.1.6), (6.1.6′). Ограничимся случаем, когда эти операторы имеют ковариантную форму (6.2.20), соответствующую локальным преобразованиям волновой функции при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

Условие галилеевской инвариантности уравнения (6.1.1) сводится к требованию, чтобы операторы (6.2.20) были операторами симметрии этого уравнения, т. е. удовлетворяли соотношениям (6.1.4), (1.1.5). Как легко убедиться, эти соотношения сводятся к следующим уравнениям для H:

$$[H,\ P_a]=[H,\ J_a]=0,\quad [H,\ G_a]=iP_a, \tag{6.4.1}$$

где P_a, J_a, G_a — операторы (6.2.20).

Потребуем, чтобы собственные значения операторов Казимира (6.1.16) на множестве решений уравнения (6.1.1) были равны

$$c_1=m,\quad c_2=m^2s(s+1), \tag{6.4.2}$$

что позволит интерпретировать его как уравнение движения частицы с массой m и спином s. Соответствующие матрицы S_a, η_a и M, входящие в (6.2.20), не умаляя общности, можно выбрать в виде

$$S_a=\begin{pmatrix} s_a & 0\\ 0 & s_a\end{pmatrix},\qquad \eta_a=k(\sigma_1+i\sigma_2)S_a,\qquad M=\sigma_0 m, \tag{6.4.3}$$

где S_a — матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$, реализующие неприводимое представление $D(s)$ алгебры AO(3), σ_0, σ_1 и σ_2 — $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули (2.2.29), k — произвольный комплексный параметр.

Если $k\neq 0$, то матрицы (6.4.3) могут быть преобразованы к эквивалентному представлению с $k=1$. Оператор такого преобразования имеет вид

$$V=\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_3\,\mathrm{arth}\,\frac{1}{k}\right). \tag{6.4.4}$$

По соображениям, изложенным в примечании к доказательству теоремы 6.4, мы сочли удобным допустить произвольные значения параметра k.

Потребуем дополнительно, чтобы уравнение (6.1.1), как и уравнение Шредингера для свободной бесспиновой частицы (6.1.3), было инвариантно относительно преобразования одновременного отражения пространственных и временной координат (6.1.38). (6.1.39). Записывая такое преобразование в форме (ср. (6.1.40), (6.1.41))

$$\Psi(t,\ \mathbf{x})\to\Theta\Psi(t,\ \mathbf{x})=r\Psi^*(-t,\ -\mathbf{x}), \tag{6.4.5}$$

где r — матрица, подлежащая определению, и принимая во внимание (6.2.20), заключаем, что оператор Θ следующим образом коммутирует с генераторами группы Галилея:

$$P_\mu\Theta=\Theta P_\mu,\quad J_a\Theta=-\Theta J_a,\quad G_a\Theta=-\Theta G_a, \tag{6.4.6}$$

откуда вытекают следующие уравнения для матрицы r:

$$rS_a=-S_a^*r,\qquad r\eta_a=-\eta_a^*r. \tag{6.4.7}$$

Из (6.4.3), (6.4.7) следует, что параметр k, входящий в матрицы η_a, может быть либо вещественным, либо мнимым — в зависимости от того, коммутирует матрица r с $\sigma_1+i\sigma_2$ или антикоммутирует. Соответственно, матрицу r, не умаляя общности, можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} r&=a\Delta, \quad \text{если} \quad k^*=k,\\ r&=a\sigma_3\Delta, \quad \text{если} \quad k^*=-k, \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

где Δ — матрица (2.4.18), a — комплексный параметр, равный по модулю единице.

Условие инвариантности уравнения (6.1.1) относительно преобразования полного отражения может быть записано в виде

$$[H,\ \Theta]=0, \tag{6.4.9}$$

где Θ — оператор (6.4.5), (6.4.8).

Таким образом, ставится задача нахождения всех возможных (с точностью до эквивалентности) операторов H, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6.4.1), (6.4.9).

6.4.2. Гамильтониан нерелятивистской частицы произвольного спина. Решение сформулированной выше задачи приведем в виде следующего утверждения.

Теорема 6.4. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H, удовлетворяющие соотношениям* (6.4.1), (6.4.9) *совместно с операторами* (6.2.20), (6.4.3), (6.4.5), *задаются формулами* (6.4.10) — (6.4.13):

$$H=H^{(1)}=\sigma_1 am+\sigma_3 2ikaS_ap_a+\frac{1}{2m}C_{ab}p_ap_b, \tag{6.4.10}$$

$$H=H^{(2)}=\sigma_3 bm+(\sigma_1+i\sigma_2)\,2bkS_ap_a+\frac{p^2}{2m}, \tag{6.4.11}$$

$$H=H^{(3)}=H^{(1)}-\frac{a}{2}(\sigma_1+i\sigma_2)\,m, \tag{6.4.12}$$

$$H=H^{(4)}=(\sigma_1+i\sigma_2)\,m+\frac{p^2}{2m}, \tag{6.4.13}$$

где

$$C_{ab}=\delta_{ab}+2ak^2(\sigma_1+i\sigma_2)(S_aS_b+S_bS_a), \tag{6.4.14}$$

a, b *и* k — *произвольные параметры, удовлетворяющие условиям*

$$b^*=b, \quad k^*=\pm k, \quad (ak)^*=ak. \tag{6.4.15}$$

Доказательство. Общее решение соотношений (6.4.1) проще всего получить в специальном представлении, связанном с (6.2.20) преобразованием эквивалентности

$$P_\mu\to P'_\mu=UP_\mu U^{-1}, \quad \mathbf{J}\to\mathbf{J}'=U\mathbf{J}U^{-1}, \quad \mathbf{G}\to\mathbf{G}'=U\mathbf{G}U^{-1}, \tag{6.4.16}$$

где

$$U=\exp\left(\frac{i}{m}\eta_ap_a\right)=1+\frac{i}{m}\eta_ap_a. \tag{6.4.17}$$

Действительно, подставив (6.2.20), (6.2.17) в (6.4.16), получаем

$$P'_a=P_a, \quad P'_0=H', \quad J'_a=J_a, \quad G'_a=tp_a-mx_a. \tag{6.4.18}$$

Потребовав, чтобы операторы H', P'_a, J'_a и G'_a удовлетворяли коммутационным соотношениям (6.4.4), приходим к следующей системе уравнений:

$$[H', x_a] = -\frac{i}{m} p_a, \qquad [H', p_a] = [H', S_a] = 0, \tag{6.4.19}$$

общее решение которой **имеет вид**

$$H' = \frac{p^2}{2m} + Bm, \qquad B = \sigma_\mu a^\mu, \tag{6.4.20}$$

где σ_μ — матрицы Паули (2.2.29), a^μ — произвольные комплексные коэффициенты.

Параметр a^0, не умаляя общности, можно приравнять нулю, поскольку он определяет нулевой уровень энергии и не вносит вклада ни в какие физические эффекты. Область значений остальных произвольных коэффициентов a_1, a_2 и a_3 ограничивается условием (6.4.9), которое, учитывая коммутативность операторов U (6.4.17) и Θ, можно записать в виде

$$rB = B^*r, \tag{6.4.21}$$

где r и B — матрицы (6.4.8), (6.4.20). Согласно (6.4.21)

$$a_1^* = a_1, \quad a_2^* = a_2, \quad a_3^* = a_3, \text{ если } r = \alpha\Delta, \tag{6.4.22}$$

$$a_1^* = -a_1, \quad a_2^* = -a_2, \quad a_3^* = a_3, \text{ если } r = \sigma_3\alpha\Delta. \tag{6.4.23}$$

Покажем, что матрица B с помощью преобразований эквивалентности может быть сведена к одной из следующих форм:

$$B = \sigma_1 a, \quad B = \sigma_3 a, \quad B = \sigma_1 \pm i\sigma_2, \tag{6.4.24}$$

где $a = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2}$. Операторы H_1 и H_2, удовлетворяющие условиям галилеевской инвариантности (6.4.4), считаются эквивалентными, если существует такая обратимая числовая матрица V, что

$$VH_1V^{-1} = H_2. \tag{6.4.25}$$

Подействовав на обе части равенства оператором U (6.4.17), преобразующим H_2 и соответствующие ему генераторы группы Галилея к форме (6.4.18), получаем

$$UVH_1V^{-1}U^{-1} = H_2',$$

или

$$H_1' = V^{-1}UVH_1V^{-1}U^{-1}V = V^{-1}H_2'V \equiv H_2''. \tag{6.4.26}$$

Но числовая матрица V коммутирует с генераторами P_a', J_a' и G_a'. Это означает, что и H_2'', и равный ему оператор H_1'' удовлетворяют условиям (6.4.19) и, следовательно, имеют вид, задаваемый формулой (6.4.20). Иными словами, эквивалентным операторам H_1 и H_2 можно взаимно однозначно сопоставить эквивалентные операторы в представлении (6.4.18).

Однако, как видно из (6.4.26), операторы преобразования от штрихованного представления (6.4.18) к ковариантному представлению (6.2.20) для эквивалентных гамильтонианов H_1 и H_2 в общем случае не совпадают, так как, вообще говоря, $W = V^{-1}UV \neq U$ и может оказаться, что генераторы группы Галилея для H_1 не совпадают с задаваемыми формулами (6.2.20), (6.4.3). Поэтому среди множества матриц V, удовлетворяющих условию (6.4.25), необходимо отобрать такие, чтобы выполнялось

$$V^{-1}\eta_a V = \lambda\eta_a, \tag{6.4.27}$$

где η_a — матрицы (6.4.3), λ — произвольный коэффициент. Если выполняется (6.4.27), то генераторы P_a, J_a и G_a, соответствующие эквивалентным гамильтонианам H_1 и H_2, могут отличаться только значением параметра k в (6.4.3), который по условию теоремы является произвольным *).

Общий вид матрицы V, удовлетворяющей условиям (6.4.27), задается формулой

$$V = \alpha_0\sigma_0 + \alpha_3\sigma_3 + \alpha_1(\sigma_1 + i\sigma_2) \tag{6.4.28}$$

(α_0, α_1, α_3 — произвольные комплексные числа). Нетрудно показать, что с помощью преобразования $B \to VBV^{-1}$, где V — матрица (6.4.28), произвольная матрица B из (6.4.20) может быть сведена к одной из форм, перечисленных в формуле (6.4.24), и что матрицы (6.4.24) являются неэквивалентными в том смысле, что не существует оператора типа (6.4.28), переводящего их друг в друга.

Таким образом, общий вид гамильтониана H' задается формулами (6.4.20), (6.4.24). С помощью преобразования, обратного к (6.4.16), получаем все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы, удовлетворяющие условию галилеевской инвариантности, в форме (6.4.10) — (6.4.13). ■

Итак, мы получили галилеевски инвариантные волновые уравнения в форме (6.1.1), (6.4.10) — (6.4.13). Инвариантность этих уравнений относительно преобразований Галилея может быть проверена непосредственно. Действительно, используя соотношения

$$\exp(i\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{v}) = 1 + i\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{v}, \tag{6.4.29}$$

прямым вычислением получаем, что операторы $H = H(\mathbf{p})$ (6.4.10) — (6.4.13) удовлетворяют условиям

$$\exp[i\varphi(x)]\,D(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v})\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H(\mathbf{p})\right)D^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v})\exp[-i\varphi(x)] = \\ = i\frac{\partial}{\partial t'} - H(\mathbf{p}'), \tag{6.4.30}$$

---

*) Если априори фиксировать значение k (например, положить $k = 1$), то вместо условия (6.4.27) пришлось бы потребовать коммутативности матриц V и η, что не позволило бы эффективно упростить общее выражение для гамильтониана H.

где $D(\theta, \mathbf{v})$ — оператор (6.2.25), $H(\mathbf{p}')$ — гамильтонианы, получаемые из (6.4.10) — (6.4.13) заменой $p_a \to p'_a = -i\frac{\partial}{\partial x'_a}$, а $\varphi(x), t'$ и x'_a задаются формулами (6.1.30), (6.1.31). Из (6.4.30) следует, что функция $\Psi'(x')$ (6.1.24) удовлетворяет такому же уравнению, как и непреобразованная функция $\Psi(x)$:

$$i\frac{\partial}{\partial t'}\Psi'(x') = H(\mathbf{p}')\ \Psi'(x'). \tag{6.4.31}$$

Иными словами, уравнение (6.1.1) с любыми из гамильтонианов (6.4.6), (6.4.7) остается инвариантным при преобразованиях Галилея (6.1.31), если волновая функция одновременно преобразуется согласно (6.1.24).

Гамильтонианы (6.4.12), (6.4.13) соответствуют неэрмитовым представлениям алгебры Галилея (оператор Казимира $C_1 = 2Hp_0 - p^2$ является нильпотентной матрицей) и поэтому в дальнейшем не рассматриваются. Как будет показано в следующем пункте, из двух оставшихся гамильтонианов (6.4.10), (6.4.11) по физическим соображениям следует выбрать оператор (6.4.10), который и будет использоваться далее.

Нетрудно убедиться (проще всего это сделать в представлении (6.4.18)), что в случае, когда гамильтониан H имеет вид (6.4.10), операторы Казимира алгебры Галилея могут принимать следующие значения:

$$c_3 = \pm am, \quad c_1 = m, \quad c_2 = m^2 s(s+1).$$

Отсюда заключаем, что уравнения (6.1.1), (6.4.10), (6.4.11) можно интерпретировать как уравнения движения свободной нерелятивистской частицы с массой m, спином s и внутренней энергией $\pm am$.

6.4.3. Лагранжева формулировка. Мы видим, что нерелятивистской частице с массой m и спином s можно сопоставить гамильтониан H (6.4.10) или (6.4.11), получаемый из условия галилеевской инвариантности уравнения Шредингера. Как и релятивистский гамильтониан Дирака, операторы (6.4.10), (6.4.11) зависят от спиновых матриц, но включают операторы дифференцирования более высокого (второго) порядка.

Нерелятивистские гамильтонианы для частиц произвольного спина зависят от двух произвольных параметров a и k (или b и k), значения которых не могут быть определены, если исходить только из требования галилеевской инвариантности уравнений движения. Если эти параметры удовлетворяют условиям (6.4.15), то соответствующее уравнение (6.1.1) оказывается инвариантным относительно группы $G(1, 3)\otimes F$, где F — группа, включающая два элемента: преобразование Θ (6.4.5) и тождественное преобразование.

Гамильтонианы (6.4.10), (6.4.11) и соответствующие галилеевские генераторы (6.2.20), (6.4.3) эрмитовы относительно скалярного произведения (2.4.46), где M — положительно определенный метрический оператор

$$\widehat{M} = U^{\dagger}U = 1 + \frac{1}{m}\left[i\left(k^* - k\right)\sigma_1 - \left(k^* + k\right)\sigma_2\right] S_a p_a + \\ + \frac{2k^*k}{m^2}\left(1 - \sigma_3\right)\left(S_a p_a\right)^2. \quad (6.4.32)$$

Кроме того, гамильтониан (6.4.10) (и операторы (6.2.20), (6.4.3)) эрмитов в индефинитной метрике

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^{\dagger}\xi\Psi_2, \quad (6.4.33)$$

где

$$\xi = \begin{cases} \sigma_1, & \text{если } a^* = a, \ k^* = k, \\ \sigma_2, & \text{если } a^* = -a, \ k^* = -k. \end{cases} \quad (6.4.34)$$

Действительно, ξ является эрмитизующей матрицей для гамильтониана (6.4.10), т. е. $(\xi H)^{+} = \xi H$. Что же касается гамильтониана (6.4.11), то можно убедиться прямым вычислением, что эрмитизующей матрицы для него не существует.

Уравнение (6.1.1) с гамильтонианом (6.4.10) можно получить из вариационного принципа, если выбрать плотность лагранжиана в виде

$$L_0(x) = \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}\Psi\right) - am\overline{\Psi}\sigma_1\Psi - \frac{1}{2m}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_a}C_{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b} + \\ + ak\left(\overline{\Psi}\sigma_3 S_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_a}\sigma_3 S_a\Psi\right), \quad (6.4.35)$$

где $\overline{\Psi} = \Psi^{+}\xi$. Действительно, легко проверить, что уравнения Лагранжа — Эйлера (2.5.27) для функции (6.4.35) совпадают с (6.1.1), (6.4.10). Заменяя в (2.5.27) $\overline{\Psi}$ на Ψ, приходим к уравнению для функции $\overline{\Psi}$, которое является следствием (6.1.1), (6.4.10).

Формула (6.4.35) определяет вещественную функцию от Ψ и ее первых производных, инвариантную относительно преобразований Галилея (6.1.29), которая может интерпретироваться как лагранжиан свободной нерелятивистской частицы с произвольным спином s.

Таким образом, уравнения (6.1.1), (6.4.10) допускают лагранжеву формулировку, что позволяет использовать канонический лагранжев формализм для построения операторов основных физических величин — тензора энергии-импульса, тензора момента и т. д., а также обобщать эти уравнения на случай частиц, взаимодействующих с внешним полем, в рамках принципа минимального взаимодействия, заменяя в лагранжиане $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ на $\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu$.

Отметим, что уравнения (6.1.1) с гамильтонианом (6.4.11) не могут быть выведены из соответствующим образом подобранного лагранжиана, что связано с неэрмитовостью оператора (6.4.11) и отсутствием для него эрмитизующей матрицы. Следовательно, условия галилеевской и Θ-инвариантности уравнения (6.1.1) совместно с требованием, чтобы это уравнение было уравнением Лагранжа — Эйлера, однозначно приводят нас к гамильтониану (6.4.10).

В работах [204, 209] рассматривались также другие типы галилеевски инвариантных уравнений для $2(2s+1)$-компонентной волновой функции — уравнения в форме Шредингера, на множестве решений которых реализуются нековариантные представления алгебры Галилея, и уравнения второго порядка с сингулярными матричными коэффициентами при p_0. Мы не будем здесь анализировать уравнения такого типа, но отметим, что они также могут быть успешно использованы для описания частицы с произвольным фиксированным спином.

§ 6.5. Нерелятивистская частица произвольного спина во внешнем электромагнитном поле

6.5.1. Уравнение Шредингера для спиновой частицы во внешнем электромагнитном поле. Уравнения движения свободных нерелятивистских частиц могут представлять реальный интерес для физики только в том случае, если они являются первым шагом к описанию частиц, участвующих в различного рода взаимодействиях. Важнейшим из них является взаимодействие заряженной частицы с внешним электромагнитным полем.

Как будет видно из дальнейшего, найденные выше уравнения могут успешно использоваться при решении конкретных физических задач, поскольку они описывают (в рамках принципа минимального взаимодействия) дипольное, спин-орбитальное, дарвиновское взаимодействия заряженной частицы произвольного спина с внешним полем, т. е. учитывают все физические эффекты, предсказываемые в порядке $1/m^2$ релятивистским уравнением Дирака.

В этом параграфе исследуется возможность использования галилеевски инвариантных волновых уравнений для описания движения заряженной частицы произвольного спина как в рамках принципа минимального взаимодействия, так и с учетом аномального взаимодействия типа Паули. С помощью обобщенной редукции Фолди — Вуйтхайзена вычислены константы дипольного, спин-орбитального и других взаимодействий, предсказываемые этими уравнениями. В настоящем пункте рассматриваются уравнения в форме Шредингера, а в последующем — системы уравнений в частных производных первого порядка.

Итак, будем исходить из уравнений в форме Шредингера (6.1.1), (6.4.10), описывающих свободную частицу спина s. Для того чтобы перейти к описанию движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в этих уравнениях обычную замену $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля. В результате приходим к уравнениям

$$L(\pi)\Psi(x) = 0, \qquad L(\pi) = i\frac{\partial}{\partial x_0} - H(\boldsymbol{\pi}, A_0), \tag{6.5.1}$$

где $H(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ — гамильтониан, полученный из (6.4.10) заменой $p_\mu \to \pi_\mu$:

$$H(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1 am + \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 + 2iak\sigma_3 \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \\ + (\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{2ak^2}{m}\left[(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{e}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right], \qquad (6.5.2)$$

$\mathbf{H} = -\frac{i}{e} i\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}$ — вектор напряженности магнитного поля.

Уравнения (6.5.1) являются уравнениями Лагранжа — Эйлера и могут быть выведены, исходя из лагранжиана, получаемого из (6.4.35) заменой $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to \frac{}{\partial x_\mu} - ieA_\mu$.

Для обоснования справедливости принципа минимального взаимодействия применительно к галилеевски инвариантным уравнения движения покажем, что замена (4.1.1) не нарушает калибровочной и галилеевской симметрии исходных уравнений и, кроме того, приводит к физически разумным результатам при решении конкретных задач.

Уравнения (6.5.1) явно инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\Psi(x) \to \exp[ie\varphi(x)]\,\Psi(x), \qquad A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}, \qquad (6.5.3)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Для того чтобы установить инвариантность этих уравнений относительно преобразований Галилея (6.2.25), предположим, что вектор-потенциал A_μ одновременно преобразуется по галилеевскому закону [259]

$$A_0 \to A_0' = A_0 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}, \qquad A_a \to A_a' = R_{ab}A_b, \qquad (6.5.4)$$

где R_{ab} — оператор поворота системы координат (6.1.26).

Уравнение (6.5.1) инвариантно относительно преобразований (6.2.25), (6.5.3), если преобразованная функция $\Psi'(x')$ удовлетворяет такому же уравнению, как и исходная функция $\Psi(x)$:

$$L(\pi')\,\Psi'(x') = 0, \qquad (6.5.5)$$

где $L(\pi')$ — оператор, получаемый из $L(\pi)$ заменой $\pi_\mu \to \pi_\mu' = i\frac{\partial}{\partial x'_\mu} - eA_\mu'$. Достаточным условием галилеевской инвариантности является выполнение следующего соотношения (ср. (6.4.30)):

$$\exp[i\varphi(x)]\,\tilde{D}(\theta, \mathbf{v})\,L(\pi)\,D^{-1}(\theta, \mathbf{v})\exp[-i\varphi(x)] = L(\pi'), \quad (6.5.6)$$

где $\varphi(x)$ — функция (6.1.30), $\tilde{D}(\theta, \mathbf{v})$ и $D(\theta, \mathbf{v})$ — матрицы, определяющие представления однородной группы Галилея:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) &= \exp(i\tilde{\mathbf{S}}\cdot\boldsymbol{\theta})\exp(i\tilde{\boldsymbol{\eta}}\cdot\mathbf{v}), \\ D(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) &= \exp(i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\theta})\exp(i\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{v}), \end{aligned} \qquad (6.5.7)$$

$\mathbf{S}$, $\boldsymbol{\eta}$ и $\tilde{\mathbf{S}}$, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ — матрицы, реализующие представления (в общем случае неэквивалентные) алгебры Ли однородной группы Галилея (6.2.22), (6.2.23), $\boldsymbol{\theta}$ и $\mathbf{v}$ — параметры преобразования Галилея (6.1.31).

Если выполняется (6.5.6), то уравнение (6.5.5) непосредственно следует из (6.5.1), (6.2.25), (6.5.4). Формула (6.5.6) определяет достаточные условия галилеевской инвариантности произвольного линейного уравнения $L(\pi)\Psi = 0$, где $L(\pi)$ — дифференциальный оператор, зависящий от π_μ.

Используя соотношения

$$\pi_0' = \pi_0 + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\pi}, \qquad \pi_a' = R_{ab}\pi_b,$$

$$\exp[i\varphi(x)]\,\pi_a \exp[-i\varphi(x)] = \pi_a + mv_a,$$

$$\exp[i\varphi(x)]\,\pi_0 \exp[-i\varphi(x)] = \pi_0 + \frac{1}{2}mv^2,$$

$$\exp(i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\theta})\,S_a \exp(-i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\theta}) = R_{ab}^{-1}S_b$$

и формулы (6.2.22), (6.4.29), непосредственной проверкой убеждаемся, что операторы $L(\pi)$ (6.5.1) действительно удовлетворяют условию (6.5.6) (где $\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) = D(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v})$) и, следовательно, уравнения (6.5.1) инвариантны относительно преобразований Галилея.

6.5.2. Преобразование уравнений (6.5.1) к квазидиагональной форме. Покажем, что уравнения движения заряженных частиц произвольного спина во внешнем электромагнитном поле, задаваемые формулами (6.5.1), (6.5.2), правильно моделируют физическую ситуацию и предсказывают такие хорошо известные эффекты, как спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия.

Анализ уравнений (6.5.1) удобно проводить в представлении, в котором гамильтониан $H(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ имеет квазидиагональную форму, т. е. коммутирует с матрицей σ_1. Как и соответствующие релятивистские уравнения (см. § 4.1), уравнения (6.5.1) в случае произвольных A_μ можно диагонализировать только приближенно, используя в качестве малого параметра $1/m$.

Мы покажем ниже, что с помощью преобразований типа (4.1.20) операторы $H(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ можно привести к следующей форме:

$$H'(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \varepsilon_0 + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + eB\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}}{m} + \\ + \frac{eD^2}{2m^2}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + \frac{1}{3}s(s+1)\operatorname{div}\mathbf{E}\right] + \\ + \frac{eBD}{m^2}\left[\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi}) - \frac{2}{3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad (6.5.8)$$

где Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия (4.1.25), B, ε_0 и D — произвольные коэффициенты, следующим образом связанные с параметрами a и k:

$$B = ak^2\sigma_1, \quad D = k, \quad \varepsilon_0 = \sigma_1 am. \qquad (6.5.9)$$

Гамильтониан $H'(\boldsymbol{\pi}, A_0)$, как и приближенные релятивистские гамильтонианы (4.1.29), включает слагаемые, соответствующие взаимодействию точечной заряженной частицы с внешним электромагнитным полем $\left(\sim \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0\right)$, а также дипольному, спин-орбитальному, дарвиновскому и квадрупольному взаимодействиям. Два последних слагаемых (которые P-неинвариантны и могут быть сделаны как угодно малыми при $D \to 0$) можно интерпретировать как вклад от магнитного квадрупольного и спин-орбитального взаимодействия.

Таким образом, галилеевски инвариантные уравнения движения частиц с произвольным спином (6.5.1) учитывают такой тонкий физический эффект, как спин-орбитальное взаимодействие, вклад от которого традиционно рассматривается как релятивистская поправка. Приближенный гамильтониан (6.5.8) включает все слагаемые, характерные для соответствующего квазирелятивистского гамильтониана (4.1.26), кроме релятивистской поправки к кинетической энергии $p^4/(8m^3)$. Подчеркнем, однако, что, в отличие от релятивистских уравнений, уравнения (6.5.1) (и гамильтониан (6.5.8)) определены с точностью до произвольных параметров a и k, которые могут быть выбраны, скажем, из условия соответствия констант спин-орбитального и дарвиновского взаимодействия экспериментальным данным. Так, полагая $a = 1$, $k = 1/s$, $s = 1/2$, приходим к гамильтониану (6.5.8), у которого шесть первых слагаемых совпадают с приближенным гамильтонианом (4.1.26) для $s = 1/2$, $\alpha = \mathrm{III}$, получаемым при диагонализации уравнения Дирака.

В заключение отметим, что явный вид приближенных преобразований, связывающий гамильтонианы (6.5.1) и (6.5.8), задается формулами (4.1.20) (в которых индекс α следует опустить), где

$$V_1 = \exp\left(\sigma_2 k \frac{\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right),$$

$$V_2 = \exp(B) \equiv \exp\left[\sigma_2 \frac{k}{2m^2}\left(ke\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} - 2k(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{a}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\right)\right],$$

$$V_3 = \exp\left[\sigma_2 \frac{k^2}{m^3}\left(\frac{2}{3}k(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 - \frac{ke}{2}[\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S}\cdot\mathbf{H}]_+\right) - \right.$$
$$\left. - \sigma_1\left([B, \pi_0]\frac{1}{2m} - i\frac{k}{4m^3}[\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2]\right)\right].$$

6.5.3. Введение минимального взаимодействия в уравнения первого порядка. Галилеевски инвариантные уравнения первого порядка, рассматриваемые в § 6.3, также допускают обобщение на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле и вполне удовлетворительно моделируют соответствующие физические явления. В результате минимальной замены (4.1.1) эти уравнения принимают вид

$$L(\pi)\Psi = 0, \quad L(\pi) = \beta_\mu \pi^\mu + \beta_4 m. \tag{6.5.10}$$

Здесь β_μ — квадратные эрмитовы матрицы, удовлетворяющие соотношениям (6.3.10) — (6.3.12) совместно с генераторами однородной группы Галилея S_a и η_a.

Обсудим общие свойства уравнений (6.5.10), которые не зависят от конкретной реализации матриц β_μ и β_4. Легко видеть, что эти уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований (6.5.3). Почти очевидна также инвариантность уравнений (6.5.10) относительно группы Галилея. Действительно, оператор $L(\pi)$ удовлетворяет достаточному условию галилеевской инвариантности (6.5.6) (где $\widetilde{D}(\theta, \mathbf{v}) = D^\dagger(\theta, \mathbf{v})$, так что $\widetilde{\eta}_a = \eta_a^\dagger$, $\widetilde{S}_a = S_a$), в чем нетрудно убедиться, используя соотношения (6.3.10) — (6.3.12).

Уравнения (6.5.10) могут быть получены с использованием вариационного принципа, если исходить из следующего лагранжиана:

$$\widehat{L}(x) = L(x) + ie\Psi^\dagger \beta_\mu A^\mu \Psi,$$

где $L(x)$ — «свободный» лагранжиан (6.3.8). Иными словами, как и в п. 6.5.1, мы имеем дело с уравнениями Лагранжа — Эйлера.

Для дальнейшего анализа уравнений (6.5.10) и физической интерпретации их решений удобно перейти к новому представлению, подвергнув функцию $\Psi(x)$ и оператор $L(\pi)$ преобразованиям

$$\Psi \to \Psi' = V^{-1}\Psi, \quad L(\pi) \to L'(\pi) = V^\dagger L(\pi) V, \tag{6.5.11}$$

где $V^{-1} = \exp\left(\frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}\right)$ — оператор, получаемый из (6.3.20) заменой $\mathbf{p} \to \boldsymbol{\pi}$. В результате приходим к эквивалентной системе

$$L'(\pi)\Psi'(x) = 0. \tag{6.5.12}$$

Для получения явного вида оператора $L'(\pi)$ воспользуемся формулой Кемпбелла — Хаусдорфа (5.2.8) и соотношениями (6.3.10) — (6.3.12). Ограничиваясь случаем, когда индекс нильпотентности матриц η_a равен трем, получаем

$$V^\dagger \beta_0 \pi_0 V = \beta_0\left(\pi_0 + \frac{e}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{E}\right),$$

$$V^\dagger \beta_a \pi_a V = \beta_a\pi_a + \beta_0\left(\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{3e}{4m^2}\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi})\right) + \frac{e}{m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{H},$$

$$V^\dagger \beta_4 m V = \beta_4 m + \beta_a\pi_a + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{H} - \frac{e}{4m^2}\beta_0\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2m}\beta_0\boldsymbol{\pi}^2,$$

откуда следует непосредственно, что

$$L'(\pi) = \beta_0\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right) + \beta_4 m + \frac{e}{m}\left(\beta_0\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{H}\right) + \frac{e}{2m^2}\beta_0\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi}). \tag{6.5.13}$$

Если же индекс нильпотентности матриц η_a превышает число 3, то оператор $L'(\pi)$ будет включать дополнительные слагаемые, пропорциональные $1/m^k$, $k=3, 4, \ldots$, которыми можно пренебречь, исходя из разумных предположений относительно интенсивности внешнего поля.

Исходя из уравнений движения в форме (6.5.12), (6.5.13), можно установить общие требования, которым должны удовлетворять матрицы η_a, чтобы эти уравнения (по крайней мере качественно) правильно моделировали физическую ситуацию. Несложный анализ показывает, что если индекс нильпотентности этих матриц не превышает двух, то оператор $L'(\pi)$ не включает слагаемых, зависящих от напряженности электрического поля. Действительно, в этом случае выполняется $\eta_a\eta_b=0$, откуда с использованием соотношений (6.3.10)—(6.3.12) заключаем, что $\beta_0\eta_a=0$, и соответствующий оператор (6.5.13) принимает вид

$$L'(\pi)=\beta_0\left(\pi_0-\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right)+\beta_4 m-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{H}. \qquad (6.5.14)$$

Уравнения (6.5.12), (6.5.14) включают члены, соответствующие взаимодействию точечной заряженной частицы с электромагнитным полем и спина частицы с магнитным полем. Однако, как легко заметить, это уравнение в принципе не может учитывать взаимодействия спина частицы с электрическим полем. В самом деле, если $\mathbf{H}=0$, а вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}\neq 0$, то оператор (6.5.14) коммутирует с $\mathbf{S}$. Этот результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 6.3. *Необходимым условием того, чтобы галилеевски инвариантное уравнение* (6.5.10) *описывало взаимодействие спина частицы с электрическим полем, является выполнение соотношения*

$$C_1^2\equiv(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\eta})^2\neq 0, \qquad (6.5.15)$$

где $\mathbf{S}=(S_1, S_2, S_3)$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ — *матрицы, образующие представление алгебры Ли однородной группы Галилея на множестве решений этого уравнения*, C_1 — *оператор Казимира* (6.2.30).

Представления алгебры AE(3), реализующиеся на решениях уравнений ЛХГ [260, 239], не удовлетворяют условию (6.5.15), поэтому такие уравнения не описывают спин-орбитального взаимодействия частицы с внешним полем. В следующем пункте мы подробно рассмотрим галилеевски инвариантные уравнения класса D_2 (см. п. 6.2.6) и выделим те из них, которые учитывают указанное взаимодействие.

6.5.4. Уравнения для $(2s+1)$-компонентной волновой функции. Проанализируем уравнения (6.5.10) с минимальным числом компонент. Явный вид соответствующих матриц β_μ, β_4 приведен в п. 6.3.5.

Как будет показано ниже, эти уравнения могут быть сведены к уравнениям типа Шредингера (с зависящим от спина потенциалом взаимодействия) для $(2s+1)$-компонентной волновой функции Φ_s и дополнительным условиям, выражающим «лишние» компоненты функции Ψ через Φ_s.

Рассмотрим сначала уравнения ЛХГ, которым соответствуют матрицы β_μ, β_a, η_a вида (6.2.26), (6.3.14), (6.3.15) и R_1 из таблицы 6.1. Анализ этих уравнений удобно производить в эквивалентном представлении (6.5.12), (6.5.13). Обозначив

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Phi'_s \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{6.5.16}$$

где Φ_s, Φ'_s — $(2s+1)$-компонентные, а χ — $(2s-1)$-компонентная вектор-функция, убеждаемся, эти уравнения принимают вид

$$\begin{gathered} i\frac{\partial}{\partial x_0}\Phi_s = \left[\varepsilon_0 + \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 + \frac{eq}{2m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right]\Phi_s, \\ \Phi'_s = -\varkappa\Phi_s, \qquad \chi = 0, \qquad q = 1/s. \end{gathered} \tag{6.5.17}$$

Таким образом, уравнения ЛХГ приводят к уравнению типа Паули для $(2s+1)$-компонентной волновой функции. Подчеркнем, что паулиевский член $\frac{eq}{2m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}$, как и в уравнении Дирака, возникает в рассматриваемом нами подходе в рамках принципа минимального взаимодействия.

В случае $s=1/2$ уравнение (6.5.17), с точностью до несущественного члена, пропорционального m, совпадает с уравнением Паули для электрона, получаемым из уравнения Дирака в приближении $1/m$ (см. (4.1.26)). Однако уравнения ЛХГ не учитывают такого важного физического эффекта (вклад от которого имеет порядок $1/m^2$), как спин-орбитальное взаимодействие.

Рассмотрим теперь уравнения (6.5.12), (6.5.13) для случая, когда матрицы β_μ, β_4, η_a имеют размерность $(6s-1)\times(6s-1)$ и задаются формулами (6.2.26), (6.5.14), (6.5.15) и столбцом R_2 из таблицы 6.1.

Представляя Ψ' в виде

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},$$

где Φ — $(2s+1)$-компонентная, а χ_1, χ_2 — $(2s-1)$-компонентные функции, приходим к следующей системе:

$$\begin{gathered} i\frac{\partial}{\partial x_0}\chi_1 = \left[\varepsilon_0 + \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 + \frac{eq'}{2m}\mathbf{S}'\cdot\mathbf{H}\right]\chi_1, \qquad g' = \frac{1}{s'+1}, \\ \Phi = 0, \qquad \chi_2 = -\varkappa\chi_1, \qquad s' = s-1. \end{gathered} \tag{6.5.18}$$

Здесь $\mathbf{S}'$ — спиновые матрицы, реализующие представление $D(s-1)$ алгебры АО(3), χ_1 — $(2s'+1)$-компонентная волновая функция.

Мы видим, что уравнения (6.5.10) с матрицами β_μ, β_4 размерности $(6s-1)\times(6s-1)$ также сводятся к уравнению Паули для частицы с произвольным спином $s'=s-1$, но предсказывают другое (по сравнению с уравнениями ЛХГ) значение дипольного момента частицы.

Обратимся теперь к случаю, когда матрицы β_4, β_μ, входящие в уравнение (6.5.10), имеют вид (6.5.14), (6.5.15), R_3 из таблицы 6.1. Такие уравнения более интересны с точки зрения возможных физических приложений, поскольку соответствующие матрицы η_a и S_a удовлетворяют критерию (6.5.15).

Для функции $\Psi'(x)$ используем обозначение

$$\Psi' = \text{столбец}\left(\Phi_1^s, \Phi_2^s, \Phi_3^s, \chi_1^{s-1}, \chi_2^{s-1}\right), \tag{6.5.19}$$

Φ_a^s и χ_α^{s-1} — столбцы с $2s+1$ и $2s-1$ компонентами. Подставив Ψ' (6.5.19) и явный вид соответствующих матриц в (6.5.12), (6.5.13), после несложных вычислений приходим к следующим уравнениям:

$$i\,\frac{\partial}{\partial x_0}\Phi_1^s = H\Phi_1^s \equiv \left(\varepsilon_0 + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + \frac{e}{2ms}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} - \frac{e}{s(s+1)\varkappa_2 m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}\right)\Phi_1^s, \tag{6.5.20}$$

$$\varepsilon_0 = -\left(\varkappa_1 - \frac{1}{2}\varkappa_2^2\right)m(s+1)^2, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi}),$$

$$\Phi_2^s = -\varkappa_2\Phi_1^s, \quad \Phi_3^s = \frac{1}{2}\left(\varkappa_2^2 + \frac{e\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}}{s(s+1)\varkappa_2 m}\right)\Phi_1^s, \tag{6.5.21}$$

$$\chi_1^{s-1} \equiv 0, \qquad \chi_2^{s-1} = \frac{i\sqrt{k_s}\,e\mathbf{K}\cdot\mathbf{H}}{(s-1)(2s-1)m}\,\Phi_1^s, \qquad s \neq 1, \qquad \chi_2^0 \equiv 0.$$

Итак, уравнения (6.5.10) с матрицами (6.2.26), (6.5.14), (6.5.15), R_3 из таблицы 6.1 в результате преобразования (6.5.11) сводятся к уравнению (6.5.20) для $(2s+1)$-компонентной волновой функции Φ_1^s (остальные компоненты Ψ' выражаются через Φ_1^s по формулам (6.5.21)). Для выяснения физического смысла решений уравнения (6.5.20) приведем его к такому виду, в котором гамильтониан не включает члена $\frac{e\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}}{s(s+1)\varkappa_2 m}$, соответствующего нефизическому дипольному электрическому взаимодействию. Используя для этой цели преобразование

$$\Phi_1^s \to \Phi_1'^s = U\Phi_1^s, \qquad U = \exp\left(\frac{i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{s(s+1)\varkappa_2 m}\right)\Phi_1^s,$$

$$H \to H' = UHU^{-1} - i\left(\frac{\partial}{\partial x_0}U\right)U^{-1}, \tag{6.5.22}$$

принимая во внимание тождества (4.1.24) и пренебрегая членами порядка $1/m^3$ и e^2, получаем гамильтониан H' в форме (6.5.8), где $\sigma_1 \to 1$, S_a — $(2s+1)\times(2s+1)$-мерные матрицы из представления $D(s)$ алгебры AO(3),

$$B = \frac{1}{2s}, \qquad D = \frac{1}{\varkappa_2^2 s(s+1)}, \qquad \varepsilon_0 = m_0 = -\left(\varkappa_1 - \frac{1}{2}\varkappa_2^2\right)(s+1)^2 m. \tag{6.5.23}$$

Совершенно аналогично можно показать, что уравнение (6.5.10) с матрицами (6.3.14), (6.3.15), R_4 из таблицы 6.1 сводится к уравнению для $(2s'+1)$-компонентной волновой функции χ_1

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\chi_1 = H\chi_1 \equiv \left(\widetilde{m}_0 + \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 + \frac{e}{2m(s'+1)}\mathbf{S}'\cdot\mathbf{H} - \right.$$

$$\left. - \frac{e}{s'(s'+1)\varkappa_2 m}\mathbf{S}'\cdot\mathbf{F}\right)\chi_1,$$

$$\widetilde{m}_0 = -\left(\varkappa_1 - \frac{1}{2}\varkappa_2^2\right)s'^2 m, \qquad \mathbf{S}' \subset D(s-1),$$

которое в результате преобразования $\chi_1 \to \chi_1' = \exp\left[i\,\frac{\mathbf{S}'\cdot\boldsymbol{\pi}}{s'(s'+1)\varkappa_2 m}\right]\chi_1$ сводится к форме

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\chi_1' = H'\chi_1'.$$

Явный вид гамильтониана H' может быть получен из (6.5.8) заменой $\mathbf{S}\to\mathbf{S}'$, $B \to \frac{1}{2(s'+1)}$, $D \to \frac{1}{\varkappa_2 s'(s'+1)}$, $\varepsilon_0 \to \widetilde{m}_0$.

Мы видим, что галилеевски инвариантные уравнения первого порядка приводят в приближении $1/m^2$ к такому же гамильтониану частицы произвольного спина во внешнем электромагнитном поле, как и уравнения в форме Шредингера. Следовательно, рассматриваемые уравнения также описывают спин-орбитальное взаимодействие частицы с полем, причем константа спин-орбитального взаимодействия зависит от произвольного параметра $\varkappa_2$ (величина которого может быть выбрана, исходя из экспериментальных данных).

Следует отметить, что галилеевски-инвариантные уравнения первого порядка предсказывают правильное значение константы взаимодействия Паули $g = 1/s$, если s — максимальное значение спина, возникающее при редукции $G(1,\ 3)/O(3)$ соответствующего представления группы Галилея. Этот результат справедлив для произвольного галилеевски-инвариантного уравнения, допускающего лагранжеву формулировку и описывающего частицу с фиксированным спином [38*].

6.5.5. Аномальное взаимодействие. Хорошо известно, что принцип минимального взаимодействия имеет довольно ограниченную сферу применения. Более общий подход, который широко используется в релятивистской теории, состоит в том, чтобы учесть так называемое аномальное взаимодействие частицы с полем. Такое взаимодействие описывается добавлением в уравнения движения членов, зависящих от напряженности электромагнитного поля.

Классическим примером уравнения, учитывающего аномальное взаимодействие, является предложенное Паули обобщенное уравнение Дирака для электрона:

$$\left[\gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{iqe}{4m}[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu]\,F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0.$$

Слагаемое, пропорциональное тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$, позволяет учесть отклонение дипольного момента электрона (коэффициента при $\frac{e}{2m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}$ в приближенном гамильтониане (4.1.29)) от значения $g=2$.

Здесь мы обсудим возможность введения аномального взаимодействия в уравнения движения, инвариантные относительно группы Галилея. А именно, рассмотрим обобщенные уравнения (6.5.1), (6.5.10) следующего вида:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi=\widehat{H}(\boldsymbol{\pi},A_0),\qquad \widehat{H}(\boldsymbol{\pi},A_0)=H(\boldsymbol{\pi},A_0)+\frac{e}{m}\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\tag{6.5.24}$$

$$L\Psi\equiv\left(\beta_\mu\pi^\mu+\beta_4 m+\frac{e}{m}\widetilde{\Sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\Psi=0,\tag{6.5.25}$$

где $F^{\mu\nu}=i([p^\nu,A^\mu]-[p^\mu,A^\nu])$ — тензор электромагнитного поля, $H(\boldsymbol{\pi},A_0)$ — гамильтониан (6.5.2), β_μ, β_4 — матрицы, удовлетворяющие соотношениям (6.3.10)—(6.3.12), $\Sigma_{\mu\nu}$ и $\widetilde{\Sigma}_{\mu\nu}$ — некоторые (пока неизвестные) матрицы, которые должны быть такими, чтобы уравнения (6.5.24) и (6.5.25) были инвариантны относительно группы Галилея.

Наша задача состоит в том, чтобы найти явный вид матриц $\Sigma_{\mu\nu}$ и $\widetilde{\Sigma}_{\mu\nu}$, удовлетворяющих условию галилеевской инвариантности, и проанализировать физический смысл дополнительных слагаемых (пропорциональных $F^{\mu\nu}$), вводимых в уравнения движения.

Для уравнений (6.5.24) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6.4. *Оператор* $L(\pi)=i\frac{\partial}{\partial x_0}-\widehat{H}(\boldsymbol{\pi},A_0)$ *удовлетворяет условию галилеевской инвариантности* (6.5.6) *тогда и только тогда, когда матрицы* Σ_{0a} *и* Σ_{ab} *имеют вид*

$$\Sigma_{0a}=\frac{k_1}{2}\eta_a,\qquad \Sigma_{ab}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}(k_1S_a+k_2\eta_a),\tag{6.5.26}$$

где k_1 *и* k_2 *— произвольные комплексные числа, а* S_a *и* η_a *— матрицы* (6.4.3).

Приведем схему доказательства (подробности см. в [66]). Условие инвариантности (6.5.6) сводится к следующему уравнению:

$$D(\boldsymbol{\theta},\mathbf{v})\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}D^{-1}(\boldsymbol{\theta},\mathbf{v})=\Sigma_{\mu\nu}F'^{\mu\nu},\tag{6.5.27}$$

где $D(\boldsymbol{\theta},\mathbf{v})$ — матрицы, задаваемые формулами (6.5.6), (6.4.29), и

$$F'^{0a}=-R_{ab}F^{0b}+F^{ab}V_b,\qquad F'^{ab}=R_{aa'}R_{bb'}F^{a'b'},\tag{6.5.28}$$

R_{ab} — оператор поворота системы координат, соответствующий параметру θ (см. (6.1.26)). Из (6.5.27) получаем следующие уравнения для Σ_{0a} и $\Sigma_a=\varepsilon_{abc}\Sigma_{bc}$:

$$\begin{gathered}[\Sigma_{0a},S_b]=i\varepsilon_{abc}\Sigma_{0c},\quad [\Sigma_a,S_b]=i\varepsilon_{abc}\Sigma_c,\\ [\Sigma_{0a},\eta_b]=0,\quad [\Sigma_a,\eta_b]=i\varepsilon_{abc}\Sigma_{0c},\\ \eta_a\Sigma_{0b}\eta_c+\eta_c\Sigma_{0b}\eta_a=\eta_a\Sigma_b\eta_c+\eta_c\Sigma_b\eta_a=0.\end{gathered}\tag{6.5.29}$$

Общее решение уравнений (6.5.29) (с точностью до преобразований эквивалентности на изменяющих $H(\pi, A_0)$) задается формулами (6.5.26).

Таким образом, мы определили общий вид члена, соответствующего аномальному взаимодействию типа Паули, который может быть добавлен к гамильтониану $H(\pi, A_0)$ без нарушения галилеевской инвариантности уравнения движения (6.5.1). Если потребовать дополнительно, чтобы уравнение (6.5.24) было инвариантно относительно преобразования «полного отражения» (6.4.5), а для гамильтониана $\widehat{H}(\pi, A_0)$ существовала эрмитизирующая матрица (6.4.34), то параметры k_1 и k_2 в (6.5.26) должны быть вещественны.

Для анализа физических следствий введения аномального взаимодействия подвергнем гамильтониан (6.5.24) преобразованию, приводящему его к квазидиагональной форме

$$\widehat{H}(\pi, A_0) \to \widehat{H}'(\pi, A_0) = V\widehat{H}(\pi, A_0)\,V^{-1} - i\,\frac{\partial V}{\partial x_0}\,V^{-1}, \quad (6.5.30)$$

где

$$V = \exp\left(2iD\,\frac{\mathbf{S}\cdot\pi}{m}\right)\exp\left(\frac{1}{2m}\,\sigma_1\,\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)\exp(iS)\exp\left(\frac{i}{m}\,\eta\cdot\pi\right),$$

$$D = 2\sigma_1 k\,(k_2 - 1),$$

$$S = \frac{1}{2m^2}\,\sigma_2\Big\{(k_2 - 4ak^2)\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} -$$

$$- k\,(k_2 - 1)\left[2\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{m}\,\mathbf{S}\cdot(\pi\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\times\pi)\right] + \frac{kk_2}{m}\,[S_a, S_b]_+\,\frac{\partial H_a}{\partial x_b}.$$

В результате получаем, пренебрегая членами порядка $1/m^3$,

$$\widehat{H}'(\pi, A_0) = H'(\pi, A_0) + \frac{2kk_2}{3m^2}\,Q_{ab}\,\frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \quad (6.5.31)$$

где $H'(\pi, A_0)$ задается формулой (6.5.8) при следующих значениях параметров B и D:

$$B = k_1 + \sigma_1(k_2 - 4ak^2), \quad D = \sigma_1 2k\,(k_2 - 1). \quad (6.5.32)$$

Таким образом, гамильтониан частицы произвольного спина, соответствующий аномальному взаимодействию, в приближении $1/m^2$ имеет такую же структуру, как и гамильтониан (6.5.8), получаемый в рамках принципа минимального взаимодействия. При этом по существу изменяется только коэффициент при слагаемом, представляющем магнитное квадрупольное взаимодействие, так как коэффициенты (6.5.9), (6.5.31) на множестве функций $\Psi_\pm = \frac{1}{2}(1\mp\sigma_1)\Psi$ в равной мере могут рассматриваться как произвольные параметры. Однако использовние обобщенного гамильтониана (6.5.24) в принципе позволяет добиться более адекватного описания взаимодействия частицы с внешним полем, так как при этом оказывается возможным, скажем, обратить в нуль константу магнитного квадрупольного взаимодействия, оставив параметры D и B произвольными.

Рассмотрим теперь уравнения первого порядка (6.5.25). Ограничимся для простоты случаем, когда матрицы β_μ, β_4 задаются формулами (6.3.14), (6.3.15), R_1 из таблицы 6.1 (что соответствует уравнениям ЛХГ, обобщенным на случай аномального взаимодействия). Потребовав, чтобы оператор L удовлетворял условию галилеевской инвариантности (6.5.6), где $\widetilde{D}(\theta, \mathbf{v}) = [D^{-1}(\theta, \mathbf{v})]^\dagger$, и приняв во внимание соотношения (6.5.28), после несложных вычислений получаем [286], что общий вид матриц $\widetilde{\Sigma}_{0a}$ и $\widetilde{\Sigma}_{ab}$ задается формулами

$$\widetilde{\Sigma}_{0a} = \frac{k_3}{2} \varepsilon_{abc}\beta_0\beta_b\beta_c,$$

$$\Sigma_{ab} = \frac{i}{2} k_3 (1 - 2\beta_0) \varepsilon_{abc}\beta_c + \frac{k_4}{2} \beta_0\beta_b\beta_c, \tag{6.5.33}$$

где β_μ — матрицы, входящие в уравнение (6.5.25), k_3 и k_4 — произвольные постоянные.

Подставляя (6.5.33) в (6.5.25) и используя явный вид соответствующих β-матриц, получаем уравнение (6.5.17) для $2s+1$-компонентной функции $\Phi_s = \beta_0\psi$, где гамильтониан H_s имеет вид

$$H_s = \varepsilon_0 + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \frac{e(1+k_4)}{2ms}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} - \frac{ek_3}{2ms}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} - \\ - \frac{ek_3}{2m^2 s}[\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S}\cdot\mathbf{H}] + \frac{e^2k_3^2}{4m^2} H^2. \tag{6.5.34}$$

С помощью преобразования (6.5.30), где $V = \exp\left(\frac{ik_3}{2ms}\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}\right)$, гамильтониан H_s может быть приведен к форме, совпадающей с точностью до членов порядка e и $\frac{1}{m^2}$ с (6.5.8), где $\sigma_1 \to 1$, $D = \frac{k_3}{2s}$, $B = \frac{1}{2s}(1 + k_4)$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} m\varkappa^2(s+1)^2$.

Таким образом, в рассматриваемом приближении введение аномального взаимодействия в уравнения ЛХГ приводит к таким же результатам, как введение минимального взаимодействия в уравнения типа Шредингера.

В заключение отметим, что уравнения (6.5.24) и (6.5.25) допускают лагранжеву формулировку. Соответствующие лагранжианы в отсутствие взаимодействия имеют вид

$$L(x) = L_0(x) + L_1(x), \tag{6.5.35}$$

где $L_0(x)$ задается формулой (6.4.35) для уравнений (6.5.24) и формулой (6.3.8) для уравнений (6.5.25), а $L_1(x)$ определяется соответственно следующими соотношениями:

$$L_1 = \frac{1}{m}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_\mu}\Sigma_{\mu\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x_\nu} \quad \text{и} \quad L_1 = \frac{1}{m}\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x_\mu}\widetilde{\Sigma}_{\mu\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x_\nu}. \tag{6.5.36}$$

Лагранжианы (6.5.36) не дают вклада в уравнения движения. Однако, заменив в (6.5.35) $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ на $\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu$ получим из (6.4.36) уравнения (6.5.24), (6.5.25) для частицы, аномально взаимодействующей с внешним электромагнитным полем.

§ 6.6. Точные решения галилеевских инвариантных волновых уравнений

6.6.1. Вводные замечания. В этом параграфе галилеевски инвариантные волновые уравнения применяются для решения задач о движении заряженных частиц произвольного спина во внешних полях заданной конфигурации.

В соответствии с результатами, приведенными в предыдущем параграфе, заряженная частица с произвольным спином может быть описана различными уравнениями, инвариантными относительно группы Галилея, которые в физически разумном приближении $1/m^2$ являются эквивалентными. Поэтому для каждой конкретной задачи мы будем выбирать такой способ описания, который является наиболее удобным, а соответствующие уравнения движения могут быть решены точно.

Будут рассмотрены все типы внешних полей, для которых в гл. 4 получено решение релятивистской задачи. Это позволит сравнить результаты, получаемые при релятивистском и нерелятивистском описании движения объекта со спином во внешнем электромагнитном поле и оценить адекватность галилеевски инвариантной модели спиновых заряженных частиц.

6.6.2. Нерелятивистская частица в постоянном и однородном магнитном поле. Для решения задачи о движении частицы произвольного спина в постоянном магнитном поле используем уравнения в форме Шредингера (6.5.24). Можно считать, что вектор напряженности такого поля параллелен третьей компоненте импульса, т. е. тензор электромагнитного поля задается формулой (4.2.28), а соответствующие компоненты четырехвектора π_μ имеют вид (4.2.27). В результате, выбирая для удобства $k_1 = 1$, приходим к гамильтониану

$$H(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}}{m} + 2iak\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \\ + \frac{1}{m}(\sigma_1 + i\sigma_2)\left[2ak^2(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - ek_0\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right], \quad (6.6.1)$$

где $k_0 = ak^2 - k_2$ можно считать независимым параметром.

Ограничимся случаем, когда напряженность внешнего поля достаточно мала. А именно, потребуем, чтобы выполнялось

$$\mathbf{H} < \frac{am^2}{2ek_0 s}. \quad (6.6.2)$$

Такое ограничение является вполне оправданным из физических соображений, так как при очень больших $\mathbf{H}$ нерелятивистские уравнения движения заведомо неприменимы.

Преобразуем $H(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ к такой форме, чтобы он включал только коммутирующие операторы. Это позволит определить собственные значения гамильтониана (6.6.1), не решая уравнения движения. Соответствующее преобразование произведем в два этапа.

Используя оператор

$$V_1 = \exp\left(\frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}\right) \equiv 1 + i\,\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}, \qquad V_1^{-1} = 1 - \frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi} \qquad (6.6.3)$$

(где $\boldsymbol{\eta}$ заданы формулой (6.4.3)) и принимая во внимание, что

$$[\boldsymbol{\pi}^2 + 2e\mathbf{S}\cdot\mathbf{H},\ \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}] = 0,$$

после несложных вычислений получаем

$$H' = V_1 H V_1^{-1} = \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e}{m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} + \frac{ek_0}{mk}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{H}. \qquad (6.6.4)$$

Последующее преобразование осуществим с использованием оператора

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sigma_3\frac{h}{\sqrt{h^2}}\right), \qquad V_2^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{h^2}}\sigma_3\right), \qquad (6.6.5)$$

$$h = \sigma_1 am + \frac{ek_0}{k_0 m}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{H},$$

$$(\sqrt{h^2})^{-1} = \sum_{\nu=-s}^{s}(a^2m^2 + 2eak_0\nu H)^{-1}\Lambda_\nu, \qquad \Lambda_\nu = \prod_{\nu'\neq\nu}\frac{S_3 - \mu'}{\nu - \nu'}$$

и в результате получим

$$H'' = V_2 H' V_2^{-1} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e}{m}S_3 H + \sigma_3(a^2m^2 + 2eak_0S_3H)^{1/2}. \qquad (6.6.6)$$

Все операторы, входящие в качестве слагаемых в гамильтониан H'', коммутируют друг с другом и, следовательно, имеют общую систему собственных функций. Собственные значения этих операторов равны (см. п. 4.2.3)

$$\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\Phi = \frac{1}{2m}\left[(2n+1)eH + p_3^2\right]\Phi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (6.6.7)$$

$$S_3\Phi = \nu\Phi, \quad \nu = -s, -s+1, \ldots, s, \quad \sigma_3\Phi = \varepsilon\Phi, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Используя соотношения (6.6.7), нетрудно найти собственные значения $E_{n\nu\varepsilon p_3}$ гамильтониана (6.6.6):

$$E_{n\nu\varepsilon p_3} = (2n + 1 + 2\nu)\frac{eH}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \varepsilon(a^2m^2 + 2eak_0\nu H)^{1/2}. \qquad (6.6.8)$$

Формула (6.6.8) определяет спектр энергий частицы произвольного спина, движущейся в постоянном и однородном магнитном поле, направленном вдоль третьей оси координат. Мы видим, что для полей, удовлетворяющих условиям (6.6.2), этот спектр лежит на вещественной оси, и содержит как непрерывную составляющую

$p_3^2/(2m)$, так и дискретные слагаемые, определяемые числами n, ν и ε.

Представляет несомненный интерес сравнить полученную формулу с выражением (4.2.37) для спектра энергии релятивистской частицы в магнитном поле. Положив в (6.6.8) $k_0=0$, $s=1/2$, получаем формулу, которая с точностью до несуществующего постоянного слагаемого совпадает с соотношением (4.2.36), определяющим в приближении $1/m^2$ значения энергии релятивистского электрона. Если же $k_0\neq 0$, то представляя последнее слагаемое в (6.6.8) в виде ряда по степеням $1/m$ и ограничиваясь членами порядка $1/m^2$, получаем

$$E_{\varepsilon n \nu p_3}=\varepsilon am+\frac{p_3^2}{2m}+\omega\left(n+\frac{s-\nu}{2s}+\nu f(k_0)\right), \tag{6.6.9}$$

где $\omega=\dfrac{eH}{m}$ — циклотронная частота, $f(k_0)=\dfrac{1}{2s}(2s+1+\varepsilon k_0)$ — параметр, учитывающий отклонение дипольного момента частицы (коэффициента при члене $e\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}/(2m)$ в приближенном гамильтониане (6.5.31), (6.6.6)) от значения $g=1/s$.

Сравнивая (6.6.9) и (4.2.36) заключаем, что в случае $f(k_0)=0$ спектр энергии частицы произвольного спина в постоянном и однородном магнитном поле, предсказываемый релятивистскими волновыми уравнениями, совпадает в приближении $1/m^2$ с соответствующим спектром, получаемым с использованием уравнений движения инвариантных относительно группы Галилея. Если же $f(k_0)\neq 0$, то соотношение (6.6.9) можно интерпретировать как спектр энергии частицы с «аномальным» (отличающимся от $1/s$) магнитным дипольным моментом.

Приведем явный вид собственных функций гамильтониана (6.6.6). По аналогии с (4.2.30)—(4.2.40) заключаем, что можно положить

$$\Phi_{+1n\nu p_3}=\exp\left[i(p_1x_1+p_3x_3)\right]\begin{pmatrix}C_\nu^+U_n(y)\,\Omega_\nu^s\\ 0\end{pmatrix}, \tag{6.6.10}$$

$$\Phi_{-1n\nu p_3}=\exp\left[i(p_1x_1+p_3x_3)\right]\begin{pmatrix}0\\ C_\nu^-U_n(y)\Omega_\nu^s\end{pmatrix}. \tag{6.6.11}$$

Здесь $U_n(y)$ — функции Эрмита (4.2.40), $y=\sqrt{eH}\left(x_2-\dfrac{p_1}{eH}\right)$, Ω_ν^s — спиноры (4.2.25), 0 — $(2s+1)$-компонентные нулевые столбцы, $C_\nu^\pm$ — константы нормировки. Набор собственных функций исходного гамильтониана (6.6.1) можно получить с помощью преобразования $\Phi_{\varepsilon n\nu p_3}\to\Psi_{\varepsilon n\nu p_3}=V_2^{-1}V_1^{-1}\Phi_{\varepsilon n\nu p_3}$, где V_1^{-1} и V_2^{-1} операторы (6.6.3), (6.6.5).

6.6.3. Нерелятивистская частица произвольного спина в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях. Рассмотрим более сложную задачу, когда постоянное однородное магнитное поле дополняется таким же электрическим полем, направленным перпендикулярно магнитному. Снова будем исходить из уравнений движения частицы произвольного спина в форме (6.5.24), где $k_1 = 1$. Соответствующий вектор-потенциал A_μ выберем в виде

$$A_0 = -x_2 E, \quad A_1 = -x_2 H, \quad A_2 = A_3 = 0, \tag{6.6.12}$$

тогда

$$\mathbf{E} = (0,\ E,\ 0), \quad \mathbf{H} = (0,\ 0,\ H). \tag{6.6.13}$$

С помощью преобразований (6.6.4), (6.6.6) гамильтониан (6.5.24) при выбранных потенциалах сводится к следующей форме:

$$H'' = \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 + \frac{e}{m}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} + \sigma_3 (a^2 m^2 + 2aek_0 \mathbf{S}\cdot\mathbf{H})^{1/2}, \tag{6.6.14}$$

или

$$H'' = \frac{\pi^2}{2m} - eEx_2 + \sum_{\nu=-s}^{s} \left[\frac{e}{m}\nu H + \sigma_3 (a^2 m^2 + 2a\nu e k_0 H)^{1/2}\right] \Lambda_\nu,$$

где Λ_ν — операторы проектирования на подпространство собственных векторов матрицы S_3, задаваемые последней из формул (6.6.5).

Гамильтониан H'' коммутирует с матрицами σ_3, S_3 и операторами P_1, P_2. Пусть χ_ν — собственный вектор этих матриц, так что

$$S_3 \chi_{s\nu} = \nu \chi_{s\nu}, \quad \sigma_3 \chi_{\varepsilon\nu} = \varepsilon \chi_{\varepsilon\nu}, \tag{6.6.15}$$
$$\nu = -s,\ -s+1,\ \ldots,\ s, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Тогда собственные функции гамильтониана H'' удобно представить в виде

$$\Psi_{\varepsilon\nu} = \exp\left[i (p_1 x_1 + p_3 x_3)\right] \chi_{\varepsilon\nu}, \tag{6.6.16}$$

где p_1 и p_3 — постоянные величины (собственные числа операторов P_1 и P_3).

Подставив (6.6.14), (6.6.16) в уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$H'' \Psi_{\varepsilon\nu} = \tilde{\varepsilon} \Psi_{\varepsilon\nu},$$

приходим к следующей последовательности незацепляющихся уравнений для $\chi_{\varepsilon\nu} = \chi_{\varepsilon\nu}(x_2)$:

$$\Big[-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (p_1 + eHx_2)^2 + p_3^2 + 2e\nu H + 2m\varepsilon\,(a^2 m^2 + 2eak_0 \nu H)^{1/2} - $$
$$ - 2m (\tilde{\varepsilon} - eEx_2)\Big] \chi_{\varepsilon\nu} = 0. \tag{6.6.17}$$

С помощью замены переменной

$$y = \sqrt{|e|H}\left(x_2 + \frac{mE - p_1 H}{eH^2}\right) \tag{6.6.18}$$

система (6.6.17) сводится к уравнениям для гармонического осциллятора (ср. 4.2.35):

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2}+y^2\right)\chi_{\varepsilon\nu}=K_{\varepsilon\nu}\chi_{\varepsilon\nu}, \tag{6.6.19}$$

причем значения $K_{\varepsilon\nu}$ следующим образом связаны с собственными значениями $\tilde{\varepsilon}$ гамильтониана H'':

$$eHK_{\varepsilon\nu}=(Hp_1-mE)^2H^{-2}+2m\tilde{\varepsilon}-p_3^2-2e\nu H-\\ -2m\varepsilon\left(a^2m^2+2e\nu ak_0H\right)^{1/2}. \tag{6.6.20}$$

Решения уравнения (6.6.19) задаются формулой

$$\chi_{\varepsilon\nu}=C_{\varepsilon\nu}U_n(y), \tag{6.6.21}$$

где $U_n(y)$ — функции Эрмита (4.2.40), а соответствующие собственные значения $K_{\varepsilon\nu}$ равны $2n+1$, $n=0,\ 1,\ \ldots$ Отсюда получаем возможные значения энергии в виде

$$\tilde{\varepsilon}=(2m)^{-1}\left[(2n+1+2\nu)eH+p_3^2\right]+\frac{p_1E}{2H}-\frac{m}{2}\left(\frac{E}{H}\right)^2+\\ +\varepsilon\left(a^2m^2+2e\nu ak_0H\right)^{1/2}. \tag{6.6.22}$$

В случае $E=0$ формула (6.6.22) сводится, конечно, к (6.6.8), а при $k_0=0$, $s=1/2$ получаем результат, который следует из нерелятивистского уравнения Паули для полей заданной конфигурации.

Отметим, что уравнения (6.5.24) могут быть точно решены также в том случае, когда однородные и постоянные поля **E** и **H** параллельны друг другу. А решение соответствующей задачи для произвольно ориентированных векторов **E** и **H** получаем из решений для $\mathbf{E}\parallel\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$ с помощью преобразований Лоренца [88].

6.6.4. Нерелятивистская частица произвольного спина в поле Кулона. Рассмотрим теперь одну из интереснейших с физической точки зрения задач, заключающуюся в описании движения спиновой частицы в поле точечного заряда. Оказывается, галилеевски инвариантные волновые уравнения могут служить вполне удовлетворительной математической моделью для такого рода задач, учитывающей физические эффекты, обусловленные наличием у частицы спина.

Будем исходить из уравнений первого порядка (6.5.10), где β_k — матрицы, определяемые соотношениями (6.3.14), (6.3.15) и столбцами R_3, R_4 в таблице 6.1 (с. 305). Вектор-потенциал кулоновского поля выберем в виде $A=0$, $A_0=ze/x, x=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$. Переходя с помощью преобразования (6.5.11) к представлению (6.5.12), (6.5.13), получаем эквивалентную систему уравнений (6.5.20), (6.5.21) которая в рассматриваемом случае записывается в следующей форме:

$$\left(p_0+\frac{\alpha}{x}-\frac{p^2}{2m}-\varepsilon_0-\frac{\alpha}{s(s+1)\varkappa_2 m}\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}}{x^3}\right)\Phi^s=0,$$
$$\Phi_2^s=-\Phi^s,\quad \Phi_3^s=\left(\frac{\varkappa_2^2}{2}+\frac{\alpha\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}}{x^3 2ms(s+1)\varkappa_2}\right)\Phi^s, \tag{6.6.23}$$

$$\chi_1^{s-1}=\chi_2^{s-1}=0,\quad \Phi^s=\Phi_1^s,\quad \alpha=ze^2. \tag{6.6.24}$$

Мы видим, что уравнения (6.5.10) для случая кулоновского потенциала сводятся к уравнению типа Шредингера (6.6.23) для $(2s+1)$-компонентной волновой функции Φ^s. Остальные компоненты вектор-функции (6.5.19) выражаются через Φ^s согласно (6.6.24).

Уравнения, соответствующие решениям R_4 из таблицы 6.1, также сводятся к шредингеровой форме (6.6.23), где $\Phi^s\to\chi^{s'}$, $s\to s'=s-1$. Мы не будем далее различать эти два случая, так как, с точностью до обозначений произвольных параметров $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, они совпадают. Далее будем считать $\varepsilon_0=m$, что не умаляет общности рассуждений.

Решение уравнения (6.6.23) может быть получено по той же схеме, которая использовалась в п. 4.3.1 для релятивистской задачи Кулона. Представляя Φ^s в форме (4.3.1), приходим к стационарному уравнению Шредингера

$$\left(\tilde{\varepsilon}+\frac{\alpha}{x}-m-\frac{p^2}{2m}-\frac{\alpha g}{2sm}\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}}{x^3}\right)\Phi^s(\mathbf{x})=0,\qquad g=\frac{2}{(s+1)\varkappa_2}. \tag{6.6.25}$$

Уравнение (6.6.25) инвариантно относительно группы $O(3)$, поэтому оно допускает решения в разделяющихся переменных. Действительно, разлагая $\Phi^s(\mathbf{x})$ по шаровым спинорам согласно (4.3.3) и используя для оператора p^2 представление (4.3.9), приходим к следующей системе уравнений для радиальных функций:

$$D'\varphi^{\lambda}=x^{-2}b_{\lambda\lambda'}\varphi^{\lambda'}, \tag{6.6.26}$$

где

$$D'=2m(\tilde{\varepsilon}+\alpha/x)+\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}-\frac{j(j+1)}{x^2}-2m^2,$$
$$b_{\lambda\lambda'}=[\lambda^2-\lambda(2j+1)]\,\delta_{\lambda\lambda'}+\frac{g\alpha}{s}d_{\lambda\lambda'}^{sj}, \tag{6.6.27}$$
$$\lambda,\lambda'=-s,-s+1,\ \ldots,\ -s+2n_{sj},\quad n_{sj}=\min(s,j),$$

а $d_{\lambda\lambda'}^{sj}$ — матричные элементы оператора $\dfrac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}}{x}$ в базисе шаровых спиноров, задаваемые формулой (4.3.7).

Матрица $\|b_{\lambda\lambda'}\|$ диагонализуема, поэтому уравнения (6.6.26) сводятся к цепочке независимых уравнений вида

$$D'\varphi=x^{-2}b^{sj}\varphi, \tag{6.6.28}$$

где D' — оператор (6.6.27), b^{sj} — собственные числа матрицы $\|b_{\lambda\lambda'}\|$.

До сих пор мы просто повторяли рассуждения из § 4.3, где рассматривалась задача Кулона для релятивистской частицы. Уравнение (6.6.28) напоминает по форме уравнение (4.3.12), отличаясь от последнего только членами в левой части, не содержащими производных, и также может быть сведено к стандартной форме (4.3.13). Действительно, делая в (6.6.28) замену

$$y = \sqrt{z}\,\varphi, \qquad z = 2\sqrt{-2m(\tilde{\varepsilon} - m)x},$$
$$\beta = \sqrt{\frac{-m}{2(\tilde{\varepsilon} - m)}}\,\alpha, \qquad k^2 = (2j+1)^2 + 4b^{sj}, \tag{6.6.29}$$

получаем уравнение (4.3.13) для функции y.

Таким образом, галилеевски инвариантные уравнения движения для частицы произвольного спина в поле Кулона формально приводят к такому же уравнению на собственные значения β, как и релятивистски инвариантные уравнения. Однако спектр энергий галилеевской частицы несколько отличается от релятивистского (из-за другой зависимости ε от β (ср. (6.6.29) и (4.3.14)). Действительно, из (6.6.29), (4.3.19) получаем возможные значения энергии ε в виде (ср. (4.3.27))

$$\tilde{\varepsilon} = m - \frac{m\alpha^2}{\left(\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + b^{sj}} + n' + \frac{1}{2}\right)^2}, \qquad n' = 0, 1, \ldots \tag{6.6.30}$$

Формула (6.6.30) определяет уровни энергии нерелятивистской частицы произвольного спина s в поле Кулона. Здесь j принимает целые (для целых s) или полуцелые (для s полуцелых) значения, задающие полный момент частицы, а возможные значения b^{sj} совпадают с корнями характеристического уравнения (4.3.28) для матрицы $\|b_{\lambda\lambda'}\|$ (6.6.27).

Для анализа спектра (6.6.30) и сравнения его с тем, что предсказывается релятивистскими уравнения движения, рассмотрим приближенные решения характеристического уравнения, задаваемые формулами (4.3.29), (4.3.30). Используя (4.3.29) и разлагая член в правой части (6.6.30) по степеням α^2, получаем

$$\tilde{\varepsilon} = m - \frac{m\alpha^2}{2n^2} - \frac{mg^2\alpha^4 b_\lambda^{sj}}{2n^3(l+1/2)} + o(\alpha^6), \tag{6.6.31}$$
$$n = n' + l + 1 = 1, 2, \ldots; \quad l = j - \lambda = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Соотношение (6.6.31) определяет тонкую структуру спектра энергий частицы произвольного спина в кулоновском поле. Значения соответствующих параметров b_λ^{sj} легко вычисляются по формулам (4.3.30), (4.3.8).

Наряду с постоянным слагаемым m энергия частицы определяется бальмеровским членом $-m\alpha^2/(2n^2)$ и поправкой порядка α^4, связанной с наличием у частицы спина. Как будет видно из дальнейшего, эта поправка обусловлена спин-орбитальным, дарвиновским и квадрупольным взаимодействиями частицы с полем.

Каждый уровень энергии, соответствующий заданному главному квантовому числу n, расщепляется на N_n уровней тонкой структуры, соответствующие допустимым значениям l и λ (индекс s в (6.6.31) фиксирован — это спин частицы, а $j = l + \lambda$). Возможные при фиксированном n значения l и λ и отвечающее им число подуровней тонкой структуры приведены в (6.6.31), (4.3.32), (4.3.33).

В случае $s = 1/2$ формула (6.6.31) принимает вид

$$\tilde{\varepsilon} = m - \frac{m\alpha^2}{2n^2} + \frac{\lambda m g^2 \alpha^4}{2n^3 (l + 1/2)(l + \lambda + 1/2)}, \quad \lambda = \pm 1/2. \qquad (6.6.32)$$

В отличие от релятивистского спектра, предсказываемого уравнением Дирака (см. (4.3.31), (4.3.34) для $s = 1/2$), уровни энергии (6.6.32) оказываются невырожденными.

Сравнение формулы (6.6.31) с соответствующей формулой (4.3.31), получаемой при решении релятивистской задачи Кулона, позволяет сделать вывод, что при $g^2 = -1$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{l + \frac{1}{2}} \right) \frac{m\alpha^4}{2n^4}, \qquad (6.6.33)$$

где ε — энергия релятивистской частицы, задаваемая соотношением (4.3.31). Мы видим, что уровни энергии частицы произвольного спина в поле Кулона, найденные с использованием галилеевски инвариантных волновых уравнений, при фиксированных n и l оказываются сдвинутыми на величину

$$\Delta\varepsilon = -\left(\frac{3}{4} - \frac{n}{l + \frac{1}{2}} \right) \frac{m\alpha^4}{2n^4} \qquad (6.6{,}34)$$

по сравнению с уровнями, предсказываемыми релятивистскими уравнениями. Этот результат совершенно естественен, поскольку $\Delta\varepsilon$ совпадает со средним значением релятивистской поправки к кинетической энергии частицы [150]:

$$\Delta\varepsilon = \left\langle \frac{p^4}{8m^3} \right\rangle,$$

где усреднение берется по шредингеровским волновым функциям.

Таким образом, уравнения движения, инвариантные относительно группы Галилея, при решении задачи Кулона учитывают все эффекты, предсказываемые пуанкаре-инвариантными уравнениями (спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное взаимодействия) кроме релятивистской поправки к кинетической энергии. Этот вывод согласуется с данными, получаемыми при сравнении соответствующих приближенных гамильтонианов заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле; см. (6.5.8) и (4.1.26).

ГЛАВА 7

ДВУХЧАСТИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе обсуждаются уравнения для системы двух частиц, инвариантные относительно групп Пуанкаре и Галилея. Исследуются точно решаемые двухчастичные модели с упомянутыми группами симметрии.

§ 7.1. Двухчастичные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея

7.1.1. Предварительные замечания. Уравнения, описывающие движение частицы в заданном внешнем поле, соответствуют идеализированной физической ситуации, когда можно пренебречь влиянием частицы на это поле. Однако для многих задач такое влияние является весьма существенным — например, для задачи Кеплера, когда масса частицы, порождающей центральное поле, сравнима с массой орбитальной или рассеиваемой частицы. Последний случай является типичным примером двухчастичной задачи, когда следует учитывать одновременно движение двух взаимодействующих объектов.

Уже сама формулировка двухчастичной задачи в рамках релятивистской квантовой теории сталкивается с принципиальными трудностями математического и логического характера. С известными оговорками можно сказать, что по сей день не существует удовлетворительной релятивистской теории двухчастичных систем. Между тем потребность в логически непротиворечивых двухчастичных уравнениях очень велика, поскольку по современным физическим воззрениям широкий класс реально существующих фундаментальных частиц-мезонов можно рассматривать как связанные состояния двух более элементарных физических объектов (кварков).

Для описания двухчастичных систем обычно используют либо ковариантное уравнение Бете — Солпитера [6], либо квазирелятивистские уравнения типа Брейта [161] или Крайчика — Фолди [253]. Альтернативные возможности состоят в использовании квазипотенциального подхода, развитого в работах Логунова, Тавхилидзе, Тодорова и Кадышевского [246, 269], и теории прямого взаимодействия частиц, которая восходит к классической работе Дирака [177] (о современном состоянии этой теории см. [91, 171]). У нас нет возможности подробно анализировать особенности каждого из перечисленных подходов, отметим только, что решения уравнения

Бете — Солпитера зависят от дополнительного параметра («собственного времени» системы), физический смысл которого совершенно не ясен, а теория прямого взаимодействия априори не применима к системам, в которых существенным фактором является конечная скорость распространения сигнала. Что же касается уравнения Брейта, то оно неинвариантно ни относительно преобразований Лоренца, ни относительно преобразований Галилея, и следовательно, не удовлетворяет ни одному из принципов относительности, принятых в современной физике. Тем не менее это уравнение служит хорошей квазирелятивистской математической моделью системы взаимодействующих частиц со спинами $s_1 = s_2 = 1/2$ и широко используется как для описания водородоподобных систем с электромагнитным взаимодействием, так и (после небольшой модификации) для описания сильно связанных систем типа кварк — антикварк [132, 169].

В этом параграфе рассматриваются двухчастичные уравнения для частиц произвольного спина, которые могут быть получены в рамках принципа относительности Галилея [218]. Как будет видно из дальнейшего, такие уравнения успешно могут использоваться для описания двухчастичных систем, учитывая разнообразные тонкие эффекты, связанные с наличием у частиц спина. Найден, в частности, галилеевски инвариантный аналог уравнения Брейта, который приводит к правильной сверхтонкой структуре спектра водородоподобных систем.

7.1.2. Уравнения для бесспиновых частиц. Рассмотрим простейший вариант двухчастичной системы, когда спины входящих в нее частиц равны нулю, а взаимодействие между ними отсутствует. В нерелятивистской квантовой механике, как известно, такой системе сопоставляется следующее уравнение движения:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi(x_0, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) = \left(\frac{\mathbf{p}_{(1)}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{(2)}^2}{2m_2}\right)\Psi(x_0, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}), \qquad (7.1.1)$$

где $\Psi(x_0, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)})$ — волновая функция системы, зависящая от декартовых координат первой ($\mathbf{x}_{(1)}$) и второй ($\mathbf{x}_{(2)}$) частицы, m_1 и m_2 массы первой и второй частицы соответственно, $\mathbf{p}_{(1)} = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{(1)}}$, $\mathbf{p}_{(2)} = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{(2)}}$. Индексы (1) и (2) далее используются для обозначения всех величин, относящихся к частицам с номерами 1 и 2.

Уравнение (7.1.1) инвариантно относительно алгебры Галилея *). Базисные элементы этой алгебры на множестве решений

*) В действительности симметрия уравнения (7.1.1) шире — его алгебра инвариантности A в классе дифференциальных операторов 1 порядка в случае $m_1 \neq m_2$ определяется соотношением $A = [G'(1, 3) \otimes G'(1, 3)] \otimes \{P_0, D\}$, где $G'(1, 3)$ — девятимерная алгебра Ли, включающая все базисные элементы алгебры Галилея кроме P_0, $\{P_0, D\}$ — двумерная подалгебра, включающая $P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}$ и $D = 2x_0p_0 - x_{(1)}p_1 - x_2p_2$. Если же $m_1 = m_2$, то A совпадает с алгеброй Ли группы Шредингера в $(1+6)$-мерном пространстве-времени.

$\Psi(x_0, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)})$ задаются формулами

$$P_0 = H = \frac{p_{(1)}^2}{2m_1} + \frac{p_{(2)}^2}{2m_2}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{p}_{(2)},$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{(1)} + \mathbf{J}_{(2)} = \mathbf{x}_{(1)}\times\mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{x}_{(2)}\times\mathbf{p}_{(2)}, \tag{7.1.2}$$
$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{(1)} + \mathbf{G}_{(2)} = x_0(\mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{p}_{(2)}) - m_1\mathbf{x}_{(1)} - m_2\mathbf{x}_{(2)},$$

Представление алгебры AG(1, 3), натянутое на базис (7.1.2), приводимо. Для того чтобы разложить его в прямую сумму неприводимых представлений, перейдем в (7.1.1) и (7.1.2) к новым независимым переменным (переменным центра масс)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)}, \qquad \mathbf{X} = \frac{m_1\mathbf{x}_{(1)} + m_2\mathbf{x}_{(2)}}{m_1 + m_2}, \tag{7.1.3}$$

или

$$\mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{X} + \frac{m_2\mathbf{x}}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{X} - \frac{m_1\mathbf{x}}{m_1 + m_2}. \tag{7.1.4}$$

Для операторов импульса получаем

$$\mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{p} + \frac{m_1\mathbf{P}}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p} + \frac{m_2\mathbf{P}}{m_1 + m_2}, \tag{7.1.5}$$

где

$$\mathbf{p} = -i\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{P} = -i\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}.$$

Подставив (7.1.5) в (7.1.2), приходим к следующему представлению:

$$\widehat{P}_0 = H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + E, \qquad \widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}, \quad \widehat{\mathbf{J}} = \mathbf{X}\times\mathbf{P} + \mathbf{S}, \qquad \widehat{\mathbf{G}} = x_0\mathbf{P} - M\mathbf{X}, \tag{7.1.6}$$

где

$$M = m_1 + m_2, \qquad E = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}. \tag{7.1.7}$$

Операторы (7.1.6) по форме совпадают с одночастичными генераторами группы Галилея (6.2.17). При этом роль координаты частицы играет координата центра масс, импульса — полный импульс системы, спина — внутренний момент $\mathbf{x}\times\mathbf{p}$ и собственной энергии — оператор $\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}$.

Как нетрудно убедиться, операторы Казимира (6.1.16) для представления (7.1.6) принимают следующую форму:

$$C_3 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}, \qquad C_1 = M, \qquad C_3 = M^2(\mathbf{x}\times\mathbf{p})^2, \tag{7.1.8}$$

и имеют следующий спектр собственных значений:

$$0 \leqslant c_3 < \infty, \quad c_1 = M, \quad c_3 = M^2 l(l+1), \quad l = 0, 1, \ldots \tag{7.1.9}$$

Таким образом, системе невзаимодействующих бесспиновых частиц в нерелятивистской квантовой механике сопоставляется пространство неприводимого представления алгебры $A[G(1, 3) \otimes G(1, 3)]$, которое при редукции по алгебре $AG(1, 3)$ разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений, соответствующих возможным значениям C_3 и прямую сумму неприводимых представлений, соответствующих всевозможным l из (7.1.9). Иными словами, рассматриваемая система может интерпретироваться как квазичастица, внутренняя энергия которой c_3 принимает любые значения $0 \leqslant c_3 < \infty$, масса равна сумме масс составляющих частиц, а спин может принимать любые целочисленные значения.

Уравнение движения для системы взаимодействующих частиц может быть получено из (7.1.1) с помощью добавления к гамильтониану потенциала взаимодействия V. В результате получаем

$$i \frac{\partial}{\partial x_0} \Psi(x_0, \mathbf{x}, \mathbf{X}) = \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V\right) \Psi(x_0, \mathbf{x}, \mathbf{X}). \tag{7.1.10}$$

Требование инвариантности уравнения (7.1.10) относительно алгебры Галилея означает, что V должен коммутировать с операторами $\widehat{\mathbf{P}}$, $\widehat{\mathbf{J}}$ и $\widehat{\mathbf{G}}$ из (7.1.6). Отсюда получаем следующие условия для V:

$$[V, \mathbf{P}] = [V, \mathbf{X}] = [V, \mathbf{S}] = 0. \tag{7.1.11}$$

Согласно (7.1.11) потенциал не может зависеть от $\mathbf{X}$ и $\mathbf{P}$ и является скалярной функцией относительных переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$:

$$V = V(x^2, \mathbf{p}^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}). \tag{7.1.12}$$

Формулы (7.1.10), (7.1.12) определяют общий вид двучастичного уравнения Шредингера для взаимодействующих скалярных частиц, удовлетворяющего принципу относительности Галилея. Соответствующие операторы группы Галилея задаются формулой (7.1.6), где $H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V$.

Уравнение (7.1.10) с потенциалом (7.1.12) обладает высокой симметрией, будучи инвариантным относительно 13-мерной алгебры Ли, изоморфной $A[G(1, 3) \otimes O(3)]$, и в силу этого имеет решения в разделяющихся переменных. Симметрия относительно алгебры Галилея позволяет эффективно отделить движение центра масс системы, представив волновую функцию в виде $\Psi = \chi(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{x})$, причем $\varphi(\mathbf{x})$ должна удовлетворять одночастичному уравнению Шредингера с приведенной массой:

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V\right)\varphi(\mathbf{x}) = E\varphi(\mathbf{x}). \tag{7.1.13}$$

Это уравнение остается инвариантным относительно алгебры $AO(3)$ (базисные элементы которой совпадают с $\mathbf{S}$ (7.1.7)), что позволяет отделить угловые переменные и рассматривать задачу только для радиальных волновых функций.

Таким образом, галилеевски инвариантное уравнение Шредингера для взаимодействующих бесспиновых частиц всегда может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальной волновой функции в системе центра масс. Мы увидим ниже, что аналогичное утверждение справедливо для уравнений, описывающих системы частиц со спином.

Отметим еще, что двухчастичное уравнение Шредингера (7.1.1) (как и уравнение с потенциалом (7.1.10)) можно записать в виде системы уравнений первого порядка

$$(\beta_\lambda p^\lambda - \beta_7 M)\Psi = 0, \quad \lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ 6, \tag{7.1.14}$$

где введены обозначения $\mathbf{p}_{(1)} = (p_1,\ p_2,\ p_3)$, $\mathbf{p}_{(2)} = (p_4,\ p_5,\ p_6)$, Ψ — волновая функция, имеющая семь компонент, β_λ, β_7 — матрицы размерности 7×7 следующего вида:

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0}^\dagger & \hat{0} & \hat{0} \\ \tilde{0}^\dagger & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta_a = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_a & \tilde{0} \\ \lambda_a^\dagger & \hat{0} & \hat{0} \\ \tilde{0}^\dagger & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{3+a} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{0} & \lambda_a \\ \tilde{0}^\dagger & \hat{0} & \hat{0} \\ \lambda_a^\dagger & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \beta_7 = 2\begin{pmatrix} 0 & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0}^\dagger & \frac{m_1}{M} I & \hat{0} \\ \tilde{0}^\dagger & \tilde{0} & \frac{m_2}{M}\hat{I} \end{pmatrix}, \tag{7.1.15}$$

$\hat{0}$ и $\hat{I}$ — нулевые и единичные матрицы размерности 3×3, $\tilde{0}$ — нулевая матрица-строка размерности 1×3, λ_a — матрицы (2.3.21). В самом деле, умножая (7.1.14) на β_0 и $1-\beta_0$ и выражая функции $\Psi_2 = (1-\beta_0)\Psi$ через $\Psi_1 = \beta_0\Psi$, приходим к уравнению Шредингера (7.1.1) для однокомпонентной функции Ψ_1 (а оставшиеся компоненты Ψ, т. е. $(1-\beta_0)\Psi$, выражаются через производные от Ψ_1: $\Psi_2 = -M^{-1}(\beta_0+\beta_7)^{-1}\beta_k p_k \Psi_1$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$).

Уравнения (7.1.14) инвариантны относительно алгебры Галилея. Соответствующие базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_a = -i\frac{\partial}{\partial X_a},$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{X}\times\mathbf{P} + \mathbf{x}\times\mathbf{p} + \mathbf{S}', \quad \mathbf{G} = x_0\mathbf{P} - M\mathbf{X} + \boldsymbol{\eta}, \tag{7.1.16}$$

где

$$S'_a = i\varepsilon_{abc}(1-\beta_0)(\beta_b\beta_c + \beta_{3+b}\beta_{3+c}),$$
$$\eta_a = (1-\beta_0)(\beta_a + \beta_{3+a}), \qquad a = 1,\ 2,\ 3,$$

β_0 и β_k — матрицы (7.1.15).

Можно показать, что формулы (7.1.14), (7.1.15) задают простейшую (т. е. включающую минимальное число уравнений) галилеевски инвариантную систему первого порядка, которая сводится к двухчастичному уравнению Шредингера для скалярных частиц.

7.1.3. Уравнения для системы частиц с произвольным спином. По аналогии с двухчастичными уравнениями для бесспиновых частиц построим уравнения движения для системы частиц произвольного спина. В этом пункте рассматриваются уравнения в форме Шредингера, а в следующем соответствующие системы уравнений вида (7.1.14).

Будем исходить из одночастичных уравнений Шредингера для частицы произвольного спина, задаваемых соотношениями (6.1.1), (6.4.10). Тогда по аналогии с (7.1.1) уравнение для системы двух невзаимодействующих частиц запишем в виде

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi(x_0, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) = \left(H_{s_1} + H_{s_2}\right)\Psi(x_0, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}), \qquad (7.1.17)$$

где $\Psi(x_0, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) - 2(2s_1+1)\times 2(2s_2+1)$-компонентная волновая функция, H_{s_1} и H_{s_2} — гамильтонианы первой и второй частицы, т. е. дифференциальные операторы вида (6.4.10), где мы положим для упрощения выкладок $k = a = 1$.

Уравнение (7.1.17) обладает очевидной симметрией относительно группы Галилея. Генераторы группы Галилея на множестве решений этого уравнения представляют собой сумму одночастичных генераторов (6.2.20), (6.4.3), т. е.

$$\begin{gathered}P_0 = H_{s_1} + H_{s_2}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{p}_{(2)},\\ \mathbf{J} = \mathbf{x}_{(1)}\times\mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{x}_{(2)}\times\mathbf{p}_{(2)} + \mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)},\\ \mathbf{G} = x_0\mathbf{P} - m_1\mathbf{x}_{(1)} - m_2\mathbf{x}_{(2)} + \boldsymbol{\eta}_{(1)} + \boldsymbol{\eta}_{(2)}.\end{gathered} \qquad (7.1.18)$$

Операторы (7.1.18) реализуют приводимое представление алгебры Галилея. Нетрудно убедиться, что переход к переменным центра масс (7.1.4), (7.1.5) не приводит эти операторы (в отличие от случая нулевого спина) к прямой сумме неприводимых представлений, так как при этом оператор Казимира C_3 (6.1.16) остается недиагональным. Поэтому мы предварительно преобразуем генераторы (7.1.18) к такому представлению, в котором оператор внутренней энергии

$$C_3 = E = H_{s_1} + H_{s_2} - \frac{\mathbf{P}^2}{2(m_1+m_2)} \qquad (7.1.19)$$

не зависит от полного импульса $\mathbf{P}$[218]. Используя для этой цели оператор (ср. (6.4.17))

$$U = \left(1 + \frac{i}{M}\boldsymbol{\eta}_{(1)}\cdot\mathbf{P}\right)\left(1 + \frac{i}{M}\boldsymbol{\eta}_{(1)}\cdot\mathbf{P}\right) = \exp\left(\frac{i}{M}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{P}\right), \qquad (7.1.20)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{(1)} + \boldsymbol{\eta}_{(2)},\ M = m_1 + m_2,$$

после несложных вычислений получаем из (7.1.17) следующее эквивалентное уравнение:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Phi = \widehat{H}\Phi, \qquad \Phi = U\Psi, \qquad \widehat{H} = UHU^{-1} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + E, \qquad (7.1.21)$$

где E — преобразованный оператор внутренней энергии,

$$E = \sigma_1^{(1)} m_1 + \sigma_2^{(2)} m_2 + 2\sigma_3^{(1)} \mathbf{S}_{(1)} \cdot \mathbf{p} - 2\sigma_3^{(2)} \mathbf{S}_{(2)} \cdot \mathbf{p} + \\ + \frac{\mathbf{p}^2}{2} \left[\frac{1}{\mu} - \left(\sigma_1^{(1)} - i\sigma_2^{(1)}\right) \frac{1}{m_1} - \left(\sigma_1 - i\sigma_2^{(2)}\right) \frac{1}{m_2} \right], \quad (7.1.22)$$

$\mathbf{p}$ и μ — относительный импульс и приведенная масса (см. (7.1.5), (7.1.7)). Одновременно генераторы (7.1.18) приводятся к виду (7.1.6), где

$$\mathbf{S} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)}, \quad (7.1.23)$$

а E определяется формулой (7.1.22).

Таким образом, мы получили галилеевски инвариантные уравнения движения для системы из двух частиц произвольного спина в форме (7.1.21). Из (7.1.6), (7.1.22), (7.1.23) заключаем, что такую систему можно рассматривать как квазичастицу с переменным спином, который определяется как результат сложения трех моментов:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}, \ \mathbf{S}_{(1)} \text{ и } \mathbf{S}_{(2)}. \quad (7.1.24)$$

Уравнение (7.1.21) и приведенную интерпретацию положим в основу построения уравнений движения для системы двух взаимодействующих частиц произвольного спина. Будем искать такие уравнения в виде

$$i \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi = (\widehat{H} + V) \Phi, \quad (7.1.25)$$

где $\widehat{H}$ — гамильтониан невзаимодействующих частиц (7.1.21), V — потенциал взаимодействия. Условие галилеевской инвариантности этого уравнения сводится к требованию коммутативности оператора V с генераторами (7.1.6), (7.1.23), которое может быть записано в форме (7.1.11), (7.1.23). Отсюда вытекает, что V должен быть скалярной функцией относительных переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{P}$, на явный вид которой требования симметрии не накладывают никаких ограничений.

Мы видим, что условие галилеевской инвариантности уравнений движения допускает очень широкий класс потенциалов взаимодействия для частиц произвольного спина. Примеры физически интересных потенциалов рассматриваются в п. 7.1.5.

7.1.4. Двухчастичные уравнения первого порядка. Как известно, уравнения в частных производных порядка $N > 1$ всегда могут быть сведены к эквивалентным уравнениям, включающим производные не выше первого порядка. Поэтому представляет интерес рассмотреть галилеевски инвариантные двухчастичные уравнения вида (7.1.14) для произвольного спина.

Задача описания уравнения вида (7.1.14), инвариантных относительно группы Галилея, может быть сформулирована в полной аналогии с соответствующей одночастичной задачей рассматриваемой в § 6.3. Общий вид генераторов группы Галилея на множестве решений таких уравнений задается формулами (7.1.16), где

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)}, \quad (7.1.26)$$

$\mathbf{S}_{(1)}$ и $\mathbf{S}_{(2)}$ — коммутирующие матрицы спина первой и второй частицы, η — числовые матрицы, удовлетворяющие совместно с $\mathbf{S}'$ коммутационным соотношениям (6.2.22), (6.2.23), характеризующим алгебру AE(3).

Потребовав, чтобы уравнения (7.1.14) допускали лагранжеву формулировку и были инвариантными относительно алгебры (7.1.16), приходим к следующей системе уравнений для матриц β_λ, β_7 (ср. (6.3.10), (6.3.12)):

$$\begin{gathered}
[S'_a, \beta_0] = 0, \quad [S'_a, \beta_7] = 0, \\
\eta_a^+\beta_7 - \beta_7\eta_a = -i\left(\frac{m_1}{M}\beta_a + \frac{m_2}{M}\beta_{3+a}\right),
\end{gathered} \tag{7.1.27}$$

$$\begin{gathered}
\eta_a^+\beta_b - \beta_b\eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \quad [S'_a, \beta_b] = i\varepsilon_{abc}\beta_c, \\
\eta_a^+\beta_{3+b} - \beta_{3+b}\eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \quad [S'_a, \beta_{3+b}] = i\varepsilon_{abc}\beta_{3+c}.
\end{gathered} \tag{7.1.28}$$

Мы не приводим подробных выкладок, которые аналогичны выкладкам в пп. 6.3.2 и 6.3.3.

Таким образом, задача описания галилеевски инвариантных двухчастичных уравнений вида (7.1.14), может быть сведена к чисто алгебраической задаче нахождения всех матриц S'_a, η_a, β_7, β_λ, удовлетворяющих соотношениям (6.2.22), (6.2.23), (7.1.27), (7.1.28). По сравнению с соответствующей одночастичной задачей здесь имеется три дополнительных матрицы β_{3+a}, которые должны удовлетворять условиям (7.1.28). Кроме того, потребуем дополнительно, чтобы функция Ψ покомпонентно удовлетворяла двухчастичному уравнению Шредингера (7.1.1) (что должно быть следствием уравнения первого порядка (7.1.14)).

Даже простейшие (т. е. реализуемые матрицами минимальной размерности) решения уравнений (7.1.27), (7.1.28) для произвольных значений спинов s_1 и s_2 выглядят достаточно громоздко, поэтому ограничимся рассмотрением случаев, когда $s_1 = s_2 = 1/2$ и $s_1 = 0$, $s_2 = 1/2$.

Для $s_1 = s_2 = 1/2$ получаем решения вида

$$\begin{gathered}
\beta_0 = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_0), \quad \beta_7 = (1 + \Gamma_0), \quad \beta_a = \sqrt{\frac{M}{m_1}}\,\Gamma_0\Gamma_a, \\
\beta_{3+a} = \sqrt{\frac{M}{m_2}}\,\Gamma_0\Gamma_{3+a}, \quad S'_a = \frac{1}{4}\varepsilon_{abc}(\Gamma_b\Gamma_c + \Gamma_{3+b}\Gamma_{3+c}), \\
\eta_a = \frac{i}{2}(1 + \Gamma_0)\left(\sqrt{\frac{m_1}{M}}\,\Gamma_a + \sqrt{\frac{m_2}{M}}\,\Gamma_{3+a}\right),
\end{gathered} \tag{7.1.29}$$

где Γ_0, Γ_a, Γ_{3+a} $(a = 1, 2, 3)$ — матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие алгебре Клиффорда (2.5.2) (явная реализация этих матриц может быть выбрана, скажем, в форме (3.1.35), (3.1.37)).

Уравнение (7.1.14) с матрицами (7.1.29) галилеевски инвариантно и описывает систему из двух невзаимодействующих частиц с массами m_1 и m_2 и спинами $s_1 = s_2 = 1/2$. Действительно, выражая $\Psi_2 = (1/2)(1 - \beta_0)\Psi$ через $\Psi_1 = \beta_0\Psi$, приходим к двухчастичному уравнению Шредингера в переменных центра масс. При этом оператор спина системы задается формулой (7.1.23), где $(S_{(1)})_a = (i/4)\varepsilon_{abc}\Gamma_b\Gamma_c$, $(S_{(2)})_a = (i/4)\varepsilon_{abc}\Gamma_{3+b}\Gamma_{3+c}$ — коммутирующие спиновые матрицы (операторы спина первой и второй частицы) соответствующие $s_1 = s_2 = 1/2$.

Для $s_1 = 0$, $s_2 = 1/2$ простейшие решения уравнений (7.1.27), (7.1.28) задаются следующими матрицами размерности 6×6:

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \sqrt{\frac{M}{m_1}} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a & 0 \\ \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_7 = 2(1 - \beta_0),$$

$$\beta_{3+a} = \sqrt{\frac{M}{m_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_a \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \eta_a = \frac{i}{2\sqrt{M}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{m_1}\,\sigma_a & 0 & 0 \\ \sqrt{m_2}\,\sigma_a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \tag{7.1.30}$$

где σ_μ — матрицы Паули, 0 — нулевые матрицы размерности 2×2. Соответствующее уравнение (7.1.14) инвариантно относительно группы $G(1, 3)$ и может интерпретироваться как уравнение движения системы невзаимодействующих частиц со спинами 0, 1/2 и массами m_1, m_2.

Приведенные выше уравнения допускают очевидное обобщение на случай систем взаимодействующих частиц, с помощью замены $p_0 \to p_0 + V$, где V потенциал взаимодействия (скалярная функция внутренних переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$). Эти уравнения позволяют также галилеевски инвариантным образом учесть взаимодействие системы с внешним электромагнитным полем, используя стандартную замену

$$p_0 \to p_0 - eA_0(x_{(1)}, x_0) - e_2A_0(\mathbf{x}_{(2)}, x_0), \tag{7.1.31}$$

$$\mathbf{p}_{(\alpha)} \to \mathbf{p}_{(\alpha)} - e_\alpha\mathbf{A}(\mathbf{x}_{(\alpha)}, x_0), \tag{7.1.32}$$

где $(A_0, \mathbf{A})$ — вектор-потенциал электромагнитного поля. Примеры интересных с физической точки зрения потенциалов двухчастичного взаимодействия и внешнего поля приведены в следующем пункте.

7.1.5. Уравнения для взаимодействующих частиц произвольного спина. Обсудим возможности, возникающие при использовании выведенных выше уравнений для описания двухчастичных систем, потенциал взаимодействия которых зависит только от расстояния между частицами: $V = V(\mathbf{x})$.

Уравнения первого порядка, рассматриваемые в предыдущем пункте, в результате замены $p_0 \to p_0 - V$ и последующего отделения «лишних» компонент, сводятся к двухчастичному уравнению Шредингера вида (7.1.10), где Ψ — $(2s + 1)$-компонентная волновая функция. Такие уравнения не учитывают спиновых эффектов и в силу этого особого интереса не представляют.

Гораздо более содержательными являются уравнения в форме (7.1.25), которые в системе центра масс принимают вид

$$H\Psi = (\widehat{E} + V)\Psi = p_0\Psi, \qquad (7.1.33)$$

где E — оператор (7.1.22).

Анализ уравнения (7.1.33) удобнее проводить в представлении, в котором гамильтониан H имеет квазидиагональную форму (т. е. коммутирует с матрицами $\sigma_1^{(1)}$ и $\sigma_1^{(2)}$, стоящими при массовых членах). Применяя к гамильтониану H стандартную процедуру диагонализации Баркера — Гловера — Храпливого [150, 170] (см. ниже п. 7.2.3), получаем по формуле (7.2.7) (у нас $\gamma_0^{(1)} = \sigma_1^{(1)}$, $\gamma_0^{(2)} = \sigma_1^{(2)}$, (КК) — члены, коммутирующие с $\sigma_1^{(1)}$ и $\sigma_1^{(2)}$ и т. д.)

$$H' = \sigma_1^{(1)} m_1 + \sigma_1^{(2)} m_2 + \frac{p^2}{2\mu} + V + i\left(\sigma_1^{(1)} \frac{1}{m_1}\frac{\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{x}}{X} - \sigma_1^{(2)}\frac{1}{m_2}\frac{\mathbf{S}_{(2)}\cdot\mathbf{x}}{x}\right)\frac{\partial V}{\partial x}. \qquad (7.1.34)$$

Для того чтобы избавиться от неэрмитовых слагаемых во второй строке (7.1.34), подвергнем H' дополнительному преобразованию

$$H' \to H'' = VH'V^{-1}, \qquad V = \exp\left(\sigma_1^{(1)}\frac{\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{p}}{m_1} - \sigma_1^{(2)}\frac{\mathbf{S}_{(2)}\cdot\mathbf{p}}{m_2}\right), \qquad (7.1.35)$$

и получим, пренебрегая членами порядка $\dfrac{1}{m_i (m_j)^2}$,

$$\begin{gathered} H'' = p^2/(2\mu) + V + \\ + \frac{\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{3m_1 m_2}\left[(\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{S}_{(2)} - 3\mathbf{S}_{(1)}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\mathbf{S}_{(2)}\cdot\widehat{\mathbf{x}})\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{S}_{(2)}\Delta V\right] + \\ + \sum_{i=1,2}\left[\sigma_1^{(i)} m_i + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{S_{(i)}\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{p}}{2m_i x} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_{(i)}\cdot\widehat{\mathbf{x}}}{m_i}\right)^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \right. \\ \left. + \frac{s_i(s_i+1)}{2m_i^2 x}\frac{\partial V}{\partial x}\right]. \qquad (7.1.36) \end{gathered}$$

Таким образом, исходя из гамильтониана (7.1.25) с центральным потенциалом $V = V(x)$, приходим к приближенному квазидиагональному гамильтониану H'', который включает зависящие от спина члены, представляющие спин-орбитальное взаимодействие.

Если же потенциал взаимодействия зависит от спина, то галилеевски инвариантные уравнения (7.1.25) могут описывать и более тонкие эффекты — например, связанные с запаздыванием электромагнитных волн. Рассмотрим в качестве примера уравнения (7.1.25) для частиц со спинами $s_1 = s_2 = 1/2$, где V — потенциал Брейта (7.2.3) (в обозначениях, используемых в настоящем параграфе, $i\gamma_4^{(i)} = \sigma_3^{(i)}$, $i = 1, 2$).

Уравнение (7.1.25) с потенциалом Брейта $V = V_B$ очевидно инвариантно относительно группы Галилея, так как V_B удовлетворяет соотношениям (7.1.11). Покажем, что это уравнение удовлетворительно моделирует систему заряженных частиц со спинами $s_1 = s_2 = 1/2$. Действительно, записывая его в системе покоя, получаем

$$p_0\Psi = H\Psi \equiv (\widehat{E} + V_B)\Psi, \qquad (7.1.37)$$

где $\widehat{E}$ — оператор (7.1.22). Преобразуя H к форме (7.2.7) и используя затем дополнительное преобразование (7.1.35), получаем

$$\begin{aligned} H'' = {} & \sigma_1^{(1)} m_1 + \sigma_1^{(2)} m_2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{e^2}{x} - \frac{e^2\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{2\mu M}\left(\mathbf{p}\frac{1}{x}\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\frac{1}{x^3}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\right) + \\ & + \frac{e^2}{x^3}\left[\frac{\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{2m_1m_2}(\mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)}) + \frac{1}{2m_1^2}\mathbf{S}_{(1)} + \frac{1}{2m_2^2}\mathbf{S}_{(2)}\right]\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{p} - \\ & - \frac{e^2\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{m_1m_2}\left[\frac{1}{x^3}\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{S}_{(2)} - \frac{3(\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{S}_{(2)}\cdot\mathbf{x})}{x^5} - \left(\frac{8\pi}{3}\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{S}_{(2)} + \right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{\pi}{2}\frac{m_2^2 + m_1^2}{m_1m_2}\right)\delta(\mathbf{x})\right] + o(e^4). \qquad (7.1.38) \end{aligned}$$

Все члены гамильтониана (7.1.38) имеют ясную физическую интерпретацию и описывают хорошо известные физические эффекты, возникающие в системе двух взаимодействующих частиц. Мы отложим обсуждение этого гамильтониана до п. 7.2.4, а здесь отметим только, что на множестве функций, соответствующих положительным собственным значениям матриц $\sigma_1^{(1)}$ и $\sigma_1^{(2)}$ (т. е. на подпространстве, где энергия покоя каждой из частиц положительна), *он может быть представлен в виде*

$$H'' = H_B' + \left(\frac{1}{8m_1^2} + \frac{1}{8m_2^2}\right)p^4, \qquad (7.1.39)$$

где H_B' — приближенный гамильтониан Брейта (7.2.8).

Мы видим, что приближенный гамильтониан (7.1.38), получаемый при диагонализации галилеевски инвариантного двухчастичного уравнения с потенциалом Брейта, содержит все слагаемые, входящие в H_B', кроме релятивистской поправки к кинетической энергии. Это означает, что уравнение (7.1.37) учитывает все физические эффекты, предсказываемые уравнением Брейта: спин-орбитальное взаимодействие, взаимодействие между дипольными спиновыми моментами частиц и т. д. Отсутствует только поправка к кинетической энергии ($\sim p^4$), которая имеет существенно релятивистскую природу. Эта поправка может быть учтена добавлением к потенциалу Брейта дополнительного галилеевски инвариантного члена, зависящего от $\mathbf{x}$, который вносит такой вклад в приближенный гамильтониан H'', математическое ожидание которого совпадает с $-\left\langle p^4\frac{1}{8}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right)\right\rangle$. Пример такого обобщенного потенциала типа Брейта приведен в [218].

Галилеевски инвариантные уравнения первого порядка, рассматриваемые в п. 7.1.4, также могут успешно использоваться при описании взаимодействующих частиц. Так, например, исходя из уравнений в форме (7.1.14) с матрицами (7.1.29) и заменяя $p_0 \to p_0 - V$, где [287]

$$V = -e_1e_2\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{2m_1m_2}\left(a\mathbf{p}\frac{1}{x}\mathbf{p} + b\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\frac{1}{x^3}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2}\left(\frac{\mathbf{S}_{(1)}}{m_1} - \frac{\mathbf{S}_{(2)}}{m_2}\right)\frac{\mathbf{x}}{x^3} - \frac{1}{m_1m_2}\left[\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}}{x^3} + \left(\frac{1}{2}\mathbf{S}^2 - \frac{3}{4}\right)\delta(\mathbf{x})\right]\right\}, \quad (7.1.40)$$

где

$$\mathbf{L} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}, \quad a = 1 - \frac{1}{4}\delta, \quad b = 1 + \frac{3}{2}\delta, \quad \delta = \frac{m_1^3 + m_2^3}{m_1m_2(m_1+m_2)},$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)}, \quad (S_{(1)})_a = \frac{1}{4}\varepsilon_{abc}\Gamma_b\Gamma_c,$$

$$(S_{(2)})_a = \frac{1}{4}\varepsilon_{abc}\Gamma_{b+3}\Gamma_{c+3},$$

приходим к системе уравнений, которая инвариантна относительно преобразований Галилея и после отделения «лишних» компонент $\Psi' = (1-\beta_0)\Psi$ сводится к двухчастичному уравнению Шредингера с гамильтонианом, эквивалентным в приближении $\frac{1}{m_im_j}$ гамильтониану Брейта.

Подведем итоги. Двухчастичные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея, могут служить хорошей математической моделью для систем, состоящих из двух взаимодействующих частиц произвольного спина. Такие уравнения (в соответствующем приближении) не только качественно, но и количественно правильно описывают основные характеристики упомянутых систем, учитывая такие тонкие эффекты, как спин-орбитальное взаимодействие и даже запаздывание электромагнитных потенциалов.

Достоинства подхода, инвариантного относительно группы Галилея (по сравнению с подходами, использующими различные полурелятивистские уравнения), проявляются как в методологическом плане (теория удовлетворяет принципу относительности), так и в простоте соответствующего математического аппарата, позволяющего получать решения многих задач сразу для произвольных значений спина. Одна из таких задач рассматривается в § 7.3.

§ 7.2. Квазирелятивистские и пуанкаре-инвариантные двухчастичные уравнения

7.2.1. Предварительные замечания. Мы показали выше, что система из двух взаимодействующих частиц может быть с хорошей точностью описана с использованием галилеевски инвариантных уравнений. Поскольку такие уравнения пока не завоевали всеобщего признания, в настоящем параграфе излагаются альтернативные подходы к двухчастичным задачам. Наряду с ознакомлением читателей с этими подходами, что может оказаться полезным само по себе, мы будем стремиться более четко сформулировать пределы применимости галилеевски инвариантных двухчастичных уравнений для решения конкретных физических задач.

Из всего многообразия уравнений для системы из двух частиц выберем только те, которые не включают дополнительного параметра — собственного времени. О двухвременных уравнениях типа Бете — Солпитера см., например, в [6].

В этом параграфе излагаются основные сведения об уравнении Дирака — Брейта и квазирелятивистских двухчастичных уравнениях для произвольного спина. Выведены уравнения для радиальной волновой функции парапозитрония и изложена формулировка двухчастичной задачи в рамках одной конструктивной модели прямого взаимодействия.

7.2.2. Уравнение Брейта. Исторически первое двухчастичное полурелятивистское уравнение для частиц, обладающих спином, было предложено Брейтом [161] в 1929 г. Это уравнение имеет вид

$$i\,\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = \left(H^{(1)} + H^{(2)} + V_B\right)\Psi, \qquad (7.2.1)$$

где $\Psi = \Psi(x_0,\ \mathbf{x}_{(1)},\ \mathbf{x}_{(2)})$ — 16-компонентная волновая функция,

$$\begin{gathered} H^{(i)} = \gamma_0^{(i)}\gamma_a^{(i)}\pi_a^{(i)} + \gamma_0^{(i)}m_{(i)} + e^{(i)}A_0(\mathbf{x}_{(i)},\ x_0), \\ \pi_a^{(i)} = -\,i\,\frac{\partial}{\partial x_a^{(i)}} - e^{(i)}A_a(\mathbf{x}_{(i)},\ x_0), \quad i = 1,\ 2, \end{gathered} \qquad (7.2.2)$$

$\{\gamma_\mu^{(1)}\}$ и $\{\gamma_\mu^{(2)}\}$ — два коммутирующих набора матриц Дирака, A_μ — вектор-потенциал внешнего поля. Символом V_B в (7.2.1) обозначен потенциал взаимодействия (потенциал Брейта)

$$\begin{gathered} V_B = \frac{e^{(1)}e^{(2)}}{x}\left[1 - 2\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\left(\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)} + S^{(1)}\cdot\widehat{x}S^{(2)}\cdot\widehat{x}\right)\right], \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)}, \qquad \widehat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|x|}, \qquad S_a^{(i)} = \frac{i}{4}\,\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c, \end{gathered} \qquad (7.2.3)$$

а индекс (i), $i = 1,\ 2$, различает величины, относящиеся к первой и второй частице.

Физические соображения, приведшие Брейта к уравнению (7.2.1), заключались в следующем. Как показал Дарвин еще в 1920 г. (см. [161]), классический приближенный гамильтониан системы двух заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле, учитывающий запаздывание потенциалов, имеет вид

$$H = H_{(1)} + H_{(2)} + \frac{e^{(1)}e^{(2)}}{x} - \frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2m_{(1)}m_{(2)}}\left[\frac{\mathbf{p}_{(1)}\cdot\mathbf{p}_{(2)}}{x} + \frac{\mathbf{p}_{(1)}\cdot\mathbf{x}\mathbf{p}_{(2)}\cdot\mathbf{x}}{x^3}\right], \qquad (7.2.4)$$

где $H_{(1)}$ и $H_{(2)}$ — гамильтонианы первой и второй частицы, $\mathbf{p}_{(i)}$ — классические импульсы. Заменив в (7.2.4) $H_{(1)}$ и $H_{(2)}$ на гамильтонианы Дирака, а скорости $\mathbf{v}_{(i)} = \mathbf{p}_{(i)}/m_{(i)}$ на операторы $\widehat{\mathbf{V}}_{(i)} = [H^{(i)}, \mathbf{x}_{(i)}]$, приходим к уравнению (7.2.1).

В дальнейшем были предложены другие способы вывода уравнения Брейта, в которых потенциал взаимодействия вычисляется с использованием квантовой электродинамики. Мы не будем на них останавливаться, (см. например, [6]), подчеркнем только, что главным аргументом в пользу справедливости уравнения (7.2.1) является соответствие предсказываемых им физических эффектов экспериментальным данным (разумеется, с той точностью, которая может требоваться от заведомо приближенного уравнения). Однако принципиальным недостатком уравнения Брейта является отсутствие симметрии как относительно группы Пуанкаре, так и относительно группы Галилея.

В следующих пунктах мы подробно исследуем уравнение Брейта, найдем квазирелятивистский предел этого уравнения, и, наконец, выведем систему уравнений для радиальных функций, к которой сводится уравнение (7.2.1) после отделения угловой зависимости волновой функции.

7.2.3. Преобразование гамильтониана Брейта к квазидиагональной форме. Для удобства вычислений с использованием теории возмущений, а также для выяснения физического смысла слагаемых, входящих в гамильтониан системы частиц, желательно преобразовать уравнение Брейта к такому представлению, в котором гамильтониан коммутирует с матрицами $\gamma_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(2)}$, т. е. имеет квазидиагональную форму. Как и в случае одночастичных уравнений (см. § 4.1), такую диагонализацию можно осуществить только приближенно, с помощью серии последовательных преобразований.

В работе [170] предложен общий метод диагонализации двухчастичных гамильтонианов вида

$$\gamma_0^{(1)} m^{(1)} + \gamma_0^{(2)} m_{(2)} + (KK) + (AK) + (KA) + (AA), \qquad (7.2.5)$$

где (KK) — члены, коммутирующие с $\gamma_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(2)}$, (AA) — члены, антикоммутирующие с $\gamma_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(2)}$, (AK) — члены, антикоммутирующие с $\gamma_0^{(1)}$ и коммутирующие с $\gamma_0^{(2)}$, и, наконец, (KA) — члены, которые антикоммутируют с $\gamma_0^{(2)}$ и коммутируют с $\gamma_0^{(1)}$, причем предполагается, что все слагаемые в правой части (7.2.5) «малы» по сравнению с $m_{(1)}$ и $m_{(2)}$. В нашем случае

$$\begin{aligned}
&(KK) = e^{(1)} A_0(x_{(1)}) + e^{(2)} A_0(x_{(2)}) + \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{x},\\
&(AK) = \gamma_0^{(1)} \gamma_a^{(1)} \left(p_a^{(1)} - e^{(1)} A_a(x_{(1)})\right),\\
&(KA) = \gamma_0^{(2)} \gamma_a^{(2)} \left(p_a^{(2)} - e^{(2)} A_a(x_{(2)})\right), \qquad (AA) = V_B.
\end{aligned} \qquad (7.2.6)$$

Как показано в [170], гамильтониан (7.2.5) может быть преобразован к следующему эквивалентному виду, квазидиагональному с точностью до членов порядка $\frac{1}{m_{(i)}m_{(j)}}$, $i, j = 1, 2$:

$$H' = \gamma_0^{(1)} m^{(1)} + \gamma_0^{(2)} m_{(2)} + (KK) + \frac{1}{2m_{(1)}} \gamma_0^{(1)} (AK)^2 + \\ + \frac{1}{2m_{(2)}} \gamma_0^{(2)} (KA)^2 - \frac{1}{8m_{(1)}^3} \gamma_0^{(1)} (AK)^4 - \frac{1}{8m_{(2)}^3} \gamma_0^{(2)} (KA)^4 + \\ + \frac{1}{8m_{(1)}^2} [[(AK), (KK)], AK] + \frac{1}{8m_{(2)}^2} [[(KA), (KK)], (KA)] + \\ + \frac{1}{4m_{(1)}m_{(2)}} \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} [[(AK), (AA)]_+, (KA)]_+ + \\ + \frac{1}{2\left(m_1^2 - m_2^2\right)} \left(\gamma_0^{(1)} m_{(1)} - \gamma_0^{(2)} m_{(2)}\right) (AA)^2 + \ldots \tag{7.2.7}$$

Как нетрудно убедиться, первые три строки из (7.2.7) задают сумму приближенных одночастичных гамильтонианов Фолди — Вуйтхойзена — см. формулу (4.1.26) для $s = 1/2$. Два последних слагаемых определяют вклад от потенциала Брейта.

Подставив (7.2.6) в (7.2.7) и полагая там $A_\mu = 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)} = 0$, $\mathbf{p}^{(1)} = -\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}, \gamma_0^{(1)} \to 1$, $\gamma_0^{(2)} \to 1$ (т. е. рассматривая гамильтониан в «системе покоя» и на подпространстве собственных векторов коммутирующих матриц $\gamma_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(2)}$ с собственными значениями $+1$), получаем

$$H' = m_{(1)} + \frac{p^2}{2m_{(1)}} - \frac{p^4}{8m_{(1)}^3} + m_{(2)} + \frac{p^2}{2m_{(2)}} - \frac{p^4}{8m_{(2)}^3} + \frac{e^{(1)}e^{(2)}}{x} - \\ - \frac{\pi e^{(1)} e^{(2)} \delta(x)}{2} \left(\frac{1}{m_{(1)}^2} + \frac{1}{m_{(2)}^2}\right) - \frac{e^{(1)}e^{(2)}}{2x^3} \left(\frac{\mathbf{S}^{(1)}}{m_{(1)}^2} + \frac{\mathbf{S}^{(2)}}{m_{(2)}}\right) \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \\ + \frac{e^{(1)}e^{(2)}}{m_{(1)}m_{(2)}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathbf{p} \frac{1}{x} \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{1}{x^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}\right] - \frac{1}{x^3} \left(\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}\right) \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}}{x^3} - \frac{3\left(\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{x}\right)\left(\mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{x}\right)}{x^5} - \frac{8\pi}{3} \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} \delta(\mathbf{x}) \right\} + 0\left(e_1^2 e_2^2\right). \tag{7.2.8}$$

Каждое слагаемое в (7.2.8) имеет четкий физический смысл. Члены в первой строке определяют кинетическую энергию системы, слагаемые из второй строки соответствуют энергии взаимодействия каждой из частиц с полем Кулона (включая потенциал точечной частицы, а также дарвиновское и спин-орбитальное взаимодействие). Остальные члены в (7.2.8) представляют существенно двухчастичные взаимодействия и соответствуют (в порядке их расположения) классической релятивистской поправке и взаимодействию между электронами, обусловленной запаздыванием электромагнитного поля, спин-орбитальному взаимодействию полного спина системы с порождаемым ей полем, а также взаимодействию между дипольными спиновыми моментами первой и второй частицы (три последних члена).

В заключение отметим, что для описания реальных двухчастичных систем обычно используется модифицированное уравнение Брейта, учитывающее наличие у частиц аномального магнитного момента, а для кварковых систем потенциал Брейта видоизменяется таким образом, чтобы обеспечить удержание («конфайнмент») составляющих частей. Учет аномальных моментов не изменяет качественно гамильтониана (7.2.8) (появляются только другие коэффициенты при матрицах спина). Более подробно о двухчастичных уравнениях типа Брейта см. [169, 256].

7.2.4. Уравнение Брейта для частиц равной массы. Рассмотрим уравнение (7.2.1) для случая, когда внешнее поле отсутствует, а массы частиц равны между собой: $m_{(1)} = m_{(2)} = m$. Для такого уравнения оператор полного импульса $\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)}$ является интегралом движения, так что не умаляя общности можно рассматривать уравнение в «системе покоя», когда $\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)} = 0$, $\mathbf{p}^{(1)} = -\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}$.

Проанализируем обобщенное уравнение такого типа

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = \{\gamma_0^{(1)}\gamma_a^{(1)}p_a + \gamma_0^{(1)}m - \gamma_0^{(2)}\gamma_a^{(2)}p_a + \gamma_0^{(2)}m + \\ + V + 2\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\left[\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)} + \left(\mathbf{S}^{(1)}\cdot\hat{\mathbf{x}}\right)\left(S^{(2)}\cdot\hat{\mathbf{x}}\right)\right]V'\}\Psi, \quad (7.2.9)$$

где V и V' — произвольные функции от x.

В случае $V = V' = e^{(1)}e^{(2)}/x$ формула (7.2.9) задает уравнение Брейта в определенном выше представлении. Поскольку для дальнейших рассуждений явный вид V и V' несуществен, мы пока не будем его конкретизировать.

Покажем, что уравнение (7.2.9) распадается на две незацепляющихся подсистемы, соответствующие значениям полного спина $s = 0$ и $s = 1$. Физически это означает, что состояния, соответствующие $s = 1$ (ортосостояния) и $s = 0$ (парасостояния) являются в рамках подхода, основанного на уравнении (7.2.9), совершенно независимыми, и переходы между ними запрещены.

Умножим оператор в фигурных скобках справа и слева (а волновую функцию Ψ слева) на $\gamma_0^{(1)}$, что приведет нас к эквивалентному уравнению для $\Psi' = \gamma_0^{(1)}\Psi$:

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi' = \{\left(\gamma_0^{(1)}\gamma_a^{(1)} + \gamma_0^{(2)}\gamma_a^{(2)}\right)p_a + \left(\gamma_0^{(1)} + \gamma_0^{(2)}\right)m + V + \\ + 2\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\left[\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)} + \left(\mathbf{S}^{(1)}\cdot\hat{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{S}^{(2)}\cdot\hat{\mathbf{x}}\right)\right]V'\}\Psi' = 0. \quad (7.2.10)$$

Каждую матрицу, входящую в уравнение (7.2.10), можно выразить через 16-рядные матрицы Кеммера — Деффина — Петье β_μ, связанные с $\gamma_\mu^{(1)}$ и $\gamma_\mu^{(2)}$ следующими соотношениями:

$$\beta_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}\right), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (7.2.11)$$

Матрицы β_μ удовлетворяют алгебре Кеммера — Деффина — Петье (2.3.23) (в чем можно убедиться непосредственной проверкой) и реализуют приводимое представление этой алгебры, которое разлагается на три неприводимых с размерностью матриц 10×10, 5×5 и 1×1 (последнее представление — тривиальное нулевое).

Обозначим

$$S_{0a}=i[\beta_0,\ \beta_a], \tag{7.2.12}$$

тогда

$$2\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)}\equiv\frac{1}{2}\gamma_0^{(1)}\gamma_a^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_a^{(2)}=-\frac{3}{2}-S_{0a}S_{0a},$$

$$2\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\left(\mathbf{S}^{(1)}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{S}^{(2)}\cdot\widehat{\mathbf{x}}\right)\equiv\frac{1}{2}\gamma_0^{(1)}\gamma_a^{(1)}\widehat{x}_a\gamma_0^{(2)}\gamma_b^{(2)}\widehat{x}_b=-\frac{1}{2}-(S_{0a}\widehat{x}_a)^2$$

и уравнение (7.2.10) принимает вид

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\Psi'=(-2iS_{0a}p_a+2\beta_0 m+W)\Psi'=0, \tag{7.2.13}$$

$$W=V-[2+S_{0a}S_{0a}+(S_{0a}\widehat{x}_a)^2]\,V'. \tag{7.2.14}$$

Выбирая матрицы β_μ в виде прямой суммы неприводимых матриц размерности 10×10, 5×5 и 1×1, получаем из (7.2.14) две незацепляющихся системы из 10 и 5 уравнений и однокомпонентное уравнение, соответствующее одномерным нулевым матрицам β_0 и S_{0a}. Таким образом, уравнение (7.2.9) расщепляется на три (а фактически на две, т. к. одномерная система тривиальна) независимые подсистемы, каждая из которых может решаться совершенно самостоятельно.

Отметим, что уравнения (7.2.13) с помощью замены $x_0=2x$ сводятся к форме

$$i\frac{\partial}{\partial x_0'}\Psi'=\left(H^k+\frac{1}{2}W\right)\Psi', \tag{7.2.15}$$

где H^K — гамильтониан Кеммера (2.3.39). Иными словами, уравнение Брейта для частиц с равными массами в системе покоя эквивалентно уравнению Кеммера — Деффина — Петье в форме Шредингера со специальным потенциалом $\frac{1}{2}W$, где W имеет вид (7.2.14).

Рассмотрим подробнее уравнение (7.2.13) для случая, когда β_μ — пятирядные матрицы. Выбирая такие матрицы в форме (2.3.20) и представляя волновую функцию в виде $\Psi=$ столбец $(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \chi)$, приходим к следующей системе уравнений для стационарных состояний:

$$\begin{gathered}(E-V+2V')\varphi_1-2m\varphi_2=0,\\ (E-V-2V')\varphi_2-2m\varphi_1-2\mathbf{p}\cdot\chi=0,\\ -2\mathbf{p}\,\varphi_2+(E+V'-V)\chi-V'\widehat{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}\cdot\chi)=0.\end{gathered} \tag{7.2.16}$$

Система (7.2.16) после ряда несложных преобразований может быть сведена к следующему уравнению для φ_2:

$$\left[p^2 - \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{E-V}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{(E-V)(E-V-2V')}{4} + \frac{m^2(E-V)}{E-V+2V'} - \right.$$
$$\left. - \frac{V'}{E-V+V'}\frac{L^2}{x^2}\right]\varphi_2 = 0, \quad (7.2.17)$$

$$L^2 = (\mathbf{x}\times\mathbf{p})^2.$$

Что же касается φ_1 и χ, то они выражаются через φ_2 согласно следующим соотношениям:

$$\chi = \left\{\frac{2V'}{(E-V)(E-V+V')}\left[\widehat{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{p}) - \mathbf{p}\right] + \frac{2}{E-V}\mathbf{p}\right]\varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \frac{E-V-2V'}{2m}\varphi_2 - \frac{\mathbf{p}\cdot\chi}{m}.$$

Мы видим, что уравнение Брейта для парасостояний системы частиц с равными массами сводится к уравнению (7.2.17) для скалярной функции φ_2. Это уравнение допускает решения в разделяющихся переменных. Действительно, разлагая φ_2 по шаровым функциям

$$\varphi_2 = \varphi^{lm}(x)\,Y_{lm}(\widehat{\mathbf{x}}) \quad (7.2.18)$$

и используя для оператора p^2 представление (4.3.9), угловую зависимость φ_2 удается отделить и свести (7.2.17) к обыкновенным дифференциальным уравнениям для радиальных функций

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{E-V}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(E-V)(E-V-2V')}{4} - \frac{m^2(E-V)}{E-V+2V'} + \right.$$
$$\left. + \frac{E-V'}{E-V+V'}\frac{l(l+1)}{x^2}\right)\varphi^{lm} = 0. \quad (7.2.19)$$

Таким образом, наша задача по существу сводится к решению уравнения (7.2.19) для всех возможных целых неотрицательных l. В случае, когда V и V' совпадают с потенциалом Кулона, это уравнение может быть решено точно [257].

Аналогично, с использованием представления (2.3.25), можно получить систему уравнений для радиальных функций, к которой сводится уравнения (7.2.13) с десятирядными матрицами β_μ. Все необходимые для этого промежуточные результаты приведены выше в п. 4.3.5, используя которые, несложно вывести уравнение для радиальных функций и в случае неравных масс $m_{(1)}$ и $m_{(2)}$, а также для обобщенного потенциала Брейта, представляющего собой произвольную $O(3)$-инвариантную функцию от x. Такие уравнения рассматривались в работах [132, 169, 256].

7.2.5. Двухчастичные уравнения инвариантные относительно группы $P(1, 6)$. Число независимых пространственно-временных переменных, необходимых для описания двухчастичной системы (включающих время и координаты каждой из частиц) равно семи, поэтому естественным кандидатом на роль группы симметрии двухчастичных уравнений движения выступает обобщенная группа Пуанкаре $P(1,\ 6)$ — группа движений $(1+6)$-мерного пространства Минковского (см. гл. 5).

Аналог уравнения Клейна — Гордона — Фока, инвариантный относительно группы $P(1,\ 6)$, имеет вид

$$\left(p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2-p_4^2-p_5^2-p_6^2-\varkappa^2\right)\Psi=0. \qquad (7.2.20)$$

Если положить $\mathbf{P}=(p_1,\ p_2,\ p_3)$, $\mathbf{p}=(p_4,\ p_5,\ p_6)$, $\varkappa=2m$, где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{p}$ — релятивистские операторы полного и относительного импульса двухчастичной системы с равными массами частиц, то выражение в квадратных скобках задает связь между импульсом $\mathbf{P}$ и энергией P_0 такой системы [275]. Если же массы частиц различны, то вместо $\mathbf{p}$ удобно ввести новые величины $\mathbf{k}\parallel\mathbf{p}$, определяемые с помощью следующего соотношения [246]:

$$\mathbf{k}^2=-m_{(1)}m_{(2)}+\frac{m_{(1)}m_{(2)}}{\left(m_{(1)}+m_{(2)}\right)^2}\left(\sqrt{m_{(1)}^2+\mathbf{p}^2}+\sqrt{m_{(2)}^2+\mathbf{p}^2}\right)^2. \qquad (7.2.21)$$

Уравнение (7.2.20) обладает явной симметрией относительно алгебры $AP(1,\ 6)$ и, конечно, относительно ее подалгебры $AP(1,3)$. Однако для последовательной интерпретации (7.2.20) как двухчастичного уравнения необходима уверенность в том, что на множестве его решений реализуется прямое произведение неприводимых представлений

$$D=D(m_1,\ s_1)\otimes D(m_2,\ s_2) \qquad (7.2.22)$$

группы Пуанкаре. Это действительно имеет место, если функция Ψ содержит $(2s_1+1)\ (2s_2+1)$ компонент, поскольку в этом случае генераторы представления (7.2.22) с точностью до преобразований эквивалентности могут быть выбраны в форме

$$\begin{gathered}\widehat{P}_0=\varepsilon E\equiv\varepsilon\sqrt{\mathbf{P}^2+M^2},\qquad \widehat{P}_a=p_a,\\ \mathbf{J}=\mathbf{X}\times\mathbf{P}+\mathbf{S},\qquad \mathbf{N}=x_0\mathbf{P}-\frac{1}{2}\left[\mathbf{X},\ P_0\right]_+-\varepsilon\frac{\mathbf{P}\times\mathbf{j}}{E+M},\end{gathered} \qquad (7.2.23)$$

где

$$\mathbf{j}=\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S}^{(1)}+\mathbf{S}^{(2)},\ M^2=\mathbf{p}^2+\varkappa^2,\ \varkappa=m_1+m_2. \qquad (7.2.24)$$

Здесь $\mathbf{S}^{(1)}$ и $\mathbf{S}^{(2)}$ — коммутирующие между собой матрицы спина первой и второй частицы, образующие базис неприводимых представлений $D(s_1)$ и $D(s_2)$ алгебры $AO(3)$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ — координаты, канонически сопряженные $\mathbf{P}$ и $\mathbf{p}$, так что

$$\begin{gathered}[P_a,\ X_b]=[p_a,\ x_b]=-i\delta_{ab},\\ [P_a,\ x_b]=[p_a,\ X_b]=[P_a,\ p_b]=[X_a,\ x_b]=0.\end{gathered}$$

Операторы (7.2.23) коммутируют с оператором в скобках из (7.2.20) и, следовательно, образуют алгебру инвариантности этого уравнения. Последнее утверждение становится очевидным, если записать уравнение (7.2.20) в виде

$$\left(P_0^2 - \mathbf{P}^2 - M^2\right)\Psi = 0. \tag{7.2.25}$$

Пространство представления (7.2.22) в релятивистской квантовой теории сопоставляется системе невзаимодействующих частиц со спинами s_1 и s_2. Это дает основание интерпретировать уравнение (7.2.20) (где Ψ — $(2s_1+1)(2s_2+1)$-компонентная вектор-функция) как уравнение движения такой системы.

Оператор M^2 коммутирует с P_0^2 и P^2, поэтому вместо (7.2.25) удобнее рассматривать уравнение для собственных векторов M^2:

$$\left(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m^2\right)\Psi_m = 0, \tag{7.2.26}$$

где Ψ_m определяются согласно

$$M^2\Psi_m \equiv (\mathbf{p}^2 + \varkappa^2)\Psi_m = m^2\Psi_m. \tag{7.2.27}$$

Формула (7.2.26) задает уравнение Клейна — Гордона — Фока в переменных x_0, $\mathbf{X}$, а соотношение (7.2.27) определяет задачу на собственные значения m^2, которые, очевидно, равны $\varkappa^2 \leqslant m^2 < \infty$. Уравнения (7.2.26), (7.2.27) инвариантны относительно алгебры Пуанкаре (базисные элементы которой имеют вид (7.2.23)) и описывают систему невзаимодействующих релятивистских частиц со спинами s_1 и s_2.

Таким образом, исходя из простейшего уравнения второго порядка, обладающего симметрией относительно обобщенной группы Пуанкаре $P(1, 6)$, мы пришли к системе уравнений (7.2.26), (7.2.27), которые можно интерпретировать как уравнения движения для пары невзаимодействующих релятивистских частиц. Разумеется, ценность подобных уравнений весьма относительна, поскольку основной интерес представляют математические модели не свободных, а взаимодействующих частиц. Обобщение уравнений (7.2.26) (7.2.27) на случай системы частиц со взаимодействием рассматривается в следующем пункте.

В работе [202] предложено $P(1, 6)$-инвариантное уравнение типа Дирака

$$(\Gamma_0 p_0 - \Gamma_k p_k - \varkappa)\Psi = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 6,$$

где Γ_0, Γ_k — матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие алгебре Клиффорда. Такое уравнение также может быть использовано для описания системы из двух релятивистских частиц со спинами $s_1 = s_2 = 1/2$. Анализ этого уравнения (и его возможных обобщений на случай частиц произвольного спина) выходит за рамки настоящей книги.

§ 7.3. Точно решаемые модели двухчастичных систем

7.3.1. Нерелятивистская модель. Рассмотрим двухчастичное уравнение Шредингера следующего вида:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi \equiv \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + \widehat{V}\right)\Psi, \tag{7.3.1}$$

где Ψ — $(2s_{(1)}+1)(2s_{(2)}+1)$-компонентная волновая функция, $\widehat{V}$ — потенциал взаимодействия следующего вида:

$$\widehat{V}=\frac{\alpha}{x}\left(-1+\frac{ik_{(1)}\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{x}}{m_{(1)}x^2}+\frac{ik_{(2)}\mathbf{S}_{(2)}\cdot\mathbf{x}}{m_{(2)}x^2}\right), \tag{7.3.2}$$

α, $k_{(1)}$ и $k_{(2)}$ — безразмерные константы.

Уравнение (7.3.1), очевидно, инвариантно относительно преобразований Галилея, поскольку потенциал $\widehat{V}$ удовлетворяет условиям (7.1.11), (7.1.23). Соответствующие генераторы группы $G(1, 3)$ задаются формулами (7.1.6), (7.1.23).

Рассматриваемое уравнение является частным случаев анализировавшихся выше в п. 7.1.1 двухчастичных уравнений в форме Шредингера. Гамильтониан H в системе центра масс может быть получен из гамильтониана (7.1.34) специальным выбором потенциала V и зарядов частиц e_1 и e_2, если ограничиться подпространством собственных функций матриц $\sigma_1^{(1)}$ и $\sigma_1^{(2)}$ с собственными значениями $+1$.

Согласно результатам, приведенным в п. 7.1.5, рассматриваемая модель является достаточно реалистической, поскольку учитывает такие тонкие эффекты, как спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное взаимодействия. Другим важным достоинством этой модели является то, что она оказывается точно решаемой для любых значений спинов входящих в нее частиц.

Ниже мы опишем соответствующие точные решения, которые удается получить также для более сложной (релятивистской) модели рассматриваемой в следующем пункте.

7.3.2. Релятивистская двухчастичная модель. Для описания релятивистской двухчастичной системы воспользуемся моделью Бакамяна — Томаса [146], суть которой состоит в следующем.

Пусть $(P_\mu, \mathbf{J}, \mathbf{N})$ — генераторы группы Пуанкаре, описывающие динамику системы из двух невзаимодействующих частиц. Тогда системе взаимодействующих частиц сопоставляются генераторы P'_0, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{J}'$ и $\mathbf{N}'$, получаемые из $(P_0, \mathbf{P}, \mathbf{J}, \mathbf{N})$ заменой

$$M\to M+V, \tag{7.3.3}$$

где M — оператор массы, определяемый как оператор Казимира,

$$M^2=P_0^2-\mathbf{P}^2,$$

а V — потенциал «мгновенного» взаимодействия, который должен удовлетворять условиям

$$[V, P_\mu]=[V, \mathbf{J}]=[V, \mathbf{N}]=0. \tag{7.3.4}$$

Как легко показать с использованием представления (4.4.23), условия (7.3.4) означают, что V должен быть скалярной функцией внутренних переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$:

$$V=V(\mathbf{x}, \mathbf{p}),\quad [V, \mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S}^{(1)}+\mathbf{S}^{(2)}]=0. \tag{7.3.5}$$

Здесь мы рассмотрим одну конструктивную модель потенциала прямого взаимодействия. Эта модель основывается, с одной стороны, на уравнениях, инвариантных относительно группы $P(1, 6)$ (см. п. 7.2.5), а с другой — на явно ковариантных уравнениях в переменных центра масс.

Определим потенциал V в (7.3.3) с помощью следующего соотношения:

$$\left(\widehat{M} + \frac{\alpha}{x}\right)^2 = \mathbf{k}^2 + \mu^2 - \frac{i\alpha}{x^3}(k_{(1)}\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{x} - k_{(2)}\mathbf{S}_{(2)}\cdot\mathbf{x}), \tag{7.3.6}$$

где $\mathbf{x}$ — величины, канонически сопряженные к $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ — вектор, связанный с относительным импульсом $\mathbf{p}$ соотношением (7.2.21), так что

$$\mathbf{k}^2 + \mu^2 = \widetilde{M}^2, \qquad \widetilde{M} = \frac{\mu}{\varkappa} M, \quad \varkappa = m_{(1)} + m_{(2)}. \tag{7.3.7}$$

Формулы (7.3.5)—(7.3.7) задают потенциал V как неявную функцию от $\mathbf{x}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{S}_{(1)}$, и $\mathbf{S}_{(2)}$. Как легко убедиться, так определенный потенциал удовлетворяет условиям (7.3.4).

Рассматриваемый потенциал можно ввести в $P(1, 6)$-инвариантные уравнения (7.2.26), (7.2.27), последнее из которых принимает вид

$$\left[\left(\widetilde{M} + \frac{\alpha}{x}\right)^2 - \mathbf{k}^2 - \mu^2 + \frac{i\alpha}{x^3}(k_{(1)}\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{x} - k_{(2)}\mathbf{S}_{(2)}\cdot\mathbf{x})\right]\Psi_{\widetilde{m}} = 0 \tag{7.3.8}$$

и может рассматриваться как уравнение на собственные значения оператора $\widehat{M}$ из (7.3.6).

Таким образом, мы перешли от $P(1, 6)$-инвариантных уравнений (7.2.26), (7.2.27), которые описывали систему невзаимодействующих частиц, к уравнениям (7.2.26), (7.3.8), которые можно интерпретировать как математическую модель взаимодействующих частиц произвольного спина. Выбор потенциала взаимодействия обусловлен дополнительным требованием, чтобы уравнения движения допускали явно ковариантную формулировку и описывали электромагнитное взаимодействие частиц.

Покажем, что несмотря на отсутствие явной ковариантности, уравнение (7.3.8) может быть записано в ковариантных обозначениях. Рассмотрим систему уравнений в частных производных второго порядка для $(2s_{(1)} + 1)$ $(2s_{(2)} + 1)$-компонентной волновой функции следующего вида:

$$\left(\pi_\mu\pi^\mu - \mu^2 - e\sum\nolimits_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right)\Psi = 0, \tag{7.3.9}$$

где $\pi_\mu = k_\mu - eA_\mu(x_0, \mathbf{x})$, A_μ — вектор-потенциал, $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля. Символом $\sum_{\mu\nu}$ в (7.3.9) обозначим матричный тензор второго ранга, заданный в пространстве представления $D(s_1, s_2)$ группы Лоренца.

Формула (7.3.9) задает общий вид уравнения, которое может быть получено из уравнения Клейна — Гордона с помощью «минимальной» замены $k_\mu \to \pi_\mu$ и учета «аномального» взаимодействия, линейного по напряженности внешнего поля. В случае $s_1 = 0$ (или $s_2 = 0$) уравнение (7.3.9) сводится к форме (4.1.31) (так как при этом $\sum_{\mu\nu}$ пропорциональны генераторам группы Лоренца $S_{\mu\nu}$). Для произвольных s_1 и s_2, не умаляя общности, можно положить

$$\sum_{\mu\nu} = k_{(1)} S_{\mu\nu}^{(1)} + k_{(2)} S_{\mu\nu}^{(2)}, \tag{7.3.10}$$

где $k_{(1)}$ и $k_{(2)}$ — произвольные коэффициенты, $S_{\mu\nu}^{(1)}$ и $S_{\mu\nu}^{(2)}$ — коммутирующие между собой наборы матриц, принадлежащие неприводимым представлениям $D(s_1\,0)$ и $D(0\,s_2)$ группы Лоренца.

Уравнение (7.3.9) с матрицами (7.3.10) можно интерпретировать как уравнение движения заряженной квазичастицы с переменным спином s, $s = s_1 + s_2,\ s_1 + s_2 - 1,\ \ldots,\ |s_1 - s_2|$. В случае, когда вектор-потенциал A_μ сводится к потенциалу Кулона, это уравнение, будучи записано для стационарных состояний, сводится к форме (7.3.8) и, следовательно, может интерпретироваться как двухчастичное уравнение для частиц со спинами s_1 и s_2.

Таким образом, мы пришли к конструктивной модели прямого взаимодействия для двухчастичных систем с произвольным спином. В основе этой модели лежит явно ковариантное уравнение второго порядка вида (7.3.9), (7.3.10), которое является простейшим релятивистски инвариантным уравнением для $(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$-компонентной функции Ψ (преобразующейся при трехмерных поворотах системы координат по представлению $D(s_1) \otimes D(s_2)$ группы $O(3)$), учитывающим минимальное электромагнитное взаимодействие и аномальное взаимодействие типа Паули. Одно из достоинств данной модели состоит в том, что она является точно решаемой для физически важных потенциалов Кулона и магнитного монополя (а также их комбинации).

7.3.3. Решение двухчастичных уравнений. Оператор в квадратных скобках в уравнении (7.3.8) коммутирует с оператором полного момента $\mathbf{j}$ (7.2.24), поэтому оно допускает решения в разделяющихся переменных. Эти решения могут быть найдены по той же схеме, которая применялась в п. 4.2.3 для одночастичных уравнений.

Для отделения угловых переменных представим $\Psi_{\tilde{m}}$ в виде линейной комбинации шаровых спиноров

$$\Psi_{\tilde{m}} = \sum_{s,\lambda_s} \varphi_s^{\lambda_s} \Omega_{jj-\lambda_s m}^{s}, \tag{7.3.11}$$

где $\Omega_{jj-\lambda_s m}^{s}$ определяются как собственные функции операторов $\mathbf{j}^2$, $\mathbf{S}^2$, $(\mathbf{x} \times \mathbf{k})^2$ и j_3 (7.2.24), см. (4.3.4). В отличие от соответствующей формулы (4.3.3), где s было фиксировано, в соотношении (7.3.11) по s предполагается суммирование по всем возможным значениям от $s_1 + s_2$ до $|s_1 - s_2|$, а область изменения λ_s для каждого s совпадает с возможными значениями λ из (4.3.5).

Подставив (7.3.11) в (7.3.8), приходим после отделения угловых переменных к следующей системе уравнений для радиальных функций $\varphi_s^{\lambda_s}$:

$$D\varphi_s^{\lambda_s} = x^{-2} b^{ss'}_{\lambda_s \lambda_{s'}} \varphi^{s'}_{\lambda_{s'}}, \tag{7.3.12}$$

где D — оператор (4.3.11), $b^{ss'}_{\lambda_s\lambda_{s'}}$ — коэффициенты следующего вида:

$$b^{ss'}_{\lambda_s\lambda_{s'}} = \left[\lambda_s^2 - \lambda_s(2j+1)\right]\delta_{ss'}\delta_{\lambda_s\lambda_{s'}} + i\alpha k_{(1)} B^{js\lambda_s}_{(1)s'\lambda'_{s'}} + i\alpha k_{(2)} B^{js\lambda_s}_{(2)s'\lambda'_{s'}}, \tag{7.3.13}$$

а $b^{sj\lambda_s}_{(i)s'\lambda'_{s'}}$ — коэффициенты разложения вектора $s^{(i)}\cdot\widehat{x}\,\Omega^s_{jj-\lambda m}$ по шаровым спинорам, задаваемые соотношениями (4.3.64), (4.3.65).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяемая соотношениями (7.3.12), (7.3.13), легко интегрируется. Действительно, матрица $b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}}$ является диагонилизируемой (нормальной), поэтому (7.3.12) сводится к последовательности незацепляющихся уравнений вида

$$D\varphi_{\widetilde{m}} = x^{-2} b^{s_1s_2j}\varphi_{\widetilde{m}}, \tag{7.3.14}$$

где D — оператор (4.3.11), $b^{s_1s_2j}$ — собственные значения матрицы $\left\|b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}}\right\|$. А уравнения вида (7.3.14) (с другими параметрами $b^{s_1s_2j}\to b^{sj}_{\lambda}$ в правой части) уже рассматривались нами ранее в п. 4.3.2. Повторяя дословно рассуждения, приведенные после формулы (4.3.12) (но заменяя $m\to\mu$, $b^{sj}_{\lambda}\to b^{s_1s_2j}$), приходим к выводу, что связанным состояниям соответствуют следующие допустимые значения $\varepsilon = \widetilde{m}$ (ср. (4.3.27)):

$$\varepsilon = \mu\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(n' + 1/2 + \left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2 + b^{s_1s_2j}\right]^{1/2}\right)^2}\right]^{-1/2},$$
$$n' = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.3.15}$$

а явный вид соответствующих собственных функций φ_ε задается приведенной ниже формулой

$$\varphi_\varepsilon = C(\mu^2-\varepsilon^2)^{(k+1)/4} x^{(k-1)/2}\times$$
$$\times\exp\left[-(\mu^2-\varepsilon^2)^{1/2}x\right]\mathcal{F}\left(-n',\ k+1,\ 2(\mu^2-\varepsilon^2)^{1/2}x\right),$$

где $\mathcal{F}$ — вырожденная гипергеометрическая функция, C — произвольная постоянная,

$$k^2 = (2j+1)^2 + 4\left(b^{s_1s_2j}\right)^2 - 4\alpha^2.$$

Таким образом, мы описали решения уравнений (7.3.8) и нашли возможные собственные значения ε оператора $\widehat{M}$ из (7.3.6). Анализ спектра (7.3.15) приведен в п. 7. 3. 4.

Решения галилеевски инвариантных уравнений (7.3.1), (7.3.2) также могут быть найдены по аналогии с соответствующей одночастичной задачей, рассматриваемой в п. 6.6.4. Рассматривая эти уравнения в системе покоя и для стационарных состояний, приходим к следующей системе:

$$\left[\widehat{\varepsilon}+\frac{\alpha}{x}-\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}-\frac{i\alpha}{2x^3}\left(\frac{\widetilde{k}_{(1)}}{m_{(1)}}\mathbf{S}_{(1)}\cdot\mathbf{x}+\frac{\widetilde{k}_{(2)}}{m_{(2)}}\mathbf{S}_{(2)}\cdot\mathbf{x}\right)\right]\Psi_{\widetilde{\varepsilon}}(\mathbf{x})=0. \quad (7.3.16)$$

Представляя $\Psi_{\widetilde{\varepsilon}}$ в виде (7.3.11), приходим к уравнениям в форме (7.3.12) для радиальных функций, где

$$D=2\mu\left(\widetilde{\varepsilon}+\frac{\alpha}{x}\right)+\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}-\frac{j(j+1)}{x^2}, \quad (7.3.17)$$

$$b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}}=\left[\lambda_s^2-\lambda_s(2j+1)\right]\delta_{ss'}\delta_{\lambda_s\lambda'_{s'}}-$$
$$-\frac{i\widetilde{k}_{(1)}\mu\alpha}{m_{(1)}}B^{js\lambda_s}_{(1)s'\lambda'_{s'}}-\frac{i\widetilde{k}_{(2)}\mu\alpha}{m_{(2)}}B^{js\lambda_s}_{(2)s'\lambda'_{s'}}, \quad (7.3.18)$$

а $B^{js\lambda_s}_{(i)s'\lambda'_{s'}}$ — коэффициенты (4.3.64), (4.3.65). С помощью диагонализации матрицы $\left\|b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}}\right\|$ эти уравнения сводятся к форме (7.3.14), где D — оператор (7.3.17), $b^{s_{(1)}s_{(2)}j}=\widetilde{b}^{s_{(1)}s_{(2)}j}$ — собственные числа матрицы $\left\|b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}}\right\|$, определяемой соотношениями (7.3.18).

Повторяя далее почти дословно рассуждения, приведенные в п. 6.6.4 после формулы (6.6.28), получаем возможные значения внутренней энергии $\widetilde{\varepsilon}$ системы взаимодействующих нерелятивистских частиц произвольного спина в виде

$$\widetilde{\varepsilon}=\frac{\mu\alpha^2}{\left(\sqrt{(j+1/2)^2+\widetilde{b}^{s_{(1)}s_{(2)}j}}+n'+1/2\right)^2}, \quad (7.3.19)$$
$$n'=0,\ 1,\ \ldots;\ j=0,\ 1,\ \ldots \text{ либо } j=1/2,\ 3/2,\ \ldots$$

Обсуждение формулы (7.3.19) приведено в следующем пункте. Здесь мы укажем только явный вид решений уравнений (7.3.14), (7.3.17), (7.3.18):

$$\varphi^s_{\lambda_s}=((\sqrt{-2\mu\widetilde{\varepsilon}}x)^{(k-1)/2}\exp(-\sqrt{-2\mu\widetilde{\varepsilon}}x)\times$$
$$\times\mathcal{F}(-n',k+1,2\sqrt{-2\mu\widetilde{\varepsilon}}x),$$

где $\mathcal{F}$ — вырожденная гипергеометрическая функция, C — произвольная постоянная, $k^2=(2j+1)^2+4b^{s_{(1)}s_{(2)}j}$, $n'=0,\ 1,\ \ldots$.

7.3.4. Обсуждение спектра энергий двухчастичных моделей. Мы получили выше формулы (7.3.15), (7.3.19), задающие возможные значения энергии рассматриваемых двухчастичных моделей. Анализ этих формул осложняется тем обстоятельством, что входящие в них параметры $b^{s_{(1)}s_{(2)}j}$ и $\widetilde{b}^{s_{(1)}s_{(2)}j}$ определяются как корни алгебраических уравнений порядка $(2s_{(1)}+1)(2s_{(2)}+1)$ (если $j\geqslant s_{(1)}+s_{(2)}$) — характеристических уравнений для матриц $\left\|b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}}\right\|$ и

$\|\tilde{b}^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}}\|$. Поэтому рассмотрим приближенные решения, которые удобно представить в виде

$$b^{s(1)^{s(2)^j}}_{\lambda_s} = \lambda_s^2 - (2j+1)\lambda_s + b^{sj}_{\lambda_s}\alpha^2 + o(\alpha^4),$$
$$\tilde{b}^{s(1)^{s(2)^j}}_{\lambda_s} = \lambda_s^2 - (2j+1)\lambda_s + \tilde{b}^{sj}_{\lambda_s}\alpha^2 + o(\alpha^4), \tag{7.3.20}$$

где $b^{sj}_{\lambda_s}$ и $\tilde{b}^{sj}_{\lambda_s}$ — числовые параметры, значения которых для заданных $s_{(1)}$, $s_{(2)}$ и j нетрудно найти, приравнивая коэффициенты при α^2 в характеристических уравнениях.

Подставляя (7.3.20) в (7.3.15), (7.3.19) и разлагая полученные выражения в ряд по степеням α^2, приходим к следующим формулам для уровней энергий, справедливым с точностью до α^4:

$$\varepsilon = \mu\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^4\left(b^{s\lambda_s+l}_{\lambda_s} - 1\right)}{n^3(2l+1)} + \frac{3}{8}\frac{\alpha^4}{n^4}\right), \tag{7.3.21}$$

$$\tilde{\varepsilon} = -\mu\left(\frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^4\tilde{b}^{s\lambda_s+l}_{\lambda_s}}{n^3(2l+1)}\right), \tag{7.3.22}$$

где

$$n = 1,\ 2,\dots,\ s = s_{(1)} + s_{(2)},\ s_{(1)} + s_{(2)} - 1,\ \dots\ |s_{(1)} - s_{(2)}|, \tag{7.3.23}$$
$$\lambda_s = -s,\ -s+1,\ \dots,\ -s+2\min(s, j),\ l = j - \lambda_s = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1.$$

Формулы (7.3.21), (7.3.22) отличаются от соответствующих одночастичных формул (4.3.31), (6.6.31) только тем, что масса m заменена на приведенную массу μ и параметры $b^{sj}_{\lambda_s}$ и $\tilde{b}^{sj}_{\lambda_s}$ определяются несколько более сложным образом — как коэффициенты, задающие приближенные решения (7.3.20) характеристических уравнений для матриц с матричными элементами (7.3.13). (7.3.18), в то время как в одночастичных задачах эти параметры определялись при решении более простых характеристических уравнений (4.3.28) и задаются в явном виде формулами (4.3.8), (4.3.30).

Согласно (7.3.21), (7.3.22) спектр энергий рассматриваемых двухчастичных моделей определяется бальмеровским членом $-\frac{\mu\alpha^2}{2n^2}$ и дополнительными слагаемыми порядка α^4, которые описывают тонкое расщепление уровней энергии. Анализ возможных значений квантовых чисел n, l, s и λ_s, задаваемых соотношениями (7.3.23), позволяет седлать вывод, что число подуровней тонкой структуры при фиксированном значении главного квантового числа n равно

$$N^{s_1s_2}_n = \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} N^s_n,$$

где N^s_n заданы в (4.3.33). Отметим, однако, что в общем случае значения энергии, соответствующие различным l, s и λ_s, могут совпадать (т. е. быть вырожденными).

Рассмотрим подробно случаи, когда спины описываемых частиц равны: А. $s_{(1)} = 0$, $s_{(2)}$ произволен; Б. $s_{(1)} = s_{(2)} = 1/2$.

А. Если $s_{(1)} = 0$, то матрицы $\left\| b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}} \right\|$ и $\left\| \widetilde{b}^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}} \right\|$ сводятся к форме, получаемой из (4.3.11) заменой $1/s \to k_{(2)}$ и $1/s \to k_{(2)}\mu/m_{(2)}$. Соответствующие параметры, входящие в формулы (7.3.21), (7.3.22), принимают вид

$$b^{sj}_{\lambda_s} = s^2 k^2_{(2)} \widetilde{b}^{sj}_{\lambda}, \qquad \widetilde{b}^{sj}_{\lambda_s} = \frac{\mu^2}{m^2_{(2)}} s^2 \widetilde{k}^2_{(2)} \widetilde{b}^{sj}_{\lambda}, \quad s = s_{(2)}, \tag{7.3.24}$$

где $\widetilde{b}^{sj}_{\lambda}$ задаются соотношением (4.3.30). Подставив это выражение в (7.3.21), (7.3.22), получаем возможные значения энергии описываемых систем в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_\mu + \frac{\mu\alpha^4 \widetilde{b}^{s_2\lambda+l}_{\lambda}}{n^3(2l+1)} \left(k^2_{(2)} s^2_{(2)} - 1\right), \tag{7.3.25}$$

$$\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}_\mu - \mu + \frac{\mu\alpha^4 \widetilde{b}^{s_2\lambda+l}_{\lambda}}{n^3(2l+1)} \left(\frac{s^2 k^2_{(2)}\mu^2}{m^2_{(2)}} - 1\right), \tag{7.3.26}$$

где ε_μ и $\widetilde{\varepsilon}_\mu$ — значения энергии, получаемые из (4.3.31) и (6.6.31) с помощью замены $m \to \mu$.

Мы видим, что в случае $s_{(1)} = 0$ формулы для спектра энергий рассматриваемых двухчастичных моделей включают слагаемые ε_μ и $\widetilde{\varepsilon}_\mu$, получаемые умножением одночастичных значений энергии (4.3.31) и (6.6.31) на $\dfrac{m_{(1)}}{m_{(1)} + m_{(2)}}$, и дополнительные члены (пропорциональные α^4), которые обращаются в нуль при $k_{(2)} = \widetilde{k}_{(2)}\mu/m_{(2)} = \pm 1/s$. Иными словами, при приведенных значениях параметров $k_{(2)}$ и $\widetilde{k}_{(2)}$ формулы (7.3.25), (7.3.26) сводятся к формулам для энергии частицы в поле Кулона, умноженным на коэффициент, учитывающий конечность массы частицы, порождающей поле (формула (7.3.26) включает дополнительное постоянное слагаемое $-\mu$, которое несущественно). Соотношение релятивистской и нерелятивистской формул остается таким же как в одночастичной задаче (см. п. 6.6.6), т. е. при $\widetilde{k}_{(2)}\mu = m_{(2)}k_{(2)}$ уровни энергии (7.3.25), (7.3.26) различаются на величину $\Delta\varepsilon$ (6.6.34), задающую релятивистскую поправку к кинетической энергии.

Б. Для $s_{(1)} = s_{(2)} = 1/2$ характеристическое уравнение матрицы $\left\| b^{ss'}_{\lambda_s\lambda'_{s'}} \right\|$ (7.3.13) принимает вид

$$\left(b^j_{\lambda_s}\right)^4 - 2\left(b^j_{\lambda_s}\right)^3 - [4j(j+1) - \alpha^2(c^2+d^2)]\left(b^j_{\lambda_s}\right)^2 -$$
$$- 2\alpha^2 d^2 b^j_{\lambda_s} + \alpha^2 c^2 d^2 = 0, \tag{7.3.27}$$

где

$$b^{j}_{\lambda_s} = b_{\lambda_s}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}j}, \quad c = \frac{1}{2}(k_{(1)} + k_{(2)}), \quad d = \frac{1}{2}(k_{(1)} - k_{(2)}), \quad j \neq 0. \tag{7.3.28}$$

Представляя решения этого уравнения в виде (7.3.20) и приравнивая коэффициенты при низших степенях α^2, получаем следующие значения параметров $b^{sj}_{\lambda_s}$:

$$\begin{aligned} b_0^{0\,l} &= -\frac{d^2}{4l(l+1)}\left(1 - \sqrt{1 + 4l(l+1)\frac{c^2}{d^2}}\right), \\ b_0^{1l} &= -\frac{d^2}{4l(l+1)}\left(1 + \sqrt{1 + 4l(l+1)\frac{c^2}{d^2}}\right), \\ b_1^{1\,l+1} &= \frac{(l+1)c^2 + (l+2)d^2}{2(l+1)(2l+3)}, \quad b^{1}_{-1}{}^{l-1} = -\frac{c^2 l + d^2(l-1)}{2l(2l-1)}. \end{aligned} \tag{7.3.29}$$

В особом случае $j = 0$ индекс λ_s может принимать только два значения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_0 = 0$ (см. (7.3.23)), а соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(b_{\lambda_s}^{s_1 s_2 0}\right)^2 - 2b_{\lambda_s}^{s_1 s_2 0} + \alpha^2 c^2 = 0,$$

откуда и из (7.3.20) получаем

$$b_0^{00} = -b_{-1}^{10} = c^2/2. \tag{7.3.30}$$

Формулы (7.3.25), (7.3.29), (7.3.30) определяют возможные значения энергии рассматриваемой модели системы двух взаимодействующих частиц со спинами 1/2. Благодаря наличию двух произвольных параметров c и d имеются достаточно широкие возможности моделирования спектра водородоподобных систем. Рассмотрим два предельных случая: систему из частицы и античастицы и систему, состоящую из частиц с существенно разными массами.

В случае системы «частица + античастица» естественно положить $k_{(1)} = -k_{(2)} = d$. Тогда $c = 0$ и формулы (7.3.29) принимают вид

$$\begin{aligned} b_0^{0l} &= 0, \quad b_0^{1\,l} = -\frac{d^2}{2l(l+1)}, \\ b_1^{1l+1} &= \frac{d^2(l+2)}{2(l+1)(2l+3)}, \quad b_{-1}^{1l-1} = -d^2\frac{l-1}{2l(2l-1)}. \end{aligned} \tag{7.3.31}$$

Подставив (7.3.31) в (7.3.25), получаем соответствующие выражения для уровней энергии в виде

$$\varepsilon = \mu\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right) + W(s, j, l), \qquad j = l + \lambda_s, \tag{7.3.32}$$

где $W(s, j, l)$ — поправки порядка α^4, задающие тонкую структуру спектра:

$$W(0, l, l) = \mu\alpha^4\left(\frac{3}{8n^4} - \frac{1}{n^3(2l+1)}\right),$$
$$W(1, l, l) = W(0, l, l) - \frac{\mu\alpha^4 d^2}{2n^3 l(l+1)(2l+1)}, \qquad l \neq 0, \tag{7.3.33}$$

$$W(1, l, l+1) = W(0, l, l) + \frac{\mu\alpha^4 (l+2) d^2}{2n^3 (l+1)(2l+1)(2l+3)},$$
$$W(1, l, l-1) = W(0, l, l) - \frac{\mu\alpha^4 (l-1) d^2}{2n^3 l(2l+1)(2l-1)}. \tag{7.3.34}$$

В случае $d^2 = 1$ формулы (7.3.33) прекрасно согласуются с соответствующими формулами для поправок порядка α^4 к уровням энергии позитрония, вычисленных в рамках квантовой электродинамики [6]. А именно, поправки (7.3.33) отличаются от соответствующих поправок к спектру позитрония на величину ΔW, которая не зависит от l и s (при $l \neq 0$):

$$\Delta W = \frac{\mu\alpha^4}{32n^4} \approx 0{,}03\frac{\mu\alpha^4}{n^4}. \tag{7.3.35}$$

Несколько хуже согласуются с известными результатами формулы (7.3.34). Однако, если произвольные параметры a и b в (7.3.29) выбрать в виде $c^2 = 2d^2 = 2$, то соотношения (7.3.21), (7.3.29) дают такую же зависимость поправки ΔW от l, s и j, как и соответствующие формулы квантовой электродинамики для ортопозитрония [1, 6] (с точностью до общего сдвига (7.3.35)).

Таким образом, математическая модель системы двух взаимодействующих частиц, основанная на уравнении (7.3.9), является достаточно содержательной и позволяет получить правильную зависимость тонкой структуры спектра позитрония от квантовых чисел l, s и j. Смещение ΔW (7.3.35) невелико и одинаково для всех подуровней, соответствующих фиксированному значению главного квантового числа n (если $l \neq 0$). Для $l = 0$ расхождение с известными результатами достигает 17 % от величины тонкого расщепления, что совершенно естественно, так как рассматриваемая модель явно не учитывает обменного взаимодействия.

Отметим еще, что в случае $c = d = 1$, когда формулы (7.3.29) принимают вид

$$b_0^{0l} = b_1^{1l+1} = \frac{1}{2(l+1)}, \qquad b_0^{1l} = b_{-1}^{1l-1} = -\frac{d^2}{l},$$

соотношение (7.3.25) сводится к формуле, получаемой из (4.3.31) заменой m на приведенную массу μ. Иными словами, в случае $b \to 0$ мы получаем из (7.3.25) известную формулу тонкой структуры спектра атома водорода с поправкой на конечность массы ядра.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что рассматриваемая точно решаемая модель двухчастичного взаимодействия является вполне реалистической и позволяет надеяться на ее успешное применение при описании систем частиц с внешними спинами.

Анализ нерелятивистского спектра энергий, задаваемого формулой (7.3.22), может быть проведен в полной аналогии с релятивистским случаем. Для $|\tilde{k}_{(i)}\mu| = |m_{(i)}k_{(i)}|$ уровни энергии (7.3.22) отличаются от уровней (7.3.21) на величину $\Delta\varepsilon - \mu$, где $\Delta\varepsilon$ задано в (6.6.34) и соответствует релятивистской поправке к кинетической энергии.

ДОПОЛНЕНИЕ

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ПУАНКАРЕ И ГАЛИЛЕЯ

Приведем весьма краткую сводку результатов работ [4*—9*, 10*—13*, 18*—24*], в которых рассматриваются нелинейные уравнения, обладающие такими же симметрийными свойствами, как линейные уравнения Даламбера, Дирака, Шредингера, Максвелла.

Для нелинейных дифференциальных уравнений не выполняется принцип суперпозиции, поэтому важно выделить из всего множества, например, уравнений первого и второго порядка такие, которые инвариантны относительно широких групп. Симметрийные свойства таких уравнений дают возможность по одному частному решению (иногда даже тривиальному) построить широкие классы точных решений довольно сложных нелинейных уравнений.

§ 1. Симметрийный анализ и точные решения скалярного нелинейного волнового уравнения

1. Рассмотрим нелинейное уравнение Даламбера

$$p_\mu p^\mu U + F(U) = 0, \tag{Д1.1}$$

$F(U)$ — гладкая функция, $U = U(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — действительная скалярная функция.

Обозначим символом $\widetilde{P}(1, n)$ расширенную группу Пуанкаре, т. е. группу $P(1, n)$, дополненную однопараметрической группой масштабных преобразований (1.1.52).

Теорема Д1 [215]. *Уравнение* (Д1.1) *инвариантно относительно алгебры* $A\widetilde{P}(1, n)$ *только в таких двух случаях:*

$$F(U) = F_1(U) = \lambda_1 U^r, \qquad r \neq 1, \tag{Д1.2}$$

$$F(U) = F_2(U) = \lambda_2 \exp U, \tag{Д1.3}$$

где λ_1, λ_2, r — *произвольные константы, соответствующие базисные элементы алгебры* $A\widetilde{P}(1, n)$ P_μ, $J_{\mu\nu}$ *имеют вид* (1.1.6), *а генератор масштабных преобразований задается одной из формул*:

$$D = D_1 = x_\mu p^\mu - \frac{2i}{1-r}\frac{\partial}{\partial U},$$

$$D = D_2 = x_\mu p^\mu - 2i\frac{\partial}{\partial U}. \tag{Д1.5}$$

Замечание 1. Уравнение (Д1.1) с нелинейностью (Д1.3) в двумерном пространстве $R(1, 1)$ инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебры алгебру $A\widetilde{P}(1, 1)$. Эта симметрия дает возможность построить лиувиллевское решение [215]

$$U(x_0, x_1) = \ln\left\{\frac{-8\dot{f}_1(x_0+x_1)\,\dot{f}_2(x_0-x_1)}{\lambda_2\left[f_1(x_0+x_1)+f_2(x_0-x_1)\right]^2}\right\}, \tag{Д1.6}$$

где f_1, f_2 — произвольные гладкие функции, $\dot{f}$ — производная по сответствующему аргументу.

Замечание 2. Решения (Д1.6) имеют непертурбационный характер (сингулярность в точке $\lambda_2 = 2$), поэтому к уравнению (Д1.1), (Д1.3) неприменим стандартный метод малого параметра. Сингулярные решения двумерного уравнения Лиувилля исследованы в работе [3*].

Замечание 3. При $r = (n+3)/(n-1)$ уравнение (Д1.1) с нелинейностью (Д1.2) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, n) \supset \supset A\widetilde{P}(1, n)$, базисные элементы которой имеют вид (1.1.6), (1.1.16).

2. Для построения частных решений нелинейного волнового уравнения (Д1.1) используем анзац

$$U(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{Д1.7}$$

предложенный в [6*], который эффективно реализован для многих нелинейных уравнений математической физики [127. 18*—24*]. В (Д1.7) $\varphi(\omega)$ — функция, подлежащая определению, которая зависит от инвариантных переменных $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Явный вид функций $f(x)$, $g(x)$ определяется из условия «разделения» переменных, т. е. из требования, чтобы в уравнение для $\varphi(\omega)$ не входили явно переменные $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Инвариантные переменные $\omega(x)$ являются первыми интегралами соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа [6*, 13*, 23*].

Приведем один из возможных анзацев (Д1.7) для уравнения (Д1.1) с нелинейностью (Д1.2), который редуцирует его к уравнению с тремя независимыми переменными:

$$U(x) = [(c\cdot x)^2 + (d\cdot x)^2]^{2/(1-r)}\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \qquad r \neq 1, \tag{Д1.8}$$

$$\omega_1 = \frac{a\cdot x}{b\cdot x}, \quad \omega_2 = \left[(c\cdot x)^2 + (d\cdot x)^2\right](a\cdot x\, b\cdot x)^{-1},$$

$$\omega_3 = \ln\left[(c\cdot x)^2 + (d\cdot x)^2\right] + 2\theta \operatorname{arctg}\frac{c\cdot x}{d\cdot x},$$

где $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$, $d = (d_0, d_1, d_2, d_3)$ — параметры, удовлетворяющие условиям

$$a^2 = -b^2 = -c^2 = -d^2 = 1,$$

$$a\cdot b = a\cdot c = a\cdot d = b\cdot d = b\cdot c = c\cdot d = 0,$$

$$a\cdot x \neq 0, \qquad b\cdot x \neq 0, \qquad c\cdot x \neq 0, \qquad a^2 = a\cdot a,$$

$$a\cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \qquad \theta \text{ — произвольный параметр.}$$

Анзац (Д1.8) редуцирует уравнение (Д1.1) с нелинейностью (Д1.2) к уравнению с переменными коэффициентами:

$$\left(1+\omega_1^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} - 4\left(1+\theta^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_3^2} - \omega_3^3\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2\partial\omega_3} + \omega_2^2\left[\omega_2\left(\omega_1+\omega_1^{-1}\right) - 4\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} -$$

$$- 2\omega_2^2\left(1+\omega_1^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1\partial\omega_2} - 2\omega_1\omega_2\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} + 4k\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3} - k^2\varphi + \lambda_1\varphi^r = 0, \quad k = \frac{2}{r-1}. \tag{Д1.9}$$

Найти частные решения уравнения (Д1.9) трудно, поэтому нужно редуцировать его к уравнению с двумя независимыми переменными, которое в свою очередь следует (можно) редуцировать к обыкновенному дифференциальному уравнению (о. д. у.). В ряде случаев нелинейное о. д. у, удается решить аналитически. Приведем два многопараметрических семейства точных решений уравнения Даламбера, полученных по указанной схеме:

$$U = [(a\cdot x)^2 + b\cdot x\, c\cdot x]^{1/(1-r)},$$

$$a\cdot b = a\cdot c = b^2 = c^2 = 0, \quad 2a^2 = b\cdot c = \frac{\lambda(r-1)^2}{r-3}, \quad r \neq 3, \tag{Д1.10}$$

$$U = [\Phi(a\cdot x) + b\cdot x]^{2/(1-r)}, \tag{Д1.11}$$

Φ — произвольная гладкая функция,

$$a\cdot a = a\cdot b = 0, \qquad b\cdot b = -\frac{1}{2}\lambda_1(1-r^2)(1+r)^{-1}, \qquad r \neq -1.$$

Формула (Д1.11) задает решение уравнения (Д1.1) через произвольную функцию, поэтому ее можно использовать для изучения соответствующей начальной или краевой задачи. Более общие классы точных решений уравнения (Д1.1) построены в [13*, 215].

Нелинейные уравнения для комплексного поля $U(x)$ рассмотрены в [11*].

§ 2. Симметрия и некоторые точные решения нелинейного уравнения Дирака

1. Естественным обобщением линейного уравнения Дирака является уравнение

$$[\gamma^\mu p_\mu + F(\overline{\Psi}, \Psi)]\Psi = 0, \tag{Д2.1}$$

где $F(\overline{\Psi}, \Psi)$ — произвольная четырехрядная матрица, элементы которой являются гладкими функциями полевых переменных $\overline{\Psi}$, Ψ. Описание всех матриц $F(\overline{\Psi}, \Psi)$, при которых уравнение (Д2.1) инвариантно относительно групп $P(1, 3)$, $\widetilde{P}(1, 3)$, $C(1, 3)$, дает следующее утверждение.

Теорема Д2 [19*]. *Уравнение* (Д2.1) *пуанкаре-инвариантно тогда и только тогда, когда*

$$F(\overline{\Psi}, \Psi) = F_1 + F_2\gamma_4 + F_3\gamma^\mu\overline{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi + F_4 S^{\nu\mu}\overline{\Psi}\gamma_4 S_{\mu\nu}\Psi, \tag{Д2.2}$$

где $F_1, \ldots, F_4$ — произвольные скалярные функции от $\overline{\Psi}\Psi$, $\overline{\Psi}\gamma_4\Psi$.

Теорема Д3 [19*]. *Уравнение* (Д2.1) *инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1, 3)$, если и только если $F(\overline{\Psi}, \Psi)$ имеет вид*

$$F_i = (\overline{\Psi}\Psi)^{\frac{1}{2k}}\widetilde{F}_i, \qquad i = 1, 2, \quad F_j = (\overline{\Psi}\Psi)^{\frac{1-2k}{2k}}\widetilde{F}_j, \qquad j = 3, 4, \tag{Д2.3}$$

где $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_4$ — произвольные функции от $\dfrac{\overline{\Psi}\Psi}{\overline{\Psi}\gamma_4\Psi}$.

Теорема Д4 [19*]. *Уравнение* (Д2.1), (Д2.2) *инвариантно относительно конформных преобразований* (1.2.58) *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} F_i &= (\overline{\Psi}\Psi)^{-1/3}G_i, \qquad i = 1, 2,\\ F_j &= (\overline{\Psi}\Psi)^{-2/3}G_j, \qquad j = 3, 4, \end{aligned} \tag{Д2.4}$$

G_i, G_j — произвольные функции от $\dfrac{\overline{\Psi}\Psi}{\overline{\Psi}\gamma_4\Psi}$.

Простейшие конформно-инвариантные уравнения из класса (Д2.1), (Д2.2), (Д2.4) имеют вид

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\overline{\Psi}\Psi)^{1/3}]\Psi = 0, \tag{Д2.5}$$

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda\gamma^\mu\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi(\overline{\Psi}\gamma_\nu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\nu\Psi)^{-1/3}]\Psi = 0. \tag{Д2.6}$$

Уравнение (Д2.5) впервые получил Гюрши [26*].

Замечание. Существуют пуанкаре-инвариантные уравнения первого порядка для спинорного поля, которые имеют более широкую симметрию, чем уравнение Дирака (Д2.1). Одним из таких уравнений является система [127, 9*]

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi p_\mu\Psi = 0. \tag{Д2.7}$$

Уравнение (Д2.4) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры.

2. Рассмотрим $\widetilde{P}(1, 3)$-инвариантное нелинейное уравнение вида

$$\left[\gamma_\mu p^\mu + \lambda \left(\overline{\Psi}\Psi\right)^{\frac{1}{2k}}\right]\Psi = 0, \tag{Д2.8}$$

λ, k — произвольные константы, $k \neq 0$. Решения уравнения (Д2.8) ищем в виде [127, 6*]

$$\Psi = A(x)\varphi(\omega), \tag{Д2.9}$$

где $A(x)$ — 4×4-матрица, $\varphi(\omega)$ — четырехкомпонентная функция-столбец, зависящая от трех новых переменных ω:

$$\omega = \{\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \omega_3(x)\}.$$

Анзац (Д2.9) приведет к уравнению для вектор-функции $\varphi(\omega)$, которое зависит только от переменных ω, если матрица $A(x)$ и ω_i удовлетворяют уравнениям [22*, 31*—33*]

$$\left(\xi^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta(x)\right)A(x) = 0, \tag{Д.2.10}$$

$$\xi^\mu(x)\frac{\partial\omega_i}{\partial x^\mu} = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{Д.2.11}$$

где $\xi^\mu(x)$, $\eta(x)$ — коэффициенты инфинитезимальных операторов группы $\widetilde{P}(1, 3)$.

Не вдаваясь в технические детали, приведем в явном виде два решения [22*]:

$$\begin{aligned} &A(x) = (x_0 - x_2)^{-k}\exp\left\{\frac{1}{2a}\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0)\ln(x_0 - x_2)\right\},\\ &\omega_1 = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)x_3^{-2}, \qquad \omega_2 = (x_0 - x_2)\,x_3^{-1},\\ &\omega_3 = a x_1 (x_0 - x_2)^{-1} - \ln(x_0 - x_2), \qquad a \neq 0. \end{aligned} \tag{Д2.12}$$

Если $a = 0$, то $A(x) = \exp\left[\dfrac{x_1}{2(x_0 - x_1)}\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0,)\right]$,

$$A(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2}\exp\left[\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1\ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right],$$

$\beta \neq 0$,

$$\begin{aligned} &\omega_1 = (2x_0 + 2x_1 + \beta)\exp\left[2(x_1 - x_0)\beta^{-1}\right],\\ &\omega_2 = (2x_0 + 2x_1 + \beta)\left(x_2^2 + x_3^2\right)^{-1},\\ &\omega_3 = b\ln\left(x_2^2 + x_3^2\right) + 2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}, \end{aligned} \tag{Д2.13}$$

где b, β — произвольные параметры.

Приведем явный вид решений уравнения (Д2.8) для трех значений параметра k [22*].

Случай $k = 1/2$:

$$\Psi = \left[(a\cdot z)^2 + (b\cdot z)^2\right]^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma\cdot a\gamma\cdot b\operatorname{arctg}\frac{a\cdot z}{b\cdot z}\right)\exp\left\{i\lambda\frac{\overline{\chi}\chi}{2(1+\theta^2)}(\gamma\cdot b + \right.$$

$$\left. + \theta\gamma\cdot a)\left[\ln\left((a\cdot z)^2 + (b\cdot z)^2\right) + 2\theta\operatorname{arctg}\frac{a\cdot z}{b\cdot z}\right]\right\}\chi, \tag{Д2.14}$$

$z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, $\theta = \sqrt{\theta \cdot \theta}$, a_μ, b_μ, θ_μ — произвольные параметры, удовлетворяющие условиям $a \cdot a \equiv a_\mu a^\mu = -1$, $b \cdot b \equiv b_\mu b^\mu = -1$, $a \cdot b = a_\mu b^\mu = 0$, χ — постоянный спинор.

Случай $k \neq 1/2$:

$$\Psi = [(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2]^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma \cdot a \gamma \cdot b \operatorname{arctg}\frac{a \cdot z}{b \cdot z}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{2ik\lambda}{2k-1}\gamma \cdot b\,(\bar{\chi}\chi)^{\frac{1}{2k}}\,[(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2]^{\frac{1-2k}{4k}}\right\}\chi. \qquad (Д2.15)$$

Случай $k = \frac{1}{3}$ [216]:

$$\Psi = \gamma \cdot x (x \cdot x)^{-2} \exp\,[i\lambda k \gamma \cdot \beta\,\beta \cdot x (x \cdot x)^{-1}]\chi, \qquad (Д2.16)$$
$$\beta \cdot \beta > 0, \qquad x \cdot x \neq 0.$$

Приведенные выражения (Д2.11) — (Д2.16) задают многопараметрические семейства точных решений уравнения (Д2.8).

В случае $k = 1/3$ уравнение (Д2.9) конформно-инвариантно, а это означает, что если знаем какое-то решение Ψ уравнения (Д2.9), то другое решение Ψ' строится по формуле (1.2.58).

С помощью приведенных анзацев в [18*, 24*] построены семейства частных точных решений классических уравнений электродинамики

$$(\gamma^\mu p_\mu + e\gamma_\mu A^\mu + m)\Psi = 0,$$
$$p_\nu p^\nu A_\mu - p_\mu p_\nu A^\nu = e\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$$

и многих других нелинейных систем квантовой теории.

Мы здесь не рассматриваем двумерные нелинейные интегрируемые уравнения, которым посвящены многочисленные работы (см. [291] и цитируемую там литературу).

§ 3. Нелинейные уравнения типа Шредингера, инвариантные относительно группы Галилея

1. Рассмотрим следующее нелинейное обобщение уравнения Шредингера (6.1.3):

$$\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right)U + F(x, U, U^*) = 0, \qquad \textbf{(Д.3.1)}$$

F — произвольная дифференцируемая функция.

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (Д3.1) при $F = 0$ является алгебра Шредингера ASch (1, 3), базисные элементы которой задаются формулами (6.1.5). Подалгебру алгебры ASch (1, 3), включающую базисные элементы P_0, P_a, J_a, G_a, D (6.1.5), будем обозначать символом $\widetilde{\mathrm{AG}}$ (1, 3), а алгебру Галилея — символом AG (1, 3).

Симметрия уравнения (Д3.1), очевидно, зависит от структуры функции F.

Теорема Д5 [6*, 23*]. *Уравнение* (Д3.1) *инвариантно относительно следующих алгебр:*

AG (1, 3) — *тогда и только тогда, когда* $F = \Phi(|U|)U$, Φ — *произвольная гладкая функция;*

$\widetilde{\mathrm{AG}}$ (1, 3) — *тогда и только тогда, когда* $F = \lambda|U|^k U$, λ, k — *произвольные параметры; соответствующий генератор масштабных преобразований* D *имеет вид* $D = 2x_0p_0 + x^ap_a + 2i/k$, $k \neq 0$;

ASch (1, 3) — *тогда и только тогда, когда* $F = \lambda|U|^{3/4}U$.

Более общие уравнения, чем (Д3.1), исследованы в [14*]. Одно из таких нелинейных уравнений, не принадлежащее классу (Д3.1), выглядит как

$$\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) U + \lambda U \frac{\partial (UU^*)}{\partial x_a} \frac{\partial (UU^*)}{\partial x_a} (UU^*)^{-2} = 0. \qquad (\text{Д}3.2)$$

Уравнение (Д3.2) инвариантно относительно алгебры $A\widetilde{G}(1, 3)$. В [14*], используя непрерывные подгруппы группы Галилея [129], построены широкие классы точных решений уравнения (Д3.2).

2. Приведем, следуя [23*], три анзаца и три семейства точных решений нелинейного уравнения

$$\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) U + \lambda |U|^{4/3} U = 0. \qquad (\text{Д}3.3)$$

Решения ищем в виде (Д1.7), где φ — функция, подлежащая определению, зависит от трех инвариантных переменных ω_1, ω_2, ω_3. Явный вид функций $f(x)$ и переменных ω, при которых четырехмерное уравнение (Д3.3) редуцируется к трехмерному уравнению, задается формулами

$$\begin{aligned} &f(x) = \left(1 - x_0^2\right)^{-3/4} \exp\left[\frac{imx_0x^2}{2\left(1 - x_0^2\right)}\right], \\ &\omega_1 = a \cdot x \left(1 - x_0^2\right)^{-1/2}, \qquad \omega_2 = x^2 \left(1 - x_0^2\right)^{-1}, \\ &\omega_3 = \operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg} \frac{b \cdot x}{c \cdot x}, \\ &x^2 = x \cdot x, \quad b \cdot x = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \end{aligned} \qquad (\text{Д}3.4)$$

$$\begin{aligned} &f(x) = x_0^{-3/2} \exp\left(\frac{-imx^2}{2x_0}\right), \\ &\omega_1 = a \cdot x\, x_0^{-1}, \quad \omega_2 = x^2 x_0^{-2}, \quad \omega_3 = x_0^{-1} + \operatorname{arctg} \frac{b \cdot x}{c \cdot x}, \end{aligned} \qquad (\text{Д}3.5)$$

$$\begin{aligned} &f(x) = x_0^{-3/4}, \\ &\omega_1 = a \cdot x x_0^{-1/2}, \quad \omega_2 = b \cdot x\, x_0^{-1/2}, \quad \omega_3 = c \cdot x\, x_0^{-1/2}, \end{aligned} \qquad (\text{Д}3.6)$$

где a, b, c — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = 1, \qquad a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = 0.$$

Точные решения уравнения (Д3.9) строятся с помощью анзацев (Д3.4) — (Д3.8). Наиболее простые из них имеют вид

$$U = \left(1 - x_0^2\right)^{-3/4} \exp\left[\frac{imx^2}{2\left(1 - x_0\right)}\right], \qquad \lambda = \frac{3}{2} i, \qquad (\text{Д}3.7)$$

$$U = x_0^{-3/2} \exp\left[-\frac{im}{2}\left(x^2 - r \cdot x\right) x_0^{-1}\right], \qquad r^2 = -\frac{8\lambda}{m}, \qquad (\text{Д}3.8)$$

$$U = x_0^{-3/2} \varphi(\omega_1) \exp\left(-\frac{imx^2}{2x_0}\right), \qquad \omega_1 = \frac{a \cdot x}{x_0}. \qquad (\text{Д}3.9)$$

Функция $\varphi(\omega_1)$ определяется эллиптическим интегралом

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\left(k_1 + \tau^{10/3}\right)^{1/2}} = \left(\frac{6}{5}\lambda m\right)^{1/2} (\omega_1 + k_2),$$

k_1, k_2 — произвольные постоянные.

Формулы (Д3.7) — (Д3.9) задают многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения (Д3.3). По решениям (Д3.7) — (Д3.9) можно построить новые решения. Если $U = U_1(x)$ — какое-то решение уравнения (Д3.3), то новые решения U_2, U_3 находятся по формулам

$$U_2 = U_1(x_0, \mathbf{x} + \mathbf{v}x_0) \exp\left[im\left(\frac{\mathbf{v}^2 x_0}{2} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}\right)\right],$$

$$U_3 = U_1\left(\frac{x_0}{1 - ax_0}, \frac{\mathbf{x}}{1 - ax_0}\right)(1 - ax_0)^{-3/2} \exp\left[\frac{iam\mathbf{x}^2}{2(1 - ax_0)}\right],$$

где a, $\mathbf{v}$ — произвольные постоянные. Эти формулы отражают тот факт, что уравнение (Д3.3) инвариантно относительно группы G (1, 3). Более подробно эти вопросы освещены в [13*, 23*].

§ 4. Симметрия нелинейных уравнений электродинамики

Электромагнитное поле в среде описывается с помощью уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_0} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_0} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad (Д4.1)$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы индукции, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженностей. К недоопределенной системе (Д4.1) следует добавить материальные уравнения, связывающие $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Эти дополнительные связи (уравнения) отражают свойства среды.

В этом параграфе, следуя [8*], приведем некоторые результаты о симметрийных свойствах уравнений (Д4.1), дополненных материальными уравнениями. Уравнения (Д4.1) без дополнительных условий инвариантных относительно бесконечномерной алгебры, содержащей в качестве подалгебры алгебру группы IGL (4, R) [126].

Зададим материальные уравнения в виде следующих функциональных соотношений:

$$\mathbf{E} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{D}, \mathbf{H}), \qquad \mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{D}, \mathbf{H}), \qquad (Д4.2)$$

где $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{F}$ — произвольные гладкие функции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$.

Теорема Д6. *Система уравнений* (Д4.1), (Д4.2) *инвариантна относительно группы* $P(1, 3)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{D} = M\mathbf{E} + N\mathbf{B}, \qquad \mathbf{H} = M\mathbf{B} - N\mathbf{E}, \qquad (Д4.3)$$

где $M = M(C_1, C_2)$, $N = N(C_1, C_2)$ — *произвольные функции от инвариантов электромагнитного поля,*

$$C_1 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \qquad C_2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}. \qquad (Д4.4)$$

Доказательство теоремы приведено в [8*].

В том случае, когда $M = L^{-1}$, $N = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}L^{-1}$, $L = (1 - \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2)^{1/2}$, система (Д4.1), (Д4.3) совпадает с уравнениями Борна — Инфельда [17*].

Если в (Д4.3) положить $M = \varepsilon$, $N = -\mu \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$, μ, ε — константы, то материальные уравнения принимают форму

$$\mathbf{D} = \varepsilon\left[1 + \frac{\mu^2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2}{\varepsilon(\varepsilon+\mu\mathbf{E}^2)^2}\right]\mathbf{E} - \frac{\mu\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{\varepsilon(\varepsilon+\mu\mathbf{E}^2)}\mathbf{H},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{H} - \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{(\varepsilon+\mu\mathbf{E}^2)}\mathbf{E}.$$

В литературе часто встречаются материальные уравнения вида

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{E}, \mathbf{H})\mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E}, \mathbf{H})\mathbf{E}. \tag{Д4.5}$$

Из теоремы Д6 следует, что пуанкаре-инвариантные материальные уравнения (Д4.5) сводятся к линейным сотношениям

$$\mathbf{D} = \mu\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{H} \qquad (\mu = \text{const}). \tag{Д4.6}$$

Естественно выяснить вопрос о том, какие ограничения накладываются на функции $M(C_1, C_2)$ и $N(C_1, C_2)$ требованием конформной инвариантности. Ответ на него дает

Теорема Д7. *Система уравнений* (Д4.1), (Д4.3) *инвариантна относительно группы* $C(1, 3)$, *если*

$$M = M(C_1/C_2), \qquad N = N(C_1/C_2).$$

Доказательство приведено в [8*].

Если M и N выбрать, например, в виде $M = \mu(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)/\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$, $N = 0$, то конформно-инвариантные материальные уравнения выглядят как

$$\mathbf{D} = \sqrt{\frac{\mu\mathbf{H}^2}{\mu\mathbf{E}^2 - \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}}\,\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \sqrt{\frac{\mu\mathbf{E}^2 - \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{\mu\mathbf{H}^2}}\,\mathbf{H}.$$

Замечание 1. Нелинейное уравнение Борна — Инфельда не инвариантно относительно группы $C(1, 3)$.

Замечание 2. Другой класс нелинейных уравнений для электромагнитного поля предложен в [5*]:

$$D^{\mu}F_{\nu\mu} = j_{\nu}, \qquad D_{\alpha}F^{\mu\nu} + D_{\nu}F^{\alpha\mu} + D_{\mu}F^{\nu\alpha} = 0, \qquad j_{\nu} = A_{\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta},$$

$$D^{\mu} = A_1\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + A_2F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + A_3\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}},$$

где A_1, A_2, A_3, $A_{\nu\alpha\beta}$ — произвольные функции от инвариантов электромагнитного поля $C_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $C_2 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$ и производных $\dfrac{\partial C_1}{\partial x_{\mu}}\dfrac{\partial C_1}{\partial x^{\mu}}$, $\dfrac{\partial C_2}{\partial x_{\mu}}\dfrac{\partial C_2}{\partial x^{\mu}}$.

§ 5. Принцип относительности Галилея и нелинейные уравнения теплопроводности

1. Общепринято считать (см., например, [2*]), что нелинейные процессы теплопроводности описываются уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_a}\left[C(U)\frac{\partial U}{\partial x_a}\right] = 0, \tag{Д5.1}$$

где $U = U(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $C(U)$ — вещественные функции. Групповые свойства соответствующего одномерного линейного уравнения ($C(U) = \text{const}$, $a = 1$) полностью исследовал, как мы уже отмечали, Ли [262]. Групповой анализ одномерного нелинейного уравнения (Д5.1) осуществил Л. В. Овсянников [75]. Групповые свойства трехмерного уравнения (Д5.1) исследованы в [1*].

В [6*] обращено внимание на то, что среди множества нелинейных уравнений (Д5.1) не существует ни одного, для которого выполнялся бы принцип относительности Галилея. То есть уравнение (Д5.1) не инвариантно относительно преобразований (6.1.20).

Из сказанного следует [6*], *что если принцип относительности Галилея справедлив для явлений тепломассопереноса, то либо уравнение (Д5.1) непригодно для описания нелинейных процессов теплопроводности и его следует заменить другим, либо из множества решений (Д5.1) необходимо выделить* такое подмножество, которое было бы инвариантным относительно преобразований Галилея. Первая возможность обсуждена в [6*]. Здесь мы рассмотрим вторую возможность, то есть покажем, что если к уравнению (Д5.1) присоединить некоторое дополнительное условие, то уравнение (Д5.1) совместно с дополнительным условием инвариантно относительно преобразований (6.1.20).

2. Рассмотрим некоторое нелинейное уравнение второго порядка

$$L\left(x, U, \underset{1}{U}, \underset{2}{U}, \ldots, \underset{n}{U}\right)=0, \qquad x \in R(1, n),$$
$$\underset{1}{U}=\left(\frac{\partial U}{\partial x_{0}}, \frac{\partial U}{\partial x_{1}}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_{n}}\right), \tag{Д5.2}$$
$$\underset{2}{U}=\left(\frac{\partial^{2} U}{\partial x_{0}^{2}}, \frac{\partial^{2} U}{\partial x_{0} \partial x_{1}}, \ldots, \frac{\partial^{2} U}{\partial x_{n}^{2}}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Определение 1 (С. Ли). Уравнение (Д5.2) инвариантно относительно операторов

$$X=\xi^{\mu}(x, U) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+\eta(x, U) \frac{\partial}{\partial U}, \qquad \mu=0,1, \ldots, n, \tag{Д5.3}$$

если

$$\left.\widetilde{X} L\right|_{L=0}=0, \quad \text{или} \quad \widetilde{X} L=\lambda\left(x, U, \underset{1}{U}, \ldots, \underset{n}{U}\right) L, \tag{Д5.4}$$

где $\widetilde{X}$ — соответствующее продолжение оператора X, λ — произвольная гладкая функция (определение продолжения оператора см. в [75]).

Пусть некоторый оператор Q не принадлежит алгебре инвариантности уравнения (Д5.2) и его продолжение $\widetilde{Q}$ задается формулой

$$\widetilde{Q} L=\lambda_{0} L+\lambda_{1} L_{1}, \tag{Д5.5}$$
$$\widetilde{Q} L_{1}=\lambda_{2} L+\lambda_{3} L_{1}, \tag{Д5.6}$$
$$L_{1} \equiv L_{1}\left(x, U, \underset{1}{U}, \underset{2}{U}\right)=0. \tag{Д5.7}$$

Определение 2 [128, 6*]. Будем говорить, что уравнение (Д5.2) условно инвариантно, если оно вместе с уравнением (Д5.7) инвариантно относительно оператора Q, т. е. если выполнены условия (Д5.5), (Д5.6).

Дополнительное условие (Д5.7) выделяет из всего множества решений уравнения (Д5.2) такие подмножества, которые имеют более широкую симметрию, чем все множество решений уравнения (Д5.2). В данном определении, конечно, предполагается, что система (Д5.2), (Д5.7) совместна. Очевидно, что не всякое дополнительное условие (уравнение) расширяет симметрию исходного уравнения. Поэтому важно научиться строить такие дополнительные условия, чтобы симметрия всей системы была шире, чем симметрия исходного уравнения (Д5.2).

Определение 3 [21*]. Уравнение (Д5.2) назовем Q-инвариантным, если

$$\widetilde{Q} L=\lambda_{0} L+\lambda_{1}(Q U). \tag{Д5.8}$$

Теперь сформулируем утверждения об условной инвариантности уравнения (Д5.1).

Теорема Д8 [12*]. *Уравнение* (Д5.1) *условно-инвариантно относительно галилеевских операторов*

$$G_a = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + M(U)\ x_a \frac{\partial}{\partial U}, \tag{Д5.9}$$

если (Д5.7) *имеет вид*

$$L_1 \equiv \frac{\partial U}{\partial x_0} + \frac{1}{2} M^{-1}(U) \frac{\partial U}{\partial x^a} \frac{\partial U}{\partial x^a} = 0, \tag{Д5.10}$$

$$M(U) = \frac{1}{2} U C^{-1}(U). \tag{Д5.11}$$

Теорема Д9 [12*]. *Уравнение* (Д5.6) *Q-инвариантно, если*

$$C(U) = \frac{1}{2m} U^r, \qquad M(U) = 2mr^{-n-2} U^{1-r}, \tag{Д5.12}$$

где n — число пространственных переменных в (Д5.1), $m \neq 0$, $r \neq -2n^{-1}$ — *произвольные постоянные.*

Следствие. *Принцип относительности Галилея выполняется для следующей переопределенной системы:*

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x a}\left[C(U) \frac{\partial U}{\partial x_a}\right] = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_0} + \frac{1}{2} M^{-1}(U) \frac{\partial U}{\partial x_a} \frac{\partial U}{\partial x_a} = 0, \tag{Д5.13}$$

где $M(U)$ задается формулой (Д5.11).

Замечание 1. Система (Д5.13) заменой $W = 2m \int C(U) U^{-1} dU$ приводится к системе уравнений Лапласа и Гамильтона — Якоби

$$\Delta W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_0} + \frac{1}{2m} (\nabla W)^2 = 0. \tag{Д5.14}$$

Теорема Д10. *Максимальной (в смысле С. Ли) алгеброй инвариантности уравнений* (Д5.14) *является расширенная алгебра Галилея* $A\widetilde{G}(1, n+1)$. *Базис этой алгебры образуют два набора операторов* $P_0^{(i)}$, $P_a^{(i)}$, $J_{ab}^{(i)}$, $G_a^{(i)}$, $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, *где*

$$P_0^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_a^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab}^{(i)} = x_a p_b - x_b p_a,$$

$$D^{(1)} = 2x_0 P_0 + x_a P_a, \qquad D^{(2)} = 2W P_{n+1} + x_a P_a,$$

$$G_a^{(1)} = x_0 P_a + m x_a P_{n+1}, \qquad G_a^{(2)} = W P_a + m x_a P_0, \qquad a, b = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство теоремы сводится к применению стандартного метода Ли [75, 291].

Замечание 2. Операторы $G_a^{(1)}$ порождают преобразования Галилея. Операторы $G_a^{(2)}$ генерируют следующие конечные преобразования [12*]:

$$x_0' = \frac{m}{2} \tau^2 U + m\tau_a x_a + x_0, \qquad x_a' = \tau_a U + x_a, \qquad U'(x') = U(x),$$

$\tau^2 = \tau_a\tau_a$, τ_a — групповой параметр. Как видим, время при таких преобразованиях меняется необычным образом. Эти преобразования можно получить (формально) из преобразований Галилея с помощью замены $x_0 \to U$, $x_0' \to U'$, $U \to x_0$, $U' \to x_0'$, $v_a \to \tau_a$, v_a — скорость инерциальной системы K' относительно системы K.

Условно-инвариантные системы уравнения шредингеровского типа исследованы в [13*].

§ 6. Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска

Известно, что максимальной а. и. уравнения Буссинеска

$$U_{00} + \frac{1}{2}\Delta U^2 + \Delta^2 U = 0, \quad U = U(x), \quad x = (x_0, x) \in R_{1+n} \qquad \text{(Д6.1)}$$

является алгебра Ли расширенной группы Евклида $\widetilde{E}(1, n)$ с базисными элементами (Д6.2):

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - 2U\partial_U. \qquad \text{(Д6.2)}$$

Все неэквивалентные анзацы, редуцирующие двумерное ($n = 1$) уравнение (Д6.1) к обыкновенному дифференциальному уравнению, которые можно построить по этой а. и., имеют вид

$$\begin{aligned} &U = \varphi(\omega), \quad \omega = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1, \quad \alpha_0, \alpha_1 = \mathrm{const}; \\ &U = x_0^{-1}\varphi(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-1/2}. \end{aligned} \qquad \text{(Д6.3)}$$

Олвер и Розенау в работе [29*] показали, что двумерное уравнение (Д6.1) с помощью анзаца

$$U = \varphi(\omega) - 4\mu^2 x_0^2, \quad \omega = x_1 + \mu x_0^2, \quad \mu = \mathrm{const}, \qquad \text{(Д6.4)}$$

редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\varphi''' + \varphi\varphi' + 2\mu\varphi = 8\mu^2\omega + C_1. \qquad \text{(Д6.5)}$$

Оператор симметрии, соответствующий этому анзацу, имеет вид

$$Q = \partial_0 - 2\lambda x_0\partial_1 - 8\lambda^2 x_0\partial_U, \qquad \lambda = -2\mu, \qquad \text{(Д6.6)}$$

и не принадлежит алгебре (Д6.2).

Анзацы вида (Д6.4) естественно назвать нелиевскими, так как они не следуют из групповых свойств уравнения (Д6.1).

Используя понятие условной инвариантности, мы опишем, следуя [37*], анзацы вида (Д1.7), редуцирующие уравнение (Д6.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Кларксон и Крускал [28*] способом прямой подстановки описали анзацы вида (Д1.7), редуцирующие двумерное уравнение Буссинеска к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Существенное отличие нашего подхода от метода [28*] состоит в том, что понятие условной инвариантности вскрывает причину возникновения неожиданных анзацев и дает регулярную процедуру для отыскания нелиевских анзацев. Кроме того, условная инвариантность дает возможность построить такие анзацы, которые не могут быть получены способом, предложенным в [28*].

Рассмотрим сначала двумерное уравнение (Д6.1)

$$U_{00} + UU_{11} + U_1^2 + U_{1111} = 0. \qquad \text{(Д6.7)}$$

Теорема Д11. *Уравнение* (Д6.7) *Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = A(x)\partial_0 + B(x)\partial_1 + [\alpha(x)U + \beta(x)]\partial_U, \tag{Д6.8}$$

если функция $A(x)$, $B(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ *удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений:*

случай 1. $A \neq 0$ (*не умаляя общности можно положить* $A = 1$)

$$\begin{aligned} &\alpha = -2B_1, \quad \alpha_1 = B_{11} = 0, \quad \beta = -2B(B_0 + 2BB_1), \\ &\beta_1 = \frac{1}{2}B_{00} + (\alpha B)_0 + B_1(B_0 - 2BB_1 + 4\alpha B), \\ &\beta_{11} = -(\partial_0 + 4B_1)(\alpha_0 + \alpha^2), \\ &\beta_{00} - 2B_0\beta_1 + 4B_1(\beta_0 - B\beta_1 + \alpha\beta) + 2\alpha_0\beta = 0; \end{aligned} \tag{Д6.9}$$

случай 2. $A = 0$, $B = 1$

$$\begin{gathered} \alpha = 0, \quad \alpha_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3 = 0, \\ \beta_{11} + 3\alpha\beta_1 + 4\alpha^2\beta + 5\alpha_1\beta + 5\alpha_{11}(\alpha^2 - \alpha_1) + 5\alpha\alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha^2) = 0, \\ \beta_{1111} + 4\alpha_{111}\beta + 6\alpha_{11}(\beta_1 + \alpha\beta) + 4\alpha_1[(\alpha^2 + \alpha_1)\beta + \\ + (\beta_1 + \alpha\beta)_1 + \beta_{00} + 3\beta\beta_1 + 2\alpha\beta^2] = 0. \end{gathered} \tag{Д6.10}$$

Доказательство проводится с использованием формулы (5.7.8) из [13*]. ■

В случае 1 существует общее решение уравнений (Д6.9), которое дает следующий оператор:

$$Q = \partial_0 + (ax_1 + b)\partial_1 - 2\left[aU + a(a' + 2a^2)x_1^2 + \right. \\ \left. + (a'b + ab' + 4a^2b)x_1 + b(b' + 2ab)\right]\partial_U, \tag{Д6.11}$$

где функции $a = a(x_0)$, $b = b(x_0)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$a'' + 2aa' - 4a^3 = 0, \qquad b'' + 2ab' - 4a^2b = 0. \tag{Д6.12}$$

В зависимости от явного вида функций a, b имеем несколько неэквивалентных операторов:

$$\begin{aligned} &Q_1 = \partial_0 + x_0\partial_1 - 2x_0\partial_U \quad (a = 0,\ b = x_0); \\ &Q_2 = x_0\partial_0 - (x_1 + 6x_0^5)\partial_1 + 2\left[U + 3\left(x_1^2x_0^{-2} - 24x_0^8 + 2x_1x_0^3\right)\right]\partial_U \\ &\qquad\qquad \left(a = -\frac{1}{x_0},\quad b = 6x_0^5\right); \\ &Q_3 = 2x_0\partial_0 + (x_1 - 3x_0^2)\partial_1 - 2(U - 3x_1 + 9x_0^2)\partial_U \\ &\qquad\qquad \left(a = (2x_0)^{-1},\quad b = -\frac{3}{2}x_0\right); \\ &Q_4 = 2W\partial_0 + W'\left[x_1\partial_1 - (2U + Wx_1^2)\partial_U\right] \qquad \left(a = \frac{W'}{2W'},\quad b = 0\right), \\ &Q_5 = 2W\partial_0 + W'(x_1 + \Omega)\partial_1 - \left[2W'U + WW'(x_1 + \Omega)^2 + x_1 + \Omega\right]\partial_U, \end{aligned} \tag{Д6.13}$$

где $a = \dfrac{1}{2}\dfrac{W'}{W}$, $b = a\Omega$, $\Omega = \displaystyle\int W(W')^{-2}\,dx_0$, $W = W(x_0)$--функция Вейерштрасса, являющаяся решением уравнения $W'' = W^2$ или $(W')^2 = \dfrac{2}{3}(W^3 + \lambda)$, $\lambda = \mathrm{const}$.

В случае 2 нам удалось получить только несколько частных решений уравнений (Д6.10), которым соответствуют следующие операторы:

$$\begin{aligned}
&Q_6 = x_0^2\partial_1 + \left(x_0^5 - 2x_1\right)\partial_U && \left(\alpha = 0, \quad \beta = x_0^3 - 2x_1x_0^{-2}\right);\\
&Q_7 = \partial_1 + \left(\Lambda - \frac{1}{3}Wx_1\right)\partial_U && \left(\alpha = 0, \quad \beta = \Lambda - \frac{1}{3}Wx_1\right);\\
&Q_8 = x_1\partial_1 + 2U\partial_U && \left(\alpha = \frac{2}{x_1}, \quad \beta = 0\right);\\
&Q_9 = x_1^3\partial_1 + 2\left(x_1^2U + 24\right)\partial_U && \left(\alpha = 2x_1^{-1}, \ \beta = 48x_1^{-3}\right),
\end{aligned} \tag{Д6.14}$$

где $\Lambda = \Lambda(x_0)$ — функция Ламе, удовлетворяющая уравнению $\Lambda'' = W\Lambda$.

Используя операторы (Д6.13), (Д6.14), находим анзацы:

$$\begin{aligned}
&1.\ U = \varphi(\omega) - 4x_0^2, && \omega = x_1 + x_0^2;\\
&2.\ U = x_0^2\varphi(\omega) - \left(\frac{x_0}{x_1} + 6x_0^4\right)^2, && \omega = x_0\left(x_1 + x_0^5\right);\\
&3.\ U = x_0^{-1}\varphi(\omega) + 2\left(x_1 - x_0^2\right), && \omega = x_0^{-1/2}\left(x_1 + x_0^2\right);\\
&4.\ U = W^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{6}Wx_1^2, && \omega = W^{-1/2}x_1;\\
&5.\ U = W^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{4}W^{-2}(W')^2(x_1 + \Omega)^2, && \omega = W^{-1/2}x_1 - \frac{1}{2}\int W'\Omega dx_0;\\
&6.\ U = \varphi(\omega) - x_0^{-2}x_1^2 + x_0^3x_1, && \omega = x_0;\\
&7.\ U = \varphi(\omega) - \frac{1}{6}x_1^2W + \Lambda x_1, && \omega = x_0;\\
&8.\ U = \varphi(\omega)\,x_1^2, && \omega = x_0;\\
&9.\ U = \varphi(\omega)\,x_1^2 - 12x_1^{-2}, && \omega = x_0.
\end{aligned} \tag{Д6.15}$$

Подставляя анзацы (Д6.15) в уравнение (Д6.7), получаем следующие редуцированные уравнения:

$$\begin{aligned}
&1.\ \varphi''' + \varphi\varphi' + 2\varphi = 8\omega + C_1;\\
&2.\ \varphi''' + \varphi\varphi' + 30\varphi = 1800\omega + C_2,\\
&3.\ \varphi^{IV} + \left(\varphi + \frac{\omega^2}{4}\right)\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{7}{4}\omega\varphi' + 2\varphi = 0,\\
&4.\ \varphi^{IV} + \varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{\lambda}{6}\left(\omega^2\varphi'' + 7\omega\varphi' + 8\varphi\right) = 0,\\
&5.\ \varphi^{IV} + \varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\omega\varphi' + 2\varphi - \lambda\omega^2\right) = 0,\\
&6.\ \varphi'' - 2\omega^{-2}\varphi + \omega^6 = 0,\\
&7.\ \varphi'' - \frac{1}{3}W\varphi + \Lambda^2 = 0,\\
&8,\ 9.\ \ \varphi'' + 6\varphi^2 = 0,
\end{aligned} \tag{Д6.16}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решая уравнения (Д6.16), получаем затем по формулам (Д6.15) решения уравнения (Д6.7). Приведем некоторые из них: $U = -\frac{1}{6} x_1^2 W$, $U = -12 x_1^{-2}$, $U = -\frac{1}{6} x_1^2 W - 12 x_1^{-2}$, $U = 2\left(x_1 - x_0^2\right)$, $U = 2\left(x_1 - x_0^2\right) - 12\left(x_1 + x_0^2\right)^{-2}$, $U = -x_0^{-2} x_1^2 - 6C_3^2 x_0^8 + 18 C_3 x_0^3 x_1 + C_4 x_0^{-1} + C_5 x_0^2$.

Приведем некоторые результаты исследования условной инвариантности многомерного уравнения Буссинеска.

Теорема Д12. *Уравнение* (Д6.1) *при* $n = 6$ *инвариантно относительно конформной алгебры* $AC(6)$ *с базисными элементами*

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad D = x_a \partial_a - 4U\partial_U,$$

$$K_a = 2x_a D - x^2 \partial_a \qquad (a,\ b = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$$

при условии $\Delta U + \frac{1}{2} U^2 = 0$.

Один из анзацев, полученных при помощи оператора K_a, имеет вид

$$U = \left(x^2\right)^{-2} \varphi\left(\omega_1, \omega_2\right), \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = \frac{b \cdot x - b^2 x^2}{x^4},$$

где b_a — постоянные параметры. Соответствующие редуцированные уравнения задаются следующими формулами:

$$\varphi_{11} = 0, \quad 2\omega_2 \varphi_{22} + 5\varphi_2 = \frac{1}{4b^2} \varphi^2. \tag{Д6.17}$$

Частным решением уравнений (Д6.17) является функция $\varphi = -4b^2 \omega_2^{-1}$. Ей отвечает следующее решение уравнения (Д6.1) при $n = 6$:

$$U = \frac{4}{x^2 - (\alpha \cdot x)^2} \qquad \left(\alpha = \text{const};\ \alpha^2 = 1\right).$$

§ 7. Условная инвариантность уравнений для электромагнитного поля

Покажем, что концепсия условной инвариантности позволяет определить новые операторы симметрии и интегралы движения для вектор-потенциала электромагнитного поля.

Будем исходить из уравнений для вектор-потенциала в отсутствие токов в калибровке Кулона (1.3.18), (1.3.19). Используя трехрядные матрицы (1.3.9), эти уравнения удобно записать в виде

$$I \,\Box\, A = 0 \tag{Д7.1}$$

$$\left(Z_{ab} + i\varepsilon_{abc} \widehat{S}_c\right) \nabla_b A = 0, \quad \nabla_b = \frac{\partial}{\partial x_b}, \tag{Д7.2}$$

где A = столбец (A_1, A_2, A_3), I — единичная матрица.

Исследование симметрии уравнений (Д7.1), (Д7.2) в традиционном подходе сводится к определению операторов симметрии системы двух равноправных уравнений. При этом максимальная а. и. системы (Д7.1), (Д7.2) в классе $\mathfrak{M}_1$ определяется семимерной алгеброй Ли, базисные элементы которой имеют вид

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \nabla_a, \quad \mathbf{J} = \mathbf{x} \times \nabla + i\widehat{\mathbf{S}}. \tag{Д7.3}$$

Мы видим, что максимальная симметрия рассматриваемой системы уравнений, которая может быть найдена в классическом подходе Ли, оказывается очень узкой. «Расширить» эту симметрию можно двумя способами: исследовать инвариантные свойства только одного уравнения (Д7.1), или условную инвариантность системы (Д7.1), (Д7.2). И в том и в другом случае получаем новые интегралы движения для вектор-потенциала.

В полной аналогии с рассуждениями, приведенными в п. 1.1.3, может быть доказано следующее утверждение.

Теорема Д13. *Максимальной а. и. уравнения* (Д7.1) *в классе* $\mathfrak{M}_1$ *является 24-мерная алгебра Ли с базисными элементами*

$$\{iP_\mu, iJ_{\mu\nu}, iD, iK_\mu, i\widehat{S}_a, Z_{ab}\}, \tag{Д7.4}$$

где P_μ, $J_{\mu\nu}$, D, K_μ — *генераторы конформной группы* (1.1.6), (1.1.16). ■

Концепсия условной инвариантности применительно к системе (Д7.1), (Д7.2) заключается в том, чтобы исследовать симметрию первого уравнения на подмножестве решений, удовлетворяющих дополнительному условию (Д7.2). Таким путем может быть доказано следующее утверждение.

Теорема Д14. *Уравнение* (Д7.1) *условно инвариантно относительно 27-мерной алгебры Ли с базисными элементами* (Д7.4), (Д7.5):

$$\eta_a = (Z_{ab} + i\varepsilon_{abc}\widehat{S}_c)x_b. \tag{Д7.5}$$

Алгебра Ли, натянутая на базис (Д7.4), (Д7.5) *является максимально широкой в классе* $\mathfrak{M}_1$ *а. и. уравнения* (Д7.1) *на подмножестве решений, удовлетворяющих дополнительному условию* (Д7.3).

Доказательство аналогично приведенному в п. 3.3.4. ■

Мы видим, что условная симметрия уравнения (Д7.1) оказывается шире симметрии этого уравнения в обычном смысле и значительно шире симметрии системы (Д7.1), (Д7.2). При этом следует подчеркнуть, что условная симметрия имеет ясный физический смысл, так как именно такой симметрии соответствуют сохраняющиеся величины. Действительно, каждому оператору (Д7.4), (Д7.5) можно сопоставить интеграл движения следующего вида:

$$I = \int d^3x\,(\dot{A}^T Q A - A^T Q \dot{A}), \tag{Д7.6}$$

где $\dot{A} = \dfrac{\partial A}{\partial x_0}$, Q — любой из операторов (Д7.4), (Д7.5). Можно показать, что такое соответствие является гомоморфизмом, т. е. уравнение $\dot{I} = 0$ не имеет других решений для $Q \in \mathfrak{M}_1$, кроме перечисленных в формулах (Д7.4), (Д7.5) (при этом операторам Z_{ab} соответствуют тривиальные сохраняющиеся величины $I \equiv 0$).

Мы видим, что понятие условной инвариантности естественно возникает при исследовании законов сохранения для систем линейных дифференциальных уравнений. Именно условная симметрия, а не симметрия уравнения (Д7.1), или системы (Д7.1), (Д7.2) в обычном смысле порождает полный набор интегралов движения вида (Д7.6) для вектор-потенциала.

Рассмотрим теперь сохраняющиеся величины вида (Д7.6) для случая, когда $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$, т. е. когда Q является линейным дифференциальным оператором первого порядка с матричными коэффициентами (соответствующий класс интегралов движения обозначим символом M_1). При этом формула (Д7.6) определяет общий вид билинейной комбинации векторов A и производных $\dfrac{\partial A}{\partial x_\mu}$, сохраняющейся во времени.

Очевидный набор интегралов движения $I \in M_1$ получаем, подставляя в (Д7.6) операторы условной симметрии $Q \in M_1$. Оказывается, однако, что класс M_1 шире.

Теорема Д15. *Для уравнений* (Д7.1), (Д7.2) *существует* 53 *интеграла движения в классе* M_1. *В их число входят* 50 *сохраняющихся величин вида* (Д7.6), *где* $Q \in \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ — *операторы условной симметрии уравнения* (Д7.1), *и три* *дополнительных интеграла*

$$I_a = \int d^3x \dot{A}_c x_i x_b \left[\varepsilon_{akl} \frac{\partial A_b}{\partial x_l} x_k + \varepsilon_{abk} A_k \right], \tag{Д7.7}$$

где A_k — *компоненты вектор-потенциала*, $a = 1, 2, 3$.

Доказательство аналогично приведенному в п. 3.5.5. ■

Подчеркнем, что интеграл движения (Д7.7) нельзя представить в виде (Д7.6), где Q — оператор условной симметрии уравнения (Д7.1). Иными словами, этой сохраняющейся величине не соответствует никакая симметрия уравнений (Д7.1), (Д7.2) — ни обычная, ни условная. Примеры таких сохраняющихся величин уже встречались выше в п. 3.5.5.

В заключение отметим, что аналогичные операторы условной симметрии и законы сохранения могут быть построены также для уравнений Ламе (3.4.30), описывающих распространение упругих волн. Действительно, налагая на вектор смещения U дополнительное условие $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, получаем из (3.4.30) систему уравнений для поперечных волн

$$\ddot{\mathbf{U}} - \frac{\lambda}{\rho_0} \Delta \mathbf{U} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{Д7.8}$$

которая с помощью замены переменной $t = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0}} t'$ сводится к форме (Д7.1), (Д7.2). Следовательно, операторы условной симметрии и законы сохранения уравнений для поперечных волн могут быть получены из (Д7.3)—(Д7.7) заменой $A \to U$, $t \to t'$, $U =$ столбец (U_1, U_2, U_3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.
2. Багров В. Г., Гитман Д. М., Тернов Д. М. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений.— Новосибирск: Наука, 1982.
3. Баранник Л. Ф. Проективные унитарно-антиунитарные представления конечных абелевых групп // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 47—52.
4. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения: В 2-х т .— М.: Мир, 1980.
5. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1.—М.: Наука, 1968.
6. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.— М.: Физматгиз, 1960.
7. Бетти С. Дж. Экзотические атомы // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1982.— **13**, вып. 1.— С. 164—232.
8. Боголюбов Н. Н. Лекции по теории симметрии элементарных частиц.— М.: Изд-во МГУ, 1966.
9. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М.: Наука, 1969.
10. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1984.
11. Богуш А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей.— Минск: Наука и техника, 1968.
12. Боргардт А. А. Антикоммутативные матрицы в теории мезона // ДАН СССР.— 1951.— 78, № 6.— С. 1113—1115.
13. Боргардт А. А. Волновые уравнения фотона // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1958.— 34, вып. 5.— С. 1323—1325.
14. Боргардт А. А., Карпенко Д. Я. Бозон в поле плоской электромагнитной волны // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1966.— **50**, вып. 4.— С. 1167—1170.
15. Боргардт А. А., Карпенко Д. Я. Проблема Кеплера для заряженного векторного бозона.— Киев, 1971.— (Препр./АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-71-105р).
16. Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория: В 2-х т.— М.: Наука, 1978.
17. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента.— Л.: Наука, 1975.
18. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп.— М.: Наука, 1965.
19. Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирж М. и Фриш И. О группах симметрии в классической и квантовой механике // Ядер. физика.— 1966.— 4, № 3.— С. 625—635.
20. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Замкнутые формы, ассоциированные с линейными дифференциальными операторами // Дифференц. уравнения.— 1980.— 16, № 5.— С. 845—867.
21. Воронин А. В., Сушко В. Н., Хоружий С. С. Алгебры неограниченных операторов и вакуумный суперотбор в квантовой теории поля. II.

Математическая структура вакуумного суперотбора // Теорет. и мат. физика.— 1984.— **60**, № 3.— С. 323—343.
22. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1948.— **18**, № 8.— С. 703—733.
23. Гельфанд И. М., Минлос А. Р., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
24. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук.— 1968.— **23**, вып. 2.— С. 3—60.
25. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Замечания о классификации пары коммутативных линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функцион. анализ и его прил.— 1969.— **3**, вып. 4.— С. 81—82.
26. Гинзбург В. Л., Тамм И. Е. К теории спина // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1947.— **17**, вып. 3.— С. 225—237.
27. Гинзбург В. Л., Манько В. И. Релятивистские уравнения с внутренними степенями свободы и партоны // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1976.— **7**, вып. 3.— С. 3—40.
28. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях.— М.: Атомиздат, 1980.
29. Давыдов А. С. Волновые уравнения частицы, имеющей спин, в отсутствие поля // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1943.— **13**, вып. 9—10.— С. 313—319.
30. Данилов Ю. А. Групповые свойства уравнения Дирака.— М., 1968.— (Препр./Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова; ИАЭ-1736).
31. Донков А. Д., Кадышевский В. Г., Матеев М. Д. Неэвклидово импульсное пространство и проблема двух тел // Теорет. и мат. физика.— 1982.— **50**, № 3.— С. 366—369.
32. Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли.— М.: Наука, 1983.
33. Желобенко Д. П. Трансвекторные алгебры в теории представлений и динамические симметрии // Теоретико-групповые методы в физике: В 2-х т.: М.— Наука, 1986.— Т. 2.— С. 5—21.
34. Зайцев Г. А. Релятивистское уравнение для электрона, заменяющее уравнение Дирака // Журн. эксперим. и теор. физики.— 1955.— **28**.— С. 530—540.
35. Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1967.
36. Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства волновых уравнений для частиц с нулевой массой // ДАН СССР.— 1968.— **178**, № 3.— С. 566—568.
37. Ибрагимов Н. Х. Об инвариантности уравнений Дирака // ДАН СССР.— 1969.— **185**, № 6.— С. 1226—1228.
38. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
39. Кадышевский В. Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1982.— **11**, вып. 1.— С. 5—39.
40. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.
41. Кириллов-Угрюмов В. Г., Никитин Ю. П., Сергеев Ф. М. Атомы и мезоны.— М.: Атомиздат, 1980.
42. Кривский И. Ю., Романко Г. Д., Фущич В. И. Уравнения типа Кеммера — Дэффина в пятимерном пространстве Минковского // Теорет. и мат. физика.— 1969.— **1**, № 2.— С. 242—250.
43. Крылов Б. В., Федоров Ф. И. Частица со спином 2 в поле плоской электромагнитной волны // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1976.— № 2.— С. 47—54.
44. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
45. Лезнов А. Н., Савельев М. В. Вопросы теории представлений полупростых групп Ли // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1976.— **7**, вып. 1.— С. 55—100.

46. Лоренц Г. А. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света // Принцип относительности: Сб. работ классиков релятивизма.— М.: Атомиздат, 1973.— С. 167—180.
47. Максвелл Д. К. Статьи и речи.— М.: Наука, 1968.
48. Малкин И. А., Манько И. В. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.— М.: Наука, 1979.
49. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия.— М.: Наука, 1984.
50. Миллер У. Симметрия и разделение переменных.— М.: Мир, 1981.
51. Минковский Г. Пространство и время // Принцип относительности: Сб. работ классиков релятивизма.— М.: Атомиздат, 1973.
52. Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях.— М.: Наука, 1978.
53. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
54. Никитин А. Г. Релятивистские уравнения движения для системы с переменным спином // Укр. физ. журн.— 1973.— 18, № 10. — С. 1605—1614.
55. Никитин А. Г. О нерелятивистском пределе уравнений без «лишних» компонент // Укр. физ. журн.— 1974.— 19, № 6.— С. 1000—1005.
56. Никитин А. Г., Грищенко А. Л. Пуанкаре-инвариантные уравнения для частиц нулевой массы и произвольного спина // Укр. физ. журн.— 1974.— 19, № 10.— С. 1666—1669.
57. Никитин А. Г., Салогуб В. А. О преобразовании уравнений Хагена — Герли к форме, не содержащей «лишних» компонент // Укр. физ. журн.— 1975.— 20, № 10.— С. 1730—1732.
58. Никитин А. Г., Сегеда Ю. Н., Фущич В. И. О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера — Дэффина и Рариты — Швингера // Теорет. и мат. физика.— 1976.— 29, № 1.— С. 82—94.
59. Никитин А. Г., Фущич В. И., Юрик И. И. Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам // Теорет. и мат. физика.— 1976.— 26, № 2.— С. 206—220.
60. Никитин А. Г., Онуфрийчук С. П. О диагонализации уравнений Баба // Укр. физ. журн.— 1977.— 22, № 9.— С. 1353—1357.
61. Никитин А. Г. О группе инвариантности уравнения Кеммера — Дэффина — Петье для частицы с аномальным моментом // Теоретико-групповые методы в математической физике.— Киев: Ин-т математики АН УССР. 1978.— С. 81—95.
62. Никитин А. Г., Фущич В. И. Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения для частиц произвольного спина // Теорет. и мат. физика.— 1978.— С. 319—333.
63. Никитин А. Г., Наконечный В. В. Об алгебрах инвариантности уравнений Дирака и Шредингера // Укр. физ. журн.— 1980.— 25, № 4.— С. 618—621.
64. Никитин А. Г., Фущич В. И. Уравнения движения для частиц произвольного спина, инвариантные относительно группы Галилея // Теорет. и мат. физика.— 1980.— 44, № 1.— С. 34—46.
65. Никитин А. Г., Фущич В. И. Галилеевски инвариантные уравнения со спин-орбитальным взаимодействием // Теоретико-групповые методы в физике: В 2-х т.— М.: Наука, 1980.— Т. 2.— С. 35—41.
66. Никитин А. Г. Галилеевски инвариантные уравнения с аномальным взаимодействием // Укр. физ. журн.— 1981.— 26, № 3.— С. 394—402.
67. Никитин А. Г. Дифференциальные уравнения первого порядка, инвариантные относительно группы Галилея // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 90—104.
68. Никитин А. Г. Разделение переменных в системах уравнений в частных производных, инвариантных относительно группы $O(3)$ // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 87—98.

69. Никитин А. Г. Релятивистская частица произвольного спина в кулоновском поле и поле плотной электромагнитной волны— Теорет. и мат. физика.— 1983.— 57, № 2.— С. 257—264.
70. Никитин А. Г. Операторы симметрии уравнения Вейля // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 34—39
71. Никитин А. Г. Операторы симметрии второго порядка, допускаемые уравнением Вейля // Симметрийный анализ уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. С. 47—53.
72. Новожилов Ю. В., Прохватилов Е. В. Представления группы Пуанкаре в Е(2)-базисе.— Теорет. и мат. физика.— 1969.— 1, № 1.— С. 101—113.
73. Новожилов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц.— М.: Наука, 1972.
74. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
75. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
76. Онуфрийчук С. П. Пуанкаре-инвариантные счетные системы дифференциальных уравнений первого порядка.— Киев, 1978.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 78.29).
77. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1976.
78. Пуанкаре А. О динамике электрона // Принцип относительности: Сб. работ классиков релятивизма.— М.: Атомиздат, 1973.— С. 90—93.
79. Пуанкаре А. О динамике электрона // Принцип относительности: Сб. работ классиков релятивизма.— М.: Атомиздат, 1973.— С. 118—160.
80. Радюк А. Ф., Федоров Ф. И. Мезон с аномальным магнитным и электрическим квадрупольным моментом в поле плоской электромагнитной волны // ДАН БССР.— 1974.— 18, № 2.— С. 11—121.
81. Румер Ю. Б., Фет А. Н. Теория унитарной симметрии.— М.: Наука, 1970.
82. Сегеда Ю. Н. О дополнительной инвариантности уравнений Максвелла // Краевые задачи электродинамики проводящих сред.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 218—224.
83. Славнов А. А., Фадеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
84. Сокур Л. П., Фущич В. И. Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1, n)$. II // Теорет. и мат. физика.— 1971.— 6, № 3.— С. 348—362.
85. Стражев В. И., Томильчик Л. М. Электродинамика с магнитным зарядом // Минск: Наука и техника, 1975.
86. Стражев В. И., Плетюхов В. А. Симметрия поляризационного пространства и дополнительная инвариантность уравнений Максвелла // Известия вузов. Физика.— 1981.— 24, № 12.— С. 39—42.
87. Стражев В. И., Школьников П. Л. О релятивистской поляризационной матрице плотности для частиц с произвольным спином // Известия вузов. Физика.— 1984.— 27, № 4.— С. 84—88.
88. Суслопаров В. М. Релятивистская частица с произвольным спином в электрическом и магнитном полях // Укр. физ. журн.— 1984.— 29, № 8.— С. 1265—1267.
89. Суслопаров В. М. Точно решаемая модель взаимодействия двух частиц произвольной массы и спина // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 89—97.
90. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон.— М.: Наука, 1974.
91. Соколов С. Н. Гамильтоново релятивистское квантовое описание системы прямо взаимодействующих частиц // ДАН СССР.— 1977.— 233, № 4.— С. 575—578.
92. Тамм И. Е. Движение мезонов в электромагнитных полях // ДАН СССР.— 1940.— 29, № 8—9.— С. 551—554.

93. Тамм И. Е. Обобщенные шаровые функции и волновые функции электрона в поле магнитного полюса // Собрание научных трудов. Т. 2.— М.: Наука, 1975.— С. 161—195.
94. Тодоров И. Т. Конформно-инвариантная квантовая теория.— Дубна, 1972.— (Препр./ОИЯИ; Е2-6642).
95. Тернов И. М., Халилов В. Р., Родионов В. Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем.— М.: Изд-во МГУ, 1982.
96 Умэдзава Х. Квантовая теория поля.— М.: ИЛ, 1958.
97. Федоров Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения // ДАН СССР.— 1952.— 82, № 1.— С. 37—40.
98. Федоров Ф. И. Группа Лоренца.— М.: Наука, 1979.
99. Федорчук В. М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера P(1, 4).— Киев, 1978.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; ИМ-18).
100. Фок В. А. Атом водорода и неевклидова геометрия // Известия АН СССР.— 1935.— № 2.— С. 169—179.
101. Фок В. А. Начала квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
102. Фущич В. И., Кривский И. Ю. О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского.— Киев, 1968.— (Препр./АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-68-72).
103. Фущич В. И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теорет и мат. физика.— 1970.— 4, № 3.— С. 360—382.
104. Фущич В. И., Сокур Л. П. Уравнения Баргмана — Вигнера на неоднородной группе Де Ситтера.— Киев, 1969.— (Препр./АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-69-33).
105. Фущич В. И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения // Теорет. и мат. физика.— 1971.— 7, № 1.— С. 3—12.
106. Фущич В. И., Грищенко А. Л., Никитин А. Г. О релятивистских уравнениях движения без «лишних» компонент // Теорет. и мат. физика.— 1971.— 8, № 2.— С. 192—205.
107. Фущич В. И. О PCT-инвариантных лагранжианах // Теорет. и мат. физика.— 1971.— 9, № 1.— С. 91—93.
108. Фущич В. И., Никитин А. Г., Юрик И. И. Редукция представлений группы движений $(n+1)$-мерного пространства Минковского по группе Пуанкаре.— Киев, 1975.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; ИМ-75-5).
109. Фущич В. И. О дополнительной инвариантности уравнения Клейна — Гордона — Фока // ДАН СССР.— 1976.— 230, № 3.— С. 570—573.
110. Фущич В. И., Сегеда Ю. Н. О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики // Укр. мат. журн.— 1976.— 28, № 6.— С. 844—849.
111. Фущич В. И. Групповые свойства уравнений квантовой механики // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний (к 60-летию академика АН УССР Ю. А. Митропольского).— Киев: Наукова думка, 1977.— С. 75—87.
112. Фущич В. И., Никитин А. Г. Дифференциальные уравнения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином.— Киев, 1977.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; ИМ-77-3).
113. Фущич В. И., Онуфрийчук С. П. О группах инвариантности одного класса счетных систем уравнений первого порядка с частными производными // ДАН СССР.— 1977.— 235, № 5.— С. 1056—1059.
114. Фущич В. И., Сегеда Ю. Н. О новой алгебре инвариантности свободного уравнения Шредингера // ДАН СССР.— 1977.— 232, № 4.— С. 800—801.
115. Фущич В. И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретико-групповые методы в математической физике.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 5—44.
116. Фущич В. И., Никитин А. Г. Групповые свойства уравнений Максвелла // Теоретико-групповые методы в математической физике.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 45—80.

117. Фущич В. И., Никитин А. Г. О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения // ДАН СССР.— 1978.— **238**, № 1.— С. 46—49.
118. Фущич В. И., Никитин А. Г. Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения движения частиц произвольного спина // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1978.— 9, вып. 3.— С. 501—553.
119. Фущич В. И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // ДАН СССР.— 1979.— **246**, № 4.— С. 846—850.
120. Фущич В. И., Наконечный В. В. Теоретико-алгебраический анализ уравнения Ламе // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 2.— С. 267—273.
121. Фущич В. И. Об одном способе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 6.— С. 834—837.
122. Фущич В. И., Владимиров В. А. О дополнительной инвариантности уравнений для векторных полей // ДАН СССР.— 1981.— **257**, № 5.— С. 1105—1108.
123. Фущич В. И., Никитин А. Г. Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1981.— **12**, вып. 5.— С. 1157—1219.
124. Фущич В. И., Серов Н. И. О точных решениях уравнения Борна — Инфельда // ДАН СССР, 1982.— **263**, № 3.— С. 582—586.
125. Фущич В. И., Тычинин В. А. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований.— Киев, 1982.— (Препр./АН СССР. Ин-т математики; ИМ-82-33).
126. Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла.— Киев: Наукова думка, 1983.
127. Фущич В. И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.
128. Фущич В. И., Штелень В. М. Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака // ДАН СССР.— 1983.— **269**, № 1.— С. 88—92.
129. Фущич В. И., Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф. Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея.— Киев, 1985.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; ИМ-85-19).
130. Фущич В. И., Корняк В. В. Реализация на ЭВМ алгоритма вычисления нелокальных симметрий для уравнений типа Дирака.— Киев, 1985.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; ИМ-85-20).
131. Фущич В. И., Никитин А. Г. О новых симметриях и законах сохранения уравнений для упругих волн // ДАН СССР.— 1989.— Т. 304, № 2.— С. 333—335.
132. Хелашвили А. А. Радиальное квазипотенциальное уравнение для фермиона и антифермиона и бесконечно растущие центральные потенциалы // Теорет. и мат. физика.— 1982.— **51**, № 2.— С. 201—210.
133. Чиркунов Ю. А. Групповые свойства уравнения Ламе // Динамика сплошной среды.— 1973.— Вып. 14.— С. 128—130.
134. Шаповалов В. Н., Экле Г. Г. Алгебраические свойства уравнения Дирака.— Элиста: Калмыцкий гос. ун-т, 1972.
135. Шелепин Л. А. Ковариантная теория релятивистских волновых уравнений для частиц с произвольным спином // Труды ФИАН.— 1964.— Т. 38.— С. 253—321.
136. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.— М.: ИЛ, 1963.
137. Широков Ю. М. Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики // Журн. эксперим. и теор. физики.— 1957.— **33**, № 4.— С. 861—872; № 5.— С. 1208—1214; 1958.— **34**, № 3.— С. 717—724; 1959.— **35**, № 3.— С. 879—888.
138. Шредингер Э. Квантование как задача о собственных значениях. IV.— Избранные труды по квантовой механике.— М.: Наука, 1976.— С. 116—138.

139. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.— М.: Наука, 1978.
140. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел // Принцип относительности: Сб. работ классиков релятивизма.— М.: Атомиздат, 1973.— С. 97—117.
141. Adamczyk A., Raczka R. New relativistic wave equations assotiated with indecomposable representations of the Poincare group.— Triest, 1978.— (Prepr./Int. Centre of Theor. Physics; IC/78/100).
142. Aghassi J. J., Roman P., Santilli R. M. Relation of the inhomogeneous de Sitter group to the quantum mechanics of elementary particles // J. Math. Phys.— 1970.— **11**, N 8.— P. 2297—2301.
143. Amundsen P. A. Position operators and transformation properties of a relativistic Hamiltonian theory for any spin // Phys. Norv.— 1975.— 8, N 2.— P. 107—112.
144. Angelopoulos E., Flato M., Fronsdal C., Sterngeimer D. Messless particles, conformal group, and de Sitter univerce // Phys. Rev. D.— 1981.— **23**, N 6.— P. 1278—1289.
145. Anderson R. L., Ibragimov N. H. Lie — Bäclund transformations in applications.— Philadelphia: SIAM, 1979.
146. Bakamjian B., Thomas L. H. Relativistic particle dynamics. II // Phys. Rev.— 1953.— 92, N 5.— P. 1300—1310.
147. Bakri M. M. De-Sitter symmetry field theory. I. One particle theory // J. Math. Phys.— 1969.— **10**, N 2.— P. 298—320.
148. Bargman V., Wigner E. P. Group theoretical discussion of relativistic wave equations // Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.— 1948.— **34**.— P. 211—221.
149. Bargman V. On unitary ray representations of continuous groups // Ann. Math.— 1954.— **59**, N 1.— P. 1—46.
150. Barker W. A., Glover F. N. Reduction of relativistic two-particle equation to approximate form. III // Phys. Rev. —1955.— 99, N 1.— P. 317—324.
151. Bateman H. On the conformal transformations of a space of four dimensional and their applications to geometric optics // Proc. London Math. Soc.— 1909.— Ser. 7.— P. 70—92.
152. Bateman H. The transformation of the electrodinamical equations // Proc. London Math. Soc.— 1909.— Ser. 8.— P. 223—264.
153. Bayen F., Flato M. Remarks on conformal space // J. Math. Phys.— 1976.— **17**, N 7.— P. 1112—1114.
154. Beckers J., Jaspers M. On timelike, lightlike and spacelike realizations of Poincare generators // Ann. Phys. (N. Y.).— 1978.— **113**, N 2.— P. 237—256.
155. Bessel-Hagen E. Über die Erhaltungssatze der Electrodynamik // Math. Ann.— 1921.— 84, N 2.— S. 258—263.
156. Bhabha H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles // Rev. Mod. Phys.— 1945.— **17**, N 2/3.— P. 200—215.
157. Bludman S. A. Some theoretical consequences of a particle having mass zero // Phys. Rev.— 1957.— **107**, N 4.— P. 1163—1168.
158. Bose S. K., Parker R. Zero-mass representation of Poincaré group and conformal invariance // J. Math. Phys.— 1969.— **10**, N 5.— P. 812—813.
159. Bracken A. J. A comment on the conformal invariance of zero-mass Klein-Gordon equations // Lett. Nuovo Cim.— 1971.— **2**, N 11.— P. 574—576.
160. Bracken A. J., Jessup B. Local conformal-invariance of the wave equations for finite-component fields. I. The condition for invariance and fully-reducible fields // J. Math. Phys.— 1982.— **23**, N 10.— P. 1925—1946.
161. Breit G. The effect of retardation on the interaction of two electrons // Phys. Rev.— 1929.— **34**, N 4.— P. 553—573.
162. Brennich R. H. The irreducible ray representations of the full inhomogeneous Galilei group // Ann. Inst. Henri Poincaré.— 1970.— **13**, N 2.— P. 137—161.
163. Budini P. On conformally covariant spinor field equations // Czech. J. Phys. B.— 1979.— **29**, N 1.— P. 6—21.

164. Capri A. Z. First-order wave equations for half-odd-integral spins // Phys. Rev.— 1969.— 178, N 5.— P. 2427—2433.
165. Capri A. Z., Shamaly A. On the connection between acasual propagation and the non-local structure of higher spin fields.— München, 1975.— (Prepr./MPI-PAE/P TH 31/75).
166. Carinena J. F. Semiunitary projective representations of the complete Galilei group // J. Math. Phys.— 1981.— 22, N 8.— P. 1548—1558.
167. Castell L. The relativistic position operator at subatomic level // Nuovo Cim.— 1967.— 49, N 10.— P. 285—290.
168. Chatterjee R., Lulek T. Origin of the spin-orbit interaction // Acta Physica Polonica.— 1979.— A56, N 2.— P. 205—226.
169. Childers R. W. Two-body Dirac equation for semirelativistic quarks // Phys. Rev. D.— 26, N 10.— P. 2902—2915.
170. Chraplyvy Z. V. Reduction of relativistic two-particle equations to approximate form. II // Phys. Rev.— 1953.— 92, N 5.— P. 1310—1321.
171. Coester F. Relativistic quantum mechanics of particles with direct interaction // Phys. Rev. D.— 1982.— 26, N 6.— P. 1348—1367.
172. Cuningham E. The principle of relativity in electrodynamics and an extention theoref/Proc. London Math. Soc.— 1909.— Ser. 8.— P. 77—98.
173. Darwin C. G. The wave equations of the electron // Proc. Roy. Soc. London.— 1928.— A118, N 780.— P. 654—680.
174. Da Silveira A. Invariance algebras of the Dirac and Maxwell equations // Nuovo Cim. A.— 1980.— 56, N 4.— P. 385—395.
175. Dirac P. A. M. Wave equations in conformal space // Ann. Math.— 1936.— 37, N 2.— P. 429—442.
176. Dirac P. A. M. Relativistic wave equations // Proc. Roy. Soc. London.— 1936.— A155.— P. 447—459.
177. Dirac P. A. M. Forms of relativistic dynamics // Rev. Mod. Phys.— 1949.— 21, N 3.— P. 392—399.
178. Dirac P. A. M. A positive-energy relativistic wave equation // Phys. Rev. D.— 1974.— 10, N 6.— P. 1760—1767.
179. Dobrev V. K., Todorov I. T. Harmonic analysis on the n-dimensional Lorentz group and its application to conformal quantum field theory.— Berlin: Springer, 1977.
180. Dowker I. S. A wave equations for massive particles of arbitrary spin // Proc. Roy. Soc.— 1967.— A293, N 1415.— P. 35—42.
181. Dowker I. S. A note on massless field equations for arbitrary spin.— Int. J. Theor. Phys.— 1973.— N 5.— P. 321—322.
182. Edmonds A. R. Angular momentum in quantum mechanics.— Prinston: Prinston University Press, 1960.
183. Feinman R. P., Gell-Mann M. Description of the Fermi interaction // Phys. Rev.— 1958.— 109, N 1.— P. 193—197.
184. Fierz M., Pauli W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. London.— 1939.— A173.— P. 211—232.
185. Flato M., Simon J., Sterngeimer D. Conformal invariance of field equations // Ann. Phys. (N. Y.).— 1970.— 61, N 1.— P. 78—97.
186. Fock V. A. Zur Schrödingerschen Wellenmechanik // Zeit. Phys.— 1926.— 38, H. 3.— S. 242—250.
187. Fock V. A. Zur Theorie des Wasserstoffatoms // Fortshr. Phys.— 1935.— 98.— P. 145—147.
188. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit //Phys. Rev.— 1950.— 78, N 1.— P. 29—37.
189. Foldy L. L. Syntesis of covariant particle equations // Phys. Rev.— 1956.— 102, N 2.— P. 568—573.
190. Foldy L. L. Relativistic particle systems with interaction // Phys. Rev.— 1961.— 122, N 1.— P. 275—288.
191. Fradkin E. S., Palchik M. Ya. Recent developments in conformal invariant quantum field theory // Phys. Rep.— 1978.— 44, N 5.— P. 249—300.
192. Furlan P. Internal symmetries from field theories in higher dimensions // Czech. J. Phys.— 1982.— 32, N 6.— P. 634—644.

193. Fushchich M. I., Krivsky I. Yu. On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkovsky space // Nucl. Phys. B.— 1969.— **14**, N 2.— P. 321—330.
194. Fushchich W. I. On additional invariance of relativistic equations of motion.— Kiev, 1970.— (Prepr./Inst. Theor. Phys.; 70-32E).
195. Fushchich W. I., Grishchenko A. L. On two-component equations for zero-mass particles.— Kiev, 1970.— (Prepr./Inst. Theor. Phys.; 70—25).
196. Fushchich W. I., Grishchenko A. L. On the CP-Noninvariant equations for particle with zero mass and spin $S = 1/2$ // Lett. Nuovo Cim.— 1970.— **4**, N 20.— P. 927—928.
197. Fushchich W. I. On the P- and T-non-invariant two-component equations for the neutrino // Nucl. Phys.— 1970.— **B21**, N 2.— P. 321—330.
198. Fushchich W. I. On tree types of relativistic equations for a particles with nonzero mass // Lett. Nuovo Cim.— 1972.— **4**, N 9.— P. 344—346.
199. Fushchich W. I. P, T, C-properties of the Poincaré-invariant equations for massive particles // Lett. Nuovo Cim.— 1973.— **6**, N 4.— P. 133—137.
200. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On the possible types of equations for zero-mass particles // Lett. Nuovo Cim.— 1973.— **7**, N 11.— P. 439—442.
201. Fushchich W. I. On the additional invariance of the Dirac and Maxwell equations // Lett. Nuovo Cim.— 1974.— **11**, N 10.— P. 508—512.
202. Fushchich W. I. On a motion equation for two particles in relativistic quantum mechanics // Lett. Nuovo Cim.— 1974.— **10**, N 4.— P. 163—167.
203. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On the Poincare-invariant equations for particles with variable spin and mass // Rep. Math. Phys.— 1975.— **8**, N 1.— P. 33—48.
204. Fushchich W. I., Nikitin A. G., Salogub V. A. On the equations of motion for particles with arbitrary spin in non-relativistic mechanics // Lett. Nuovo Cim.— 1975.— **14**, N 13.— P. 483—488.
205. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On the Galilei-invariant equations for particles with arbitrary spin // Lett. Nuovo Cim.— 1976.— **16**, N 3.— P. 81—85.
206. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On the new invariance groups of the Dirac and Kemmer — Duffin — Petiau equations // Lett. Nuovo Cim.— 1977.— **19**, N 9.—P. 347—352.
207. Fushchich W. I., Nikitin A. G. Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles // Lett. Math. Phys.— 1978.— N 2.— P. 471—475.
208. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On the invariance groups of relativistic equations for spinning particles interacting with external fields // Lett. Nuovo Cim.— 1978.— **21**, N 16.— P. 541—546.
209. Fushchich W. I., Nikitin A. G., Salogub V. A. On the non-relativistic motion equations in the Hamiltonian form for arbitrary spin particles // Rep. Math. Phys.— 1978.— **13**, N 2.— P. 175—185.
210. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On the new invariance algebras of relativistic equations for massless particles // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1979.— **12**, N 6.— P. 747—757.
211. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On the new invariance group of Maxwell's equation // Lett. Nuovo Cim.— 1979.— **24**, N 2.— P. 220—224.
212. Fushchich W. I., Nikitin A. G. Reduction of the representations of the generalised Poincare algebra by the Galilei algebra // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1980.— **13**, N 7.— P. 2319—2330.
213. Fushchich W. I., Nikitin A. G. New symmetries of Maxwell equations // Czech. J. Phys. B.— 1982.— **32**, N 4.— P. 476—480.
214. Fushchich W. I., Shtelen M. M. Conformal simmetry and new exact solutions of SU(2) Yang-Mills theory // Lett. Nuovo Cim.— 1983.— **38**, N 2.— P. 37—40.
215. Fushchich W. I., Serov N. I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouwille, d'Alambert and eikonal equations // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1983.— **16**, N 5.— P. 3645—3656.

216. Fushchich W. I., Shtelen W. M. On some exact solution of the nonlinear Dirac equation // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1983.— 16, N 2.— P. 271—277.
217. Fushchich W. I. The symmetry and exact solutions of many-dimensional parabolic and hyperbolic nonlinear differential equations // Proceedings of the Second International Symposium on Nonlinear Phenomens and Turbulent. Kiev, September, 1982.— New York: Gordon and Breach, 1984.— P. 1341—1345.
218. Fushchich W. I., Nikitin A. G. On one- and two-particle Galilei-invariant wave equations for any spin // Nuovo Cim.— 1984.— 81A, N 3.— P. 644—660.
219. Fushchich W. I., Nikitin A. G., Susloparow W. M. Relativistic particle of arbitrary spin in the Coulomb and magnetic monopole field // Nuovo Cim. A.— 1985.— 87, N 4.— P. 415—424.
220. Fushchich M. I., Nikitin A. G. On the new invariance algebras and superalgebras of relativistic wave equation // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1987.— 20, N 3.— P. 537—549.
221. Fushchich W. I., Nikitin A. G. Symmetries of Maxwell's equations.— Dordrecht: D. Reidel, 1987.
222. Gazeau J. P. L'equation de Dirac avee masse et spin arbitraires: une construction simple et naturelle // J. Phys. G: Nucl. Phys.— 1980.— 6, N 12.— P. 1459—1475.
223. Gärding L. Mathematics of invariant wave equations // Invariant wave equations: Lecture Notes in Physics.— Berlin: Springer, 1978.— 73.— P. 102—164.
224. Good R. H. Particle aspects of the electromagnetic field equations // Phys. Rev.— 1957.— 105, N 6.— P. 1914—1919.
225. Gordon W. Die Energienveans des Wassertoffatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Electrons // Zeit. Phys.— 1928.— 48, H. 1—2.— S. 11—14.
226. Gross L. Norm invariance of mass-zeroequations under the conformal group // J. Math. Phys.— 1964.— 5, N 5.— P. 687—695.
227. Guertin R. F. Relativistic Hamiltonian equations for any spin // Ann. Phys. (USA).— 1974.— 88, N 2.— P. 504—533.
228. Guertin R. F. Spin-1/2 equation with indefinite metric // Int. J. Theor. Phys.— 1975.— 14, № 6.— P. 385—404.
229. Guertin R. F., Wilson T. L. Sakata-Taketani spin-0 theory with external field interactions: Lagrangian formalism and causal properties // Ann. Phys.— 1977.— 104, N 2.— P. 427.
230. Guertin R. F., Wilson T. L. Noncausal effects in relativistic wave equations // Lett. Nuovo Cim.— 1977.— 18, N 16.— P. 521—524.
231. Gürsey F. Connection between charge independence and conservation of barion number with the Pauli transformation // Nuovo Cim.— 1958.— 7, N 2.— P. 411—415.
232. Hagen C. R., Hurley W. J. Magnetic moment of a particle with arbitrary spin // Phys. Rev. Lett.— 1970.— 24, N 24.— P. 1381—1384.
233. Hagen C. R. Scale and conformal transformations in Galilean-covariant field theory // Phys. Rev. D.— 1972.— 5, N 2.— P. 377—388.
234. Harish-Chandra. On relativistic wave equations // Phys. Rev.— 1947.— 71, № 11.— P. 793—805.
235. Harish-Chandra. Motion of electron in the field of a magnetic pole // Phys. Rev.— 1948.— 74, N 8.— P. 883—887.
236. Heaviside O. Some properties of the Maxwell equations // Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A.— 1893.— 183.— P. 423—430.
237. Hirata K. Quantization of massless field with continuous spin // Progr. Theor. Phys.— 1977.— 58, N 2.— P. 652—656.
238. Hlavaty L., Niederle J. Field equation invariant under indecomposable representations of the Lorentz group // J. Math. Phys.— 1981.— 22, N 8.— P. 1775—1780.
239. Hurley W. J. Nonrelativistic quantum mechanics for particles with arbitrary spin // Phys. Rev. D.— 1971.— 3, N 10.— P. 2339—2347.

240. Hurley W. J. Relativistic wave equations for particles with arbitrary spin // Phys. Rev. D.— 1971.— 4.— P. 3605—3616.
241. Inönü E., Wigner E. P. Representations of the Galilei group // Nuovo Cim.— 1952.— 9, N 8.— P. 705—718.
242. Jansen L. B_2 diagrams and Bhabha equations with mass matrix // Z. Naturforsh. A.— 1981.— 36, N 4.— P. 301—310.
243. Jayaraman J. On the additional invariance of arbitrary spin relativistic wave equations // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1976.— 9, N 7.— P. 1181—1185.
244. Jayaraman J. A new linear Dirac-like spin-3/2 wave equation using Clifford algebra // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1976.— N 10.— P. L131 — L136.
245. Jonson K., Sudarshan E. C. G. The impossibility of a consistent theory of charged higher spin Fermi fields // Ann. Phys.— 1961.— 13, N 1.— P. 126—145.
246. Kadyshevsky V. G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude // Nucl. Phys. B.— 1968.— 6, N 2.— P. 125—148.
247. Kadyshevsky V. G. Fundamental length hypothesis in a gauge theory context // Group Theoretical Methods in Physics. Lecture Notes in Physics.— 1979.— 94.— P. 114—123.
248. Kalnins E. G., Miller W., Williams G. C. Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables // J. Math. Phys.— 1986.— 27, N 8.— P. 1893—1900.
249. Kibble T. W. B. Conservation laws for free fields // J. Math. Phys.— 1965.— 6, N 7.— P. 1022—1025.
250. Klein O. Quantentheorie und fündimensionale Relativitäts-theorie // Zeit. Phys.— 1926.— 37, H. 12.— S. 895—906.
251. Kotel'nikov G. A. On the symmetry of equations of the free electromagnetic field // Nuovo Cim. B.— 1982.— 72, N 1.— P. 68—78.
252. Kotecky R., Niederle J. Conformally covariant field equations. I. First-order equations with non-vanishing mass // Czech. J. Phys. B.— 1975.— 25, N 2.— P. 123—149; II. First-order massless equations // Rep. Math. Phys.— 1976.— 12, N 2.— P. 237—249.
253. Krajcik R. A., Foldy L. L. Relativistic center-of-mass variables for composite systems with arbitrary internal interactions // Phys. Rev. D.— 1974.— 10, N 6.— P. 1777—1795.
254. Krajcik R. A., Nieto M. M. Rhabha first-order wave equations // Phys. Rev. D.— 1974.— 10, N 12.— P. 4049—4060; 1975.— 11, N 6.— P. 1442—1458; N 6.— P. 1459—1468; 1976.— 14, N 2.— 418—436.
255. Kraus K. Galilei covariance does not imply minimal electromagnetic coupling // Ann. Phys.— 1980.— 37, N 7.— P. 82—101.
256. Krolikowski W., Rzewuski I. Relativistic radial equations for two spin-1/2 particles with a static interaction // Acta Physica Polonica B.— 1976.— 7, № 7.— P. 487—496.
257. Krolikowski W. Solving nonperturbatively the Breit equation for parapositronium // Acta Physica Polonica B.— 1981.— 12, N 9.— P. 891—895.
258. Larmor I. Collected papers.— London, 1928.
259. Le Bellac M., Levy-Leblond J.-M. Galilean electromagnetism // Nuovo Cim. B.— 1973.— 14, N 1.— P. 217—235.
260. Levy-Leblond J.-M. Nonrelativistic particle and wave equations // Com. Math. Phys.— 1967.— 6, N 4.— P. 286—311.
261. Levy-Leblond J.-M. Galilei group and Galilei invariance // Group theory and its applications.— New York; London: Acad. Press, 1971.— Vol. 2.— P. 221—229.
262. Leutwyler H., Stern J. Relativistic dynamics on a null plane // Ann. Phys.— 1978.— N 1.— P. 94—164.
263. Lie S. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichunge die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten // Math. Ann.— 1885.— 25, N 1.— S. 71—151.
264. Lie S. Classification und Integration von gewöhulichen Differentialgleichungen zwisehen x, y die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Natur. Christiania.— 1883.— 9,— S. 381—393.

265. L i e S. Vorlesungen über continuierliche Gruppen.— Leipzig: Teubner, 1893.— S. 805.
266. L i e S. Uber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse lineare parliellen Differential Gleichungen // Arch. Math.— 1881.— H. 3.— S. 328—368.
267. L i e S., E n g e l F. Theorie der Transformationsgruppen: In 3 Bd.— Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.— Bd. 1—3.
268. L i p k i n D. M. Existence of a new conservation laws in electromagnetic theory // J. Math. Phys.— 1964.— **5**, N 5.— P. 696—700.
269. L o g u n o v A. A., T a v k h e l i d z e A. N. Quasi-optical approach in quantum field theory // Nuovo Cim.— 1963.— **29**, N 2.— P. 380—399.
270. L o m o n t J. S. Dirac-like wave equation for particles of zero rest mass and their quantization // Phys. Rev.— 1958.— **111**, N 6.— P. 1710—1716.
271. L o m o n t J. S., M o s e s H. E. Dirac-like wave equations for particles of nonzero rest mass and their quantization // Phys. Rev.— 1960.— **118**, N 1.— P. 337—344.
272. L o m o n t J. S., Conformal invariance of massless Dirac-like wave equations // Nuovo Cim.— 1961.— 22, N 4.— P. 673—679.
273. L o m o n t J. S., M o s e s H. E. Simple realization of the infinitesimal generators of the proper orthochronous inhomogeneous Lorentz group for mass zero // J. Math. Phys.— 1962.— **3**, N 3.— P. 405—408.
274. M a c k G., S a l a m A. Finite-component field representation of conformal group // Ann. Phys.— 1969.— **53**, N 1.— P. 174—202.
275. M a c f a r l a n e A. Z. Kinematics of the relativistic two-particle system // J. Math. Phys.— 1963,— **4**, N 4.— P. 490—497.
276. M a t h e w s P. M. Relativistic Schrödinger equation for particles with arbitrary spin // Phys. Rev.— 1966.— **143**, N 5.— P. 978—986.
277. M a y e r D. H. Vector and tensor fields on conformal space // J. Math. Phys.— 1975.— **16**, N 4.— P. 884—893.
278. M i c h e l s s o n J., N i e d e r l e J. On representation of the conformal group which when restricted to its Poincaré or Weil subgroup remain irreducible // J. Math. Phys.— 1972.— **13**, N 1.— P. 22—27.
279. M i c h e l s s o n J., N i e d e r l e J. Infinite set of conservation laws for linear and nonlinear field equations // Lett. Math. Phys.— 1984.— N 8.— P. 195—205.
280. M i g n a n i R., R e c a m i E., B a d l o M. About a Dirac-like equation for the photon according to Ettire Majorana // Lett. Nuovo Cim.— 1974.— **11**, N 12.— P. 568—572.
281. M o l d a u e r P. A., C a s e K. M. Properties of half-integral spin Dirac-Fierz-Pauli particles // Phys. Rev.— 1956.— **102**, N 3.— P. 279—285.
282. M o s e s H. E. A spinor representation of Maxwell equations // Nuovo Cim. Suppl.— 1958.— N 1.— P. 1—18.
283. M u r p h y J. E. Massless particles with infinite spin // Phys. Rev. D.— 1970.— 2, N 6.— P. 1047—1055.
284. N i e d e r e r U. The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation // Helv. Phys. Acta.— 1972.— **45**, N 5.— P. 802—810.
285. N i e d e r e r U. Massless fields as unitary representations of the Poincaré group // Fortschr. Phys.— 1979.— **27**, N 4.— P. 191—207.
286. N i k i t i n A. G. Non-relativistic equations of motion for arbitrary spin particles with anomalous interaction // Acta Physica Polonica B.— 1982.— **13**, N 5.— P. 369—374.
287. N i k i t i n A. G. Non-relativistic particle of arbitrary spin in the Coulomb field // Acta Physica Polonica.— 1985.— **B16**, N 1.— P. 3—11.
288. N i k i t i n A. G., F u s h c h i c h W. I., W l a d i m i r o v V. A. New symmetries and conservation laws for electromagnetic fields // Group-theoretical methods in physics.— Harwood: Harwood Academic Publishers, 1985.— P. 497—505.
289. N i k o l o v a L. Relativistically invariant equations $(\beta^\mu\partial_\mu + \rho)\Psi = 0$ with singular ρ and det $\beta_0 \neq 0$ // Rep. Math. Phys.— 1983.— **18**, N 2.— P. 183—196.

290. Novozhilov Yu. V., Terentjev I. A. Unitary representations of the generalised Poincare groups // J. Math. Phys.— 1968.— 9, N 10.— P. 1517—1526.
291. Olver D. J. Application of Lie groups to differential equations.— N. Y.: Springer, 1986.
292. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group // J. Math. Phys.— 1975.— 16, N 8.— P. 1597—1624.
293. Plybon B. F. Observation on the Bessed-Hagen conservation laws for electromagnetic fields // Amer. J. Phys.— 1974.— 42, N 3.— P. 998—10001.
294. Pryse M. H. L.. Møller C. // Proc. R. Soc. London, Ser. A.— 1948.— 195.— P. 62.
295. Puersey D. L., Plebansky J. F. Symmetries of the Dirac equation // Phys. Rev. D.— 29, № 8.— P. 1848—1850.
296. Rabi I. I. Das freie Electron in homogenen Magnetfeld nach der Diracschen Theorie // Zeit. Phys.— 1928.— 49, H. 7—8.— S. 507—511.
297. Rainich G. I. On the symmetry of the Maxwell equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1925.— 27.— P. 106—109.
298. Rarita, Scwinger J. On a theory of particles with half-interger spin // Phys. Rev.— 1941.— 60, N 1.— P. 61—62.
299. Redmond P. I. Solution of the Klein-Gordon and Dirac equations for a particle with a plane electromagnetic wave and a parallel magnetic field // J. Math. Phys.— 1965.— 6, N 7.— P. 1163—1169.
300. Rosen J. Conformal transformation matrix for fields // Ann. Phys. (N. Y.).— 1973.— 77.— P. 452—453.
301. Rosen J. Redundancy and superfluity for electromagnetic fields and potentials // Amer. J. Phys.— 1980.— 48, N 12.— P. 1071—1973.
302. Ryder L. H. Physical and nonphysical representations of the Galilei group // Nuovo Cim. A.— 1967.— 52, N 3.— P. 879—892.
303. Sakata S., Taketany M. // Proc. Phys. Math. Soc. Japan.— 1940.— 22.— P. 757.
304. Shaw R., Lever J. Irreducible multiplier corepresentations of extended Poincare group // Com. Math. Phys.— 1974.— 38, N 4.— P. 279—297.
305. Sorba P. The Galilei group and its connected subgroups // J. Math. Phys.— 1976.— 17, N 6.— P. 941—953.
306. Steinwedel H. Galilei-Invariantz // Fort. Phys.— 1974.— 24, N 4.— P. 211—236.
307. Stuckelberg E. // Helv. Phys. Acta.— 1938.— 11.— P. 225.
308. Swartz C. Some improvements in the theory of faster-then-light particles // Phys. Rev. D.— 1982.— 25, N 2.— P. 356—364.
309. Tarimer N. Classification of elementary particles based on the representation types of the Poincaré group including space, time and charge reflections // Phys. Rev.— 1965.— 140, N 4B.— P. 977—983.
310. Velo G., Zwanzinger D. Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential // Phys. Rev.— 1969.— 186, N 5.— P. 218—226.
311. Volkov D. M. Über eine Klasse von Losungen der Diracshen Gleichung // Zeit. Phys.— 1935.— 94, H. 3—4.— S. 250—260.
312. Weaver D. L., Hammer C. L., Good R. H. Description of a particle with arbitrary mass and spin // Phys. Rev. B.— 1964.— 135, N 1.— P. 241—248.
313. Weinberg S. Feynman rules for any spin // Phys. Rev.— 1964.— 133, N 5B.— P. 1318—1332.
314. Wightman A. S. Invariant wave equations: general theory and applications to the external field problem // Invariant wave equations. Lecture Notes in Physics.— Berlin: Springer, 1978.— 73.— P. 1—101.
315. Wigner E. Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Ann. Math.— 1939.— 40, N 1.— P. 149—204.

316. Wigner E. P. Unitary representations of Lorentz group including reflections // In theoretical concepts and methods in elementary particle physics.— Lectures of the Istanbul School of Theor. Phys., 1962.— Gordon and Breach, 1964.
317. Wild E. On first order wave equations for elementary particles without subsidiary conditions // Proc. Roy. Soc. London.— 1947.— 191A.— P. 253—268.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ДОПОЛНЕНИЮ

1*. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения.— 1983.— 19, № 7.— С. 1215—1224.
2*. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса.— М.: Наука, 1987.— С. 352.
3*. Поливанов М. К., Джорджадзе Г. П., Погребков А. К. Глобальное решение задачи Коши для уравнения Лиувилля $\varphi_{tt}(t, x) - \varphi_{xx}(t, x) = m^2 \exp \varphi(t, x)$ // ДАН СССР.— 1978.— 273, № 2.— С. 318—320.
4*. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. Сборник научных трудов.— Киев: Институт математики АН УССР, 1987.
5*. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. Сборник научных трудов.— Киев: Институт математики АН УССР, 1985.
6*. Фущич В. И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—287.
7*. Фущич В. И., Штелень В. М. О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера // Теор. и мат. физика.— 1983.— 56, № 3.— С. 387—394.
8*. Фущич В. И., Цифра И. М. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теорет. и мат. физика.— 1985.— 64, № 1.— С. 41—50.
9*. Фущич В. И. О симметрии и точных решениях нелинейных волновых уравнений //Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 1.— С. 116—123.
10*. Фущич В. И., Кривский И. Ю., Симулик В. М. О векторных лагранжианах электромагнитного и спинорного полей.— Киев, 1987.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 87.54).
11*. Фущич В. И., Егорченко И. А. О симметрийных свойствах комплекснозначных нелинейных волновых уравнений // ДАН СССР.— 1988.— 298, № 7.— С. 347—351.
12*. Фущич В. И., Серов Н. И., Чопик В. И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // ДАН УССР.— 1988.— № 9.— С. 17—20.
*13. Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев: Наукова думка, 1989.
14*. Фущич В. И., Чернига Р. М. О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа.— Киев, 1986.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 86.85).
15*. Штелень В. М. Нелиевская симметрия и нелокальные преобразования.— Киев, 1987.— (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 87.6).
16*. Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики. Сборник научных трудов.— Киев: Институт математики АН УССР, 1988.

17*. Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory // Proc. Roy. Soc. A.— 1934.— **144**, N 00.— P. 425—451.
18*. Fushchich M. I., Shtelen W. M. On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics // Phys. Lett. B.— 1983.— **128**, N 3—4.— P. 215—217.
19*. Fushchich W. I., Shtelen W. M., Zhdanov R. Z. On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions // Phys. Lett. B.— 1985, N 2—3.— P. 189—191.
20*. Fushchich W. I., Cherniha R. M. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1985.— **18**, N 10.— P. 3491—3503.
21*. Fushchich W. I., Tsifra I. M. On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1987.— **20**, N 2.— P. L45 — L48.
22*. Fushchich W. I., Zhdanov R. Z. On some exact solutions of a system of non-linear differential equations for spinor and vector fields // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1987.— **20**, N 12.— P. 4183—4190.
23*. Fushchich W. I., Serov N. I. On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1987.— **20**, N 6.— P. L929—L933.
24*. Fushchich W. I., Zhdanov R. Z. On the reduction and some new exact solutions of the non-linear Dirac and Dirac-Klein-Gordon equations // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1988.— **21**, № 1.— P. L5—L9.
25*. Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys.— 1984.— **25**, N 4.— P. 791—806.
26*. Gürsey F. On a conform-invariant spinor wave equation // Nuovo Cimento.— 1956.— **3**, N 10.— P. 988—1006.
27*. Kamran N., McLenaghan R. G., Winternitz P. The classification of complete sets of operators commuting with the Dirac operators in Minkowski space-time // J. Math. Phys.— 1988.— **29**, N 2.— P. 403—411.
28*. Clarkson P. A., Kruskal M. D. New similarity solutions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys.— 1989.— To be published.
29*. Olver P. J., Rosenau Ph. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A.— 1986.— **114**, N 3.— P. 107—112.
30*. Онуфрийчук С. П. О совместности явно-ковариантных уравнений для частиц произвольного спина // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 56—59.
31*. Фущич В. И., Жданов Р. З. Симметрия и точные решения нелинейного уравнения Дирака // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1988.— **19**, вып. 5.— С. 1154—1196.
32*. Fushchich W. I., Zhdanov R. Z. Non-local antätze for the Dirac equation // J. Phys. A: Math. and Gen.— 1988.— **21**, N 23.— P. L1117—L1121.
33* Fushchich W. I., Zhdanov R. Z. Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // Phys. Reports.— 1989.— **172**, N 4.— P. 123—174.
34*. Konopelchenko B. G. Nonlinear integrable equations.— Lecture Notes in Physics.— Berlin, Springer-Verlag, 1987.— V. **270**.— P. 371.
35*. Barannik L. F., Fushchich W. I. On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group $P(l, n)$ // J. Math. Phys.— 1987.— 28, N 7.— P. 1445—1448.
36*. Barannik L. F., Fushchich W. I. On continuous subgroups of the generalized Schrödinger groups // J. Math. Phys.— 1989.— **30**, N 2.— P. 280—290.
37*. Фущич В. И., Серов Н. И. Условная инвариантность и точные решения Буссинеска // Симметрия и решения уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 96—103.
38*. Никитин А. Г. Уравнения для частиц произвольного спина, инвариантные относительно групп Галилея и Пуанкаре. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1987.

39*. Федорчук В. М. О редукции и некоторых точных решениях нелинейного волнового уравнения // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 73—76.
40*. Михайлов А. М., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи мат. наук.— 1987.— 42, № 4.— С. 3—53.
41*. Фущич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 4—16.
42*. Кривский И. Ю., Симулик В. М Нетеровский анализ «zilch»-законов сохранения и их обобщений для электромагнитного поля. I. Привлечение различных формулировок принципа наименьшего действия // Теорет. и мат. физика.— 1989.— 80, № 2.— С. 274—287.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5

Глава 1. Локальная симметрия основных уравнений релятивистской квантовой теории 7

§ 1.1. Локальная симметрия уравнения Клейна — Гордона — Фока 7

1.1.1. Введение (7). 1.1.2. Алгебра инвариантности уравнения КГФ (10). 1.1.3. Симметрия уравнения КГФ для безмассового поля (12). 1.1.4. Преобразования Лоренца (13). 1.1.5. Группа Пуанкаре (16). 1.1.6. Конформные преобразования (19). 1.1.7. Дискретные преобразования симметрии (21).

§ 1.2. Локальная симметрия уравнения Дирака 22

1.2.1. Уравнение Дирака (22). 1.2.2. Различные представления уравнения Дирака (23). 1.2.3. Алгебра матриц Дирака (25). 1.2.4. Операторы симметрии и алгебра инвариантности (25). 1.2.5. Алгебра инвариантности уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов первого порядка (26). 1.2.6. Операторы массы и спина (29). 1.2.7. Явно эрмитова форма базиса а. и. уравнения Дирака (30). 1.2.8. Симметрия безмассового уравнения Дирака (31). 1.2.9. Преобразования Лоренца и конформные преобразования решений уравнения Дирака (32). 1.2.10. Преобразования P, T и C (34).

§ 1.3. Уравнения Максвелла 36

1.3.1. Введение (36). 1.3.2. Различные формулировки уравнений Максвелла (37). 1.3.3. Уравнение для вектор-потенциала (39). 1.3.4. Алгебра инвариантности уравнений Максвелла в классе $\mathfrak{M}_1$ (40). 1.3.5. Преобразования Лоренца и конформные преобразования векторов **E**, **H** и четырехвектора тока (42). 1.3.6. Симметрия относительно преобразований P, T и C (45).

§ 1.4. Алгебра Ли конформной группы 46

1.4.1. Конформная алгебра и алгебра AO(2, 4) (46). 1.4.2. Представление конформной алгебры на множестве решений уравнения Вейля (47). 1.4.3. Представление конформной алгебры, соответствующее полю с произвольным дискретным спином (49). 1.4.4. Ковариантные представления алгебры AP (1, 3) (50). 1.4.5. Ковариантные представления конформной алгебры (51). 1.4.6. Конформные преобразования для поля произвольного спина (53).

Глава 2. Представления алгебры Пуанкаре и волновые уравнения для произвольного спина 54

§ 2.1. Неприводимые представления алгебры Пуанкаре 54

2.1.1. Введение (54). 2.1.2. Операторы Казимира (54). 2.1.3. Базис неприводимого представления (57). 2.1.4. Определение общего вида вектора Любанского — Паули (58). 2.1.5. Представления алгебры $A(c_1, \mathrm{n})$ (60). 2.1.6. Неприводимость представления алгебры Пуанкаре (63). 2.1.7. Связь с каноническими реализациями Широкова — Фолди — Мозеса (65). 2.1.8. Ковариантные представления (68).

§ 2.2. Представления операторов дискретной симметрии 70

2.2.1. Введение (70). 2.2.2. Неэквивалентные мультипликаторы группы G_8 (72). 2.2.3. Общий вид операторов дискретной симметрии (74). 2.2.4. Операторы P, T и C в пространстве представлений I класса (76). 2.2.5. Представления II класса (79). 2.2.6. Представления III — V классов (80).

§ 2.3. Пуанкаре-инвариантные уравнения первого порядка 84

2.3.1. Введение (84). 2.3.2. Условия релятивистской инвариантности уравнения (2.3.2) (85). 2.3.3. Явный вид матриц β_μ (87). 2.3.4. Дополнительные ограничения для матриц β_μ (88). 2.3.5. Уравнение Кеммера — Деффина — Петье (КДП) (90). 2.3.6. Уравнение Дирака — Фирца — Паули для спина 3/2 (91). 2.3.7. Преобразование к форме Шредингера (93).

§ 2.4. Пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент . . . 97
2.4.1. Введение (97). 2.4.2. Постановка задачи (97). 2.4.3. Явный вид гамильтонианов H_s^{I} и H_s^{II} (101). 2.4.4. Дифференциальные уравнения движения для спиновых частиц (105). 2.4.5. Связь с каноническим представлением Ю. М. Широкова (107).
§ 2.5. Уравнения для частиц произвольного спина в форме Дирака 110
2.5.1. Ковариантные уравнения с коэффициентами, образующими алгебру Клиффорда (110). 2.5.2. Уравнения с минимальным числом компонент (111). 2.5.3. Связь с уравнениями без лишних компонент (113). 2.5.4. Лагранжева формулировка (114). 2.5.5. Уравнения в форме Дирака как универсальная модель частицы произвольного спина (115).
§ 2.6. Уравнения для безмассовых полей 118
2.6.1. Основные определения (118). 2.6.2. Теоретико-групповой вывод уравнений Максвелла (119). 2.6.3. Конформно-инвариантные уравнения для полей произвольного спина (121). 2.6.4. Уравнения типа Вейля (122). 2.6.5. О других типах уравнений для безмассового поля (125).
Глава 3. Негеометрическая симметрия 127
§ 3.1. Негеометрическая симметрия уравнения Дирака 127
3.1.1. Основные определения (127). 3.1.2. Алгебра инвариантности уравнения Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ (129). 3.1.3. Симметрия уравнения Дирака в классе интегро-дифференциальных операторов (133). 3.1.4. Восьмикомпонентное уравнение Дирака (135). 3.1.5. Симметрия уравнения (3.1.34) (136). 3.1.6. Симметрия уравнения Дирака относительно линейных и антилинейных преобразований (137). 3.1.7. Полный набор операторов симметрии уравнения Дирака в классе $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ (140). 3.1.8. Симметрия уравнения Дирака для безмассовой частицы (144).
§ 3.2. Симметрия релятивистских уравнений для частиц произвольного спина 149
3.2.1. Симметрия уравнения Кеммера — Деффина — Петье (149). 3.2.2. Симметрия уравнений типа Дирака для произвольного спина (153). 3.2.3. О дополнительной симметрии релятивистских волновых уравнений в произвольной формулировке (156).
§ 3.3. Негеометрическая симметрия уравнений Максвелла 159
3.3.1. Инвариантность относительно алгебры AGL(2, C) (159). 3.3.2. Другое доказательство теоремы 3.16 (161). 3.3.3. Группа негеометрической симметрии уравнений Максвелла (162). 3.3.4. Симметрия уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов второго порядка (164).
§ 3.4. Негеометрическая симметрия релятивистских уравнений для частиц, взаимодействующих с внешним полем 170
3.4.1. Введение (170). 3.4.2. Уравнение Дирака для частицы во внешнем поле (171). 3.4.3. Уравнения Максвелла с токами и зарядами (173). 3.4.4. Релятивистские уравнения для частиц произвольного спина (175). 3.4.5. Операторы симметрии уравнений для упругих волн (177).
§ 3.5. Законы сохранения и интегралы движения 179
3.5.1. Введение (179). 3.5.2. Законы сохранения для поля Дирака (182). 3.5.3. Законы сохранения для безмассового спинорного поля (183). 3.5.4. Классические интегралы движения электромагнитного поля (184). 3.5.5. Интегралы движения, обусловленные скрытой симметрией уравнений Максвелла (186).
Глава 4. Уравнения для взаимодействующих частиц произвольного спина 193
§ 4.1. Релятивистская частица произвольного спина во внешнем электромагнитном поле 193
4.1.1. Принцип минимального взаимодействия (193). 4.1.2. Введение взаимодействия в уравнения первого порядка (195). 4.1.3. Введение взаимодействия в уравнения типа Дирака (196). 4.1.4. Четырехкомпонентное уравнение для бесспиновых частиц (197). 4.1.5. Введение взаимодействия в уравнения без лишних компонент (198). 4.1.6. Разложение по степеням $1/m$ (199). 4.1.7. Причинность и волновые уравнения для частиц произвольного спина (202). 4.1.8. Уравнения для системы с переменным спином (204).
§ 4.2. Решение релятивистских волновых уравнений для частиц произвольного спина 206
4.2.1. Введение (206). 4.2.2. Свободное движение частиц (206). 4.2.3. Релятивистская частица с произвольным спином в однородном магнитном поле (211). 4.2.4. Частица с произвольным спином в поле плоской электромагнитной волны (214).

§ 4.3. Частица произвольного спина в поле Кулона 216
4.3.1. Разделение переменных в центральном поле (216). 4.3.2. Решение уравнений для радиальных функций (218). 4.3.3. Уровни энергии релятивистской частицы с произвольным спином в поле Кулона (220). 4.3.4. Шаровые спиноры (223). 4.3.5. Явный вид $O(3)$-инвариантных матриц в базисе шаровых спиноров (226).

Глава 5. **Обобщенные группы Пуанкаре** 232

§ 5.1. Группа $P(1, 4)$ 232
5.1.1. Введение (232). 5.1.2. Алгебра Ли группы $P(1, n)$. Операторы Казимира (233). 5.1.3. Неэквивалентные представления тензора $W_{\mu\nu}$ (234). 5.1.4. Базис неприводимого представления (237). 5.1.5. Явный вид базисных элементов алгебры AP(1, 4) (238). 5.1.6. Связь с другими реализациями (239).

§ 5.2. Представления алгебры AP (1, 4) в пуанкаре-базисе 243
5.2.1. Подгрупповая структура группы $P(1, 4)$ (243). 5.2.2. Пуанкаре-базис (243). 5.2.3. Редукция $P(1, 4) \to P(1, 3)$ для представлений I класса (244). 5.2.4. Редукция $P(1, 4) \to P(1, 2)$ (247). 5.2.5. Редукция представлений с $c_1 = 0$ (249). 5.2.6. Редукция представлений IV класса (251). 5.2.7. Редукция $P(1, n) \to P(1, 3)$ (252).

§ 5.3. Представления алгебры AP (1, 4) в $G(1, 3)$- и $E(4)$-базисах 256
5.3.1. $G(1, 3)$-базис (256). 5.3.2. Представления с $P_n P_n > 0$ (257). 5.3.3. Представления II — IV классов (260). 5.3.4. Ковариантные представления алгебры AP(1, 4) (261). 5.3.5. $E(4)$-базис (263). 5.3.6. Представления алгебры Пуанкаре в базисе $G(1, 2)$ (264).

§ 5.4. Уравнения, инвариантные относительно обобщенных групп Пуанкаре 266
5.4.1. Вводные замечания (266). 5.4.2. Обобщенное уравнение Дирака (267). 5.4.3. Обобщенное уравнение Кеммера — Деффина — Петье (270). 5.4.4. Ковариантные системы уравнений (271).

Глава 6. **Представления алгебры Галилея и волновые уравнения для нерелятивистских частиц** 274

§ 6.1. Симметрия уравнений Шредингера 274
6.1.1. Уравнение Шредингера (274). 6.1.2. Алгебра инвариантности уравнения Шредингера (275). 6.1.3. Алгебра Шредингера и алгебра Галилея (277). 6.1.4. Группа Шредингера (279). 6.1.5. Группа Галилея (281). 6.1.6. Преобразования P и T (283). 6.1.17. Симметрия квазирелятивистского уравнения эволюции (283).

§ 6.2. Представления алгебры Ли группы Галилея 285
6.2.1. Принцип относительности Галилея и уравнения квантовой механики (285). 6.2.2. Классификация неприводимых представлений (286). 6.2.3. Явный вид базисных элементов алгебры AG(1, 3) (287). 6.2.4. Связь с другими реализациями (290). 6.2.5. Ковариантные представления (292). 6.2.6. Конечномерные представления алгебры Ли однородной группы Галилея (293).

§ 6.3. Галилеевски инвариантные волновые уравнения 298
6.3.1. Введение (298). 6.3.2. Условия галилеевской инвариантности уравнений (298). 6.3.3. Дополнительные ограничения на матрицы β_k (300). 6.3.4. Общий вид матриц β_μ и β_4 в базисе $|\lambda; l, m\rangle$ (301). 6.3.5. Уравнения минимальной размерности (303). 6.3.6. Уравнения для представлений с произвольным индексом нильпотентности (306).

§ 6.4. Уравнения в форме Шредингера, инвариантные относительно группы Галилея 308
6.4.1. Постановка задачи (308). 6.4.2. Гамильтониан нерелятивистской частицы произвольного спина (310). 6.4.3. Лагранжева формулировка (313).

§ 6.5. Нерелятивистская частица произвольного спина во внешнем электромагнитном поле 315
6.5.1. Уравнение Шредингера для спиновой частицы во внешнем электромагнитном поле (315). 6.5.2. Преобразование уравнений (6.5.1) к квазидиагональной форме (317). 6.5.3. Введение минимального взаимодействия в уравнения первого порядка (318). 6.5.4. Уравнения для $(2s+1)$-компонентной волновой функции (320). 6.5.5. Аномальное воздействие (323).

§ 6.6. Точные решения галилеевски инвариантных волновых уравнений 327
6.6.1. Вводные замечания (327). 6.6.2. Нерелятивистская частица в постоянном и однородном магнитном поле (327). 6.6.3. Нерелятивистская частица произвольного спина в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях (329). 6.6.4. Нерелятивистская частица произвольного спина в поле Кулона (331).

Глава 7. Двухчастичные уравнения 335

§ 7.1. Двухчастичные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея 335

7.1.1. Предварительные замечания (335). 7.1.2. Уравнения для бесспиновых частиц (336). 7.1.3. Уравнения для системы частиц с произвольным спином (340). 7.1.4. Двухчастичные уравнения первого порядка (341). 7.1.5. Уравнения для взаимодействующих частиц произвольного спина (343).

§ 7.2. Квазирелятивистские и пуанкаре-инвариантные двухчастичные уравнения 346

7.2.1. Предварительные замечания (346). 7.2.2. Уравнение Брейта (347). 7.2.3. Преобразование гамильтониана Брейта к квазидиагональной форме (348). 7.2.4. Уравнение Брейта для частиц равной массы (350). 7.2.5. Двухчастичные уравнения, инвариантные относительно группы $P(1, 6)$ (352).

§ 7.3. Точно решаемые модели двухчастичных систем 354

7.3.1. Нерелятивистская модель (354). 7.3.2. Релятивистская двухчастичная модель (355). 7.3.3. Решение двухчастичных уравнений (357). 7.3.4. Обсуждение спектра энергий двухчастичных моделей (359).

Дополнение 365

Список литературы 381