Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Нестеренко Марина Олександрівна

УДК 512.816:517.958

Контракції та реалізації алгебр Лі

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Нікітін Анатолій Глібович
доктор фіз.–мат. наук, професор

Київ — 2006

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathfrak{g}$	алгебра Лі
$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$	група внутрішніх автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$
$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$	група автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$
A_1	одновимірна алгебра Лі
nA_1	n-вимірна абелева алгебра Лі
$\dim P$	розмірність простору P
∂_x	оператор диференціювання за змінною x
D_x	оператор повного диференціювання за змінною x
$\mathrm{Vect}(M)$	векторне поле на множині M
c_{ij}^k	компоненти тензора структурних сталих алгебри Лі
$\mathcal{L}_n$	множина n-вимірних алгебр Лі
$GL(V)$	група сталих невироджених $n \times n$ матриць
$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$	алгебра диференціювань алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\mathcal{O}(\mathfrak{g})$	орбіта алгебри Лі $\mathfrak{g}$ під дією групи $GL(V)$ у $\mathcal{L}_n$
$\overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}$	замикання орбіти відносно топології Заріського в $\mathcal{L}_n$
$Z(\mathfrak{g})$	центр алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$R(\mathfrak{g})$	радикал алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$N(\mathfrak{g})$	нільрадикал алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$	максимальна розмірність абелевих підалгебр алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$	максимальна розмірність абелевих ідеалів алгебри Лі $\mathfrak{g}$
κ	форма Кілінга
$\kappa_+\mathfrak{g}$	ранг додатної частини форми Кілінга алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\kappa_-\mathfrak{g}$	ранг від'ємної частини форми Кілінга алгебри Лі $\mathfrak{g}$

$\tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^{\alpha}$	модифікована форма Кілінга алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$r_{\mathfrak{g}}$	ранг алгебри Лі $\mathfrak{g}$
ad_x	приєднане зображення елемента $x \in \mathfrak{g}$
ad_x^*	коприєднане зображення елемента $x \in \mathfrak{g}$
$\mathrm{rang}(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g})$	ранг приєднаного зображення алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\mathrm{rang}(\mathrm{ad}^*\,\mathfrak{g})$	ранг коприєднаного зображення алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$	ранг розв'язності алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$	ранг нільпотентності алгебри Лі $\mathfrak{g}$

Вступ

Актуальність теми. Алгебри Лі є потужним інструментом та дають істотну інформацію для вивчення задач і моделей сучасної математичної та теоретичної фізики. Це стимулювало стрімкий розвиток досліджень, пов'язаних з алгебрами Лі і особливо алгебрами Лі невисоких розмірностей, як такими, що широко застосовуються в теорії зображень та індукованих зображень, при вивченні порушених симетрій тощо. Низькорозмірні алгебри Лі також цікаві самі по собі, оскільки дають істотні та типові приклади для фізичних та математичних теорій. У зв'язку з цим протягом останніх десятиліть інтенсивно вивчались класифікації, підалгебри, реалізації, інваріанти, контракції, деформації та інші об'єкти, які стосуються низькорозмірних алгебр Лі.

Контракції алгебр Лі мають широкий спектр застосувань в різних галузях теоретичної фізики та математики, наприклад, при вивченні зображень, інваріантів, спеціальних функцій тощо. Вони є одним з інструментів дослідження структури множин алгебр Лі. Зокрема, коефіцієнти Вігнера групи Евкліда $E(3)$ було отримано через контракцію коефіцієнтів Вігнера спеціальної ортогональної групи $SO(4)$. Контракції використовують для встановлення зв'язків між різноманітними кінематичними групами та для з'ясування їх фізичного значення. В такий спосіб між собою пов'язано різні алгебри Лі, які включають релятивістський оператор положення, та конформна група і група Шрьодінгера. Контракції також відіграють важливу роль при описі взаємодіючих систем за допомогою динамічних груп. Наприклад, граничний процес, при якому стала зчеплення прямує до нуля, приводить до випадку невзаємодіючих систем.

Іншим актуальним питанням сучасного симетрійного аналізу є задача реалізації алгебр Лі векторними полями. Опис таких зображень для низькорозмірних алгебр має ряд застосувань, наприклад, у задачі Левіне, до інтегрування систем, що допускають принцип суперпозиції, і до побудови різницевих схем, та дозволяє істотно розширити область застосування класичних групових методів. Зокрема, знання цих представлень є необхідною передумовою для побудови математичних моделей з нетривіальною симетрією. Слід відзначити, що вичерпний опис нееквівалентних реалізацій низькорозмірних алгебр Лі векторними полями є фундаментальною математичною задачею, яка має самостійну цінність.

Важливою також є класифікація, з точністю до локальних дифеоморфізмів, реалізацій алгебр Лі векторними полями, що діють на дійсній площині. Розв'язання цієї задачі є необхідною передумовою для вичерпного опису диференціальних інваріантів та визначників Лі скінченновимірних груп Лі на дійсній площині. В свою чергу, якщо відомі диференціальні інваріанти групи Лі, то диференціальні рівняння та їх системи, що допускають цю групу, описуються явно. Крім того, можна побудувати групове розшарування інваріантних диференціальних рівнянь тощо.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України в рамках тем "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098) та "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436).

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є розробка теоретичних основ для дослідження контракцій алгебр Лі та їх застосування до вивчення контракцій та структур множин низькорозмірних алгебр Лі; побудова реалізацій низькорозмірних нерозв'язних алгебр Лі; перегляд класифікації алгебр Лі векторних полів на площині та опис їх диференціальних інваріантів.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Розроблено теоретичні основи для вивчення контракцій скінченновимірних алгебр Лі над комплексним і дійсним полями та запропоновано нові необхідні критерії існування таких контракцій.

2. Доведено теорему, що містить повний перелік необхідних критеріїв існування контракцій низькорозмірних алгебр Лі. На основі цієї теореми виокремлено всі випадки, коли між двома заданими низькорозмірними алгебрами Лі не існує контракцій.

3. Сформульовано алгоритм знаходження контракцій скінченновимірних алгебр Лі, за допомогою якого описано всі слабо нееквівалентні контракції дійсних низькорозмірних алгебр Лі. Використовуючи отримані контракції, досліджено рівні та ко-рівні низькорозмірних алгебр Лі відносно контракцій та розширено класифікацію контракцій на випадок комплексного поля. Побудовано ряд важливих прикладів, які спростовують відомі гіпотези і твердження та дають підстави для формулювання нових гіпотез.

4. Знайдено всі нееквівалентні реалізації дійсних нерозв'язних алгебр Лі розмірностей не вищих ніж чотири векторними полями у просторі довільної скінченної кількості змінних.

5. Переглянуто класифікацію дійсних алгебр Лі векторних полів, що діють на площині, та вичерпно описано множину їх диференціальних інваріантів, а саме: базиси диференціальних інваріантів, визначники Лі та оператори інваріантного диференціювання.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути застосовані для дослідження зв'язків між фізичними теоріями і моделями, в основі яких лежать різні алгебри симетрій, а також можуть бути використані для розв'язання ряду конкретних задач математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — А.Г. Нікітіну. В подальшому плани досліджень уточнювались у співпраці з Р.О. Поповичем та В.М. Бойко. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно. В роботах, які опубліковано разом зі співавторами, особистий внесок дисертанта такий. В роботі [124] Р.О. Поповичу належить удосконалення техніки класифікації реалізацій та введення поняття мегаідеалу, В.М. Бойку — перевірка класифікації алгебр Лі, порівняння одержаних результатів з результатами інших авторів, М.В. Лутфуллін виконав класифікацію розв'язних алгебр в просторах з довільною скінченною кількістю змінних, а дисертанту належить класифікація алгебр Лі в просторах з чотирма змінними. В роботі [125] Р.О. Поповичу належать алгоритми для обчислення алгебраїчних величин, а дисертанту — їх знаходження та впорядкування; решта результатів розподілені як і у [124]. Задачу класифікації реалізацій низькорозмірних алгебр Лі поставлено дисертанту Р.З. Ждановим. В роботі [112] дисертанту належить проведення класифікації, а В.М. Бойку — додаткове дослідження нееквівалентності отриманих реалізацій. В роботі [113] Р.О. Поповичу належать ідеї доведення нееквівалентності реалізацій та застосування інфінітезимальних операторів для знаходження допустимих перетворень змінних між реалізаціями, а дисертанту — побудова всіх реалізацій нерозв'язних алгебр Лі. В роботі [114] Р.О. Попович запропонував деякі нові критерії існування контракцій та довів їх, як і твердження про властивості повторних і багатопараметричних контракцій. Дисертанту належить повний опис контракцій низькорозмірних алгебр Лі та поняття багатопараметричної контракції.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (2002–2006, керівник семінару — професор А.Г. Нікітін), на V та VI Міжнародних конференціях “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Київ, 2003, 2005), на III Конференції з аналітичної теорії чисел та просторових мозаїк ім. Вороного (Київ, 2003), на V Міжнародній школі-семінарі “QFT and Hamiltonian Systems” (Каліманешті, Румунія, 2006).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 роботах [110, 111, 113, 114, 124, 125] та додатково висвітлено у роботах [109, 112].

Структура, обсяг та зміст дисертації. Дисертація складається із змісту, вступу, 4-х розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 160 найменувань, та додатку. Повний обсяг дисертації 169 сторінок, з них список використаних джерел займає 16 сторінок, а додаток — 32 сторінки.

Короткий зміст основної частини роботи. Основна частина роботи складається з чотирьох розділів. На початку кожного розділу подано стислий опис результатів, що містяться в ньому.

В першому розділі дисертації проводиться докладний огляд літератури, пов’язаної з темою дисертації. А саме, проаналізовано роботи, в яких розглядаються класифікації структур алгебр Лі. Зроблено огляд результатів, які пов’язані з поняттями контракцій, вироджень та деформацій груп та алгебр Лі і їх застосувань. Також у цьому розділі впорядковано відомі результати з дослідження і класифікації реалізацій алгебр Лі векторними полями та з теорії диференціальних інваріантів.

В другому розділі дисертації розвинуто теоретичні основи контракцій алгебр Лі. Сформульовано строге означення контракцій та поняття еквівалентності контракцій. Зауважимо, що нами чітко розрізняються поняття сильної та слабкої еквівалентності контракцій. Зокрема, побудовано контрприклад, що спростовує теорему Веймар-Вудз про еквівалентність усіх контракцій узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера (ІВ). В цьому розділі також розглянуто найпростіші типи контракцій та доведено теорему, що містить повний набір необхідних критеріїв існування контракцій для низькорозмірних алгебр Лі; а також обчислено інваріантні величини для досить широких класів алгебр Лі та вивчено багатопараметричні, повторні і послідовні контракції.

В третьому розділі розглядаються контракції низькорозмірних алгебр Лі. Зокрема, обчислено інваріантні та напівінваріантні величини для дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири, що застосовуються для відокремлення випадків, коли контракцій не існує. Також сформульовано алгоритм опису контракцій, що використовує класифікацію алгебр Лі і критерії існування контракцій та дозволяє ефективно працювати з контракціями алгебр Лі фіксованих розмірностей. Отримано всі слабо нееквівалентні однопараметричні контракції дійсних та комплексних низькорозмірних алгебр Лі та виконано їх порівняння з виродженнями комплексних низькорозмірних алгебр Лі, дослідженими в роботах Бурде і Штайнхофф [33] та Агаоки [19]. Додатково у розділі 3 досліджено рівні та ко-рівні низькорозмірних алгебр Лі та наведено діаграми, що ілюструють структури множин три- та чотиривимірних алгебр Лі.

Четвертий розділ присвячено побудові усіх нееквівалентних реалізацій низькорозмірних нерозв'язних алгебр Лі, класифікації векторних полів Лі, що діють на дійсній площині, та опису їх диференціальних інваріантів. Так, у розділі отримано повний набір нееквівалентних точних реалізацій дійсних нерозв'язних алгебр Лі розмірностей 3 та 4 векторними полями в просторі довільної скінченної кількості змінних та переглянуто класифікацію скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на площині. Класифікацію скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на дійсній площині доповнено реалізацією двовимірної алгебри Лі, яку пропущено у роботі Гонзалеза-Лопеса зі співавторами [67]. Крім того, строго досліджено питання еквівалентності та параметризації в серіях алгебр Лі векторних полів. В цьому ж розділі наведено необхідні теоретичні відомості для вивчення диференціальних інваріантів та для кожної з побудованих нееквівалентних реалізацій алгебр Лі обчислено базис диференціальних інваріантів, оператор інваріантного диференціювання і визначник Лі.

Основна частина дисертаційної роботи завершується загальними висновками.

В кінці дисертації міститься додаток, в якому обчислено та впорядковано ряд важливих алгебраїчних величин та характеристик, що стосуються дійсних низькорозмірних алгебр Лі, а саме: ряди похідних, нижні центральні ряди, групи внутрішніх автоморфізмів, групи автоморфізмів, алгебри диференціювань, мегаідеали, характеристичні ідеали, ідеали, підалгебри та функціональні базиси інваріантів. Ці результати використано у розділах 3 та 4.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук професору Анатолію Глібовичу Нікітіну за постановку задач, постійну увагу, плідну співпрацю та допомогу в роботі, та кандидатам фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойко і Роману Омеляновичу Поповичу за плідну співпрацю, підтримку та допомогу. Подяка висловлюється професору Чеської академії наук Іржі Нідерле за надзвичайно корисні та стимулюючі дискусії. Автор вдячний усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

У цьому розділі проведено детальний огляд та аналіз результатів, пов'язаних з алгебрами Лі, їх реалізаціями, контракціями, диференціальними інваріантами та їх застосуваннями.

Роботи, в яких розглядаються класифікації алгебр Лі, проаналізовано у підрозділі 1.1. В кінці цього підрозділу усі основні результати, що стосуються класифікації алгебр Лі невисоких розмірностей, зібрано та впорядковано у вигляді таблиці 1.1.

У підрозділі 1.2 проведено огляд результатів, пов'язаних з поняттями контракцій, вироджень і деформацій груп і алгебр Лі.

Попередньо відомі результати з дослідження і класифікації реалізацій алгебр Лі векторними полями та з теорії і апарату диференціальних інваріантів наведено у підрозділі 1.3.

1.1. Класифікація структур алгебр Лі

Задача класифікації алгебр Лі фіксованих розмірностей є однією з центральних класифікаційних задач теорії алгебр Лі, оскільки вона є необхідною передумовою для розв'язання ряду важливих теоретичних та прикладних задач, таких як побудова реалізацій, опис контракцій, знаходження інваріантних рівнянь і математичних моделей фізичних процесів тощо.

Згідно з теоремою Леві–Мальцева [2] задача класифікації усіх можливих комутаційних співвідношень між базисними елементами алгебр Лі скінченої фіксованої розмірності з точністю до перетворення ізоморфізму зводиться до наступного переліку підзадач:

1) класифікація напівпростих алгебр Лі;
2) класифікація розв'язних алгебр Лі;
3) класифікація алгебр, що є напівпрямими сумами напівпростих та розв'язних алгебр Лі.

Перша з вище згаданих задач повністю розв'язана. А саме, за теоремою Картана кожну напівпросту дійсну чи комплексну алгебру Лі можна розкласти у пряму суму ідеалів, що є простими підалгебрами взаємно ортогональними відносно форми Картана–Кілінга. В свою чергу, класифікація скінченновимірних нерозв'язних алгебр Лі добре відома і наведена зокрема в [1, 3].

Щодо класифікації розв'язних алгебр Лі, то існує ряд розрізнених класифікаційних переліків, отриманих різними авторами, які в сукупності утворюють класифікацію дійсних алгебр Лі до розмірності шість включно [9–12, 146, 147]. Розглянемо детальніше класифікації низькорозмірних алгебр Лі.

Усі нееквівалентні алгебри Лі розмірностей не вище ніж чотири над полем комплексних чисел були описані С. Лі у 1893 році [93]. У 1918 році Л. Біанчі дослідив тривимірні дійсні алгебри Лі [25]. Значно пізніше Х.К. Лі [87] та Г. Вранчеану [153] знову повернулись до цієї задачі та отримали результати еквівалентні класифікації Біанчі. Використовуючи результати Лі для комплексних структур, Г.І. Крючкович прокласифікував дійсні чотиривимірні алгебри Лі, що не містять тривимірні абелеві підалгебри [6, 7].

Вірну, вичерпну та зручну у застосуванні класифікацію дійсних алгебр Лі розмірностей не вище чотирьох вперше отримано Г.М. Мубаракзяновим у 1963 році [10]. Ці ж результати, а також опис підалгебр та інваріантів дійсних низькорозмірних алгебр Лі, наведено у [119, 120]. В той же час класифікація, аналогічна до [152], була отримана Дж. Дозіас [50]. Використавши вищезгадані роботи Біанчі і Крючковича та прокласифікувавши дійсні алгебри Лі розмірності чотири з тривимірним абелевим ідеалом, такий самий результат [16] отримав А.З. Петров.

У 1999 році М.А.Х. МакКелум [100] запропонував альтернативний підхід до класифікації та нумерації алгебр Лі, а також порівняв різні підходи до цієї задачі та результати, запропоновані у попередніх роботах Г.М. Мубаракзянова [10], Ф. Брацлавскі [29], Г.І. Крючковіча [6], А.З. Петрова [16] та І. Патери зі співавторами [119]. У роботі [22] автори переотримали класифікацію дійсих чотиривимірних алгебр Лі та порівняли свої результати з роботами Мубаракзянова, Дозіас та Патери зі співавторами.

Й. Агаока у 1999 році дослідив множини тривимірних [18] та у 2002 році — множини чотиривимірних [19] комплексних алгебр Лі і, як результат, переотримав класифікацію неізоморфних алгебр розмірностей три та чотири. Зауважимо, що отримані ним класифікації є особливо зручними для дослідження та опису контракцій і деформацій алгебр Лі.

У серії робіт [11–13] Г.М. Мубаракзянов продовжив дослідження низькорозмірних алгебр Лі. Ним прокласифіковано всі дійсні п'ятивимірні алгебри Лі та шестивимірні розв'язні алгебри Лі з одним лінійно незалежним ненільпотентним елементом.

Зауважимо, що для шестивимірних розв'язних алгебр Лі розмірність нільрадикалу m не менша за 3. У випадку $m = 3$ алгебра Лі — розкладна.

Класифікація нільпотентних шестивимірних алгебр Лі отримана К.А. Умляуф [155] над полем комплексних чисел та узагальнена В.В. Морозовим [9] на випадок довільного поля характеристики 0.

У 1976 І. Патера, Р.Т. Шарп, П. Вінтерніц та Х. Цассенхаус переглянули [119] класифікацію чотиривимірних та п'ятивимірних дійсних алгебр Лі за Мубаракзяновим та класифікацію нільпотентних алгебр за Морозовим.

Використовуючи поняття нільпотентного фрейму, запропоноване у [121], І. Патера та Х. Цассенхаус прокласифікували розв'язні алгебри Лі розмірностей не вище за чотири над довільним досконалим полем. В.А. де Грааф узагальнив ці результати на випадок довільного поля [42], використавши алгебраїчну систему символьних обчислень MAGMA.

У 1997 році Д. Бурде та К. Штайнхофф [31, 140] використали класифікацію алгебр Лі, наведену у роботі [122], та, наклавши додаткові обмеження на параметри, що визначають серії алгебр Лі, отримали класифікації комплексних три- та чотиривимірних алгебр Лі.

П. Турковскі прокласифікував усі дійсні алгебри Лі розмірностей до дев'яти включно, що допускають нетривіальний розклад Леві [146, 148]. Він також завершив класифікацію Мубаракзянова шестивимірних розв'язних алгебр Лі над дійсним полем, прокласифікувавши дійсні алгебри Лі розмірності шість з чотиривимірним нільрадикалом ($m = 4$) [147].

У 1998 році Мінг-Пенг Гонг [65] прокласифікував нільпотентні алгебри Лі розмірності сім над алгебраїчно замкненими полями та полем дійсних чисел. Останні результати, що стосуються класифікації семивимірних нільпотентних алгебр Лі, наведені у роботі Сілі [135].

У випадку коли розмірність алгебри Лі не фіксована досить загальні результати класифікації отримані лише для алгебр зі спеціальною структурою нільрадикалу, наприклад, абелевою [107], Гейзенберга [130] чи трикутною [141].

У таблиці 1.1 зібрано усі основні результати класифікації алгебр Лі. При цьому використано наступні позначення: A — алгебра Лі над полем P, $\dim A$ — розмірність алгебри A, $\dim N$ — розмірність нільрадикалу алгебри A.

Зауважимо, що роботи, виділені жирним курсивом у таблиці 1.1, утворюють в сукупності класифікацію нееквівалентних дійсних алгебр Лі, розмірностей не вище шести над полем дійсних чисел.

Таблиця 1.1. Огляд результатів класифікації малорозмірних алгебр Лі

		P	$\dim A$	$\dim N$	Примітки
С. Лі [93]	1893	$\mathbb{C}$	≤ 4		
Біанчі [25]	1918	$\mathbb{R}$	3		
Х.К. Лі [87]	1947	$\mathbb{R}$	3		результат Біанчі
Вранчеану [153]	1947	$\mathbb{R}$	3		результат Біанчі
Добреску [46]	1953	$\mathbb{R}$	4		згідно [100]
Крючкович [6, 7]	1954, 1957	$\mathbb{R}$	4		без 3-вимірного Абелевого ідеала
Брацлавскі [29]	1959	$\mathbb{R}$	4		згідно [100]
Мубаракзянов [10]	1963	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	4		
Дозіас [50]	1963	$\mathbb{R}$	4		див. [152]
Петров [16]	1966	$\mathbb{R}$	4		доповнена Крючковичем
Еліс, Шіама [52]	1966	$\mathbb{R}$	4		згідно [100]
МакКелум [100]	1979, 1999	$\mathbb{R}$	3, 4		
Патера, Цассенхаус [122]	1990	досконале	≤ 4		
Андрада та ін. [22]	2004	$\mathbb{R}$	4		
де Грааф [42]	2004	довільне	4		
Мубаракзянов [11]	1963	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	5		
Умляуф [155]	1891	$\mathbb{C}$	6	6	нільпотентні
Морозов [9]	1958	$\mathrm{char} = 0$	6	6	нільпотентні
Мубаракзянов [12]	1963	$\mathbb{R}$	6	3	розв'язні ($\rightarrow$розкладні)
Мубаракзянов [12]	1963	$\mathbb{R}$	6	5	($\rightarrow$розв'язні)
Турковскі [147]	1990	$\mathbb{R}$	6	4	($\rightarrow$розв'язні)
Турковскі [146]	1988	$\mathbb{R}$	≤ 8		допускає нетрив. розклад Леві
Турковскі [148]	1992	$\mathbb{R}$	9		допускає нетрив. розклад Леві
Патера та ін. [119]	1976	$\mathbb{R}$	≤ 6		нільпотентні для $\dim A = 6$
Сафіулліна [17]	1964	$\mathbb{R}$	7	7	нільпотентні, згідно [135]
Магнін [101]	1986	$\mathbb{R}$	≤ 7	$\dim A$	нільпотентні, згідно [100]
Сілі [135]	1993	$\mathbb{R}$	7	7	нільпотентні
Тсагас [144]	1999	$\mathbb{R}$	8	8	нільпотентні
Тсагас та ін. [145]	2000	$\mathbb{R}$	9	9	нільпотентні

1.2. Контракції алгебр Лі

Граничні переходи між алгебрами Лі вперше досліджено І. Сегалом [136]. Найвідомішим прикладом такого процесу є зв'язок між релятивістською та класичною механіками, в основі яких лежать групи симетрій Пуанкаре та Галілея. Припустивши, що швидкість світла прямує до нескінченності, релятивістська механіка "переходить" у класичну механіку. Це також приводить до сингулярного переходу від алгебри Пуанкаре до алгебри Галілея. Інший відомий приклад стосується граничного переходу від квантової до класичної механіки за умови $\hbar \to 0$, яка відповідає контракціям алгебр Гейзенберга до абелевих алгебр тих самих розмірностей.

Існуючі роботи з контракцій умовно можна поділити на два розрізнені потоки. Один з них більш "фізичний" та орієнтований головним чином на застосування контракцій. Інший потік — більш "алгебраїчний" та зазвичай має краще математичне підгрунтя. В рамках обох підходів розглянемо основні роботи, що стосуються контракцій.

Після Сегала концепцію граничних процесів між фізичними теоріями було сформульовано Іньоню та Вігнером [80, 81] у термінах контракцій груп Лі, що лежать в основах цих теорій. Вони запропонували так звані *контракції Іньоню–Вігнера* (ІВ-контракції), які, не дивлячись на їх простоту, ефективно застосовувались до широкого класу фізичних та математичних задач. Пізніше, Салетан [131] вивчив найзагальніший випадок однопараметричних контракцій, для яких елементи відповідної матриці контракції є поліномами першого порядку відносно параметра контракції. Контракції Іньоню–Вігнера є спеціальним підкласом класу *контракцій Салетана*.

Іншим розширенням класу контракцій Іньоню–Вігнера є *узагальнені контракції Іньоню–Вігнера*. Вони породжуються матрицями, які можна діагоналізувати, вибравши певним чином базиси вихідної та контрактованої алгебр, крім того, діагональні елементи матриць мають бути цілими степенями параметра контракції. Контракції такого типу запропоновано Дойбнером та Мельшеймером [48], а поняття "узагальнені контракції Іньоню–Вігнера" вперше з'явилось у роботі Хегерфельдта [75]. Для цього поняття також використовуються і інші назви, такі як *p-контракції*, *контракції Дойбнера–Мельшеймера* та *сингулярні ІВ-контракції* [8]. Аналогічний тип контракцій застосовується в "чисто математичних" підходах та називається *однопараметрично підгруповим виродженням* [31–33, 72, 140]. Останнє поняття походить з алгебраїчної теорії інваріантів [5]. Узагальнені ІВ-контракції є надзвичайно зручними для застосувань, тому переглядалися багато разів. Зокрема, некоректно було доведено твердження, про те, що будь-яка неперервна однопараметрична контракція еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера [158], контрприклад до доведення цієї гіпотези побудовано у розділі 2.

Вперше загальне означення контракцій сформульовано Сегалом у термінах граничних переходів у базисах [136]. Воно використовується і до тепер, як робоче означення для знаходження матриць контракцій. Салетаном введено більш строге і загальне означення контракцій, основане на граничних переходах у дужках Лі, яке дозволило уникнути неузгодженості з граничним станом базисів, що притаманна для підходу Сегала. Пізніше означення Салетана було узагальнене на випадок довільного поля в термінах замикання орбіт в топології Заріського. Це узагальнення є основою сучасних досліджень контракцій та використовується рядом авторів, див. наприклад [31–33,37,72,83,86,108,134,140]. В узагальненому контексті поняття "виродження" часто використовується замість поняття "контракція".

Ще одне узагальнення поняття виродження, яке працює у випадку алгебр Лі різних розмірностей, запропоновано Горбацевичем [68–70], згідно цього означення, алгебра $\mathfrak{g}$ вироджується до алгебри $\mathfrak{g}_0$, якщо $\mathfrak{g}\oplus pA_1$ контрактує до алгебри $\mathfrak{g}_0\oplus qA_1$ в звичайному сенсі для деяких $p, q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, де pA_1 та qA_1 — p- та q-вимірні абелеві алгебри.

Інший тип контракцій породжується чисто алгебраїчним поняттям *градуйованої контракції* [44,74,118,157]. Процедура градуйованої контракції наступна. Структурні сталі градуйованої алгебри Лі домножуються на параметри, які вибираються таким чином, щоб після граничного переходу результуюча алгебра була алгеброю Лі і мала те саме градуювання, що і вихідна алгебра. Градуйовані контракції містять випадки дискретних контракцій але не вичерпують усі можливі неперервні контракції.

Різні типи контракцій та їх властивості розглянуто та порівняно у [8, 96]. Зв'язки між контракціями та деформаціями і розширеннями алгебр Лі широко вивчались, наприклад у [8, 55, 63, 64, 73, 95]. Пов'язаним, але принципово іншим є поняття контракцій груп Лі, яке також досліджувалось та застосовувалось. Такі контракцій розглядались у роботах [30, 76, 104, 131] на різних рівнях загальності.

Протягом останніх десятиліть дійсні та комплексні низькорозмірні алгебри Лі зазнали інтенсивного вивчення. Внаслідок того, що вони є підалгебрами важливих високорозмірних алгебр Лі, вони застосовуються в теорії індукованих зображень (зображення підалгебри чи підгрупи використовується для побудови зображення усієї алгебри чи групи), в теорії зображень (ланцюжки підалгебр можуть породжувати набори комутуючих операторів, власні функції яких утворюють базис простору зображень для відповідної групи) та при дослідженні порушених симетрій. Низькорозмірні алгебри Лі також цікаві самі по собі і дають ряд суттєвих прикладів для фізичних та математичних теорій. У зв'язку з цим вивчались класифікації, підалгебри, реалізації, інваріанти, контракції, деформації та інші об'єкти, що стосуються низькорозмірних алгебр Лі [10, 28, 56, 57, 95, 120, 125].

Контракції низькорозмірних алгебр Лі природно з'являються у багатьох роботах як ілюструючі приклади. Так, у своїй новаторській роботі присвяченій контракціям [136] Сегал наводить два такі приклади, а саме, контракції з алгебр $so(3)$ та $sl(2,\mathbb{R})$ до алгебри Вейля–Гейзенберга

$\mathfrak{h}_3 = A_{3.1}$. Деякі приклади також містяться у відомій роботі Салетана [131]. Після цього контракції низькорозмірних алгебр Лі стали самостійним об'єктом досліджень. Контракції Іньоню–Вігнера дійсних тривимірних алгебр Лі розглядалися Шарпом [137], але у цій роботі було пропущено деякі випадки. Ці результати частково покращено у [8]. Вперше контракції Іньоню–Вігнера дійсних тривимірних алгебр Лі вичерпно описано Конатсером [41]. Використовуючи відому класифікацію підалгебр дійсних низькорозмірних алгебр Лі [120], Хаддлстон [78] побудував контракції Іньоню–Вігнера дійсних чотиривимірних алгебр Лі. Усі нееквівалентні неперервні однопараметричні контракції дійсних тривимірних алгебр Лі отримано Веймар-Вудз [156], але нею не досліджувалась можливість контракцій всередині параметризованих серій алгебр. Ця сама задача добре розв'язана Лоретом [86] в термінах замикань орбіт, використовуючи неочевидний зв'язок між алгебраїчною характеризацією груп Лі, що мають метрику зі спеціальними властивостями кривини, та існуванням виродження для алгебр Лі. Замикання орбіт комплексних три- та чотиривимірних алгебр Лі вивчено у роботах Бурде та Штайнхофф [32, 33, 140]. Саме з цих робіт взято ідею застосування широкого набору необхідних критеріїв існування контракції. Той самий об'єкт досліджено Агаокою [18, 19]. Він представив результати у простій та зручній формі завдяки використанню спеціальної класифікації комплексних тривимірних та чотиривимірних алгебр Лі.

При зростанні розмірності векторного простору, що лежить в основі алгебри Лі, експоненційно ускладнюється задача опису замикань орбіт. Одним з підходів до її спрощення є розгляд замкнених підкласів алгебр Лі (наприклад, нільпотентних алгебр) замість усього класу алгебр фіксованої розмірності. Виродження нільпотентних алгебр вивчено у випадках розмірностей п'ять, шість та сім, відповідно, у роботах [31, 32, 72, 134].

Інтенсивного вивчення також зазнали деформації алгебр Лі. Так, деформації дійсних тривимірних алгебр Лі описано Леві-Наха [95], а чотиривимірний комплексний випадок вивчено Фіаловскі та Пенкава [56]. Також існує ряд робіт присвячених контракціям та деформаціям високорозмірних та нескінченновимірних алгебр Лі (див. наприклад [43]), але не розглядатимемо їх детально, оскільки згадані роботи лежать поза темою дисертації.

Дослідження контракцій мотивується великою кількістю застосувань в різних галузях фізики та математики, наприклад у вивченні зображень, інваріантів, спеціальних функцій [34, 45, 106]. Вони є одним з інструментів для дослідження структури множин алгебр Лі [32]. Зокрема, коефіцієнти Вігнера групи Евкліда $E(3)$ отримано через контракцію коефіцієнтів Вігнера спеціальної ортогональної групи $SO(4)$ [77]. Контракції використано для встановлення зв'язків між різноманітними кінематичними групами, а також для з'ясування їх фізичного значення. Таким чином були пов'язані конформна група та група Шрьодінгера [23], а також різні алгебри Лі, що включають релятивістський оператор положення. При описі взаємодіючих систем за допомогою динамічних груп, процес контракції, що відповідає випадку, коли стала зчеплення прямує до нуля, приводить до випадку невзаємодіючих систем [47].

Важливість контракцій низькорозмірних алгебр Лі в теоретичній фізиці ілюструється наступними прикладами. Тут одночасно використовуються стандартні фізичні позначення та нумерація алгебр Лі, запропонована Мубаракзяновим [10], деталі щодо позначень а також інші приклади наведено у розділах 2 та 3.

Розглянемо чотиривимірну алгебру Лі $u(2) = sl(2, \mathbb{R}) \oplus A_1$, з ненульовими комутаційними співвідношеннями $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_3$, $[e_1, e_3] = 2e_2$. Матриця $U_1(\varepsilon) = I_{10}\,\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, 1)$ породжує контракцію з $u(2)$ до $e(2) \oplus A_1 = A_{3.5}^0 \oplus A_1$ ($[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$), тобто до прямої суми тривимірної алгебри Евкліда та одновимірної абелевої алгебри.

Іншим прикладом є контракція $u(2)$ до алгебри гармонійного осцилятора $\mathfrak{h}_4 = A_{4.8}^{-1}$ ($[e_2, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = -e_3$), яка часто зустрічається у фізиці. "Фізична" назва алгебри $\mathfrak{h}_4$ пояснюється тим, що набір з оператора народження (a^+), оператора знищення (a^-), тотожного оператора (I) та оператора кількості одномодових фотонів N є замкненим відносно комутування та породжує алгебру, ізоморфну $\mathfrak{h}_4$, де $e_1 = I$, $e_2 = a^-$, $e_3 = a^+$, $e_4 = N$. Алгебра $u(2)$ контрактує до $\mathfrak{h}_4$ за допомогою матриці контракції $U_2(\varepsilon) = I_{19}\,\mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon, 1)$.

Підалгебра $\mathfrak{h}_3 = \langle e_1,\, e_2,\, e_3\rangle$ ($[e_2, e_3] = e_1$) алгебри $\mathfrak{h}_4$ також широко застосовується, оскільки вона ізоморфна алгебрі, утвореній квантово механічними оператором положення Q, оператором моменту P та тотожним оператором I після перепозначення $e_1 = I$, $\quad e_2 = \frac{Q+iP}{\sqrt{2\hbar}}$, $\quad e_3 = \frac{Q-iP}{\sqrt{2\hbar}}$.

1.3. Реалізації алгебр Лі та диференціальні інваріанти

Вперше питання опису реалізацій алгебр Лі векторними полями поставив ще С. Лі. Проте це питання і досі є складною математичною задачею та має надзвичайно широкий спектр застосувань, зокрема до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, групової класифікації рівнянь в частинних похідних, класифікації гравітаційних полів, тощо.

Найбільш важливі та красиві результати з класифікації реалізацій алгебр Лі отримано самим С. Лі. Він прокласифікував несингулярні алгебри Лі векторних полів, що діють у просторі однієї дійсної змінної а також однієї та двох комплексних змінних [90, 91]. Використовуючи оригінальні геометричні аргументи він вказав шлях до отримання класифікації реалізацій алгебр Лі векторними полями, що діють на дійсній площині [93, Т.3]. В цій же роботі міститься твердження, що С. Лі отримав повну класифікацію алгебр Лі векторних полів у просторі трьох комплексних змінних, але докладну класифікацію наведено лише для випадку примітивних алгебр та розділено випадок імпримітивних алгебр на три підвипадки з яких розглянуто лише два перші.

У 1901–1902 У. Амалді продовжив дослідження реалізацій алгебр Лі векторними полями скінченної розмірності та прокласифікував алгебри Лі векторних полів що діють у просторі трьох дійсних змінних [20, 21]. На сьогодні питання повноти реалізацій отриманих Амалді залишається відкритим.

Використовуючи класифікацію Лі алгебр Лі векторних полів в двох комплексних змінних, А. Гонзалес-Лопес, Н. Камран та П. Олвер [66] прокласифікували скінченновимірні алгебри Лі диференціальних операторів першого порядку $Q = \xi^i(x)\partial_{x_i} + f(x)$ від двох комплексних змінних. У 1990 ці ж автори впорядкували класифікацію реалізацій алгебр Лі векторних полів від двох комплексних змінних, отриману Лі [90] та розширили її до дійсного випадку [67]. Виходячи з цих робіт, переотримано класифікацію реалізацій скінченновимірних алгебр Лі на дійсній площині [111], яка доповнила та уточнила класифікацію наведену в [67].

В роботі [102] Ф.М. Махмуд та П. Ліч вивчали реалізації тривимірних дійсних алгебр Лі векторними полями двох змінних та застосували їх для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь третього порядку. Аналогічно, реалізації чотиривимірних дійсних алгебр Лі, що не містять тривимірного абелевого ідеалу, розглянуто А. Шмукер та Г. Чіховскі [132].

Реалізації алгебри $so(3)$ вперше прокласифіковано В.І. Лагном та Р.З. Ждановим у [85, 160]. Коваріантні реалізації цікавих з фізичних міркувань алгебр Лі побудовано у роботах [4, 58, 59, 61, 62, 85, 97, 98, 159, 160]. Повний опис реалізацій алгебри Галілея в просторі двох залежних і двох незалежних змінних знайдено в [61, 129].

І.Л. Кантор та І. Патера [82] описали скінченновимірні алгебри поліноміальних (порядку не вище 3) векторних полів від n дійсних змінних, що містять векторні поля ∂_{x_i} $(i = \overline{1, n})$. У роботах [126–128] Г. Пост розглянув скінченновимірні алгебри Лі поліноміальних векторних полів від n змінних, що містять векторні поля ∂_{x_i} $(i = \overline{1, n})$ та $x_i \partial_{x_i}$.

К. Вафо Сох та Ф.М. Махмуд [154] використали результати Мубаракзянова [10] для класифікації реалізацій три- та чотиривимірних дійсних алгебр Лі в просторі трьох змінних та для опису систем двох рівнянь другого порядку, що допускають дійсну чотиривимірну алгебру симетрії [154], але на жаль згадана робота містить ряд помилкових тверджень.

Попередні класифікації реалізацій дійсних тривимірних та чотиривимірних алгебр Лі були зроблені у роботах [99, 112].

Повну класифікацію реалізацій дійсних низькорозмірних алгебр Лі векторними полями з довільною фіксованою кількістю змінних отримано у [125], зокрема, детальна класифікація реалізацій дійсних нерозв'язних алгебр Лі розмірностей до чотирьох включно з повними доведеннями наведена у [113].

Терміни "диференціальні інваріанти" виникли у роботах С. Лі як один з найважливіших інструментів для досліджень диференціальних рівнянь. У 1884 році ним доведено [88], що кожну невироджену інваріантну систему диференціальних рівнянь можна представити у термінах диференціальних інваріантів відповідної групи симетрій. В тій самій роботі Лі застосував диференціальні інваріанти до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.

Теорію диференціальних інваріантів та поняттєвий апарат пізніше розвинено у роботах Трессе [142, 143], Овсяннікова [14] та Олвера [116].

Диференціальні інваріанти усіх локальних скінченновимірних груп перетворень у просторі двох комплексних змінних описано самим Лі [92]. Сучасне трактування цих результатів запропоновано у [115]. А саме, для усіх нееквівалентних реалізацій точкових та контактних скінченновимірних груп перетворень на комплексній площині побудовано функціональні базиси диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання.

Дійсні скінченновимірні алгебри Лі контактних векторних полів та їх диференціальні інваріанти повністю прокласифіковано Дубровим та Компраковим [49]. Диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень у випадку довільної кількості залежних та незалежних змінних досліджено Поповичем і Бойко у [123].

Реалізації алгебр Лі векторними полями широко застосовуються у загальній теорії диференціальних рівнянь, інтегруванні диференціальних рівнянь та їх систем [14,15], у груповій класифікації звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних [24], в класифікації гравітаційних полів загального вигляду відносно груп рухів [16], у геометричній теорії керування та у теорії систем, що допускають принципи суперпозиції [36, 139].

Такі реалізації також застосовні до побудови різницевих схем для чисельних розв'язків диференціальних рівнянь [27].

Опис реалізацій є першим необхідним кроком до розв'язання задачі Левіне [94]. Задача Левіне виникла у молекулярній динаміці і стосується не залежних від часу операторів Гамільтона другого порядку, що належать до універсальної обгортуючої алгебри скінченновимірної алгебри Лі диференціальних операторів першого порядку.

Реалізації алгебр Лі пов'язані з теорією квазі-точно розв'язних задач квантової механіки через так званий алгебраїчний підхід до теорії розсіювання та молекулярної динаміки.

Але перелік усіх можливих застосувань реалізацій алгебр Лі не вичерпується вище наведеними напрямками.

РОЗДІЛ 2

Означення, еквівалентність та критерії існування контракцій алгебр Лі

У цьому розділі розвинені та строго сформульовані теоретичні основи контракцій алгебр Лі. Означення та еквівалентність контракцій наведені у підрозділі 2.1. Підрозділ 2.2 присвячено найпростішим типам контракцій, а саме контракціям Іньоню–Вігнера, Салетана та узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера. Необхідні критерії для існування контракцій та їх доведення містяться у підрозділі 2.3 У підрозділі 2.4 обчислюються інваріантні величини та розмірності підалгебри Картана для широких класів алгебр Лі. Багатопараметричні, повторні та послідовні контракції, які є інструментом для побудови матриць контракцій у найскладніших випадках, вивчаються у підрозділі 2.5.

Основні результати розділу 2 опубліковано в роботах [114, 124, 125].

2.1. Означення та еквівалентність контракцій

Розглянемо n-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g} = (V, [\cdot,\cdot])$ (n-вимірний векторний простір V над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ з множенням, заданим дужкою Лі $[\cdot,\cdot]$, яка задовольняє тотожність Якобі та умови білінійності і антисиметричності). Зазвичай алгебра Лі $\mathfrak{g}$ визначається за допомогою комутаційних співвідношень у фіксованому базисі $\{e_1, \dots, e_n\}$ простору V. А саме, досить виписати лише ненульові комутатори $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де c_{ij}^k — компоненти тензора структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}$. Тут і надалі індекси i, j, k,

i', j', k', i'', j'' та k'' змінюються від 1 до n, а за повторюваними індексами виконується сумування.

Розглянемо *неперервну* функцію $U\colon (0,\varepsilon_1] \to GL(V)$, де $\varepsilon_1 > 0$. Іншими словами, $U_\varepsilon = U(\varepsilon)$ — невироджений лінійний оператор на V для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$. Не втрачаючи загальності, можна покласти $\varepsilon_1 = 1$. Параметризована сім'я нових дужок Лі на просторі V визначається через стару дужку наступним чином:

$$\forall\, \varepsilon \in (0,1],\ \forall\, x,y \in V\colon \quad [x,y]_\varepsilon = U_\varepsilon{}^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y].$$

Природно, що для кожного $\varepsilon \in (0,1]$ алгебра Лі $\mathfrak{g}_\varepsilon = (V, [\cdot,\cdot]_\varepsilon)$ ізоморфна алгебрі Лі $\mathfrak{g}$.

Означення 2.1. Якщо границя

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[x,y]_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0} U_\varepsilon{}^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] =: [x,y]_0$$

існує для усіх $x,y \in V$, тоді $[\cdot,\cdot]_0$ — добре визначена дужка Лі. Алгебра Лі $\mathfrak{g}_0 = (V,[\cdot,\cdot]_0)$ називається *однопараметричною неперервною контракцією* (або просто *контракцією*) алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Якщо базис простору V фіксований, тоді оператор U_ε визначається відповідною матрицею. Означення 2.1 можна переформулювати в термінах структурних сталих.

Означення 2.1$'$. Нехай c_{ij}^k структурні сталі алгебри Лі $\mathfrak{g}$ в фіксованому базисі $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Якщо існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to+0} (U_\varepsilon)_{i'}^{i}(U_\varepsilon)_{j'}^{j}(U_\varepsilon{}^{-1})_{k}^{k'} c_{ij}^{k} =: \tilde{c}_{i'j'}^{k'}$$

для довільних значень i', j', k', тоді $\tilde{c}_{i'j'}^{k'}$ — компоненти добре визначених структурних сталих алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$. В цьому випадку алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ називається *однопараметричною неперервною контракцією* (або просто *контракцією*) алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Параметр ε і матриця-функція $U = U(\varepsilon)$ називаються *параметром контракції* та *матрицею контракції* відповідно. Процедуру переходу від алгебри Лі $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$ також називатимемо *контракцією.*

Означення 2.1 та означення 2.1$'$ еквівалентні. Перше означення не залежить від вибору базису та є зручним для теоретичних досліджень. Друге означення є більш зручним для обчислень конкретних контракцій.

Добре відомі контракції Іньоню–Вігнера [80], Салетана [131] та узагальнені контракції Іньоню–Вігнера [48] є частковими випадками наведених вище однопараметричних неперервних контракцій.

Означення 2.2. Називатимемо контракцію з алгебри Лі $\mathfrak{g}$ до алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$ *тривіальною*, якщо $\mathfrak{g}_0$ — абелева, і *невласною*, якщо $\mathfrak{g}_0$ ізоморфна $\mathfrak{g}$.

Якщо існує покомпонентна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} U_\varepsilon =: U_0$ і $U_0 \in GL(V)$, тоді очевидно, що контракція невласна. Таким чином, щоб отримати власну контракцію, матриця-функція U повинна задовольняти одну з умов: 1) не існує границі U при $\varepsilon \to +0$, тобто, принаймні один з елементів U вироджений при $\varepsilon \to +0$, або 2) існує $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} U_\varepsilon =: U_0$ але матриця U_0 — вироджена. Обидві умови не є достатніми, для того, щоб контракція була власною.

Тривіальні та невласні контракції існують для будь-якої алгебри Лі. Тривіальну контракцію легко можна отримати, наприклад, за допомогою матриці $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Для невласної контракції матрицю контракції можна вибрати як одиничну матрицю $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$. Іноді тривіальні та невласні контракції об'єднують у спільний клас тривіальних контракцій [158].

Абелева алгебра контрактує лише до самої себе. Це єдиний випадок одночасно тривіальної та невласної контракції.

Означення 2.3. Нехай алгебри Лі $\mathfrak{g}$ та $\tilde{\mathfrak{g}}$ контрактують до алгебр $\mathfrak{g}_0$ та $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ відповідно. Якщо $\tilde{\mathfrak{g}}$ ізоморфна $\mathfrak{g}$ та $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ ізоморфна $\mathfrak{g}_0$, тоді контракції називаються *слабо еквівалентними*.

Нестрого кажучи, усі контракції між тією самою парою алгебр слабо еквівалентні. При використанні слабкої еквівалентності увага сконцентрована на можливості та результатах контракції. При такому підході нехтуються відмінності між шляхами, якими контракції виконані. Для параметричних контракцій також можна ввести більш сильні еквівалентності, які враховують шляхи, якими виконано контракції. Тут і далі $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ позначає групу автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а $\mathrm{Iso}(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ позначає множину ізоморфізмів з алгебри $\mathfrak{g}$ в алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$. Крім того, ізоморфізми ототожнено з матрицями, що їм відповідають у фіксованому базисі.

Означення 2.4. Дві однопараметричні контракції між тією самою парою алгебр $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ з матрицями контракції $U(\varepsilon)$ та $\tilde{U}(\varepsilon)$ називаються *сильно еквівалентними*, якщо існує $\delta \in (0,1]$ та існують функції $\hat{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ і $\check{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)$ а також неперервна монотонна функція $\varphi\colon (0,\delta] \to (0,1]$, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varphi(\varepsilon) = 0$, така, що

$$\tilde{U}_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon U_{\varphi(\varepsilon)} \check{U}_\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\delta].$$

Останнє означення можна переформулювати для різних пар алгебр, які покомпонентно ізоморфні.

Означення 2.4′. Нехай ізоморфні алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і $\tilde{\mathfrak{g}}$ контрактують до ізоморфних алгебр $\mathfrak{g}_0$ і $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ з матрицями контракцій $U(\varepsilon)$ та $\tilde{U}(\varepsilon)$ відповідно. Ці контракції називаються *сильно еквівалентними*, якщо існує $\delta \in (0,1]$, існують функції $\hat{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{Iso}(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ і $\check{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{Iso}(\mathfrak{g}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_0)$ та існує неперервна монотонна функція $\varphi\colon (0,\delta] \to (0,1]$, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varphi(\varepsilon) = 0$, така, що

$$\tilde{U}_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon U_{\varphi(\varepsilon)} \check{U}_\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\delta].$$

Зауваження 2.1. Умову, що $\hat{U}$ та $\check{U}$ мають бути матрицями ізоморфізму, не можна опустити без виникнення некоректностей.

Контракції алгебр Лі, які визначаються матрицями U_ε і $W_0 U_\varepsilon \tilde{W}_0$, де $U\colon (0,1] \to GL(V)$, $W_0, \tilde{W}_0 \in GL(V)$ є слабо нееквівалентними в загальному випадку. Наприклад, алгебра $sl(2,\mathbb{R})$ ($[e_1,e_2] = e_1$, $[e_2,e_3] = e_3$, $[e_1,e_3] = 2e_2$) контрактує до алгебри Гейзенберга $A_{3.1}$ ($[e_2,e_3] = e_1$) з матрицею контракції $I_3 \operatorname{diag}(\varepsilon,\varepsilon,1)$ і до алгебри $A^0_{3.5}$ ($[e_1,e_3] = -e_2$,

$[e_2, e_3] = e_1$) з матрицею контракції $I_5 \operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1)$, де I_3 та I_5 — невироджені матриці, визначені у підрозділі 3.3.

Більш того, нехай $W, U, \tilde{W} \colon (0, 1] \to GL(V)$ та

$$\exists \lim_{\varepsilon\to+0} W_\varepsilon =: W_0 \in GL(V), \quad \exists \lim_{\varepsilon\to+0} \tilde{W}_\varepsilon =: \tilde{W}_0 \in GL(V).$$

Взагалі кажучи, матриці $W_\varepsilon U_\varepsilon \tilde{W}_\varepsilon$ та $W_0 U_\varepsilon \tilde{W}_0$ також можуть давати слабо нееквівалентні контракції. Це твердження ілюструється наступним прикладом, який зокрема доводить, що твердження леми 2.2 в роботі [158] є некоректним.

Приклад 2.1. Розглянемо однопараметричну неперервну контракцію дійсних чотиривимірних алгебр Лі $so(3) \oplus A_1 \to A_{4.1}$, задану матрицею

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-4} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-2} \\ 0 & -\varepsilon^{-3} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Взявши до уваги канонічні комутаційні співвідношення $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$ алгебри $so(3) \oplus A_1$ (комутатори з e_4 — нульові), обчислюємо перетворені комутатори з точністю до антисиметричності:

$$[e_1, e_2]_\varepsilon = 0, \quad [e_1, e_3]_\varepsilon = 0, \quad [e_1, e_4]_\varepsilon = 0, \quad [e_2, e_3]_\varepsilon = \varepsilon^4 e_4,$$
$$[e_2, e_4]_\varepsilon = e_1 - \varepsilon^2 e_3, \quad [e_3, e_4]_\varepsilon = e_2.$$

При граничному переході $\varepsilon \to +0$ отримаємо канонічні комутаційні співвідношення $[e_2, e_4]_0 = e_1$, $[e_3, e_4]_0 = e_3$ алгебри $A_{4.1}$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0, 1]$. Оскільки матриця U_ε — невироджена, то її полярний розклад має вигляд $U_\varepsilon = P_\varepsilon T_\varepsilon$, де $P_\varepsilon := (U_\varepsilon {U_\varepsilon}^{\mathrm{T}})^{1/2}$ — дійсна симетрична матриця з додатними власними значеннями, а $T_\varepsilon := {P_\varepsilon}^{-1} U_\varepsilon$ — дійсна ортогональна матриця. Позначимо дійсну ортогональну матрицю, яка зводить P_ε до діагонального виду D_ε через W_ε, тобто, $P_\varepsilon = W_\varepsilon D_\varepsilon {W_\varepsilon}^{\mathrm{T}}$. В результаті отримується представлення

$U_\varepsilon = W_\varepsilon D_\varepsilon \tilde{W}_\varepsilon$, де $\tilde{W}_\varepsilon = {W_\varepsilon}^{\mathrm{T}} T_\varepsilon = {D_\varepsilon}^{-1} {W_\varepsilon}^{\mathrm{T}} U_\varepsilon$ — ортогональна матриця. Явний вигляд матриць W_ε, D_ε і $\tilde{W}_\varepsilon$ наступний

$$W_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\theta_- & 0 & 0 & \theta_+ \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \theta_+ & 0 & 0 & \theta_- \end{pmatrix}, \quad \tilde{W}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\theta_- & 0 & -\theta_+ & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\theta_+ & 0 & \theta_- & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_\varepsilon = \mathrm{diag}\Big(K + \frac{1}{2}, 0, 0, K - \frac{1}{2}\Big),$$

$$\text{де } K = \frac{1}{2}\sqrt{4\varepsilon^4 + 1}, \quad \theta_+ = \sqrt{\frac{2K+1}{4K}}, \quad \theta_- = \sqrt{\frac{2K-1}{4K}}.$$

Матриці W_ε та $\tilde{W}_\varepsilon$ збігаються при $\varepsilon \to +0$ до сталих невироджених матриць

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \tilde{W}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю $\tilde{U}_\varepsilon = W_0 D_\varepsilon \tilde{W}_0$, отриману з розкладу $U_\varepsilon = W_\varepsilon D_\varepsilon \tilde{W}_\varepsilon$ за допомогою заміни матриць W_ε та $\tilde{W}_\varepsilon$ їх регулярними границями. Перетворимо канонічні комутаційні співвідношення алгебри $so(3) \oplus A_1$ за допомогою матриці $\tilde{U}_\varepsilon$ та границі $\varepsilon \to +0$:

$$[e_1, e_2]_\varepsilon = \frac{1}{2}(\sqrt{4\varepsilon^4 + 1} - 1)e_4 \to 0, \quad [e_1, e_3]_\varepsilon = 0,$$
$$[e_1, e_4]_\varepsilon = -\frac{\sqrt{4\varepsilon^4 + 1} - 1}{2\varepsilon^2} e_2 \to 0, \quad [e_2, e_3]_\varepsilon = 0,$$
$$[e_2, e_4]_\varepsilon = \frac{2\varepsilon^4}{\sqrt{4\varepsilon^4 + 1} - 1} e_1 \to e_1, \quad [e_3, e_4]_\varepsilon = 0.$$

В результаті отримано комутаційні співвідношення алгебри $A_{3.1} \oplus A_1$. Таким чином, матриці U_ε та $\tilde{U}_\varepsilon$ призводять до слабо нееквівалентних контракцій.

Очевидно, що сильно еквівалентні контракції є слабо еквівалентними. Надалі розглядаємо лише слабо нееквівалентні контракції і називатимемо їх просто нееквівалентними.

Аналогічно до поняття неперервної контракції можна ввести і поняття послідовної контракції, див. наприклад [78, 158].

Розглянемо послідовність матриць $U_p \in GL(V)$, $p \in \mathbb{N}$. Відповідна послідовність нових дужок Лі на просторі V визначається через старі наступними умовами $[x,y]_p = {U_p}^{-1}[U_p x, U_p y]$ $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ x, y \in V$. Для кожного $p \in \mathbb{N}$ алгебра Лі $\mathfrak{g}_p = (V, [\cdot,\cdot]_p)$ ізоморфна $\mathfrak{g}$.

Означення 2.5. Якщо існує границя $\lim\limits_{p\to\infty}[x,y]_p = \lim\limits_{p\to\infty} {U_p}^{-1}[U_p x, U_p y] =: [x,y]_0$ для будь-яких $x, y \in V$ тоді дужка Лі $[\cdot,\cdot]_0$ добре визначена та алгебра Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, [\cdot,\cdot]_0)$ називається *послідовною контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Будь-яка неперервна контракція з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ породжує нескінченну сім'ю матричних послідовностей, які в свою чергу визначають контракцію з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$. Більш точно, якщо U_ε матриця неперервної контракції та послідовність $\{\varepsilon_p,\, p \in \mathbb{N}\}$ задовольняє умовам $\varepsilon_p \in (0,1]$, $\varepsilon_p \to +0$, $p \to \infty$, тоді $\{U_{\varepsilon_p},\, p \in \mathbb{N}\}$ — відповідна послідовність матриць.

Поняття контракції узагальнюється на випадок довільного поля в термінах замикань орбіт в множині алгебр Лі [31–33, 68, 70, 72, 86].

Нехай V — n-вимірний векторний простір над полем $\mathbb{K}$ та $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ позначає набір усіх можливих дужок Лі на V. Ототожнимо $\mu \in \mathcal{L}_n$ з відповідною алгеброю Лі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. $\mathcal{L}_n$ алгебраїчна підмножина множини $V^* \otimes V^* \otimes V$ білінійних перетворень з $V \times V$ у V. Якщо базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ простору V вибрано, то встановлюється відповідність один до одного між $\mathcal{L}_n$ та

$$\mathcal{C}_n = \{(c_{ij}^k) \in \mathbb{K}^{n^3} \mid c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0,\ c_{ij}^{i'} c_{i'k}^{k'} + c_{ki}^{i'} c_{i'j}^{k'} + c_{jk}^{i'} c_{i'i}^{k'} = 0\},$$

яка визначається для будь-якої дужки Лі $\mu \in \mathcal{L}_n$ та набору структурних сталих $(c_{ij}^k) \in \mathcal{C}_n$ за формулою $\mu(e_i, e_j) = c_{ij}^k e_k$. $\mathcal{L}_n$ називається *множи-*

ною n-вимірних алгебр Лі (над полем $\mathbb{K}$) або, більш точно, множиною можливих дужок Лі на V. Група $GL(V)$ діє на $\mathcal{L}_n$ наступним чином

$$(U\cdot\mu)(x,y)=U\big(\mu(U^{-1}x,U^{-1}y)\big)\quad \forall U\in GL(V),\forall\mu\in\mathcal{L}_n,\forall x,y\in V.$$

Це ліва дія, на відміну від правої дії, яка зазвичай використовується у "фізичних" роботах з контракцій і визначається формулою $(U\cdot\mu)(x,y)=U^{-1}\big(\mu(Ux,Uy)\big)$. Зауважимо, що ці відмінності не є суттєвими і надалі використовуватимемо праву дію. Позначимо орбіту $\mu\in\mathcal{L}_n$ під дією $GL(V)$ через $\mathcal{O}(\mu)$ та її замикання відносно топології Заріського в $\mathcal{L}_n$ через $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$.

Означення 2.6. Алгебра Лі $\mathfrak{g}_0=(V,\mu_0)$ називається *контракцією* (або *виродженням*) алгебри Лі $\mathfrak{g}=(V,\mu)$, якщо $\mu_0\in\overline{\mathcal{O}(\mu)}$. Контракція є *власною*, якщо $\mu_0\in\overline{\mathcal{O}(\mu)}\backslash\mathcal{O}(\mu)$. Контракція є *нетривіальною*, якщо $\mu_0\not\equiv 0$.

У випадку $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ або $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ замикання орбіт відносно топології Заріського співпадають з замиканнями орбіт відносно евклідової топології і означення 2.6 зводиться до звичайного означення контракцій.

2.2. Найпростіші типи контракцій

Контракції Іньоню–Вігнера є прикладом граничних переходів між алгебрами Лі з найпростішими матрицями контракцій. Зауважимо, що більшість контракцій низькорозмірних алгебр Лі еквівалентні саме таким контракціям. Детально розглянемо властивості контракцій Іньоню–Вігнера, оскільки вони є важливими для подальших досліджень.

Прості контракції Іньоню–Вігнера або, коротше, ІВ-контракції вперше запропоновано у роботі [80]. Вони породжуються матрицями вигляду $U_\varepsilon=U_0+\varepsilon U_0'$, де U_0 та U_0' сталі $n\times n$ матриці. Додатково припускається, що матрицю U_ε можна звести до спеціального діагонального вигляду $\hat{W}U_\varepsilon\check{W}^{-1}=\mathrm{diag}(1+\varepsilon v,\dots,1+\varepsilon v,\varepsilon,\dots,\varepsilon)=:D_\varepsilon$ за допомогою регулярних сталих матриць $\hat{W}$ та $\check{W}$. Дане припущення досліджено самими Іньоню та Вігнером [81]. Не втрачаючи загальності, можна покласти $v = 0$. Матриця D_ε породжує контракцію з алгебри $\tilde{\mathfrak g}$ до алгебри $\tilde{\mathfrak g}_0$. Позначимо через $\tilde{\mathfrak g}$ та $\tilde{\mathfrak g}_0$ алгебри Лі з дужками Лі $[x,y]^\sim = \hat W[\hat W^{-1}x, \hat W^{-1}y]$ та $[x,y]^\sim_0 = \check W[\check W^{-1}x, \check W^{-1}y]_0$, які очевидно ізоморфні $\mathfrak g$ та $\mathfrak g_0$. Таким чином, з самого початку можна припустити, що $U_\varepsilon = D_\varepsilon$, тобто $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\varepsilon,\dots,\varepsilon)$.

Позначимо кількість діагональних елементів рівних 1 через s, тоді розмірність ε-блоку дорівнює $n-s$. Зручно розбити набір базисних елементів $\{e_1,\dots,e_n\}$ простору V на дві підмножини $\{e_1,\dots,e_s\}$ та $\{e_{s+1},\dots,e_n\}$ відповідно до значень діагональних елементів матриці контракції.

Оскільки

$$[e_{i_1}, e_{j_1}]_\varepsilon = c^{k_1}_{i_1j_1}e_{k_1} + \frac{1}{\varepsilon}c^{k_2}_{i_1j_1}e_{k_2} + O(\varepsilon) \to \tilde c^{k_1}_{i_1j_1}e_{k_1} + \tilde c^{k_2}_{i_1j_1}e_{k_2}, \quad \varepsilon \to +0,$$

де індекси i_1, j_1 і k_1 змінюються від 1 до s, а індекси i_2, j_2 і k_2 змінюються від $s+1$ до n, то $c^{k_2}_{i_1j_1} = 0$. Таким чином, базисні елементи $e_1,\dots,e_s$ породжують підалгебру $\mathfrak h$ вихідної алгебри $\mathfrak g$. Це єдина умова існування контракції. Всі структурні сталі результуючої алгебри $\mathfrak g_0$ легко обчислюються:

$$\tilde c^{k_1}_{i_1j_1} = c^{k_1}_{i_1j_1},\ \tilde c^{k_2}_{i_1j_1} = c^{k_2}_{i_1j_1} = 0,\ \tilde c^{k_1}_{i_1j_2} = 0,\ \tilde c^{k_2}_{i_1j_2} = c^{k_2}_{i_1j_2},\ \tilde c^{k_1}_{i_2j_2} = \tilde c^{k_2}_{i_2j_2} = 0.$$

Підсумуємо властивості IB-контракцій (деякі з властивостей див. наприклад у [8,131]). Кожну підалгебру $\mathfrak h$ алгебри Лі $\mathfrak g$ можна використати для отримання IB-контракції алгебри $\mathfrak g$. Невласні підалгебри відповідають невласним ($\mathfrak h = \mathfrak g$) або тривіальним ($\mathfrak h = \{0\}$) IB-контракціям. Різні комплементарні базиси до базису підалгебри $\mathfrak h$, а також заміна підалгебри $\mathfrak h$ еквівалентною підалгеброю $\mathfrak g$ призводять до тієї самої (з точністю до ізоморфізму) контрактованої алгебри. Контрактована алгебра $\mathfrak g_0$ має структуру напівпрямої суми $\mathfrak h \niplus \mathfrak a$, де $\mathfrak a$ — абелів ідеал, натягнутий на вибраний базис, комплементарний до базису підалгебри $\mathfrak h$. Підалгебра $\mathfrak h$ ізоморфна фактор алгебрі $\mathfrak g_0/\mathfrak a$. І навпаки, алгебра Лі $\mathfrak g_0$ є IB-контракцією алгебри $\mathfrak g$ за підалгеброю $\mathfrak h$ тоді, і тільки тоді, коли існує абелів ідеал $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$, для якого фактор алгебра $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{a}$ ізоморфна $\mathfrak{h}$. Повторна IВ-контракція за тією самою підалгеброю $\mathfrak{h}$ знову призводить до алгебри $\mathfrak{g}_0$.

Будь-яка IВ-контракція задовольняє двом припущенням: 1) елементи матриці контракції лінійно залежать від параметра контракції; 2) існують сталі невироджені матриці $\hat{W}$ та $\check{W}$, що діагоналізують матрицю контракції. Добре відомо, що не всі можливі контракції вичерпуються IВ-контракціями, навіть у випадку тривимірних алгебр Лі. Нетривіальні та власні IВ-контракції тривимірної алгебри Лі групи поворотів $so(3)$ ізоморфні алгебрі Лі $A^0_{3.5}$. В той же час відомо (див. підрозділи 3.1, 3.3), що існує власна контракція з алгебри $so(3)$ до алгебри Гейзенберга $\mathfrak{h}_3 = A_{3.1}$, яку не можна виконати за допомогою IВ-контракцій.

Слетаном [131] вивчено увесь клас контракцій, лінійних за параметром контракції, а саме, контракцій що породжуються матрицею вигляду $U(\varepsilon) = U_0 + \varepsilon U_0'$, де U_0 та U_0' сталі матриці. Тепер такі контракції називаються *контракціями Салетана* або С-контракціями. Єдине припущення, зроблене Салетаном $U(1) = E$, де E — одинична матриця. Цю умову, не втрачаючи загальності, можна виконати за допомогою заміни базису та перепараметризації. Тоді матриця контракції набуває вигляду $U(\varepsilon) = \varepsilon E + (1-\varepsilon)\tilde{U}$, де $\tilde{U}$ — стала матриця. Єдиною необхідною і достатньою умовою на матрицю $\tilde{U}$, для того, щоб С-контракція була добре визначеною є співвідношення [131]: $\tilde{U}[x,y]_0 = [\tilde{U}x, \tilde{U}y],\ \forall x,y \in V$.

Повторне застосування С-контракцій з тією самою матрицею контракції приводить до скінченого ланцюжка неізоморфних алгебр. Повторна контракція з першої до останньої алгебри з цього ланцюжка є звичайною IВ-контракцією [8, 131]. Будь-яка IВ-контракція очевидно є С-контракцією, але не навпаки. Зокрема, Салетан довів, що контракцію $so(3) \oplus A_1 \to A^0_{4.9}$ можна реалізувати С-контракцією, яка нееквівалентна IВ-контракції. В той же час, С-контракції також не вичерпують усі можливі контракції алгебр Лі. Знову ілюстративним прикладом є контракція $so(3) \to \mathfrak{h}_3$, яка не може бути отримана навіть С-контракцією [131].

Іншим розширенням класу ІВ-контракцій є *узагальнені ІВ-контракції* (або *контракції Дойбнера–Мельшеймера*) [8,48,75], для яких умова лінійності матриці контракції заміняється на умову, що матриця контракції еквівалентна діагональній, а елементи діагоналізованої матриці контракції є (цілими) степенями параметра контракції. А саме, матриця контракції узагальненої ІВ-контракції має наступний вигляд

$$U(\varepsilon) = \hat{W}\,\mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n})\check{W},$$

де $\hat{W}$ і $\check{W}$ — невироджені сталі матриці та $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Як і у випадку простих ІВ-контракцій, завдяки можливості заміни алгебр Лі ізоморфними їм, можна припустити, що $\hat{W} = \check{W} = E$, тобто

$$U(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n}).$$

Тоді структурні сталі результуючої алгебри $\mathfrak{g}_0$ обчислюються за формулою $\tilde{c}_{ij}^k = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k} c_{ij}^k$, де сумування за повторюваним індексом не виконується. Таким чином, умови

$$\alpha_i + \alpha_j \geqslant \alpha_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad \text{if} \quad c_{ij}^k \neq 0$$

є необхідними та достатніми для існування добре визначеної узагальненої ІВ-контракції з матрицею контракції $U(\varepsilon)$. Крім того, $\tilde{c}_{ij}^k = c_{ij}^k$, коли $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k$ та $\tilde{c}_{ij}^k = 0$, в усіх інших випадках.

Умови існування контракції можна переформулювати в незалежних від базису термінах фільтрацій вихідної алгебри та асоційованих з ними градуювань алгебр Лі [72].

Очевидно, що ІВ-контракції є підкласом узагальнених ІВ-контракцій з $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Природнім є питання, чи кожну узагальнену ІВ-контракцію можна розкласти в послідовність ІВ-контракцій. Єдина нетривіальна узагальнена ІВ-контракція між тривимірними дійсними алгебрами Лі задається двома послідовними ІВ-контракціями $so(3) \to A_{3.5}^0 \to A_{3.1}$.

Іньоню [79] та Шарп [137] сформулювали гіпотезу, що такий розклад не завжди можливий. В роботі [8] показано, що такий розклад вимагає накладання додаткових умов на структурні сталі вихідної алгебри. В підрозділі 3.3 побудовано ряд узагальнених ІВ-контракцій чотиривимірних алгебр Лі, які не можна розкласти в послідовність простих ІВ-контракцій. Наприклад, алгебра $A_{4.4}$ з ненульовими комутаційними співвідношеннями $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_1 + e_2$, $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$ контрактує до алгебри $A_{4.1}$ ($[e_2, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4] = e_2$) за допомогою узагальненої ІВ-контракції з матрицею $\mathrm{diag}(\varepsilon^2, \varepsilon, 1, \varepsilon)$. Ця контракція підтверджує вищезгадану гіпотезу, оскільки вона *пряма*, тобто не існує алгебри Лі $\mathfrak{g}$, такої, що контракції $A_{4.4} \to \mathfrak{g}$ і $\mathfrak{g} \to A_{4.1}$ є власними. Інші аналогічні приклади наведені в зауваженні 3.4.

Зауваження 2.2. Якщо деякі з степенів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в матриці контракції $U(\varepsilon)$ — від'ємні, то границя матриці $U(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ не існує. До тепер точно не відомо, в яких випадках досить розглядати лише невід'ємні степені ε. Результати розділу 3 показують, що усі контракції три- та чотиривимірних алгебр Лі слабо еквівалентні контракціям, для яких границя матриці контракції існує.

2.3. Необхідні критерії існування контракцій

Оптимальним шляхом вивчення контракцій всередині набору алгебр Лі є інтенсивне використання необхідних критеріїв, що базуються на величинах, інваріантних або напівінваріантних відносно контракцій. Інваріантні величини зберігаються під дією контракції, а у випадку напівінваріантності існує нерівність між відповідними величинами для вихідної та контрактованої алгебр. Оскільки контракції є граничними процесами, то замість термінів інваріантність та напівінваріантність можна використовувати поняття неперервності та напівнеперервності.

Для зручності, співвідношення між інваріантними та напівінваріантними величинами зібрані у вигляді необхідних критеріїв існування контракцій в теоремі 2.1.

Надалі будемо використовувати наступні позначення для величин та об'єктів, пов'язаних з певною алгеброю Лі $\mathfrak{g}$: алгебра диференціювань $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$, орбіта $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ під дією групи $GL(V)$ у множині $\mathcal{L}_n$ n-вимірних алгебр Лі, центр $Z(\mathfrak{g})$, радикал $R(\mathfrak{g})$, нільрадикал $N(\mathfrak{g})$, максимальна розмірність $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ абелевих підалгебр, максимальна розмірність $n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$ абелевих ідеалів, форма Кілінга κ, ранг $r_{\mathfrak{g}}$ (тобто розмірність підалгебр Картана), приєднане та коприєднане зображення $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ та $\mathrm{ad}^*\,\mathfrak{g}$, приєднане зображення ad_x елемента $x \in \mathfrak{g}$, ранги приєднаного та коприєднаного зображень, які обчислюються за формулами

$$\mathrm{rang}(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}) = \max_{x\in V} \mathrm{rang}(c^k_{ij}x^j) \quad \text{та} \quad \mathrm{rang}(\mathrm{ad}^*\,\mathfrak{g}) = \max_{u\in V^*} \mathrm{rang}(c^k_{ij}u_k).$$

Означимо також три стандартні ряди характеристичних ідеалів алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а саме

нижній центральний ряд: $\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^l \supset \cdots$,

ряд похідних: $\mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{(l)} \supset \cdots$,

верхній центральний ряд: $\mathfrak{g}_{(0)} \subset \mathfrak{g}_{(1)} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{(l)} \subset \cdots$,

де $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^l = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{l-1}]$, $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(l)} = [\mathfrak{g}^{(l-1)}, \mathfrak{g}^{(l-1)}]$, $\mathfrak{g}_{(0)} = \{0\}$, а $\mathfrak{g}_{(l)}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$ є центром в $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$, $l \in \mathbb{N}$. Зокрема, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}_{(1)} = Z(\mathfrak{g})$. Якщо $\mathfrak{g}$ — розв'язна (нільпотентна) алгебра Лі, то $r_{\mathrm{s}} = r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$ ($r_{\mathrm{n}} = r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$) позначає ранг розв'язності (нільпотентності) алгебри $\mathfrak{g}$, тобто мінімальне значення l, таке, що $\mathfrak{g}^{(l)} = \{0\}$ ($\mathfrak{g}^l = \{0\}$).

Припустимо, що для деяких значень $p, q \in \mathbb{N}$ $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^p) \neq 0$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^q) \neq 0$ і $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^p\,\mathrm{ad}_v{}^q) \neq 0$, де $u, v \in \mathfrak{g}$. Припустимо також, що величина

$$\mathfrak{C}_{pq} = \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^p)\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v{}^q)}{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^p\,\mathrm{ad}_v{}^q)}, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

не залежить від u і v. Тоді $\mathfrak{C}_{pq} = \mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ — добре визначена інваріантна характеристика алгебри $\mathfrak{g}$, тобто є сталою величиною на орбіті $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$.

Позначимо ранг додатної (від'ємної) частини форми Кілінга $\kappa_{\mathfrak{g}}$, тобто кількість додатних (від'ємних) діагональних елементів у діагональній формі її матриці, через $\operatorname{rang}_+ \kappa_{\mathfrak{g}}$ ($\operatorname{rang}_- \kappa_{\mathfrak{g}}$). Внаслідок закону інерції квадратичних форм $\operatorname{rang}_+ \kappa_{\mathfrak{g}}$ та $\operatorname{rang}_- \kappa_{\mathfrak{g}}$ інваріантні відносно заміни базису над полем $\mathbb{R}$. Для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ введемо поняття *модифікованої форми Кілінга*

$$\tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}} = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u \operatorname{ad}_v) + \alpha \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u) \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_v)$$

та відповідні величини $\operatorname{rang}_+ \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ і $\operatorname{rang}_- \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$. Форма Кілінга є частковим випадком модифікованої форми Кілінга при $\alpha = 0$.

Для подальших досліджень корисною є наступна технічна лема.

Лема 2.1. *Нехай A_p, $p \in \mathbb{N}$ — послідовність дійсних чи комплексних матриць однакових розмірностей та існує покомпонентна границя A_p, при $p \to \infty$, яку позначимо через A_0. Тоді якщо $\operatorname{rang} A_p = r$ $\forall p \in \mathbb{N}$, то $\operatorname{rang} A_0 \leqslant r$.*

Теорема 2.1. *Якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є власною (неперервною чи послідовною) контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то мають місце наступні співвідношення:*

1) $\dim \operatorname{Der} \mathfrak{g}_0 > \dim \operatorname{Der} \mathfrak{g}$ *(та* $\dim \mathcal{O}(\mathfrak{g}_0) < \dim \mathcal{O}(\mathfrak{g})$*);*
2) $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}_0) \geqslant n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$*;*
3) $\dim Z(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim Z(\mathfrak{g})$*; більш того,* $\dim \mathfrak{g}_{0(l)} \geqslant \dim \mathfrak{g}_{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$*;*
4) $\dim \mathfrak{g}_0^{(l)} \leqslant \dim \mathfrak{g}^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$*;*
5) $\dim \mathfrak{g}_0^{l} \leqslant \dim \mathfrak{g}^{l}$, $l \in \mathbb{N}$*;*
6) $r_{\mathfrak{g}_0} \geqslant r_{\mathfrak{g}}$*;*
7) $\operatorname{rank} \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rank} \kappa_{\mathfrak{g}}$*;*
8) *якщо $\mathfrak{g}$ — унімодулярна, то і $\mathfrak{g}_0$ унімодулярна, іншими словами, умова* $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u) = 0$, $\forall u \in \mathfrak{g}$ *призводить до такої самої умови в* $\mathfrak{g}_0$*;*

9) *якщо* $\mathfrak{g}$ *— розв'язна алгебра Лі, то* $\mathfrak{g}_0$ *також розв'язна, крім того* $r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g}_0) \leqslant r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$*;*

10) *якщо* $\mathfrak{g}$ *— нільпотентна алгебра Лі, то* $\mathfrak{g}_0$ *також нільпотентна, крім того* $r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g}_0) \leqslant r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$*;*

11) $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ *для усіх значень* $p, q \in \mathbb{N}$*, де інваріанти* $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g}_0)$ *та* $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ *добре визначені;*

12) *(лише над полем* $\mathbb{R}$*!)* $\operatorname{rang}_+ \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rang}_+ \kappa_{\mathfrak{g}}$ *та* $\operatorname{rang}_- \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rang}_- \kappa_{\mathfrak{g}}$*; більш того,* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\operatorname{rang}_+ \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rang}_+ \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ *та* $\operatorname{rang}_- \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rang}_- \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$.

Доведення. Теорему досить довести у випадку послідовних контракцій. Твердження для неперервних контракцій безпосередньо випливають з тверджень для послідовних контракцій. Використовуємо позначення, наведені на початку даного підрозділу.

Спочатку детально доведемо критерії 4 та 5. Твердження вірні, коли $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \dim \mathfrak{g} =: n$. Насправді, у цьому випадку $\dim \mathfrak{g}^{(l)} = \dim \mathfrak{g}^{l} = n$ $\forall l \in \mathbb{N}$, тоді внаслідок очевидних умов $\dim \mathfrak{g}_0^{(l)} \leqslant \dim \mathfrak{g}_0$, $\dim \mathfrak{g}_0^{l} \leqslant \dim \mathfrak{g}_0$ та $\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g} = n$ твердження критеріїв 4 та 5 виконуються.

Припустимо, що $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] < n$. Нехай $\{e^1, \ldots, e^n\}$ — базис дуального простору V^*, дуальний до базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$, тобто $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$, де δ^i_j — дельта-символ Кронекера. Означимо A як $n \times n^2$-вимірну матрицю, яка складається з елементів $c^k_{ij} = \langle e^k, [e_i, e_j] \rangle$, де індекс k змінюється по рядках, а пара (i, j) змінюється по стовпчиках:

$$A = \begin{pmatrix} c^1_{11} & \cdots & c^1_{1n} & c^1_{21} & \cdots & c^1_{2n} & \cdots & c^1_{n1} & \cdots & c^1_{nn} \\ c^2_{11} & \cdots & c^2_{1n} & c^2_{21} & \cdots & c^2_{2n} & \cdots & c^2_{n1} & \cdots & c^2_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{11} & \cdots & c^n_{1n} & c^3_{21} & \cdots & c^n_{2n} & \cdots & c^n_{n1} & \cdots & c^n_{nn} \end{pmatrix}.$$

Внаслідок антисиметричності c^k_{ij} за нижніми індексами, можна розглядати лише стовпчики, для яких $i < j$. Аналогічно вводяться матриці A_p та A_0 для алгебр $\mathfrak{g}_p$ та $\mathfrak{g}_0$.

Розмірності алгебр $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ та $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_p$ співпадають. Позначимо спільне значення розмірностей через n_1. Ці твердження можна переформулювати в термінах матриць A та A_p:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = n_1.$$

Таким чином, всі (n_1+1)-вимірні мінори будь-якої матриці A_p, $p \in \mathbb{N}$ нульові. Більш того, елементи матриці A_p збігаються до відповідних елементів матриці A_0

$$c^k_{p,ij} = \langle e^k, [e_i, e_j]_p \rangle \to c^k_{0,ij} = \langle e^k, [e_i, e_j]_0 \rangle, \quad p \to \infty.$$

Це обумовлює збіжність мінорів, тому кожен (n_1+1)-вимірний мінор матриці A_0 дорівнює нулю. Отже, $\operatorname{rang} A_0 \leqslant n_1$, тобто $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0] \leqslant n_1$, що доводить критерії 4 та 5 у випадку $l=1$.

Критерії 4 та 5 для інших значень l доводяться аналогічно. Необхідні матриці визначаються подібно до матриць A, A_p, A_0 у випадку $l=1$ за допомогою заміни звичайних комутаторів $[e_i, e_j]$ відповідними повторними комутаторами.

Критерії 6 та 7 доводяться аналогічно за допомогою граничного переходу $p \to \infty$ у формулах

$$r_{\mathfrak{g}} = n - \max_{x \in V} \operatorname{rang}(c^k_{ij} x^j)^n = r_{\mathfrak{g}_p} = n - \max_{x \in V} \operatorname{rang}(c^k_{p,ij} x^j)^n,$$
$$\operatorname{rang}(\kappa_{\mathfrak{g}}) = \operatorname{rang}(c^k_{ij} c^j_{i'k}) = \operatorname{rang}(\kappa_{\mathfrak{g}_p}) = \operatorname{rang}(c^k_{p,ij} c^j_{p,i'k}), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Критерій 8 очевидний, оскільки умова $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u) = 0$ для будь-якого u в $\mathfrak{g}$ породжує таку саму умову в $\mathfrak{g}_p$ та $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_p,u}) \to \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_0,u})$, $p \to \infty$.

Критерії 9 та 10 безпосередньо випливають з критеріїв 4 та 5.

Центр $Z(\mathfrak{g})$ співпадає з набором розв'язків системи $[e_i, x] = 0$, або у координатній формі $c^k_{ij} x^j = 0$. Таким чином, $\dim Z(\mathfrak{g}) = \dim Z(\mathfrak{g}_p)$ дорівнює

$$n - \operatorname{rang}(c^k_{ij}) = n - \operatorname{rang}(c^k_{p,ij}), \quad p \in \mathbb{N},$$

де пара індексів (k,j) змінюється по рядках, а індекс i змінюється по стовпчиках. Граничний перехід $p\to\infty$ в останній формулі приводить до критерію 3 у випадку $l=1$. Доведення твердження для решти значень l аналогічне. Замість $(c^k_{ij})=(\langle e^k,[e_i,e_j]\rangle)$ слід використовувати матрицю $(\langle e^k,[\dots[e_i,e_{j_1}],\dots,e_{j_l}]\rangle)$, де набір індексів $(k,j_1,\dots,j_l)$ змінюється по рядках, а індекс i змінюється по стовпчиках.

Критерій 11 справедливий внаслідок інваріантності $\mathfrak{C}_{pq}$.

Наведемо детальне доведення критерію 2, оскільки в ньому застосовується типовий прийом, потрібний для доведення значної кількості критеріїв. Нехай $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})=l$, тоді $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}_p)=l$. Виконаємо заміну базису алгебри $\mathfrak{g}_p$ з невиродженою матрицею W_p такою, що

$$\tilde c^k_{p,ij}=0\quad\text{коли}\quad i,j\leqslant l,$$

де $\tilde c^k_{p,ij}=(W_p)^i_{i'}(W_p)^j_{j'}({W_p}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{p,i'j'}$ — структурні сталі алгебри $\mathfrak{g}_p$ в новому базисі. Внаслідок можливості ортогоналізації базису, не втрачаючи загальності, можна припустити, що W_p — ортогональна (унітарна) матриця у випадку дійсного (комплексного) поля. Набір ортогональних (унітарних) матриць компактний відносно індукованої евклідової норми, тому тому з нього можна вибрати збіжну підпослідовність $\{W_{p_q},\ q\in\mathbb{N}\}$. Позначимо ортогональну (унітарну) матрицю, яка є границею цієї підпослідовності через W_0. Тоді при $q\to\infty$

$$\tilde c^k_{p_q,ij}=(W_{p_q})^i_{i'}(W_{p_q})^j_{j'}({W_{p_q}}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{p_q,i'j'}\to(W_0)^i_{i'}(W_0)^j_{j'}({W_0}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{0,i'j'}=\tilde c^k_{0,ij}.$$

Звідси (внаслідок аналогічного співвідношення для $c^k_{p,ij}$) $\tilde c^k_{p,ij}=0$ для $i,j\leqslant l$, тобто $\mathfrak{g}_0$ містить l-вимірну абелеву підалгебру, що і доводить критерій 2.

Аналогічна техніка, основана на ортогональних матрицях, використовується і для доведення критерію 12. Позначимо кількість додатних (від'ємних) діагональних елементів діагональної форми симетричної матриці K через rang_+K (rang_-K).

Досить довести, що для довільної збіжної послідовності симетричних матриць $K_p \to K_0$, $p \to \infty$, з $\operatorname{rang}_+ K_p = r_+$ та $\operatorname{rang}_- K_p = r_-$, $p \in \mathbb{N}$, виконуються нерівності $\operatorname{rang}_+ K_0 \leqslant r_+$ та $\operatorname{rang}_- K_0 \leqslant r_-$. Далі застосуємо твердження про ортогональні матриці до послідовності матриць (модифікованих) форм Кілінга алгебр $\mathfrak{g}_p$, які, внаслідок закону інерції квадратичних форм, мають ті самі значення rang_+ та rang_-.

Нехай W_p — ортогональна матриця, яка зводить K_p до матриці $D_p = \operatorname{diag}(d_{p,1}, \dots, d_{p,n})$, де $d_{p,i_1} > 0$ при $i_1 = 1, \dots, r_+$, $d_{p,i_2} < 0$ при $i_2 = r_+ + 1, \dots, r_+ + r_-$ та $d_{p,i_3} = 0$ при $i_3 = r_+ + r_- + 1, \dots, n$ $(r_+ + r_- \leqslant n)$. Таким чином, $K_p = W_p D_p {W_p}^{\mathrm{T}}$. Виберемо збіжну підпослідовність $\{W_{p_q},\ q \in \mathbb{N}\}$ та позначимо ортогональну матрицю, яка є границею цієї підпослідовності через W_0, тоді

$$D_{p_q} = {W_{p_q}}^{\mathrm{T}} K_{p_q} W_{p_q} \to {W_0}^{\mathrm{T}} K_0 W_0 =: D_0, \quad q \to \infty.$$

D_0 — діагональна матриця $\operatorname{diag}(d_{0,1}, \dots, d_{0,n})$, оскільки вона є границею послідовності діагональних матриць D_{p_q}, $q \in \mathbb{N}$. Більш того, $d_{0,i_1} \geqslant 0$ при $i_1 = 1, \dots, r_+$, $d_{0,i_2} \leqslant 0$ при $i_2 = r_+ + 1, \dots, r_+ + r_-$ та $d_{0,i_3} = 0$ при $i_3 = r_+ + r_- + 1, \dots, n$, що і доводить потрібне твердження.

Критерій 1 доведено зокрема у роботах [26, 72, 140]. □

В теоремі 2.2 зібрано додаткові критерії, які не використовуються у даній дисертаційній роботі, доведення тверджень цієї теореми наведено у роботі [114].

Теорема 2.2. *Якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є власною (неперервною чи послідовною) контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то мають місце наступні співвідношення:*

13) $\dim R(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim R(\mathfrak{g})$;

14) $\dim N(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim N(\mathfrak{g})$;

15) $n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g}_0) \geqslant n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$;

16) $\operatorname{rang} \operatorname{ad} \mathfrak{g}_0 \leqslant \operatorname{rang} \operatorname{ad} \mathfrak{g}$, $\operatorname{rang} \operatorname{ad}^* \mathfrak{g}_0 \leqslant \operatorname{rang} \operatorname{ad}^* \mathfrak{g}$;

17) *якщо алгебра* $\mathfrak{g}$ — l*-унімодулярна, для довільного фіксованого* $l \in \mathbb{N}$, *то і* $\mathfrak{g}_0$ *теж* l*-унімодулярна, тобто* $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^l) = 0$ *для довільного* u *з* $\mathfrak{g}$, *призводить до такої самої умови в* $\mathfrak{g}_0$;

18) *якщо алгебра Лі* $\mathfrak{g}_0$ — *жорстка, тоді вона не є контракцією жодної алгебри* $\mathfrak{g}$, *а також якщо не існує деформації з* $\mathfrak{g}_0$ *до* $\mathfrak{g}$, *то не існує контракції з* $\mathfrak{g}$ *до* $\mathfrak{g}_0$.

Зауваження 2.3. Ці критерії можна переформулювати в термінах замкнених підмножин множини $\mathcal{A}_n$ n-вимірних алгебр Лі. Так, множини нільпотентних, розв'язних, унімодулярних алгебр є замкненими. Множини $\{\mathfrak{g} \in \mathcal{A}_n \mid \dim \mathfrak{g}^l \leqslant r\}$, $\{\mathfrak{g} \in \mathcal{A}_n \mid \dim \mathfrak{g}^{(l)} \leqslant r\}$, $\{\mathfrak{g} \in \mathcal{A}_n \mid \dim \mathfrak{g}_{(l)} \geqslant r\}$ та подібні до них є замкненими для кожного l та $r = 0, \ldots, n$.

Зауваження 2.4. Необхідні критерії з'явилися в ранніх роботах присвячених контракціям алгебр Лі. Відтак у своїй роботі [136] Сегал використав критерій оснований на законі інерції квадратичних форм (перша частина критерію 7) у випадку компактних напівпростих алгебр Лі. Нерівність між розмірностями похідних $\dim[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \leqslant \dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ була доведена в роботі [131]. Критерії 3 та 5, що стосуються верхнього та нижнього центральних рядів, виникли при вивченні множин нільпотентних алгебр Лі [150]. Надзвичайно важливий критерій 1 є прямим наслідком леми про замикання орбіт, наведеної, наприклад, в роботі [26]. Критерій 2 доведено в [72] з використанням розкладу Івасави. Усі критерії 3, 4 та 5 були застосовані в роботі [83], див. також [70]. Усі вищезгадані критерії основані на напівінваріантних величинах. Критерій 11, що стосується інваріантної характеристики $\mathfrak{C}_{pq}$, вперше запропоновано та ефективно застосовано у [33, 140]. В цих же роботах сформульовано ряд інших критеріїв та ідеї їх доведень. Зауважимо, що $\mathfrak{C}_{pq}$ є узагальненням інваріанта $J = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^2)/(\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_u)^2$, запропонованого в [83]. Другу частину критерію 16 запропоновано в роботі [34, 35]. Критерій 18 обговорювався в роботі [8]. Існує також ряд інших критеріїв, пов'язаних, наприклад, з когомологіями алгебр Лі [32].

Зауваження 2.5. Список критеріїв можна розширити, використовуючи інші величини, що є напівінваріантними відносно контракцій [33]. Критерії ж, запропоновані в теоремі 2.1, є порівняно простими для обчислень і застосувань.

Множина (або навіть підмножина) критеріїв наведених в теоремі 2.1 є повною для три- та чотиривимірних алгебр Лі в тому сенсі, що вони точно відділяють усі пари алгебр, контракцій між якими не існує. Питання повноти наведеного набору критеріїв у випадках вищих розмірностей залишається відкритим.

Вищезгадана множина критеріїв не є мінімальною. Наприклад, критерії 4 та 5 містять в собі критерії 9 та 10.

Критерії відрізняються між собою за ефективністю. Критерії 1 та 8 є найбільш потужними, оскільки вони виключають можливість контракції в більшості пар низькорозмірних алгебр Лі. Див., наприклад, підрозділи 3.2 та 3.3.

Критерій 12 — єдиний критерій, який працює над дійсним полем, але не працює над комплексним. Він дозволяє відокремити випадки, коли існує контракція над полем $\mathbb{C}$, але не існує контракції над полем $\mathbb{R}$ (див. додатково зауваження 3.6).

Зауваження 2.6. Критерій 1є особливо потужним завдяки наявності в ньому строгої нерівності. Він суттєво спрощує дослідження контракцій всередині серій алгебр Лі. Оскільки розмірності алгебр диференціювань співпадають для несингулярних значень параметрів серій, то критерій 1 показує відсутність контракцій між цими випадками.

Чи можна інші критерії або їх комбінації посилити заміною нестрогої нерівності на строгу? Це питання залишається відкритим. Існувала гіпотеза [83], що розмірність елементів верхнього чи нижнього центральних рядів або ряду похідних з необхідністю повинна змінюватись під дією власної контракції. Контрприкладом до цієї гіпотези є контракція тривимірних алгебр (див. також [70])

$$A_{3.2}\,([e_1,e_3]=e_1,[e_2,e_3]=e_1+e_2)\to A_{3.3}\,([e_1,e_3]=e_1,[e_2,e_3]=e_1),$$

яка задається простою IB-контракцією, що відповідає підалгебрі $\langle e_1, e_2+e_3\rangle$. Але для наведених вище алгебр усі інваріантні та напівінваріантні величини, наведені в цьому підрозділі, за винятком $\dim \mathrm{Der}$, співпадають. Таким чином, лише критерій 1 є ефективним для даної пари алгебр Лі.

2.4. Обчислення інваріантних величин

Існує два досить простих класи алгебр Лі, які покривають більшість низькорозмірних алгебр. Перший клас утворюють *майже абелеві алгебри*, що мають абелів ідеал корозмірності один. Другий клас складається з алгебр Лі з ВГ+А ідеалом корозмірності один, який ізоморфний прямій сумі алгебри Вейля–Гейзенберга $\mathfrak{h}_3 = A_{3.1}$ та абелевої алгебри корозмірності чотири. Характеристики вищезгаданих алгебр знаходяться однотипно, а решту низькорозмірних алгебр слід досліджувати окремо. Нижче обчислимо інваріантні величини $\mathfrak{C}_{pq}$ та ранги таких алгебр.

Майже абелеві алгебри. Розглянемо n-вимірну алгебру Лі над полем $\mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$, яка має $(n-1)$-вимірний абелів ідеал. Це розв'язна і, більш того, метабелева алгебра. Нехай елементи e_1, …, e_{n-1} утворюють базис ідеалу, а e_n доповнює його до базису алгебри. Ненульові комутаційні співвідношення між елементами побудованого базису мають вигляд

$$[e_j, e_n] = \sum_{k=1}^{n-1} a_j^k e_k, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Таким чином, $(n-1)\times(n-1)$-вимірна матриця $A = (a_j^k)$ повністю визначає алгебру, тому позначатимемо цю алгебру через $\mathfrak{a}_A$, тобто $\mathfrak{a}_A := A_1 \oplus_A (n-1)A_1$.

Дві алгебри $\mathfrak{a}_A$ та $\mathfrak{a}_{A'}$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матриці A та A' подібні з точністю до скалярного множника. Ізоморфізми задаються замінами базисів в абелевому ідеалі та масштабуваннями елементів, комплементарних до цих базисів. З точністю до ізоморфізмів можна вважати, що матриця A зведена до жорданової нормальної форми, а її власні значення можна додатково віднормувати за допомогою ненульового множника.

Для будь-якої алгебри $\mathfrak{g}$ матриця $\hat{\mathrm{ad}}_u$ приєднаної дії ad_u до будь-якого елемента $u \in \mathfrak{g}$ знаходиться за формулою $(\hat{\mathrm{ad}}_u)^j_k = c^k_{ij} u_i$, де c^k_{ij} — структурні сталі алгебри $\mathfrak{g}$ у фіксованому базисі. Оскільки для алгебри $\mathfrak{a}_A$ $c^k_{ij} = 0$, коли жоден з i або j не дорівнює n, то матриця $\hat{\mathrm{ad}}_u$ легко обчислюється:

$$\hat{\mathrm{ad}}_u = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a^i_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^i_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} - u_n \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^{n-1}_1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^1_{n-1} & \dots & a^{n-1}_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

або, коротше, $\hat{\mathrm{ad}}_u$ має вигляд

$$\hat{\mathrm{ad}}_u = \begin{pmatrix} u_n A & -A\bar{u} \\ \underline{0} & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \bar{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1})^{\mathrm{T}} \text{ та } \underline{0} = (0, \ldots, 0).$$

Щоб обчислити інваріантну характеристику $\mathfrak{C}_{pq}$ алгебри $\mathfrak{a}_A$, знайдемо степені матриці $\hat{\mathrm{ad}}_u$ та їх сліди

$$\hat{\mathrm{ad}}_u{}^p = \begin{pmatrix} u_n{}^p A^p & -u_n{}^{p-1} A^p \bar{u} \\ \underline{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^p) = u_n{}^p \, \mathrm{tr}(A^p).$$

Слід матриці не змінюється під дією перетворень подібності, тому якщо $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ — корені характеристичного полінома $\chi_A(\lambda)$ матриці A над полем $\mathbb{C}$, то $\mathrm{tr}(A^p) = \lambda_1^p + \cdots + \lambda_{n-1}^p$ для довільного $p \in \mathbb{N}$. Відповідно можна явно виписати інваріант $\mathfrak{C}_{pq}$.

Ранг алгебри $\mathfrak{a}_A$ також можна обчислити, використовуючи наведені вище міркування. Насправді, характеристичний поліном $\chi_{\hat{\mathrm{ad}}_u}(\lambda)$ матриці $\hat{\mathrm{ad}}_u$ дорівнює $\lambda\chi_{u_nA}(\lambda)$, тобто будь-який елемент $u \in \mathfrak{a}_A$ у якого $u_n \neq 0$ є регулярним, тому ранг алгебри $\mathfrak{a}_A$ співпадає з кількістю нульових коренів полінома $\lambda\chi_A(\lambda)$.

Як результат наведених вище міркувань має місце наступна лема.

Лема 2.2. *Нехай $\mathfrak{a}_A$ — n-вимірна алгебра Лі з $(n-1)$-вимірним абелевим ідеалом та з комутаційними співвідношеннями, які задаються матрицею A. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — характеристичний поліном матриці A над полем $\mathbb{C}$.*

Якщо

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(A^p) = \lambda_1^p + \dots + \lambda_{n-1}^p \neq 0, \quad \mathrm{tr}(A^q) = \lambda_1^q + \dots + \lambda_{n-1}^q \neq 0, \\ &\mathrm{tr}(A^{p+q}) = \lambda_1^{p+q} + \dots + \lambda_{n-1}^{p+q} \neq 0, \end{aligned}$$

то величина $\mathfrak{C}_{pq}$ — добре визначена інваріантна характеристика алгебри $\mathfrak{a}_A$ і обчислюється за формулою

$$\mathfrak{C}_{pq} = \frac{\mathrm{tr}(A^p)\,\mathrm{tr}(A^q)}{\mathrm{tr}(A^{p+q})} = \frac{(\lambda_1^p + \dots + \lambda_{n-1}^p)(\lambda_1^q + \dots + \lambda_{n-1}^q)}{(\lambda_1^{p+q} + \dots + \lambda_{n-1}^{p+q})}.$$

Ранг алгебри Лі $\mathfrak{a}_A$ (тобто розмірність її підалгебри Картана) дорівнює порядку нульового кореня характеристичного полінома матриці A плюс один.

Алгебри Лі з ВГ+А ідеалами корозмірності 1. Розглянемо дійсну чи комплексну n-вимірну алгебру Лі з $(n-1)$-вимірним ідеалом, ізоморфним прямій сумі алгебри Вейля-Гейзенберга $\mathfrak{h}_3 = A_{3.1}$ та $(n-4)$-вимірної абелевої алгебри. Нехай елементи e_1, e_2 та e_3 утворюють канонічний базис $\mathfrak{h}_3$-ізоморфної компоненти, а $e_4, \dots, e_{n-1}$ задають базис абелевої компоненти ідеалу та e_n доповнює базис ідеалу до базису всієї алгебри. Ненульові комутаційні співвідношення між елементами побудованого базису наступні

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_j, e_n] = \sum_{k=1}^{n-1} a_j^k e_k, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Оскільки $(n-1) \times (n-1)$-вимірна матриця $A = (a_j^k)$ повністю визначає алгебру, то означимо цю алгебру як $\mathfrak{w}_A := A_1 \oplus_A (\mathfrak{h}_3 \oplus (n-4)A_1)$. Тотожність Якобі накладає на елементи матриці A наступні обмеження:

$$a_1^1 = a_2^2 + a_3^3, \quad a_1^k = 0,\ k = 2, \dots, n-1, \quad a_i^2 = a_i^3 = 0,\ i = 4, \dots, n-1.$$

Матриця $\hat{\mathrm{ad}}_u$ приєднаної дії до довільного елемента $u \in \mathfrak{w}_A$ обчислюється шляхом, аналогічним до попереднього випадку, та має вигляд

$$\hat{\mathrm{ad}}_u = \begin{pmatrix} u_n A + u_3 E_2^1 - u_2 E_3^1 & -A\bar{u} \\ \underline{0} & 0 \end{pmatrix},$$

де $\bar{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})^{\mathrm{T}}$, $\underline{0} = (0, \dots, 0)$, E_j^i — $(m-1) \times (m-1)$-вимірна матриця з одиницею на ${}_j^i$-місці та нулями на решті місць.

Внаслідок обмежень на матрицю A знову маємо

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^p) = u_n{}^p \,\mathrm{tr}(A^p), \quad \chi_{\mathrm{ad}_u}(\lambda) = -\lambda \chi_{u_n A}(\lambda).$$

Таким чином, лему 2.2 можна повністю переформулювати для випадку алгебри $\mathfrak{w}_A$.

Лема 2.3. *Нехай $\mathfrak{w}_A = A_1 \oplus_A (\mathfrak{h}_3 \oplus (n-4)A_1)$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — корені характеристичного полінома матриці A над полем $\mathbb{C}$.*

Якщо

$$\mathrm{tr}(A^p) = \lambda_1^p + \dots + \lambda_{n-1}^p \neq 0, \quad \mathrm{tr}(A^q) = \lambda_1^q + \dots + \lambda_{n-1}^q \neq 0,$$
$$\mathrm{tr}(A^{p+q}) = \lambda_1^{p+q} + \dots + \lambda_{n-1}^{p+q} \neq 0,$$

тоді $\mathfrak{C}_{pq}$ — добре визначена інваріантна характеристика алгебри $\mathfrak{w}_A$ і задається формулою

$$\mathfrak{C}_{pq} = \frac{\mathrm{tr}(A^p)\,\mathrm{tr}(A^q)}{\mathrm{tr}(A^{p+q})} = \frac{(\lambda_1^p + \dots + \lambda_{n-1}^p)(\lambda_1^q + \dots + \lambda_{n-1}^q)}{(\lambda_1^{p+q} + \dots + \lambda_{n-1}^{p+q})}.$$

Ранг алгебри Лі $\mathfrak{w}_A$ (тобто розмірність її підалгебри Картана) дорівнює порядку нульового кореня характеристичного полінома матриці A плюс один.

Особливі випадки. Приєднана дія до довільного елемента $u \in so(3)$ представляється в канонічному базисі наступним чином: $\hat{\mathrm{ad}}_u\hat{v} = \hat{u} \times \hat{v}$. Тут і надалі $\hat{u}$ та $\hat{v}$ координатні стовпчики векторів u та v, що трактуються як елементи простору $\mathbb{R}^3$, а '$\cdot$' та '$\times$' позначають звичайні скалярний та векторний добутки в $\mathbb{R}^3$. За індукцією,

$$\mathrm{ad}_u^{2p'-1}v = (-|\hat{u}|^2)^{p'-1}\hat{u}\times\hat{v},\ \mathrm{ad}_u^{2p'}v = (-|\hat{u}|^2)^{p'-1}((\hat{u}\cdot\hat{v})\hat{u}-|\hat{u}|^2\hat{v}),\ p' \in \mathbb{N},$$

тобто $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u^{2p'-1}) = 0$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u^{2p'}) = (-|\hat{u}|^2)^{p'}$, $p' \in \mathbb{N}$.

Таким чином, $\mathfrak{C}_{2p',2q'} = 2$, а для інших пар індексів p та q інваріант $\mathfrak{C}_{pq}$ не визначений.

Таке саме твердження має місце для алгебр $sl(2,\mathbb{R})$, $so(3) \oplus A_1$ та $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$. Пояснюється це тим, що алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ та $so(3)$ еквівалентні над полем $\mathbb{C}$, а алгебри $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{g}\oplus kA_1$ мають однакові інваріанти $\mathfrak{C}_{pq}$.

В канонічному базисі алгебри $2A_{2.1}$, з наступними комутаційними співвідношеннями $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, степені матриць приєднаних дій $\mathrm{ad}_u{}^p$, $p \in \mathbb{N}$ мають вигляд

$$\hat{\mathrm{ad}}_u^{\,p} = \begin{pmatrix} u_2^p & -u_2^{p-1}u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4^p & -u_4^{p-1}u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u{}^p) = u_2^p + u_4^p$. Оскільки відношення слідів з означення інваріанта $\mathfrak{C}_{pq}$ явно залежить від u та v у випадку алгебри $2A_{2.1}$, то величина $\mathfrak{C}_{pq}$ не визначена для довільних $p, q \in \mathbb{N}$.

Те саме твердження має місце для алгебри $A_{4.10}$, яка ізоморфна алгебрі $2A_{2.1}$ над полем $\mathbb{C}$.

2.5. Багатопараметричні, розкладні та повторні контракції

Однопараметричні контракції вичерпують набір неперервних контракцій, але інші типи контракцій також є важливими, зокрема для знаходження однопараметричних контракцій. Слідуючи означенням та манері викладу підрозділу 2.1, розглянемо клас неперервних багатопараметричних контракцій, які узагальнюють однопараметричні контракції.

Нехай $U\colon (0,1]^m \to GL(V)$, тобто $U_{\bar\varepsilon} = U(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ — невироджений лінійний оператор на V для довільного $\bar\varepsilon \in (0,1]^m$, де $m \in \mathbb{N}$, а $\bar\varepsilon$ — набір параметрів ε_1, …, ε_m. Визначимо параметризовану сім'ю нових дужок Лі на V через стару дужку:

$$\forall\, \bar\varepsilon \in (0,1]^m,\ \forall\, x,y \in V\colon \quad [x,y]_{\bar\varepsilon} = U_{\bar\varepsilon}^{-1}[U_{\bar\varepsilon}x, U_{\bar\varepsilon}y].$$

Для будь-якого $\bar\varepsilon \in (0,1]^m$ алгебра Лі $\mathfrak{g}_{\bar\varepsilon} = (V, [\cdot,\cdot]_{\bar\varepsilon})$ ізоморфна алгебрі $\mathfrak{g}$.

Означення 2.7. Якщо існує границя $\lim\limits_{\bar\varepsilon\to+\bar 0}[x,y]_{\bar\varepsilon} = \lim\limits_{\bar\varepsilon\to+\bar 0} U_{\bar\varepsilon}^{-1}[U_{\bar\varepsilon}x, U_{\bar\varepsilon}y] =\colon$ $=\colon [x,y]_0$ для довільних $x,y \in V$, то дужка Лі $[\cdot,\cdot]_0$ добре визначена. При цьому алгебра Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, [\cdot,\cdot]_0)$ називається *багатопараметричною неперервною контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Позначення $\bar\varepsilon \to +\bar 0$ означає, що $\varepsilon_l \to +0$, $l = 1,\dots,m$.

Якщо базис простору V фіксований, то оператор $U_{\bar\varepsilon}$ визначається відповідною матрицею (для матриці також використовуємо позначення $U_{\bar\varepsilon}$) та означення 2.7 можна переформулювати в термінах структурних сталих.

Означення 2.7$'$. Якщо існує границя $\lim\limits_{\bar\varepsilon\to+\bar 0}(U_{\bar\varepsilon})_{i'}^{i}(U_{\bar\varepsilon})_{j'}^{j}(U_{\bar\varepsilon}^{-1})_{k}^{k'}c_{ij}^{k} =\colon \tilde c_{i'j'}^{k'}$ для усіх значень i', j' та k', тоді $\tilde c_{i'j'}^{k'}$ — компоненти добре визначеного тензора структурних сталих алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$. В цьому випадку алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ називається *m-параметричною неперервною контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Параметри $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ та матриця-функція $U_{\bar\varepsilon}$ називаються *параметрами контракції* та *матрицею контракції* відповідно.

Зауваження 2.7. Будь-яка багатопараметрична контракція породжує набір сильно еквівалентних (в сенсі означення 2.4) однопараметричних контракцій за допомогою заміни $\varepsilon_i = f_i(\varepsilon)$ параметрів $\bar{\varepsilon}$ функціями одного параметра ε. Щоб заміна була коректною, функції $f_i\colon (0,1] \to (0,1]$ повинні задовольняти умовам монотонності, неперервності та $f_i(\varepsilon) \to +0$, $\varepsilon \to +0$.

Очевидно, що поняття замикання орбіт [33] є *транзитивним.* Те саме твердження справедливе і для неперервних контракцій. Завдяки транзитивності можна легко будувати нові контракції з контракцій, наведених у підрозділі 3.3. Але не завжди, перемноживши матриці послідовних контракцій, отримаємо матрицю результуючої контракції. Нижче наведено необхідні поняття, що стосуються послідовних контракцій, а також розглянуто ряд важливих прикладів.

Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}_2$ контрактує за допомогою матриці $U_1(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_{m_1})$ до алгебри $\mathfrak{g}_1$, яка, в свою чергу, контрактує до алгебри $\mathfrak{g}_0$ за допомогою матриці $U_2(\varepsilon''_1,\dots,\varepsilon''_{m_2})$. Якщо матриця $U_1(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_{m_1})U_2(\varepsilon''_1,\dots,\varepsilon''_{m_2})$ призводить до (m_1+m_2)-параметричної контракції з алгебри $\mathfrak{g}_2$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$, то ця контракція називається *композицією* двох вихідних контракцій.

Означення 2.8. Багатопараметрична контракція називається *розкладною*, якщо її можна представити у вигляді композиції двох власних багатопараметричних контракцій.

Більш точно, m-вимірна контракція з алгебри $\mathfrak{g}$ в алгебру $\mathfrak{g}_0$ розкладна тоді і тільки тоді, коли існує така алгебра Лі $\mathfrak{g}_1$ (неізоморфна $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_0$), що контракцію з алгебри $\mathfrak{g}$ в алгебру $\mathfrak{g}_0$ можна представити у вигляді композиції m_1-параметричної контракції з $\mathfrak{g}$ у $\mathfrak{g}_1$ та m_2-параметричної контракції з $\mathfrak{g}_1$ у $\mathfrak{g}_0$, де $m_1+m_2=m$.

Означення 2.9. m-параметрична контракція називається *цілком розкладною*, якщо її можна представити у вигляді композиції m власних однопараметричних контракцій.

Кожна двопараметрична розкладна контракція є цілком розкладною.

Означення 2.10. Якщо існує дві однопараметричні контракції з алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у алгебру $\mathfrak{g}_1$ та з алгебри Лі $\mathfrak{g}_1$ у алгебру $\mathfrak{g}_0$, то алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ називається *повторною контракцією* алгебри $\mathfrak{g}$.

Аналогічно визначається l-повторна контракція як результат l однопараметричних послідовних контракцій. Подібним чином можна ввести і поняття повторних багатопараметричних контракцій.

Останнє означення можна пояснити наступним чином. Нехай $U_1(\varepsilon_1)$ та $U_2(\varepsilon_2)$ матриці однопараметричних контракцій з алгебри $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_1$ та з $\mathfrak{g}_1$ у $\mathfrak{g}_0$ відповідно та $U_{\bar\varepsilon} = U_1(\varepsilon_1)U_2(\varepsilon_2)$, де $\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тоді існує *повторна* границя

$$\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(\lim_{\varepsilon_1\to+0}(U_{\bar\varepsilon})^i_{i'}(U_{\bar\varepsilon})^j_{j'}(U^{-1}_{\bar\varepsilon})^{k'}_k c^k_{ij}\right) =: \tilde c^{k'}_{i'j'}$$

для усіх значень i', j' та k', тобто $\tilde c^{k'}_{i'j'}$ — добре визначені структурні сталі алгебри $\mathfrak{g}_0$.

Зауваження 2.8. Якщо повторну границю можна замінити добре визначеною одночасною границею

$$\lim_{\bar\varepsilon\to+\bar0}(U_{\bar\varepsilon})^i_{i'}(U_{\bar\varepsilon})^j_{j'}(U^{-1}_{\bar\varepsilon})^{k'}_k c^k_{ij} = \lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(\lim_{\varepsilon_1\to+0}(U_{\bar\varepsilon})^i_{i'}(U_{\bar\varepsilon})^j_{j'}(U^{-1}_{\bar\varepsilon})^{k'}_k c^k_{ij}\right),$$

де $\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то повторна контракція перетворюється у цілком розкладну багатопараметричну контракцію.

Приклад 2.2. Розглянемо пару алгебр Лі $so(3)\oplus A_1$ та $A_{4.1}$. Існують узагальнені IB-контракції з $so(3)\oplus A_1$ до $A^0_{3.5}\oplus A_1$ та з $A^b_{3.5}\oplus A_1$ до $A_{4.1}$ з матрицями контракції $U_1 = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_1, 1, 1)$ та $U_2 = I_9(b)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_2^2, \varepsilon_2, 1, \varepsilon_2)$ відповідно (див. підрозділ 3.3). Їх добуток

$$U_{\bar\varepsilon} = U_1(\varepsilon_1)U_2(\varepsilon_2) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_1, 1, 1)I_9(0)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_2^2, \varepsilon_2, 1, \varepsilon_2),$$

задає матричнозначну функцію двох змінних $\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Дослідимо, як контракція, породжена матрицею $U_{\bar\varepsilon}$, діє на алгебру $so(3)\oplus A_1$.

Матриця $U_{\bar\varepsilon}$ та обернена до неї $U_{\bar\varepsilon}^{-1}$ мають вигляд

$$U_{\bar\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2^2 & 0 & -\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ U_{\bar\varepsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2^{-2} & 0 & 0 & \varepsilon_2^{-2} \\ 0 & \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо (з точністю до антисиметричності) перетворені комутатори елементів канонічного базису алгебри $so(3) \oplus A_1$, використовуючи формулу $[e_i, e_j]_{\bar\varepsilon} = U_{\bar\varepsilon}^{-1}[U_{\bar\varepsilon}e_i, U_{\bar\varepsilon}e_j]$ та канонічні комутаційні співвідношення $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$:

$$[e_1, e_2]_{\bar\varepsilon} = \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 e_4, \quad [e_1, e_4]_{\bar\varepsilon} = -\varepsilon_2^2 e_2, \quad [e_2, e_3]_{\bar\varepsilon} = \varepsilon_1^2 e_4,$$
$$[e_1, e_3]_{\bar\varepsilon} = 0, \quad [e_2, e_4]_{\bar\varepsilon} = e_1, \quad [e_3, e_4]_{\bar\varepsilon} = e_2.$$

Після послідовної границі, де спочатку $\varepsilon_1 \to +0$, а потім $\varepsilon_2 \to +0$, ці комутаційні співвідношення переходять в канонічні комутаційні співвідношення для алгебри $A_{4.1}$, тобто виконання двох послідовних однопараметричних контракцій дає в результаті повторну контракцію з $so(3) \oplus A_1$ до $A_{4.1}$. Більш того, одночасна границя $\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to \bar 0$ також існує для перетворених комутаторів. Внаслідок зауваження 2.8 матриця $U_{\bar\varepsilon}$ також призводить до цілком розкладної двопараметричної контракції з $so(3) \oplus A_1$ до алгебри $A_{4.1}$. Поклавши $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 =: \varepsilon$, отримаємо добре визначену однопараметричну контракцію між алгебрами, що розглядаються.

Не всі повторні контракції призводять до розкладних багатопараметричних контракцій, цей факт ілюструється в наступному прикладі.

Приклад 2.3. Існують узагальнені ІВ-контракції між алгебрами Лі з $2A_{2.1}$ до $A_{4.3}$ та з $A_{4.3}$ до $A_{4.1}$, з матрицями контракцій (див. підрозділ 3.3) $U_1 = I_{28}\,\mathrm{diag}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_1, 0)$ та $U_2 = I_{17}\,\mathrm{diag}(\varepsilon_2^2, \varepsilon_2, 1, \varepsilon_2)$ відповідно. Добуток цих матриць

$$U_{\bar\varepsilon} = U_1(\varepsilon_1)U_2(\varepsilon_2) = I_{28}\,\mathrm{diag}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_1, 1)I_{17}\,\mathrm{diag}(\varepsilon_2^2, \varepsilon_2, 1, \varepsilon_2),$$

визначає матричнозначну функцію двох змінних $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Матриця $U_{\bar{\varepsilon}}$ та обернена до неї $U_{\bar{\varepsilon}}^{-1}$ мають явний вигляд

$$U_{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 & -\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_{\bar{\varepsilon}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_2^{-2} & -\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-2} & -\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-2} & -\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-2} \\ 0 & \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1} & \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^{-1} \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненульові комутаційні співвідношення для алгебри $2A_{2.1}$ мають вигляд $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$. Обчислимо (з точністю до антисиметричності) перетворені комутатори базисних елементів, використовуючи формулу $[e_1, e_2]_{\bar{\varepsilon}} = U_{\bar{\varepsilon}}^{-1}[U_{\bar{\varepsilon}}e_1, U_{\bar{\varepsilon}}e_2]$:

$$[e_1, e_4]_{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_2 e_1, \quad [e_2, e_3]_{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}e_1 + \varepsilon_1 e_2,$$
$$[e_1, e_2]_{\bar{\varepsilon}} = 0, \quad [e_1, e_3]_{\bar{\varepsilon}} = 0, \quad [e_2, e_4]_{\bar{\varepsilon}} = e_1, \quad [e_3, e_4]_{\bar{\varepsilon}} = e_2.$$

Перетворені комутаційні співвідношення переходять в канонічні комутаційні співвідношення для алгебри Лі $A_{4.1}$ лише при послідовній границі, спочатку $\varepsilon_1 \to +0$, а потім $\varepsilon_2 \to +0$. Одночасна границя $\bar{\varepsilon} \to \bar{0}$ не існує, тобто в цьому випадку повторна контракція не призводить до багатопараметричної. Таким чином, щоб отримати матрицю однопараметричної контракції, слід накласти спеціальні обмеження на параметри ε_1 і ε_2. А саме, умова $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) = o(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 \to +0$ гарантує існування потрібної однопараметричної контракції з матрицею $U_{f(\varepsilon),\varepsilon}$. Покладемо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2$. Матриця $U_{\varepsilon^2,\varepsilon}$ породжує добре визначену однопараметричну контракцію між алгебрами $2A_{2.1}$ та $A_{4.1}$ при $\varepsilon \to +0$:

$$[e_1, e_4]_{\varepsilon} = \varepsilon e_1 \to 0, \quad [e_2, e_3]_{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}e_1 + \varepsilon e_2 \to 0,$$
$$[e_1, e_2]_{\varepsilon} = 0, \quad [e_1, e_3]_{\varepsilon} = 0, \quad [e_2, e_4]_{\varepsilon} = e_1, \quad [e_3, e_4]_{\varepsilon} = e_2.$$

В той же час матриця також $U_{\varepsilon,\varepsilon}$ приводить до добре визначеної однопараметричної контракції, а отримані комутаційні зводяться до канонічних комутаційних співвідношень алгебри Лі $A_{4.1}$ наступною заміною базису

$$I_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остаточно, матриця $U_4 = U_{\varepsilon,\varepsilon} I_{31}$, явний вигляд якої наведений у зауваженні 3.4, породжує контракцію $2A_{2.1} \to A_{4.1}$ в канонічних базисах.

В роботі [114] сформульовано та доведено ряд тверджень, що стосуються таких питань: за яких умов повторні контракції приводять до добре визначених розкладних багатопараметричних контракцій та як отримати відповідні однопараметричні контракції в протилежному випадку.

2.6. Висновки до розділу 2

В розділі 2 введені означення однопараметричних та багатопараметричних неперервних контракцій алгебр Лі в координатній та безкоординатній формах. Крім того, детально розглянуто питання еквівалентності контракцій та сформульовано і доведено ряд необхідних критеріїв існування контракцій, які суттєво спрощують задачу дослідження та пошуку контракцій в заданому класі алгебр Лі. Розглянуто найпростіші типи контракцій і наведено їх властивості, а також побудовано ряд важливих прикладів, які спростовують відомі гіпотези та твердження. У підрозділі 2.4 обчислено інваріантні величини та розмірності підалгебри Картана для широких класів алгебр Лі довільних скінченних розмірностей, а саме, для майже абелевих алгебр та алгебр з ідеалом корозмірності 1, що є прямою сумою тривимірної алгебри Гейзенберга та абелевої алгебри.

Основні результати розділу 2 опубліковано в роботах [114, 124, 125].

РОЗДІЛ 3

Контракції низькорозмірних алгебр Лі

Цей розділ присвячено контракціям низькорозмірних алгебр Лі.

В підрозділі 3.1 обчислюються інваріантні та напівінваріантні величини для дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири, необхідні для застосування критеріїв існування контракцій.

Алгоритм, що використовує класифікацію алгебр Лі і критерії існування контракцій та дозволяє ефективно працювати з контракціями алгебр Лі фіксованих розмірностей, сформульовано та проілюстровано типовими прикладами у підрозділі 3.2.

Усі слабо нееквівалентні однопараметричні контракції дійсних алгебр Лі до розмірності чотири включно отримано та досліджено у підрозділі 3.3. Зокрема, виокремлено усі випадки, де контракцію можна виконати за допомогою простої ІВ-контракції.

Використовуючи відповідність між переліками неізоморфних алгебр Лі над дійсним та комплексним полями, у підрозділі 3.4 побудовано класифікацію контракцій алгебр Лі у випадку поля комплексних чисел. Отримані результати порівнюються з виродженнями алгебр Лі, вивченими в роботах [19, 33].

Додатково у цих підрозділах досліджено рівні і ко-рівні низькорозмірних алгебр Лі та наведено діаграми, що ілюструють структуру множин три- та чотиривимірних алгебр Лі.

Основні результати розділу 3 опубліковано в роботах [114, 124, 125].

3.1. Дійсні низькорозмірні алгебри Лі

Використаємо повні переліки неізоморфних дійсних три- та чотиривимірних алгебр Лі, які отримано Мубаракзяновим [10] та трохи покращено у [124, 125]. В основному дотримуємося нумерації алгебр, введеної Мубаракзяновим.

Для кожної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ зі згаданих вище переліків наведемо ряд її алгебраїчних характеристик та величин (див. також додаток А). Точніше матимемо справу з типом алгебри (таким як розкладна, розв'язна, нільпотентна тощо); розмірністю $n_{\rm D}$ алгебри диференціювань $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$; розмірністю $n_{\rm Z}$ центра; максимальною розмірністю $n_{\rm A}$ абелевих підалгебр; формою Кілінга κ; рангом $r_{\mathfrak{g}}$ (дорівнює розмірності підалгебр Картана); рангом розв'язності $r_{\rm s}$ (якщо $\mathfrak{g}$ розв'язна); рангом нільпотентності $r_{\rm n}$ (якщо $\mathfrak{g}$ нільпотентна); набором розмірностей компонент ряду з похідних $\mathrm{DS} = [\dim\mathfrak{g}^{(1)}, \dim\mathfrak{g}^{(2)}, \dots, \dim\mathfrak{g}^{(\mathrm{k})}]$, де k — найменше число таке, що $\dim\mathfrak{g}^{(k)} = \dim\mathfrak{g}^{(i)}\ \forall\ i > k$; набором розмірностей компонент центрального ряду $\mathrm{CS} = [\dim\mathfrak{g}^1, \dim\mathfrak{g}^2, \dots, \dim\mathfrak{g}^{\mathrm{k}}]$, де k — найменше число таке, що $\dim\mathfrak{g}^k = \dim\mathfrak{g}^i\ \forall\ i > k$; слідом $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)$ приєднаного зображення до довільного елемента $v \in V$ та інваріантом $\mathfrak{C}_{pq}$ для тих значень $p, q \in \mathbb{N}$, коли цей інваріант добре визначений.

Ці характеристики та величини будуть використані у підрозділах 3.2 та 3.3 для застосування необхідних критеріїв існування контракцій.

Тривимірні алгебри Лі

$\boldsymbol{3A_1}$**:** (абелева, унімодулярна);

$n_{\rm D} = 9,\ n_{\rm Z} = 3,\ n_{\rm A} = 3,\ \kappa = 0,\ r_{\mathfrak{g}} = 3,\ r_{\rm n} = r_{\rm s} = 1,\ \mathrm{DS} = [0],\ \mathrm{CS} = [0],$ $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0.$

$\boldsymbol{A_{2.1} \oplus A_1}$**:** $[e_1, e_2] = e_1$ (розкладна, розв'язна);

$n_{\rm D} = 4,\ n_{\rm Z} = 1,\ n_{\rm A} = 2,\ \kappa = x_2y_2,\ r_{\mathfrak{g}} = 2,\ r_{\rm s} = 2,\ \mathrm{DS} = [1, 0],\ \mathrm{CS} = [1],$ $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -v_2,\ \mathfrak{C}_{pq} = 1.$

$\boldsymbol{A_{3.1}}$**:** $[e_2, e_3] = e_1$ (нерозкладна, нільпотентна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 6$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 0$, $r_{\mathfrak{g}} = 3$, $r_{\mathrm{n}} = r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [1, 0]$, $\mathrm{CS} = [1, 0]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$.

$\boldsymbol{A_{3.2}}$**:** $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 4$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 2x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2v_3$, $\mathfrak{C}_{pq} = 2$.

$\boldsymbol{A_{3.3}}$**:** $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 6$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 2x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2v_3$, $\mathfrak{C}_{pq} = 2$.

$\boldsymbol{A_{3.4}^{-1}}$**:** $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = -e_2$ (нерозкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 4$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 2x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

$\boldsymbol{A_{3.4}^{a}}$**:** $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = ae_2$, $0 < |a| < 1$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 4$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = (1 + a^2)x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -(1 + a)v_3$, $\mathfrak{C}_{pq} = 1 + \frac{a^p + a^q}{1 + a^{p+q}}$.

$\boldsymbol{A_{3.5}^{0}}$**:** $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$ (нерозкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 4$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = -2x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

$\boldsymbol{A_{3.5}^{b}}$**:** $[e_1, e_3] = be_1 - e_2$, $[e_2, e_3] = e_1 + be_2$, $b > 0$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 4$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 2(b^2 - 1)x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2bv_3$, $\mathfrak{C}_{pq} = \frac{2\,\mathrm{Re}(b+i)^p\,\mathrm{Re}(b+i)^q}{\mathrm{Re}(b+i)^{p+q}}$.

$\boldsymbol{sl(2, \mathbb{R})}$**:** $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_3$, $[e_1, e_3] = 2e_2$ (нерозкладна, проста, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 3$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 1$, $\kappa = -2(2x_3y_1 - x_2y_2 + 2x_1y_3)$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $\mathrm{DS} = [3]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

$\boldsymbol{so(3)}$**:** $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$ (нерозкладна, проста, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 3$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 1$, $\kappa = -2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $\mathrm{DS} = [3]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

Зауваження 3.1. Два елементи з наведеного вище переліку (а саме $\{A^a_{3.4}\}$ та $\{A^b_{3.5}\}$) насправді є серіями алгебр Лі, кожна з яких параметризована одним дійсним параметром. Деякі значення цих параметрів сингулярні, тобто при цих значеннях характеристики алгебр відрізняються від характеристик, які відповідають регулярним значенням параметрів. Наприклад, форма Кілінга алгебри $\{A^b_{3.5}\}$ тотожно дорівнює нулю при $b = 1$. Ті самі значення параметрів є сингулярними з точки зору реалізацій, інваріантів, підалгебр та ін. (див., зокрема, [119, 120, 124, 125]).

Цей факт не дозволяє створити канонічні переліки нееквівалентих низькорозмірних алгебр Лі, оскільки не існує однозначної відповіді на питання: чи варто виділяти в окремі класи алгебри, що відповідають сингулярним значенням параметрів. Наприклад, у роботах [119, 120] усі такі алгебри відокремлені від серій та пронумеровані окремо. У роботі [10] лише прямі суми та деякі алгебри (наприклад $A_{3.3}$) розглядаються окремо від відповідних серій.

Іншою перешкодою канонізації існуючих переліків є неясність вибору нормування для параметрів серій та існування принципово різних підходів до нормувань.

В дисертаційній роботі використовується класифікація Мубаракзянова, але усі алгебри, що відповідають сингулярним значенням параметрів серій, розглядаються окремо від серій алгебр. Використання такої техніки спрощує застосування необхідних критеріїв контракцій.

Зауважимо, що Агаока [18, 19] запропонував класифікацію три- та чотиривимірних комплексних алгебр Лі, яка добре пристосована до дослідження контракцій та деформацій. Запропонований ним підхід можна поширити на дійсний випадок та на вищі розмірності.

Чотиривимірні алгебри Лі

$\boldsymbol{4A_1}$ (абелева, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 16,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 4,\ \ n_{\mathrm{A}} = 4,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 4,\ \ r_{\mathrm{n}} = r_{\mathrm{s}} = 1,\ \ \mathrm{DS} = [0],\ \ \mathrm{CS} = [0],$ $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0.$

$\boldsymbol{A_{2.1} \oplus 2A_1:}$ $[e_1, e_2] = e_1$ (розкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 8,\ n_{\mathrm{Z}} = 2,\ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \kappa = x_2y_2,\ r_{\mathfrak{g}} = 3,\ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \mathrm{DS} = [1, 0],\ \mathrm{CS} = [1],$ $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -v_2,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = 1.$

$\boldsymbol{2A_{2.1}:}$ $[e_1, e_2] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_3$ (розкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 4,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 0,\ \ n_{\mathrm{A}} = 2,\ \ \kappa = x_2y_2 + x_4y_4,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 2,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [2, 0],$ $\mathrm{CS} = [2],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -(v_2 + v_4).$

$\boldsymbol{A_{3.1} \oplus A_1:}$ $[e_2, e_3] = e_1$ (розкладна, нільпотентна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 10,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 2,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = 0,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 4,\ \ r_{\mathrm{n}} = r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [1, 0],$ $\mathrm{CS} = [1, 0],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0.$

$\boldsymbol{A_{3.2} \oplus A_1:}$ $[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2$ (розкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 6,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 1,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = 2\,x_3y_3,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 2,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [2, 0],$ $\mathrm{CS} = [2],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2v_3,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = 2.$

$\boldsymbol{A_{3.3} \oplus A_1:}$ $[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2$ (розкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 8,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 1,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = 2\,x_3y_3,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 2,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [2, 0],$ $\mathrm{CS} = [2],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2v_3,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = 2.$

$\boldsymbol{A_{3.4}^{-1} \oplus A_1:}$ $[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = -e_2$ (розкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 6,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 1,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = 2x_3y_3,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 2,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [2, 0],$ $\mathrm{CS} = [2],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0,\ \ \mathfrak{C}_{2p,2q} = 2.$

$\boldsymbol{A_{3.4}^{a} \oplus A_1:}$ $[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = ae_2,\ 0 < |a| < 1$ (розкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 6$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 3$, $\kappa = (1 + a^2)x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -(1 + a)v_3$, $\mathfrak{C}_{pq} = 1 + \frac{a^p+a^q}{1+a^{p+q}}$.

$\boldsymbol{A^0_{3.5} \oplus A_1}$**:** $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$ (розкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 6$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 3$, $\kappa = -2x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

$\boldsymbol{A^b_{3.5} \oplus A_1}$**:** $[e_1, e_3] = be_1 - e_2$, $[e_2, e_3] = e_1 + be_2$, $b > 0$ (розкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 6$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 3$, $\kappa = 2(b^2 - 1)x_3y_3$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2bv_3$, $\mathfrak{C}_{pq} = \frac{2\,\mathrm{Re}(b+i)^p\,\mathrm{Re}(b+i)^q}{\mathrm{Re}(b+i)^{p+q}}$.

$\boldsymbol{sl(2, \mathbb{R}) \oplus A_1}$**:** $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_3$, $[e_1, e_3] = 2e_2$ (розкладна, нерозв'язна, редуктивна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 4$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = -2(2x_3y_1 - x_2y_2 + 2x_1y_3)$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $\mathrm{DS} = [3]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p2q} = 2$.

$\boldsymbol{so(3) \oplus A_1}$**:** $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$ (розкладна, нерозв'язна, редуктивна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 4$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = -2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $\mathrm{DS} = [3]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

$\boldsymbol{A_{4.1}}$**:** $[e_2, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4] = e_2$ (нерозкладна, розв'язна, нільпотентна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 7$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 3$, $\kappa = 0$, $r_{\mathfrak{g}} = 4$, $r_{\mathrm{n}} = 3$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2, 0]$, $\mathrm{CS} = [2, 1, 0]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$.

$\boldsymbol{A^1_{4.2}}$**:** $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 8$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 3$, $\kappa = 3x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [3, 0]$,

$\mathrm{CS}=[3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)=-3v_4$, $\mathfrak{C}_{pq}=3$.

$\boldsymbol{A^{-2}_{4.2}}$**:** $[e_1,e_4]=-2e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_2+e_3$ (нерозкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}}=6$, $n_{\mathrm{Z}}=0$, $n_{\mathrm{A}}=3$, $\kappa=(b^2+2)x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}}=1$, $r_{\mathrm{s}}=2$, $\mathrm{DS}=[3,0]$, $\mathrm{CS}=[3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)=0$, $\mathfrak{C}_{pq}=\frac{(2+(-2)^p)(2+(-2)^q)}{2+(-2)^{p+q}}$, $p,q\geqslant 2$.

$\boldsymbol{A^{b}_{4.2}}$**:** $[e_1,e_4]=be_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_2+e_3$, $b\neq -2,0,1$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}}=6$, $n_{\mathrm{Z}}=0$, $n_{\mathrm{A}}=3$, $\kappa=(b^2+2)x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}}=1$, $r_{\mathrm{s}}=2$, $\mathrm{DS}=[3,0]$, $\mathrm{CS}=[3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)=-(2+b)v_4$, $\mathfrak{C}_{pq}=\frac{(2+b^p)(2+b^q)}{2+b^{p+q}}$.

$\boldsymbol{A_{4.3}}$**:** $[e_1,e_4]=e_1$, $[e_3,e_4]=e_2$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}}=6$, $n_{\mathrm{Z}}=1$, $n_{\mathrm{A}}=3$, $\kappa=x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}}=3$, $r_{\mathrm{s}}=2$, $\mathrm{DS}=[2,0]$, $\mathrm{CS}=[2,1]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)=-v_4$, $\mathfrak{C}_{pq}=1$.

$\boldsymbol{A_{4.4}}$**:** $[e_1,e_4]=e_1$, $[e_2,e_4]=e_1+e_2$, $[e_3,e_4]=e_2+e_3$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}}=6$, $n_{\mathrm{Z}}=0$, $n_{\mathrm{A}}=3$, $\kappa=3\,x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}}=1$, $r_{\mathrm{s}}=2$, $\mathrm{DS}=[3,0]$, $\mathrm{CS}=[3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)=-3v_4$, $\mathfrak{C}_{pq}=3$.

$\boldsymbol{A^{111}_{4.5}}$**:** $[e_1,e_4]=e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_3$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}}=12$, $n_{\mathrm{Z}}=0$, $n_{\mathrm{A}}=3$, $\kappa=3x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}}=1$, $r_{\mathrm{s}}=2$, $\mathrm{DS}=[3,0]$, $\mathrm{CS}=[3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)=-3v_4$, $\mathfrak{C}_{pq}=3$.

$\boldsymbol{A^{-2,1,1}_{4.5}}$**:** $[e_1,e_4]=-2e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_3$ (нерозкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}}=8$, $n_{\mathrm{Z}}=0$, $n_{\mathrm{A}}=3$, $\kappa=6x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}}=1$, $r_{\mathrm{s}}=2$, $\mathrm{DS}=[3,0]$, $\mathrm{CS}=[3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)=0$, $\mathfrak{C}_{pq}=\frac{(2+(-2)^p)(2+(-2)^q)}{2+(-2)^{p+q}}$, $p,q\geqslant 2$.

$\boldsymbol{A^{a11}_{4.5}}$**:** $[e_1,e_4]=ae_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_3$, $a\neq -2,0,1$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 8,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 0,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = (a^2+2)x_4y_4,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [3,0],$ $\mathrm{CS} = [3],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -(a+2)v_4,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = \frac{(2+a^p)(2+a^q)}{2+a^{p+q}}.$

$\boldsymbol{A_{4.5}^{a,-1,1}}$**:** $[e_1,e_4] = ae_1,\ [e_2,e_4] = -e_2,\ [e_3,e_4] = e_3$; $a > 0$, $|a| \neq 1$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 6,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 0,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = (a^2+2)x_4y_4,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [3,0],$ $\mathrm{CS} = [3],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -av_4,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = \frac{(1+(-1)^p+a^p)(1+(-1)^q+a^q)}{1+(-1)^{p+q}+a^{p+q}}.$

$\boldsymbol{A_{4.5}^{a,-1-a,1}}$**:** $[e_1,e_4] = ae_1,\ [e_2,e_4] = -(1+a)e_2,\ [e_3,e_4] = e_3$ $a < 0$, або $a = 1$ (нерозкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 6,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 0,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = (a^2+(1+a)^2+1)x_4y_4,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,$ $\mathrm{DS} = [3,0],\ \ \mathrm{CS} = [3],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = \frac{(1+(-1-a)^p+a^p)(1+(-1-a)^q+a^q)}{1+(-1-a)^{p+q}+a^{p+q}},$ $p,q \geqslant 2.$

$\boldsymbol{A_{4.5}^{ab1}}$**:** $[e_1,e_4] = ae_1,\ [e_2,e_4] = be_2,\ [e_3,e_4] = e_3$; $ab \neq 0$, $-1 < a < b < 1$, $a+b \neq -1$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 6,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 0,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = (a^2+b^2+1)x_4y_4,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,$ $\mathrm{DS} = [3,0],\ \ \mathrm{CS} = [3],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -(a+b+1)v_4,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = \frac{(1+a^p+b^p)(1+a^q+b^q)}{1+a^{p+q}+b^{p+q}}.$

$\boldsymbol{A_{4.6}^{-2b,b}}$**:** $[e_1,e_4] = -2be_1,\ [e_2,e_4] = be_2 - e_3,\ [e_3,e_4] = e_2 + be_3,\ b < 0$ (нерозкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 6,\ \ n_{\mathrm{Z}} = 0,\ \ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \ \kappa = (6b^2-2)x_4y_4,\ \ r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \ \mathrm{DS} = [3,0],$ $\mathrm{CS} = [3],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = \frac{((-2b)^p+2\,\mathrm{Re}(b+i)^p)((-2b)^q+2\,\mathrm{Re}(b+i)^q)}{(-2b)^{p+q}+2\,\mathrm{Re}(b+i)^{p+q}},\ \ p,q \geqslant 2.$

$\boldsymbol{A_{4.6}^{ab}}$**:** $[e_1,e_4] = ae_1,\ [e_2,e_4] = be_2 - e_3,\ [e_3,e_4] = e_2 + be_3,\ a > 0,\ a \neq -2b$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 6,\ n_{\mathrm{Z}} = 0,\ n_{\mathrm{A}} = 3,\ \kappa = (a^2+2b^2-2)x_4y_4,\ r_{\mathfrak{g}} = 1,\ r_{\mathrm{s}} = 2,\ \mathrm{DS} = [3,0],$ $\mathrm{CS} = [3],\ \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -(a+2b)v_4,\ \ \mathfrak{C}_{pq} = \frac{(a^p+2\,\mathrm{Re}(b+i)^p)(a^q+2\,\mathrm{Re}(b+i)^q)}{a^{p+q}+2\,\mathrm{Re}(b+i)^{p+q}}.$

$\boldsymbol{A_{4.7}}$**:** $[e_2,e_3] = e_1,\ [e_1,e_4] = 2e_1,\ [e_2,e_4] = e_2,\ [e_3,e_4] = e_2 + e_3$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 5$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 6\,x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 3$, $\mathrm{DS} = [3,1,0]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -4v_4$, $\mathfrak{C}_{pq} = \frac{(2+2^p)(2+2^q)}{2+2^{p+q}}$.

$\boldsymbol{A^0_{4.8}}$**:** $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_1,e_4]=e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 5$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 2x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $r_{\mathrm{s}} = 2$, $\mathrm{DS} = [2,0]$, $\mathrm{CS} = [2]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2v_4$, $\mathfrak{C}_{pq} = 2$.

$\boldsymbol{A^1_{4.8}}$**:** $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_1,e_4]=2e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_3$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 7$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 6x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 3$, $\mathrm{DS} = [3,1,0]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -4v_4$, $\mathfrak{C}_{pq} = \frac{(2+2^p)(2+2^q)}{2+2^{p+q}}$.

$\boldsymbol{A^{-1}_{4.8}}$**:** $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=-e_3$ (нерозкладна, розв'язна; унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 5$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 2x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $r_{\mathrm{s}} = 3$, $\mathrm{DS} = [3,1,0]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

$\boldsymbol{A^b_{4.8}}$**:** $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_1,e_4] = (1+b)e_1$, $[e_2,e_4] = e_2$, $[e_3,e_4] = be_3$, $0<|b|<1$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 5$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = 2(1+b+b^2)x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 3$, $\mathrm{DS} = [3,1,0]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = -2(1+b)v_4$, $\mathfrak{C}_{pq} = \frac{(1+b^p+(1+b)^p)(1+b^q+(1+b)^q)}{1+b^{p+q}+(1+b)^{p+q}}$.

$\boldsymbol{A^0_{4.9}}$**:** $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_2,e_4]=-e_3$, $[e_3,e_4]=e_2$ (нерозкладна, розв'язна, унімодулярна);

$n_{\mathrm{D}} = 5$, $n_{\mathrm{Z}} = 1$, $n_{\mathrm{A}} = 2$, $\kappa = -2x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 2$, $r_{\mathrm{s}} = 3$, $\mathrm{DS} = [3,1,0]$, $\mathrm{CS} = [3]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v) = 0$, $\mathfrak{C}_{2p,2q} = 2$.

$\boldsymbol{A^a_{4.9}}$**:** $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_1,e_4]=2ae_1$, $[e_2,e_4]=ae_2-e_3$, $[e_3,e_4]=e_2+ae_3$, $a>0$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}} = 5$, $n_{\mathrm{Z}} = 0$, $n_{\mathrm{A}} = 1$, $\kappa = 2(3a^2-1)x_4y_4$, $r_{\mathfrak{g}} = 1$, $r_{\mathrm{s}} = 3$, $\mathrm{DS} = [3,1,0]$,

$\mathrm{CS}=[3]$, $\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_v)=-4av_4$, $\mathfrak{C}_{pq}=\frac{((2a)^p+2\operatorname{Re}(a+i)^p)((2a)^q+2\operatorname{Re}(a+i)^q)}{(2a)^{p+q}+2\operatorname{Re}(a+i)^{p+q}}$, $p,q\geqslant 2$;.

$\boldsymbol{A_{4.10}}$**:** $[e_1,e_3]=e_1$, $[e_2,e_3]=e_2$, $[e_1,e_4]=-e_2$, $[e_2,e_4]=e_1$ (нерозкладна, розв'язна);

$n_{\mathrm{D}}=4$, $n_{\mathrm{Z}}=0$, $n_{\mathrm{A}}=2$, $\kappa=2(x_3y_3-x_4y_4)$, $r_{\mathfrak{g}}=2$, $r_{\mathrm{s}}=2$, $\mathrm{DS}=[2,0]$, $\mathrm{CS}=[2]$, $\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_v)=-2v_3$.

Зауваження 3.2. Питання, що стосуються серій алгебр Лі та сингулярних значень параметрів, стають складнішими у випадку розмірності чотири. Зокрема, в серіях алгебр Лі $\{A^b_{4.2}\}$, $\{A^{abc}_{4.5}\}$ та $\{A^b_{4.8}\}$ розмірність n_{D} алгебри диференціювань змінюється в залежності від значень параметрів серій. Це призводить до необхідності поділу параметрів серій на підмножини відповідно до значень цієї напівінваріантної величини, оскільки критерій 1, оснований на n_{D}, є найбільш потужним.

У наведеному вище переліку алгебр використано покращені нормування параметрів серій чотиривимірних алгебр Лі, які запропоновано у роботах [124, 125].

3.2. Алгоритм знаходження контракцій

Алгоритм, що дозволяє ефективно досліджувати та обчислювати неперервні контракції низькорозмірних алгебр Лі, складається з трьох кроків.

1) Беремо повний перелік неізоморфних алгебр Лі фіксованої розмірності. Для кожного представника з переліку обчислюємо інваріантні та напівінваріантні величини, що стосуються необхідних критеріїв існування контракцій.

2) Для кожної пари алгебр з переліку перевіряємо можливість існування контракції, застосовуючи необхідні критерії, а саме, порівнюючи обчислені інваріантні та напівінваріантні величини. Оскільки досить

шукати лише нетривіальні та власні контракції, то пари, що складаються з двох ізоморфних алгебр Лі або містять абелеву алгебру Лі, не розглядаються.

3) Розглядаємо кожну з пар, що задовольняє усім необхідним критеріям. Застосовуючи прямий метод, оснований на означенні 2.1′, будуємо матрицю контракції у явному вигляді або доводимо, що контракція неможлива.

Необхідні інваріантні та напівінваріантні величини дійсних три- та чотиривимірних алгебр Лі обчислені та зібрані у підрозділі 3.1.

Більшість контракцій низькорозмірних алгебр Лі є простими контракціями Іньоню–Вігнера. Будь-яка ІВ-контракція відповідає підалгебрі вихідної алгебри і тому легко знаходиться, див. підрозділ 2.2. Класифікація усіх підалгебр три- та чотиривимірних алгебр Лі добре відома [120], див. також додаток А. Зауважимо, що прості контракції Іньоню–Вігнера дійсних низькорозмірних алгебр Лі вивчалися у роботах [41, 78].

Для пар алгебр, в яких не існує ІВ-контракцій, продовжуємо дослідження і вивчаємо узагальнені контракції Іньоню–Вігнера. В цьому випадку задачу знаходження матриці контракції можна розбити на дві підзадачі:

- Побудова відповідних замін базисів вихідної та результуючої алгебр Лі, що не залежать від параметра контракції. При цьому необхідно, щоб нові ненульові структурні сталі результуючої алгебри співпадали з відповідними новими структурними сталими вихідної алгебри.

- Знаходження діагональної матриці, що залежить від параметра контракції. При цьому досить припустити, що діагональні елементи є цілими степенями параметра контракції.

Як правило, вдається уникнути заміни базису у результуючій алгебрі у випадку розмірностей три та чотири. Внаслідок цього матриця контракції представляється у вигляді добутку двох матриць $U_\varepsilon = IW(k_1, \ldots, k_n)$, де I — стала невироджена матриця, а $W(k_1,\dots,k_n)=\operatorname{diag}(\varepsilon^{k_1},\dots,\varepsilon^{k_n})$, $k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}$.

У складних випадках матриці контракцій можна знайти за допомогою повторних контракцій (див. підрозділ 2.5).

Щоб продемонструвати ефективність наведеного алгоритму, детально розглянемо два типові приклади.

Приклад 3.1. Розглянемо серію тривимірних алгебр Лі $A^a_{3.4}$, параметризовану одним дійсним параметром a, де $-1\leqslant a<1,\ a\neq 0$. Дослідимо усі можливі контракції алгебри $A^a_{3.4}$ для фіксованого значення a.

$A^a_{3.4}$ — нерозкладна розв'язна алгебра Лі з канонічними ненульовими комутаційними співвідношеннями $[e_1,e_3]=e_1$, $[e_2,e_3]=ae_2$. Набір розглянутих інваріантних величин для алгебри $A^a_{3.4}$ наступний:

$$
\begin{aligned}
&n_{\mathrm{D}}=4,\ n_{\mathrm{Z}}=0,\ n_{\mathrm{A}}=2,\ \kappa=(1+a^2)x_3y_3,\ \operatorname{tr}(\operatorname{ad}e_3)=-1-a,\\
&r_{\mathrm{s}}=2,\ \mathrm{DS}=[2,0],\ \mathrm{CS}=[2].
\end{aligned}
$$

Відповідно до другого кроку алгоритму, досліджуємо усі пари тривимірних алгебр Лі, в яких вихідною є алгебра $A^a_{3.4}$, а результуюча алгебра пробігає перелік з підрозділу 3.1 та не співпадає з алгебрами $3A_1$ та $A^a_{3.4}$. Для кожної пари порівнюємо набори їх напівінваріантних величин. Внаслідок теореми 2.1 робимо висновок, що

- контракцій до алгебр $A_{2.1}\oplus A_1$, $A_{3.2}$, $A^{\tilde a}_{3.4}(\tilde a\neq a)$, $A^b_{3.5}(b\geqslant 0)$, $sl(2,\mathbb{R})$ та $so(3)$ не існує, оскільки не задовольняється критерій 1;
- контракції до алгебри $A_{3.3}$ не існує згідно з критерієм 11;
- контракція до алгебри $A_{3.1}$ може існувати, оскільки усі перевірені критерії виконуються.

Для доведення неіснування контракцій також можна використати і інші критерії. Наприклад, для алгебр $sl(2,\mathbb{R})$ та $so(3)$ можна застосувати критерії 2, 5, 7 або 18. В усіх випадках ми намагались застосувати найефективніші критерії, такі як критерій 1. Зокрема, критерій 1 є надзвичайно важливим для даного прикладу, оскільки завдяки строгій нерівності від дозволяє порівняно просто довести відсутність контракцій всередині серії $A^a_{3.4}$.

Таким чином, на третьому кроці алгоритму досліджується лише одна пара $(A^a_{3.4}, A_{3.1})$. Канонічні ненульові комутаційні співвідношення алгебри Лі $A_{3.1}$ наступні: $[e_2, e_3] = e_1$.

Оскільки в канонічному базисі алгебри $A^a_{3.4}$ структурна стала c^1_{23} нульова, то виконаємо заміну базису

$$e'_1 = (1-a)e_1, \quad e'_2 = e_1 + e_2, \quad e'_3 = e_3.$$

Нові ізоморфні комутаційні співвідношення мають вигляд

$$[e_1, e_2]' = 0, \quad [e_1, e_3]' = e_1, \quad [e_2, e_3]' = e_1 + ae_2.$$

Тепер потрібна контракція задається матрицею $W = \mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon)$, а граничний перехід $\varepsilon \to +0$ приводить до алгебри Лі $A_{3.1}$:

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_2]_\varepsilon = 0,\\
&[e_1, e_3]_\varepsilon = \varepsilon e_1 \to 0,\ \varepsilon \to +0,\\
&[e_2, e_3]_\varepsilon = e_1 + \varepsilon a e_2 \to e_1,\ \varepsilon \to +0.
\end{aligned}$$

Остаточно, усі нетривіальні власні контракції алгебри Лі $A^a_{3.4}$ вичерпуються єдиною контракцією $A^a_{3.4} \to A_{3.1}$, яка породжується матрицею $I_5\mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon)$, де явний вигляд матриці I_5 наведено в підрозділі 3.3.

Зауваження 3.3. Целегіні та Тарліні [39] висунули гіпотезу про те, що усі не напівпрості алгебри Лі фіксованої розмірності можна отримати за допомогою контракцій з напівпростих алгебр Лі. Насправді, це припущення не вірне зокрема тому, що для деяких розмірностей не існує напівпростих алгебр Лі, як у випадку розмірності чотири. Таким чином, замість напівпростих алгебр Лі, в гіпотезі слід використовувати ширший клас алгебр, наприклад, клас редуктивних алгебр. Іншим аргументом, що підтверджує некоректність гіпотези, є те, що усі напівпрості (та редуктивні) алгебри Лі — унімодулярні, а будь-яка неперервна контракція унімодулярної алгебри з необхідністю приводить до унімодулярної алгебри. Складність ситуації підтверджується дослідженням низькорозмірних алгебр.

Дійсні нерозв'язні тривимірні алгебри Лі вичерпуються випадками простих алгебр $sl(2,\mathbb{R})$ та $so(3)$. Будь-яка унімодулярна тривимірна алгебра ($sl(2,\mathbb{R})$, $so(3)$, $A_{3.4}^{-1}$, $A_{3.4}^{0}$, $A_{3.1}$, $3A_1$) належить замиканню орбіти принаймні однієї з цих алгебр.

Редуктивні алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ та $so(3)\oplus A_1$ утворюють набір нерозв'язних чотиривимірних алгебр Лі. Об'єднання замикань орбіт цих алгебр складається з унімодулярних алгебр з нетривіальними центрами ($sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$, $so(3)\oplus A_1$, $A_{4.8}^{-1}$, $A_{4.9}^{0}$, $A_{3.4}^{-1}\oplus A_1$, $A_{3.4}^{0}\oplus A_1$, $A_{4.1}$, $A_{3.1}\oplus A_1$, $4A_1$). Унімодулярні алгебри з нульовими центрами ($A_{4.2}^{-2}$, $A_{4.5}^{-(b+c),b,c}$, $A_{4.6}^{-2b,b}$) не можна отримати з нерозв'язних алгебр за допомогою контракцій.

Аналогічні твердження мають місце і для контракцій представлень внаслідок того, що контракція представлень алгебр Лі породжує контракцію самих алгебр. Наприклад, матричні представлення для всіх нееквівалентних класів дійсних тривимірних алгебр Лі можна отримати в результаті контракцій спеціально підібраних представлень (з ε-залежними перетвореннями подібності) простих алгебр Лі $sl(2,\mathbb{R})$ та $so(3)$. Але що стосується параметризованих серій алгебр Лі ($A_{3.4}^{a}$, $A_{3.5}^{b}$), то за допомогою контракцій можна отримати представлення лише для окремих значень параметрів, а саме для тих, які відповідають унімодулярним випадкам алгебр Лі.

Приклад 3.2. Розглянемо розкладну, нерозв'язну, унімодулярну, редуктивну чотиривимірну алгебру Лі $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$, яка задовольняє канонічні комутаційні співвідношення $[e_1,e_2]=e_1$, $[e_2,e_3]=e_3$, $[e_1,e_3]=2e_2$. Набір алгебраїчних величин, які використовуються для вивчення контракцій цієї алгебри наступний:

$$n_{\mathrm{D}}=4,\ n_{\mathrm{Z}}=1,\ n_{\mathrm{A}}=1,\ n_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}=3,\ \kappa=-2(2x_3y_1-x_2y_2+2x_1y_3),$$

$$\mathrm{DS} = [3],\ \mathrm{CS} = [3].$$

Порівняємо величини алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$ з аналогічними величинами, що відповідають решті чотиривимірних алгебр та наведені в підрозділі 3.1. Внаслідок необхідних критеріїв існування контракцій можна зробити висновок, що

- контракції до алгебр $A_{2.1} \oplus 2A_1$, $2A_{2.1}$, $A_{3.2} \oplus A_1$, $A_{3.3} \oplus A_1$, $A_{3.4}^a \oplus A_1(|a| < 1,\ a \neq 0, -1)$, $A_{3.5}^b \oplus A_1(b > 0)$, $A_{4.3}$, $A_{4.8}^b(|b| \leq 1,\ b \neq -1)$ та $A_{4.9}^a(a > 0)$ неможливі внаслідок критерію 8;
- контракція до алгебри $so(3) \oplus A_1$ не існує, оскільки не виконується критерій 1;
- контракції до алгебр $A_{4.2}^b(b \neq 0)$, $A_{4.4}$, $A_{4.5}^{abc}(abc \neq 0)$, $A_{4.6}^{a,b}(a > 0)$, $A_{4.7}$ та $A_{4.10}$ неможливі внаслідок критерію 3;
- контракції до алгебр $A_{3.1} \oplus A_1$, $A_{4.1}$, $A_{3.4}^{-1} \oplus A_1$, $A_{3.5}^0 \oplus A_1$, $A_{4.8}^{-1}$ та $A_{4.9}^0$ можуть існувати, оскільки усі перевірені необхідні критерії існування контракцій виконуються.

Зауважимо, що не лише критерії 1, 3 та 8 можна застосувати для виокремлення алгебр, до яких не контрактує алгебра $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$. Наприклад, критерій 11 доводить неможливість контракції з алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$ до $A_{4.4}$.

Насправді, усі контракції, що допускаються необхідними критеріями, можна виконати, а саме, контракції до алгебр Лі

$$A_{3.1} \oplus A_1, \quad A_{3.4}^{-1} \oplus A_1, \quad A_{3.5}^0 \oplus A_1, \quad A_{4.1}, \quad A_{4.8}^{-1} \quad \text{та} \quad A_{4.9}^0$$

задаються відповідними матрицями

$$U = I_8 \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, 1),\ U = I_7 \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, 1),\ U = I_{10} \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, 1),$$
$$U = I_{23} \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 1),\ U = I_{19} \mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon, 1),\ U = I_{22} \mathrm{diag}(\varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, 1)$$

(сталі матриці I див. у підрозділі 3.3).

Зауважимо, що усі контракції, за винятком останньої, є простими контракціями Іньоню–Вігнера та будуються з використанням нееквівалентних підалгебр алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ (див. підрозділ 2.2 та додаток А). Проілюструємо це на прикладі пари алгебр $(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1, A_{3.1}\oplus A_1)$.

Матриця контракції $\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon,1,1)$, асоційована з підалгеброю $\langle e_3, e_4\rangle$ алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$, породжує просту ІВ-контракцію з $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ до алгебри Лі, ізоморфної до $A_{3.1}\oplus A_1$. Щоб отримати в результаті контракції канонічні комутаційні співвідношення ($[e_2,e_3]=e_1$) алгебри $A_{3.1}\oplus A_1$, застосуємо додаткове перетворення ізоморфізму, що задається матрицею I_8, яка комутує з матрицею $\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon,1,1)$. Результуюча матриця контракції має вигляд $I_8\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon,1,1)$.

Як приклад побудови узагальненої ІВ-контракції дослідимо детально пару алгебр $(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1, A^0_{4.9})$. Нашою метою є знайти відповідну матрицю контракції згідно з наведеним вище алгоритмом.

Канонічні комутаційні співвідношення алгебри $A^0_{4.9}$ мають вигляд $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_2,e_4]=-e_3$, $[e_3,e_4]=e_2$. На відміну від алгебри $A^0_{4.9}$ канонічні структурні сталі c^1_{23}, c^3_{24} та c^2_{34} алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ нульові, тому виконуємо заміну базису

$$e_1'=-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3,\quad e_2'=e_2,\quad e_3'=\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3,\quad e_4'=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_3+e_4,$$

яка відповідає матриці I_{22}. Отримані комутаційні співвідношення (ізоморфні до старих комутаторів алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$) мають вигляд

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2]'=-e_3,\quad [e_1,e_3]'=e_2,\quad [e_1,e_4]'=0,\\
&[e_2,e_3]'=e_1,\quad [e_2,e_4]'=-e_3,\quad [e_3,e_4]'=e_2.
\end{aligned}$$

Припустимо, що для нової дужки Лі $[\cdot,\cdot]'$ потрібна контракція задається матрицею $\mathrm{diag}(\varepsilon^{k_1},\varepsilon^{k_2},\varepsilon^{k_3},\varepsilon^{k_4})$ та обчислимо параметризовані комутатори:

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2]_\varepsilon=-\varepsilon^{k_1+k_2-k_3}e_3,\ [e_1,e_3]_\varepsilon=\varepsilon^{k_1+k_3-k_2}e_2,\ [e_1,e_4]_\varepsilon=0,\\
&[e_2,e_3]_\varepsilon=\varepsilon^{k_2+k_3-k_1}e_1,\ [e_2,e_4]_\varepsilon=-\varepsilon^{k_2+k_4-k_3}e_3,\ [e_3,e_4]_\varepsilon=\varepsilon^{k_3+k_4-k_2}e_2.
\end{aligned}$$

Границя комутаторів при $\varepsilon \to +0$ існує та призводить до алгебри $A^0_{4.9}$ тоді і тільки тоді, коли степені $k_1, \ldots, k_4$ задовольняють умовам

$$k_2 + k_3 - k_1 = 0, \quad k_2 + k_4 - k_3 = 0, \quad k_3 + k_4 - k_2 = 0,$$
$$k_1 + k_2 - k_3 > 0, \quad k_1 + k_3 - k_2 > 0.$$

Набір $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$, $k_4 = 0$ задовольняє ці умови, а відповідна контракція насправді призводить до алгебри Лі $A^0_{4.9}$:

$$[e_1, e_2]_\varepsilon = -\varepsilon^2 e_3 \to 0,\ \varepsilon \to +0, \quad [e_1, e_3]_\varepsilon = \varepsilon^2 e_2 \to 0,\ \varepsilon \to +0,$$
$$[e_1, e_4]_\varepsilon = 0, \quad [e_2, e_3]_\varepsilon = e_1, \quad [e_2, e_4]_\varepsilon = -e_3, \quad [e_3, e_4]_\varepsilon = e_2.$$

Остаточно матриця контракції має вигляд $I_{22}\mathrm{diag}(\varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, 1)$.

Цей приклад демонструє, що необхідні критерії дозволяють впоратись з контракціями навіть у таких складних випадках, як контракції редуктивних алгебр.

3.3. Неперервні контракції дійсних низькорозмірних алгебр Лі

Предметом даного підрозділу є побудова, впорядкування та аналіз контракцій дійсних низькорозмірних алгебр Лі.

Спочатку обговоримо усі можливі контракції одновимірних та двовимірних алгебр Лі. Оскільки існує лише одна нееквівалентна одновимірна алгебра Лі та вона абелева, то усі її контракції є одночасно тривіальними та невласними. Повний перелік неізоморфних двовимірних алгебр Лі вичерпується абелевою алгеброю $2A_1$ та неабелевою алгеброю $A_{2.1}$ з канонічним комутаційним співвідношенням $[e_1, e_2] = e_1$. Єдина слабо нееквівалентна контракція алгебри $2A_1$ є одночасно тривіальною та невласною. Контракції алгебри $A_{2.1}$ також тривіальні та невласні.

Контракції дійсних три- та чотиривимірних алгебр Лі наведені нижче та додатково відображені на рисунках 3.1 та 3.2. Зауважимо, що контракції дійсних тривимірних алгебр Лі розглядались у роботі [156]. Повний опис цих контракцій з доведеннями, близькими до наведених у дисертації, вперше отримано Лораном [86].

На рисунках зображені лише прямі та власні контракції. Нагадаємо, що контракція з алгебри $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$ називається *прямою*, якщо не існує алгебри $\mathfrak{g}_1$ такої, що $\mathfrak{g}_1 \not\sim \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 \not\sim \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$ контрактує до $\mathfrak{g}_1$, а алгебра $\mathfrak{g}_1$ контрактує до $\mathfrak{g}_0$. Протилежним до поняття прямої контракції є поняття провторної контракції, див. підрозділ 2.5. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ з необхідністю контрактує до алгебри $\mathfrak{g}_0$, якщо $\mathfrak{g}$ контрактує до $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_1$ контрактує до $\mathfrak{g}_0$. Саме з цієї причини стрілки, що відповідають повторним контракціям можна опустити.

В списках контракцій зібрано усі пари алгебр Лі, для яких контракції існують, при цьому вихідна алгебра наводиться лише один раз на початку. Відповідні матриці контракцій зазначені над стрілками, для діагональних матриць узагальнених ІВ-контракцій використовуємо скорочення:

$$W(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \mathrm{diag}(\varepsilon^{k_1}, \varepsilon^{k_2}, \ldots, \varepsilon^{k_n}),$$

де $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, n}$, n — розмірність векторного простору V, що лежить в основі алгебри Лі. Сталі ліві частини матриці узагальненої ІВ-контракції позначаються занумерованими символами I. Явні вигляди цих матриць наведені після списків контракцій, а примітка $\varepsilon \to +0$ опущена.

У випадку простих контракцій Іньоню–Вігнера додатково вказані відповідні їм підалгебри.

Розмірність три. Перелік усіх неперервних власних і нетривіальних однопараметричних контракцій дійсних тривимірних алгебр Лі вичерпується наступними (див. також рис. 3.1):

$$A_{2.1} \oplus A_1\colon \quad \xrightarrow{I_1 W(1,1,0)} A_{3.1},\ \langle e_1 - e_3 \rangle.$$

$$A_{3.2}\colon \quad \xrightarrow{I_7 W(1,0,1) \text{ або } W(2,1,1)} A_{3.1},\ \langle e_2 \rangle;$$

$$\xrightarrow{I_6 W(0,1,0) \text{ або } W(1,2,0)} A_{3.3},\ \langle e_1, e_2 + e_3\rangle.$$

$$A^a_{3.4}\colon \quad \xrightarrow{I_2 W(1,0,1)} A_{3.1},\ \langle e_1 + e_2\rangle.$$

$$A^b_{3.5}\colon \quad \xrightarrow{W(1,0,1)} A_{3.1},\ \langle e_2\rangle.$$

$$sl(2,\mathbb{R})\colon \quad \xrightarrow{I_3 W(1,1,0)} A_{3.1},\ \langle e_3\rangle; \quad \xrightarrow{I_4 W(1,0,0)} A^{-1}_{3.4},\ \langle e_2, e_3\rangle;$$
$$\xrightarrow{I_5 W(1,1,0)} A^0_{3.5},\ \langle e_1 + e_3\rangle.$$

$$so(3)\colon \quad \xrightarrow{W(2,1,1)} A_{3.1}; \quad \xrightarrow{W(1,1,0)} A^0_{3.5},\ \langle e_3\rangle.$$

Сталі частини матриць контракцій мають вигляд

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad I_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

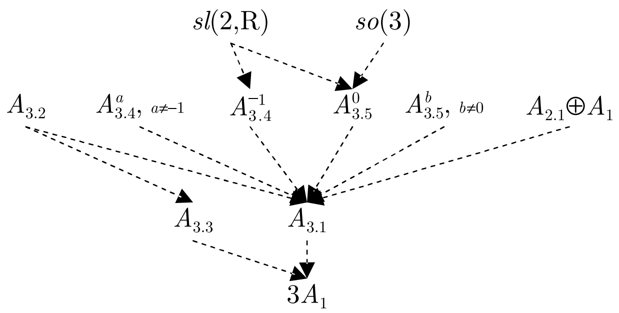

Рис. 3.1: Неперервні контракції дійсних тривимірних алгебр Лі

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що для будь-якої пари дійсних тривимірних алгебр Лі має місце одне з двох тверджень: 1) внаслідок застосування необхідних критеріїв контракцій не існує; 2) існує узагальнена ІВ-контракція.

Лише контракція $so(3) \to A_{3.1}$ з необхідністю є справжньою узагальненою контракцією Іньоню–Вігнера. Відсутність у цьому випадку звичайної ІВ-контракції пояснюється тим, що будь-яка власна контракція Іньоню–Вігнера відповідає власній підалгебрі вихідної алгебри і еквівалентні підалгебри відповідають еквівалентним контракціям, а повний перелік нееквівалентних власних підалгебр алгебри $so(3)$ вичерпується одновимірними підалгебрами, кожна з яких породжує ІВ-контракцію алгебри $so(3)$ до алгебри $A^0_{3.5}$.

Всі решта контракцій дійсних тривимірних алгебр Лі еквівалентні простим контракціям Іньоню–Вігнера, хоча іноді узагальнені ІВ-контракції мають простіший, чисто діагональний вигляд. Це має місце, наприклад, у випадках $A_{3.2} \to A_{3.1}$ та $A_{3.2} \to A_{3.3}$, що окремо відображено у переліку контракцій.

Відзначимо додатково, що усі побудовані матриці контракцій містять лише невід'ємні степені параметра ε, тобто вони допускають добре визначений граничний перехід при $\varepsilon \to +0$.

Теорема 3.1. *Будь-яка неперервна контракція дійсної тривимірної алгебри Лі еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з невід'ємними степенями параметра контракції. Більш того, лише контракція $so(3) \to A_{3.1}$ нееквівалентна звичайній ІВ-контракції.*

Розмірність чотири. Перелік усіх неперервних власних і нетривіальних однопараметричних контракцій дійсних чотиривимірних алгебр Лі вичерпується наступними (див. також рис. 3.2):

$$A_{2.1} \oplus 2A_1: \quad \xrightarrow{I_{30}W(1,1,0,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_3 - e_1, e_4 \rangle.$$

$2A_{2.1}$: $\xrightarrow{W(0,0,0,1)} A_{2.1} \oplus 2A_1,\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle;$ $\xrightarrow{I_1W(1,1,0,1)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_1 + e_3\rangle;$
$\xrightarrow{U_2} A_{3.2} \oplus A_1;$ $\xrightarrow{I_2W(0,0,0,1)} A_{3.3} \oplus A_1,\ \langle e_1, e_3, e_2 + e_4\rangle;$
$\xrightarrow{I_{27}W(1,1,0,1)} A^a_{3.4} \oplus A_1,\ \langle e_2 + ae_4\rangle;$ $\xrightarrow{I_{32}W(3,2,1,1)} A_{4.1};$
$\xrightarrow{I_{28}W(0,1,1,0)} A_{4.3},\ \langle e_1, e_2 - e_3\rangle;$ $\xrightarrow{I_3W(1,0,1,0)} A^0_{4.8},\ \langle e_1 + e_3, e_2 + e_4\rangle.$

$A_{3.2} \oplus A_1$: $\xrightarrow{W(1,0,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_2, e_4\rangle;$ $\xrightarrow{W(0,1,0,0)} A_{3.3} \oplus A_1,\ \langle e_1, e_3, e_4\rangle;$
$\xrightarrow{I_{29}W(2,1,0,1)} A_{4.1}.$

$A_{3.3} \oplus A_1$: $\xrightarrow{I_4W(1,0,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_1, e_2 + e_4\rangle.$

$A^a_{3.4} \oplus A_1$: $\xrightarrow{I_5W(1,1,0,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_2, e_1 + e_4\rangle;$ $\xrightarrow{I_6W(2,1,0,1)} A_{4.1}.$

$A^b_{3.5} \oplus A_1$: $\xrightarrow{W(1,0,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_2, e_4\rangle;$ $\xrightarrow{I_9W(2,1,0,1)} A_{4.1}.$

$sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$: $\xrightarrow{I_8W(1,1,0,0)} A_{3.1} \oplus A_1, \langle e_3, e_4\rangle;$ $\xrightarrow{I_7W(1,1,0,0)} A^{-1}_{3.4} \oplus A_1, \langle e_2, e_4\rangle;$
$\xrightarrow{I_{10}W(1,1,0,0)} A^0_{3.5} \oplus A_1,\ \langle e_1 + e_3, e_4\rangle;$ $\xrightarrow{I_{23}W(1,1,1,0)} A_{4.1},\ \langle e_1 + e_4\rangle;$
$\xrightarrow{I_{19}W(1,0,1,0)} A^{-1}_{4.8},\ \langle e_1, e_2 - \frac{1}{2}e_4\rangle;$ $\xrightarrow{I_{22}W(2,1,1,0)} A^0_{4.9}.$

$so(3) \oplus A_1$: $\xrightarrow{W(2,1,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1;$ $\xrightarrow{W(1,1,0,0)} A^0_{3.5} \oplus A_1,\ \langle e_3, e_4\rangle;$
$\xrightarrow{I_5W(3,2,1,1)} A_{4.1};$ $\xrightarrow{I_{11}W(2,1,1,0)} A^0_{4.9}.$

$A_{4.1}$: $\xrightarrow{I_{13}(0)W(0,0,0,1)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_1, e_2, e_4\rangle.$

$A^b_{4.2}$: $\xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_1, e_3\rangle;$ $\xrightarrow{b\neq 1,\ I_{15}W(2,1,0,1)} A_{4.1};$
$\xrightarrow{W(1,0,1,0)} A^{b,1,1}_{4.5},\ \langle e_2, e_4\rangle.$

$A_{4.3}$: $\xrightarrow{I_{16}W(0,0,1,0)} A_{2.1} \oplus 2A_1,\ \langle e_1, e_2, e_4\rangle;$ $\xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_1, e_3\rangle;$
$\xrightarrow{I_{17}W(2,1,0,1)} A_{4.1}.$

$A_{4.4}$: $\xrightarrow{I_{13}(0)W(1,0,1,1)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_2\rangle$ $\xrightarrow{W(2,1,0,1)} A_{4.1};$
$\xrightarrow{W(0,1,1,0)} A^1_{4.2},\ \langle e_1, e_4\rangle;$ $\xrightarrow{W(0,1,2,0)} A^{111}_{4.5}.$

$A^{ab1}_{4.5}$: $\xrightarrow{a\neq b,\ I_{18}W(1,0,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle \frac{1+b}{a}e_1 + e_2, e_3\rangle;$
$\xrightarrow{1\neq a\neq b\neq 1,\ I_{12}W(2,1,0,1)} A_{4.1}.$

$A^{ab}_{4.6}$: $\xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} A_{3.1} \oplus A_1,\ \langle e_1, e_3\rangle;$ $\xrightarrow{I_{20}W(2,1,0,1)} A_{4.1}.$

$$A_{4.7}\colon \quad \xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} A_{3.1}\oplus A_1,\ \langle e_1,e_3\rangle; \quad \xrightarrow{I_{21}W(1,1,1,0)} A_{4.1},\ \langle e_4\rangle;$$
$$\xrightarrow{W(0,1,1,0)} A^2_{4.2},\langle e_1,e_4\rangle; \quad \xrightarrow{W(0,0,1,0)} A^{2,1,1}_{4.5},\langle e_1,e_2,e_4\rangle; \quad \xrightarrow{W(1,0,1,0)} A^1_{4.8},\langle e_2,e_4\rangle.$$

$$A^b_{4.8}\colon \quad \xrightarrow{W(0,0,0,1)} A_{3.1}\oplus A_1,\langle e_1,e_2,e_3\rangle; \quad \xrightarrow{b=0,\ I_{24}W(0,0,0,1)} A_{3.2}\oplus A_1,\langle e_1,e_2,e_3+e_4\rangle;$$
$$\xrightarrow{b=0,\ I_{13}(0)W(0,0,0,1)} A_{3.3}\oplus A_1,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle; \quad \xrightarrow{b=-1,\ I_{13}(0)W(1,1,0,1)} A^{-1}_{3.4}\oplus A_1,\langle e_4\rangle;$$
$$\xrightarrow{b\neq 1,\ I_{25}W(1,1,1,0)} A_{4.1},\ \langle e_2-e_3\rangle; \quad \xrightarrow{-1<b<0,\ W(0,0,1,0)} A^{1+b,1,b}_{4.5},\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle;$$
$$\xrightarrow{0<b\leqslant 1,\ \mathrm{diag}(1,1,1,\frac{1}{1+b})W(0,0,1,0)} A^{1,\frac{1}{1+b},\frac{b}{1+b}}_{4.5},\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle.$$

$$A^a_{4.9}\colon \quad \xrightarrow{W(0,0,0,1)} A_{3.1}\oplus A_1,\ \langle e_1,e_2,e_3\rangle; \quad \xrightarrow{a=0,\ I_{14}W(1,1,0,0)} A^0_{3.5}\oplus A_1,\ \langle e_1,e_4\rangle;$$
$$\xrightarrow{I_{26}W(1,1,1,0)} A_{4.1},\ \langle e_2\rangle; \quad \xrightarrow{a\neq 0,\ W(1,1,1,0)} A^{2a,a}_{4.6},\ \langle e_4\rangle.$$

$$A_{4.10}\colon \quad \xrightarrow{I_{13}(0)W(1,0,1,1)} A_{3.1}\oplus A_1,\ \langle e_2\rangle; \quad \xrightarrow{U_1} A_{3.2}\oplus A_1,$$
$$\xrightarrow{W(0,0,0,1)} A_{3.3}\oplus A_1,\ \langle e_1,e_2,e_3\rangle;$$
$$\xrightarrow{I_{13}W(0,0,0,1)} A^b_{3.5}\oplus A_1,\ \langle e_1,e_2,be_3+e_4\rangle; \quad \xrightarrow{I_{31}W(3,2,1,1)} A_{4.1},$$
$$\xrightarrow{I_{13}(0)W(1,0,1,0)} A^0_{4.8},\ \langle e_2,e_3\rangle.$$

Сталі частини матриць узагальнених IB-контракцій мають вигляд

$$I_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&1\\-1&-1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$I_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\-1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad I_5=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad I_6=\begin{pmatrix}-\frac{1}{a}&\frac{1}{a(a-1)}&\frac{1}{a(a-1)}&0\\0&a&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$I_7=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I_8=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I_9=\begin{pmatrix}1&0&\frac{-1}{b^2+1}&0\\0&1&\frac{b}{b^2+1}&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$I_{10}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0\\1&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I_{12}=\begin{pmatrix}\frac{1}{b-1}&\frac{(a-b)^{-1}}{(b-1)}&\frac{(a-b)^{-1}}{(a-1)(b-1)}&0\\0&b-1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$I_{13}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{15} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{b-1} & \frac{-1}{(b-1)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{18} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+b}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{19} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad I_{20} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(a-b)(a-1)^{-1}}{a-b+1} & \frac{(a-1)^{-1}}{a-b+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{22} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{25} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{26} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{27} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

$$I_{28} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{29} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 3.4. Усі побудовані матриці контракцій містять лише невід'ємні степені параметра ε. Таким чином, вони допускають добре визначений граничний перехід при $\varepsilon \to +0$. Більш того, більшість контракцій еквівалентні простим ІВ-контракціям.

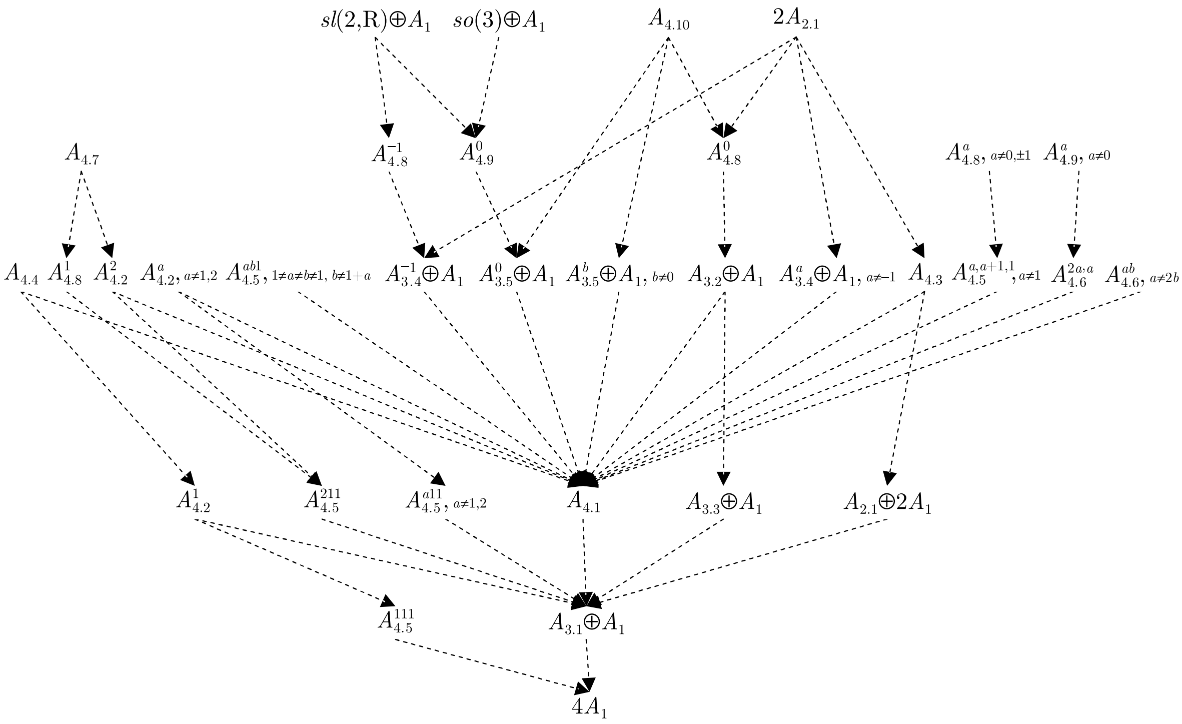

Рис. 3.2: Неперервні контракції дійсних чотиривимірних алгебр Лі

Усі узагальнені ІВ-контракції дійсних недосконалих розв'язних чотиривимірних алгебр Лі (а саме, $A_{3.2}\oplus A_1$, $A^a_{3.4}\oplus A_1$, $A^b_{3.5}\oplus A_1$, $A^b_{4.2}$, $b\neq 1$, $A_{4.3}$, $A_{4.4}$, $A^{ab1}_{4.5}$, $1\neq a\neq b\neq 1$, $A^{ab}_{4.6}$) до алгебри $A_{4.1}$ — прямі і тому не можуть бути представлені у вигляді композиції простих ІВ-контракцій. Те саме твердження виконується для контракцій нерозв'язних алгебр Лі ($sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ та $so(3)\oplus A_1$) до алгебри $A^0_{4.9}$. Лише п'ять контракцій ($2A_{2.1}\to A_{4.1}$, $so(3)\oplus A_1\to A_{3.1}\oplus A_1$, $so(3)\oplus A_1\to A_{4.1}$, $A_{4.4}\to A^{111}_{4.5}$ і $A_{4.10}\to A_{4.1}$), що реалізуються через узагальнені ІВ-контракції, розкладаються також у послідовність простих контракцій Іньоню–Вігнера.

На відміну від тривимірних алгебр Лі, дві з неперервних контракцій чотиривимірних алгебр Лі не отримано за допомогою узагальнених ІВ-контракцій, а саме

$$A_{4.10}\xrightarrow{U_1}A_{3.2}\oplus A_1,\quad 2A_{2.1}\xrightarrow{U_2}A_{3.2}\oplus A_1.$$

Вони задаються недіагоналізовними матрицями

$$U_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Матриці U_1 та U_2 містять лише нульові та перші степені параметра контракції, тому відповідні контракції є контракціями Салетана.

Зауваження 3.5. В матриці контракції можна понизити максимальні степені параметра контракції, якщо знехтувати умовою, що контракція має бути узагальненою IВ-контракцією.

Наприклад, узагальнена IВ-контракція з алгебри Лі $so(3)\oplus A_1$ до алгебри $A^0_{4.9}$ породжується матрицею контракції $I_{11}W(2,1,1,0)$, що містить компоненти другого порядку від параметра контракції. В той же час відомо [131], що між цими алгебрами існує контракція Салетана, яка очевидно задається матрицею першого порядку відносно параметра ε

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Іншим прикладом є контракція $so(3)\oplus A_1 \to A_{4.1}$. Вона породжується як узагальнена IВ-контракція за допомогою матриці $I_5W(3,2,1,1)$ та має суттєвий ступінь параметра рівний 3. Матрицю $I_5W(3,2,1,1)$ можна замінити матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

яка не має вигляду узагальненої IВ-контракції та містить степені параметра контракції не вище другого.

Зауваження 3.6. В кожній з наступних пар алгебр Лі

$$
\begin{aligned}
&(so(3)\oplus A_1,\, A_{4.8}^{-1}),\quad (so(3)\oplus A_1,\, A_{3.4}^{-1}\oplus A_1),\quad (A_{4.8}^{-1},\, A_{3.5}^{0}\oplus A_1),\\
&(A_{4.9}^{0},\, A_{3.4}^{-1}\oplus A_1),\quad (2A_{2.1},\, A_{3.5}^{b}\oplus A_1),\\
&(A_{4.10},\, A_{4.3}),\quad (A_{4.10},\, A_{2.1}\oplus 2A_1),\quad (A_{4.10},\, A_{3.4}^{a}\oplus A_1)
\end{aligned}
$$

перша алгебра контрактує до другої над полем комплексних чисел (див. підрозділ 3.4). Зокрема,

$$
\begin{aligned}
&A_{4.10}\xrightarrow{I_{31}W(1,1,1,0)}A_{4.3},\quad A_{4.10}\xrightarrow{I_{32}W(1,1,0,1)}A_{3.4}^{a}\oplus A_1,\\
&2A_{2.1}\xrightarrow{I_{33}W(0,0,0,1)}A_{3.5}^{b}\oplus A_1,
\end{aligned}
$$

де

$$
I_{31}=\begin{pmatrix} -i & i & 0 & -i\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12\\ 0 & 0 & \frac12 & -\frac{i}{2}\end{pmatrix},\quad
I_{32}=\begin{pmatrix} i & -1 & 0 & 0\\ i & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1+a}{2} & \frac{-i(1+a)}{2}\\ 0 & 0 & -\frac12 & -\frac{i}{2}\end{pmatrix},
$$

$$
I_{33}=\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b+i & 1\\ -\frac{i}{2} & \frac12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b-i & 1\end{pmatrix}.
$$

Таким чином, майже всі необхідні критерії виконуються, оскільки вони не відчувають різниці між дійсним та комплексним полями. В той же час, в цих парах не існує дійсних контракцій. Щоб довести це застосуємо критерій, який є спеціальним для поля дійсних чисел, а саме критерій 12, оснований на законі інерції квадратичних форм над полем дійсних чисел.

Для перших чотирьох пар досить розглянути їх форми Кілінга. Оскільки $\kappa_{so(3)\oplus A_1}=-2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$, $\kappa_{A_{3.5}^0\oplus A_1}=-2u_3v_3$ та $\kappa_{A_{4.9}^0}=-2u_4v_4$ — недодатно визначені, а $\kappa_{A_{4.8}^{-1}}=2u_4v_4$ та $\kappa_{A_{3.4}^{-1}\oplus A_1}=2u_3v_3$ — невід'ємно визначені, та усі вони не дорівнюють тотожно нулю, то у кожній зі згаданих пар одна алгебра має невід'ємно визначену ненульову форму Кілінга, а інша — недодатно визначену ненульову форму Кілінга. Внаслідок критерію 12, контракцій в перших чотирьох парах не існує.

Але критерій, що базується на на законі інерції для форм Кілінга безсилий для решти пар.

Розглянемо у цих випадках модифіковану форму Кілінга зі спеціально вибраним значенням $\alpha = -1/2$:

$$
\begin{aligned}
&\tilde\kappa^{-1/2}_{A_{4.10}} = 2(1+2\alpha)u_3v_3 - 2u_4v_4\big|_{\alpha=-1/2} = -2u_4v_4,\\
&\tilde\kappa^{-1/2}_{A^b_{3.5}\oplus A_1} = 2((1+2\alpha)b^2-1)u_3v_3\big|_{\alpha=-1/2} = -2u_3v_3,\\
&\tilde\kappa^{-1/2}_{A_{4.3}} = (1+\alpha)u_4v_4\big|_{\alpha=-1/2} = \frac12 u_2v_2,\\
&\tilde\kappa^{-1/2}_{A_{2.1}\oplus 2A_1} = (1+\alpha)u_2v_2\big|_{\alpha=-1/2} = \frac12 u_4v_4,\\
&\tilde\kappa^{-1/2}_{A^a_{3.4}\oplus A_1} = ((1+a^2)+\alpha(1+a)^2)u_3v_3\big|_{\alpha=-1/2} = \frac12(1-a+a^2)u_3v_3,\\
&\tilde\kappa^{-1/2}_{2A_{2.1}} = ((1{+}\alpha)(u_2v_2{+}u_4v_4) + \alpha(u_2v_4{+}u_4v_2))\big|_{\alpha=-1/2} =\\
&\qquad = \frac12((u_2v_2{+}u_4v_4) - (u_2v_4{+}u_4v_2)).
\end{aligned}
$$

Дві перші форми невід'ємно визначені та тотожно ненульові. Решта — недодатно визначені та тотожно ненульові. Внаслідок другої частини критерію 12 в розглянутих парах алгебр Лі не існує контракцій.

Рівні та ко-рівні дійсних низькорозмірних алгебр Лі. Контракції встановлюють відношення порядку на множині $\mathcal{L}_n$ n-вимірних алгебр Лі. А саме, стверджується, що $\mathfrak{g} \succ \mathfrak{g}_0$, якщо $\mathfrak{g}_0$ — власна контракція алгебри $\mathfrak{g}$. Запропоноване строге відношення порядку добре визначене внаслідок транзитивності контракцій. Якщо означення відношення порядку допускає невласні контракції, то частковий порядок стає нестрогим.

Порядок $\succ$ породжує поділ множини $\mathcal{L}_n$ на набори рівнів різних типів.

Означення 3.1. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ з множини $\mathcal{L}_n$ належить *нульовому рівню* $\mathcal{L}_n$, якщо вона не має власних контракцій. Інші рівні $\mathcal{L}_n$ визначаються за індукцією. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ належить до *k-рівня* множини $\mathcal{L}_n$, якщо її можна контрактувати до алгебр з $(k-1)$-го рівня та нижчих за нього рівнів.

Зауваження 3.7. Поняття рівня введено Горбацевичем [68–70]. Він також запропонував інше поняття рівня, основане на узагальненні контракцій на випадок різних розмірностей вихідної та контрактованої алгебр.

Нульовий рівень $\mathcal{L}_n$ для довільного n містить рівно одну алгебру, а саме n-вимірну абелеву алгебру, яка є єдиним мінімальним елементом в $\mathcal{L}_n$. Елементи останнього рівня є максимальними елементами відносно відношення порядку індукованого контракціями в $\mathcal{L}_n$ але, взагалі кажучи, останній рівень не містить усі максимальні елементи $\mathcal{L}_n$.

Отриманий вичерпний опис контракцій низькорозмірних алгебр Лі дозволяє вивчити повністю рівні цих алгебр.

Множина $\mathcal{L}_1$ складається з одного елемента та має лише один рівень. Аналогічно, $\mathcal{L}_2$ утворюється двома елементами та розбивається контракціями рівно на два рівні. Перший рівень складається з двовимірної некомутативної алгебри $A_{2.1}$, а нульовий рівень складається з двовимірної абелевої алгебри $2A_1$.

Ієрархії рівнів дійсних три- та чотиривимірних алгебр Лі більш складні. Вони представлені на рисунках 3.1 та 3.2, де номер рівня зростає знизу вгору. Розташування алгебр по рівнях робить рисунки більш зручними та зрозумілими. Множини $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$ мають чотири та шість рівнів відповідно.

Зауваження 3.8. При контракції структура алгебри Лі спрощується. Номер рівня алгебри можна розглядати, як міру складності її комутаційної структури, тобто алгебри з вищими номерами рівнів складніші за алгебри, що мають нижчий номер рівня. Зокрема, нільпотентні алгебри лежать на нижчих рівнях. Прості алгебри Лі $sl(2,\mathbb{R})$ та $so(3)$, що мають найскладнішу структуру серед тривимірних алгебр, утворюють найвищий 3-й рівень в $\mathcal{L}_3$. Найвищий 6-й рівень в $\mathcal{L}_4$ утворений нерозв'язними алгебрами $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ та $so(3)\oplus A_1$ та досконалими алгебрами $2A_{2.1}$ та $A_{4.10}$.

Зауваження 3.9. Існує обернена кореляція між номером рівня та розмірністю алгебри диференціювань (або пряма кореляція з розмірністю орбіти алгебри), що пов'язане з необхідним критерієм 1. Як правило, алгебри з однаковими розмірностями алгебр диференціювань належать до того самого рівня. Розмірності алгебр диференціювань алгебр Лі, що належать k-му рівню не менші за розмірності алгебр диференціювань алгебр Лі, що належать $(k+1)$-му рівню.

Для тривимірних алгебр Лі ця кореляція повна. А саме, розмірність алгебри диференціювань набуває значень 9, 6, 4, 3 для алгебр з 0-го, 1-го, 2-го та 3-го рівнів відповідно.

У випадку $\mathcal{L}_4$ кореляція частково порушується. Так, для більшості алгебр з 3-го рівня розмірності алгебр диференціювань дорівнюють шість і лише алгебра $A^1_{4.8}$, яка також належить цьому рівню, має семивимірну алгебру диференціювань. Те саме відбувається і на 2-му рівні: майже всі алгебри мають восьмивимірну алгебру диференціювань, за винятком алгебри $A_{4.1}$, яка має семивимірну алгебру диференціювань. Іншими словами, чотиривимірні алгебри Лі у яких $\dim \mathrm{Der}=7$ розділені між другим та третім рівнями, при цьому більш проста нільпотентна алгебра $A_{4.1}$ належить нижчому рівню. Алгебри $A^{111}_{4.5}$ ($\dim \mathrm{Der}=12$) та $A_{3.1}\oplus A_1$ ($\dim \mathrm{Der}=10$) утворюють 1-й рівень. В решті випадків кореляція повна: 0-й, 5-й та 6-й рівні складаються з алгебр, що мають 16-и, 5-и та 4-и вимірні алгебри диференціювань відповідно.

Починаючи з алгебр, які не є власними контракціями жодної з алгебр Лі, можна ввести пов'язане поняття ко-рівня.

Означення 3.2. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ з множини $\mathcal{L}_n$ належить *нульовому ко-рівню* $\mathcal{L}_n$, якщо вона не є власною контракцією жодної з n-вимірних алгебр Лі. Інші ко-рівні $\mathcal{L}_n$ визначаються за індукцією. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ належить *ко-рівню* $\mathcal{L}_n$, якщо вона є власною контракцією лише алгебр з попередніх ко-рівнів.

0-й ко-рівень співпадає з набором максимальних елементів відносно порядку введеного контракціями на $\mathcal{L}_n$, тобто він утворений алгебрами, які не власними контракціями інших алгебр з $\mathcal{L}_n$. Останній ко-рівень $\mathcal{L}_n$ для довільного n містить рівно одну алгебру, яка є n-вимірною абелевою алгеброю Лі.

Для найменших розмірностей структури рівнів та ко-рівнів співпадають. $\mathcal{L}_1$ лише 0-й ко-рівень, який очевидно співпадає з 0-м рівнем. $\mathcal{L}_2$ розбивається контракціями рівно на два ко-рівні. 0-й та 1-й ко-рівні співпадають з 1-м та 0-м рівнями відповідно.

Ієрархії ко-рівнів три- та чотиривимірних алгебр Лі відрізняються від ієрархій рівнів та наведені нижче.

Ко-рівні тривимірних алгебр Лі:

0) $A_{2.1} \oplus A_1,\ A_{3.2},\ A_{3.4}^a, {\scriptstyle a \neq -1},\ A_{3.5}^b, {\scriptstyle b \neq 0},\ sl(2,\mathbb{R}),\ so(3)$;
1) $A_{3.3},\ A_{3.4}^{-1},\ A_{3.5}^0$;
2) $A_{3.1}$;
3) $3A_1$.

Ко-рівні чотиривимірних алгебр Лі:

0) $2A_{2.1},\ sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1,\ so(3) \oplus A_1,\ A_{4.2}^b, {\scriptstyle b \neq 1,2},\ A_{4.4},\ A_{4.6}^{ab}, {\scriptstyle a \neq 2b},\ A_{4.7},\ A_{4.8}^b, {\scriptstyle b \neq 0,\pm 1},\ A_{4.9}^a, {\scriptstyle a \neq 0},\ A_{4.10},\ A_{4.5}^{abc}, {\scriptstyle a \neq b \neq c \neq a,\ b \neq a+1}$;
1) $A_{3.4}^a \oplus A_1, {\scriptstyle a \neq -1},\ A_{3.5}^b \oplus A_1, {\scriptstyle b \neq 0},\ A_{4.2}^1,\ A_{4.2}^2,\ A_{4.3},\ A_{4.5}^{a,a+1,1}, {\scriptstyle a \neq 1},\ A_{4.5}^{a11}, {\scriptstyle a \neq 1,2},\ A_{4.6}^{2b,b},\ A_{4.8}^{-1},\ A_{4.8}^0,\ A_{4.8}^1,\ A_{4.9}^0$;
2) $A_{2.1} \oplus 2A_1,\ A_{3.2} \oplus A_1,\ A_{3.4}^{-1} \oplus A_1,\ A_{3.5}^0 \oplus A_1,\ A_{4.5}^{111},\ A_{4.5}^{211}$;
3) $A_{3.3} \oplus A_1,\ A_{4.1}$;
4) $A_{3.1} \oplus A_1$;
5) $4A_1$.

Зауваження 3.10. Рівні та ко-рівні множини $\mathcal{L}_n$ пов'язані. Кількість рівнів та ко-рівнів множини $\mathcal{L}_n$ співпадає та дорівнює максимальній довжині ланцюжків прямих контракцій. Якщо фіксована алгебра Лі $\mathfrak{g}$ з $\mathcal{L}_n$ належить k_1-му рівню і k_2-му ко-рівню, то $k_1 + k_2 \leqslant n^2 - n$.

Аналізуючи отримані результати для розмірностей три та чотири, можна сформулювати припущення, деякі з яких вже доведені [68, 86].

Нехай $\mathfrak{a}_{E_{n-1}}$ — майже абелева алгебра Лі з $(n-1)$-вимірним абелевим ідеалом та з доповняльним до нього елементом, приєднана дія якого має вигляд тотожного оператора E_{n-1}.

Теорема 3.2. *Для довільного $n > 2$ 1-й рівень множини $\mathcal{L}_n$ утворюється алгебрами Лі $A_{3.1} \oplus (n-3)A_1$ та $\mathfrak{a}_{E_{n-1}}$.*

3.4. Неперервні контракції комплексних низькорозмірних алгебр Лі

Деякі алгебри Лі які не є ізоморфними над дійсним полем можуть бути представниками того самого класу алгебр над комплексним полем.

Нижче перераховано пари три- та чотиривимірних алгебр Лі, які ізоморфні або належать тій самій серії над полем комплексних чисел. Для кожної з них наводиться відповідна комплексна алгебра (або серія), а також відповідна заміна базису у випадку якщо вона не тотожна. Перелік слід поповнити парами прямих сум $(A^a_{3.4} \oplus A_1, A^b_{3.5} \oplus A_1)$ та $(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, so(3) \oplus A_1)$, ізоморфізми яких очевидні. Будь-яка комплексна нерозкладна розв'язна алгебра Лі позначається $\mathfrak{g}_{n.k}$, де n — розмірність алгебри Лі, а k — номер дійсної алгебри, що має такий самий вигляд канонічних комутаційних співвідношень.

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}^{\alpha}_{3.4}, & \left\{ \begin{array}{l} A^b_{3.5},\;\; \tilde e_1 = e_1 + ie_2,\; \tilde e_2 = e_1 - ie_2,\; \tilde e_3 = \frac{1}{b+i}e_3,\; \alpha = \frac{b-i}{b+i} \\ A^a_{3.4},\;\; \alpha = a \end{array} \right. \\ \alpha \in \mathbb{C} & \end{array}$$

$$sl(2,\mathbb{C}) \quad \begin{cases} so(3), \quad \tilde{e}_1 = -ie_2 + e_3,\ \tilde{e}_2 = -ie_1,\ \tilde{e}_3 = ie_2 + e_3 \\ sl(2,\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \mathfrak{g}_{4.5}^{1,\alpha,\beta}, \\ \alpha,\beta \in \mathbb{C} \end{matrix} \begin{cases} A_{4.6}^{a,b}, \quad \tilde{e}_1 = e_1,\ \tilde{e}_2 = e_2 - ie_3,\ \tilde{e}_3 = e_2 + ie_3,\ \tilde{e}_4 = \frac{1}{a}e_4, \\ \qquad\quad \alpha = \frac{b-i}{a},\ \beta = \frac{b+i}{a} \\ A_{4.5}^{1,b,c}, \quad \alpha = b,\ \beta = c \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \mathfrak{g}_{4.8}^{\beta}, \\ \beta \in \mathbb{C} \end{matrix} \begin{cases} A_{4.9}^{a}, \quad \tilde{e}_1 = -e_1,\ \tilde{e}_2 = e_2 + ie_3, \\ \qquad\quad \tilde{e}_3 = -\frac{i}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3,\ \tilde{e}_4 = \frac{1}{a+i}e_4,\ \beta = \frac{a-i}{a+i} \\ A_{4.8}^{b}, \quad \beta = b \end{cases}$$

$$2\mathfrak{g}_{2.1} \quad \begin{cases} A_{4.10}, \quad \tilde{e}_1 = ie_1 - e_2,\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{2}e_3 - \frac{i}{2}e_4, \\ \qquad\quad \tilde{e}_3 = ie_1 + e_2,\ \tilde{e}_4 = \frac{1}{2}e_3 + \frac{i}{2}e_4 \\ 2A_{2.1} \end{cases}$$

Знання відповідностей між дійсними та комплексними алгебрами Лі дозволяє описати неперервні контракції комплексних низькорозмірних алгебр Лі. Відповідні переліки утворюються з аналогічних переліків для дійсних низькорозмірних алгебр Лі за допомогою виключення алгебр, які еквівалентні іншим над комплексним полем. Матриці контракцій зберігаються. Контракції три- та чотиривимірних комплексних алгебр зображені на схемах 3.3 та 3.4. Один- та двовимірний випадки тривіальні та не розглядаються.

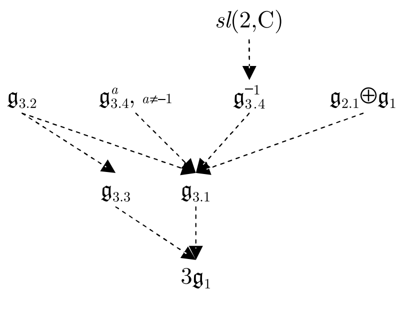

Рис. 3.3: Неперервні контракції комплексних тривимірних алгебр Лі

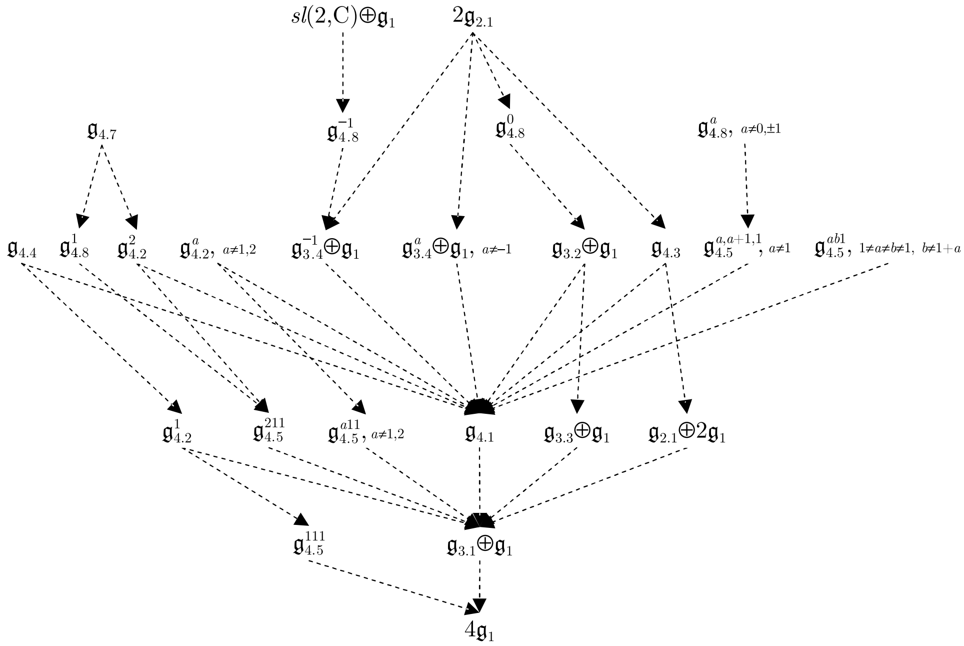

Рис. 3.4: Неперервні контракції комплексних чотиривимірних алгебр Лі

Теорема 3.3. *Будь-яка неперервна контракція комплексних тривимірних алгебр Лі еквівалентна простій контракції Іньоню–Вігнера.*

В чотиривимірному випадку лише контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{3.2} \oplus \mathfrak{g}_1$ та $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ не представляються у вигляді узагальненої контракції Іньоню–Вігнера. Всі побудовані матриці контракцій місять лише невід'ємні цілі степені параметра ε. Таким чином, вони допускають добре визначений граничний перехід при $\varepsilon \to +0$.

Перелік неперервних контракцій комплексних тривимірних алгебр Лі наведено в термінах замикань орбіт, наприклад, в [18, 33, 140]. Він співпадає з наведеним на схемі 3.3. Контракції чотиривимірних комплексних алгебр Лі досліджено в роботах [19,33,140]. Щоб порівняти ці результати з отриманими порівняємо спочатку класифікації структур комплексних алгебр Лі. Щоб уникнути непорозумінь додамо дашки над символами $\mathfrak{g}$, що позначають алгебри з класифікації, наведеної в [33].

$$4\mathfrak{g}_1 \sim \mathbb{C}^4;\ \mathfrak{g}_{2.1} \oplus 2\mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C}^2;\ 2\mathfrak{g}_{2.1} \sim \mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2;\ \mathfrak{g}_{3.1} \oplus \mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C};$$

$$\mathfrak{g}_{3.2} \oplus \mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{r}_3 \oplus \mathbb{C};\ \mathfrak{g}_{3.3} \oplus \mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{r}_{3,1} \oplus \mathbb{C};\ \mathfrak{g}^a_{3.4} \oplus \mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{r}_{3,a} \oplus \mathbb{C},\ a \neq 1;$$

$$sl(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{g}_1\sim sl_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C};\ \mathfrak{g}_{4.1}\sim\mathfrak{n}_4;\ \mathfrak{g}^1_{4.2}\sim\hat{\mathfrak{g}}_5;\ \mathfrak{g}^{-2}_{4.2}\sim\hat{\mathfrak{g}}_3\Big(\frac{27}{4}\Big);$$

$$\mathfrak{g}^{b\neq1,-2}_{4.2}\sim\hat{\mathfrak{g}}_2\Big(\frac{b}{(b+2)^3},\frac{2b+1}{(b+2)^2}\Big);\ \mathfrak{g}_{4.3}\sim\hat{\mathfrak{g}}_2(0,0);\ \mathfrak{g}_{4.4}\sim\hat{\mathfrak{g}}_2\Big(\frac{1}{27},\frac{1}{3}\Big);$$

$$\mathfrak{g}^{a11}_{4.5}\sim\hat{\mathfrak{g}}_1(a);\ \mathfrak{g}^{ab1}_{4.5}\sim\hat{\mathfrak{g}}_2(\alpha,\beta),\hat{\mathfrak{g}}_3(\gamma),\hat{\mathfrak{g}}_4,\ {\scriptstyle 1\neq a\neq b\neq 1,\ ab\neq0};\ \mathfrak{g}_{4.7}\sim\hat{\mathfrak{g}}_8\Big(\frac{1}{4}\Big);$$

$$\mathfrak{g}^1_{4.8}\sim\hat{\mathfrak{g}}_6;\ \mathfrak{g}^{-1}_{4.8}\sim\hat{\mathfrak{g}}_7;\ \mathfrak{g}^{b\neq\pm1}_{4.8}\sim\hat{\mathfrak{g}}_8\Big(\frac{b}{(b+1)^2}\Big).$$

Розглянемо детальніше серію алгебр Лі $\{\mathfrak{g}^{abc}_{4.5}, abc\neq0\}$. Набори параметрів (a,b,c) and (a',b',c') відповідають тій самій алгебрі, якщо вони пропорційні з точністю до перестановки. Алгебра Лі $\mathfrak{g}^{ab1}_{4.5}$, ${\scriptstyle 1\neq a\neq b\neq 1,\ ab\neq 0}$, ізоморфна алгебрам

$$\begin{aligned}&\hat{\mathfrak{g}}_2(\alpha,\beta),\quad \text{де}\quad \alpha=\frac{ab}{(a+b+1)^3},\ \beta=\frac{ab+a+b}{(a+b+1)^2},\\ &\qquad\qquad \text{якщо}\quad a+b+1\neq0;\\ &\hat{\mathfrak{g}}_3(\gamma),\quad \text{де}\quad \gamma=-\frac{(ab-1)^3}{a^2b^2},\quad \text{якщо}\quad a+b+1=0,\ ab\neq1;\\ &\hat{\mathfrak{g}}_4,\quad \text{якщо}\quad a+b+1=0,\ ab=1.\end{aligned}$$

При вивченні контракцій у роботі [19] використано спеціальну класифікацію. Відповідність між переліком Агаоки та переліком Мубаракзянова (використаним у дисертації) наступна:

$$L_0\sim4\mathfrak{g}_1,\ L_1\sim\mathfrak{g}_{3.1}\oplus\mathfrak{g}_1,\ L_2\sim\mathfrak{g}_{4.1},\ L_3\sim\mathfrak{g}^{111}_{4.5},\ L_5\sim\mathfrak{g}^1_{4.8},$$

$$L_6\sim\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{g}_1,\ L_4(a)\sim\mathfrak{g}^{a11}_{4.5},\ {\scriptstyle a\neq0,1},\ L_4(0)\sim L_7(0,1)\sim\mathfrak{g}_{3.3}\oplus\mathfrak{g}_1,$$

$$L_4(1)\sim\mathfrak{g}^1_{4.2},\ L_4(\infty)\sim\mathfrak{g}_{2.1}\oplus2\mathfrak{g}_1,\ L_7(a,b)\sim\mathfrak{g}^{ab1}_{4.5},\ {\scriptstyle 1\neq a\neq b\neq1,\ ab\neq0},$$

$$L_7(a,1)\sim\mathfrak{g}^a_{4.2},\ {\scriptstyle a\neq0,1},\ L_7(1,1)\sim\mathfrak{g}_{4.4},\ L_7(a,0)\sim\mathfrak{g}^a_{3.4}\oplus\mathfrak{g}_1,\ {\scriptstyle a\neq0,1},$$

$$L_7(1,0)\sim\mathfrak{g}_{3.2}\oplus\mathfrak{g}_1,\ L_7(0,0)\sim\mathfrak{g}_{4.3},\ L_8(a)\sim\mathfrak{g}^a_{4.8},\ {\scriptstyle a\neq1},\ L_8(1)\sim\mathfrak{g}_{4.7},$$

$$L_9\sim2\mathfrak{g}_{2.1}.$$

Представлені порівняння класифікацій дозволяють стверджувати, що отримані переліки контракцій у комплексному випадку співпадають з замиканнями орбіт, наведеними у роботах [19, 33, 140].

Наявність вичерпної інформації про контракції низькорозмірних алгебр дає додаткові можливості для вивчення множин, утворених цими алгебрами.

Структура множини $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ n-вимірних комплексних алгебр Лі добре відома для усіх n від 1 до 7 [38, 71, 83, 117]. Над полем дійсних чисел спостерігається природне явище роздвоєння компонент, на відміну від комплексного випадку. Таким чином, $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ має чотири незвідні компоненти однакової розмірності 6

$$\overline{\mathcal{O}(sl(2,\mathbb{R}))},\quad \overline{\mathcal{O}(so(3))},\quad \overline{\cup_a\mathcal{O}(A^a_{3.4})},\quad \overline{\cup_b\mathcal{O}(A^b_{3.5})},$$

а множина $\mathcal{L}_4(\mathbb{R})$ складається з восьми незвідних компонент розмірностей 12

$$\overline{\mathcal{O}(sl(2,\mathbb{R}\oplus A_1))},\quad \overline{\mathcal{O}(so(3)\oplus A_1)},\quad \overline{\mathcal{O}(2A_{2.1})},\quad \overline{\mathcal{O}(A_{4.10})},$$
$$\overline{\cup_{a\neq 1}\mathcal{O}(A^a_{4.8})},\quad \overline{\cup_a\mathcal{O}(A^a_{4.9})},\quad \overline{\cup_{1\neq a\neq b\neq 1}\mathcal{O}(A^{ab1}_{4.5})},\quad \overline{\cup_{a,b}\mathcal{O}(A^{ab}_{4.6})}.$$

3.5. Висновки до розділу 3

В розділі 3 розглянуто усі слабо нееквівалентні однопараметричні контракції алгебр Лі розмірностей не вище чотирьох. Для цього обчислено інваріантні та напівінваріантні величини необхідні для застосування критеріїв існування контракцій та сформульовано алгоритм, що дозволяє ефективно працювати з контракціями алгебр Лі фіксованих розмірностей. Використавши відповідність між переліками неізоморфних алгебр Лі над дійсним та комплексним полями, побудовано класифікацію контракцій у випадку поля комплексних чисел.

Важливим наслідком з результатів, отриманих в цьому розділі є те, що розглянуті контракції дають ряд типових прикладів та контрприкладів до тверджень теорії контракцій, а також для фізичних теорій.

Наявність вичерпної інформації про контракції низькорозмірних алгебр Лі дозволила зробити повний опис рівнів та ко-рівнів низькорозмірних алгебр Лі і дала додаткові можливості для вивчення множин, утворених цими алгебрами.

Дослідження три- та чотиривимірних алгебр Лі дає підстави для гіпотези, що запропонований алгоритм також є ефективним у випадках розмірностей п'ять та шість.

Основні результати розділу 3 опубліковано в роботах [114, 124, 125].

РОЗДІЛ 4

Реалізації алгебр Лі та диференціальні інваріанти

Цей розділ присвячено побудові усіх нееквівалентних реалізацій низькорозмірних нерозв'язних алгебр Лі, класифікації векторних полів Лі, що діють на дійсній площині $e_i^{(n)} = \xi_i(x,y)\partial_x + \eta_i(x,y)\partial_y$ та опису їх диференціальних інваріантів.

Так, у підрозділі 4.1 отримано повний набір нееквівалентні точних реалізацій дійсних алгебр Лі $sl(2,\mathbb{R})$, $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$, $so(3)$ та $so(3) \oplus A_1$ векторними полями в просторі довільної скінченної кількості змінних.

У підрозділі виконане порівняння різних існуючих класифікацій скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на площині та наведена виправлена класифікація таких алгебр. Зокрема, строго досліджені питання еквівалентності та параметризації в серіях алгебр Лі.

Підрозділ 4.3 присвячений диференціальним інваріантам груп Лі, що діють на дійсній площині. В цьому підрозділі наведені теоретичні відомості, необхідні для отримання диференціальних інваріантів. Крім того, для кожної з нееквівалентних алгебр Лі з підрозділу 4.2 обчислено визначник Лі, базис диференціальних інваріантів та оператор інваріантного диференціювання.

Основні результати розділу 4 опубліковано в роботах [109–111, 113].

4.1. Реалізації нерозв'язних алгебр Лі розмірностей три та чотири над полем дійсних чисел

Розглянемо n-вимірну алгебру Лі $A = (V, [\cdot,\cdot])$, яка є n-вимірним векторним простором V над полем $\mathbb{R}$ з дужкою Лі $[\cdot,\cdot]$. Зазвичай алгебра Лі A визначається за допомогою комутаційних співвідношень у фіксованому базисі $\{e_1, \ldots, e_n\}$ простору V. Насправді досить розглядати лише ненульові комутатори $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де c_{ij}^k — компоненти тензора структурних сталих алгебри A. Індекси i, j, k змінюються від 1 до n, а за індексами, що повторюються, розуміємо сумування.

Означення 4.1. *Векторне поле v на многовиді M* задається дотичними векторами $v \in TM|_x$ в кожній точці $x \in M$, такими, що v гладко змінюється від точки до точки. В локальних координатах векторне поле має вигляд

$$\sum_{a=1}^{n} \xi^a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{4.1}$$

де $\xi^a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ гладкі функції від x.

Означення 4.2. *Реалізацією алгебри Лі векторними полями на M* називається гомоморфізм $R\colon A \to \mathrm{Vect}(M)$.

Будемо казати, що реалізація R *точна*, якщо $\ker R = \{0\}$, в іншому випадку називатимемо реалізацію *неточною*.

Означення 4.3. Нехай G — підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$ алгебри A. Дві реалізації $R_1\colon A \to \mathrm{Vect}(M_1)$ та $R_2\colon A \to \mathrm{Vect}(M_2)$ називаються *G-еквівалентними*, якщо існує $\varphi \in G$ та дифеоморфізм f із M_1 в M_2 такий, що $R_2(v) = f_* R_1(\varphi(v))$ для усіх $v \in A$. Тут f_* це ізоморфізм з $\mathrm{Vect}(M_1)$ в $\mathrm{Vect}(M_2)$ індукований f.

Якщо G містить лише тотожне перетворення, то реалізації називаються *сильно еквівалентними*. Реалізації називаються *слабо еквівалентними*, якщо $G = \mathrm{Aut}(A)$.

Розглянемо послідовність ідеалів алгебри A: $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}, \ldots$, де $A^{(0)} = A$, $A^{(l)} = [A^{(l-1)}, A^{(l-1)}]$, $l \geq 1$, така послідовність називається *нижнім центральним рядом* алгебри A.

Означення 4.4. Якщо існує таке $l \in \mathbb{N}$, що $A^{(l)} = 0$, то алгебра Лі A називається *розв'язною*, у іншому випадку алгебра A називається *нероз-в'язною.*

Метою даного підрозділу є опис усіх точних слабо нееквівалентних реалізацій три- та чотиривимірних дійсних нерозв'язних алгебр Лі векторними полями вигляду (4.1).

Не дивлячись на те, що більшість з реалізацій наведених у цьому підрозділі добре відомі, повноту цих списків реалізацій в літературі було доведено лише для алгебри $so(3)$ [160], знаходження переліків усіх нееквівалентних реалізацій для решти низькорозмірних нерозв'язних алгебр належить дисертанту.

Необхідною передумовою класифікації реалізацій є класифікація алгебр Лі, тобто класифікація усіх можливих комутаційних співвідношень між базисними елементами з точністю до перетворень ізоморфізму. Добре відомо [1], що існує чотири нерозв'язних дійсних алгебри Лі розмірностей не більше чотирьох (тут $q = 1, 2, 3$):

$$sl(2,\mathbb{R})\colon \quad [e_1, e_2] = e_1,\ [e_1, e_3] = 2e_2,\ [e_2, e_3] = e_3;$$

$$so(3)\colon \quad [e_1, e_2] = e_3,\ [e_3, e_1] = e_2,\ \ [e_2, e_3] = e_1;$$

$$sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1\colon [e_1, e_2] = e_1,\ [e_1, e_3] = 2e_2,\ [e_2, e_3] = e_3,\ [e_q, e_4] = 0;$$

$$so(3) \oplus A_1\colon \quad [e_1, e_2] = e_3,\ [e_3, e_1] = e_2,\ \ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_q, e_4] = 0.$$

Надалі будемо використовувати наступні позначення $\partial_a = \partial/\partial x_a$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\check{x} = (x_3, \ldots, x_n)$, $\hat{x} = (x_4, \ldots, x_n)$, $a = \overline{1,n}$, $j, k = \overline{4,n}$, де $n \in \mathbb{N}$. N-ту реалізацію алгебри Лі A позначатимемо як $R(A, N)$.

Щоб прокласифікувати реалізації n-вимірної алгебри Лі A прямим методом візьмемо m лінійно незалежних векторних полів загального вигляду $e_s = \xi^{sa}(x)\partial_a$, $s = \overline{1,n}$ та вимагатимемо, щоб вони задовольняли комутаційним співвідношенням алгебри A. В результаті отримуємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних на коефіцієнти ξ^{sa} та інтегруємо її, розглядаючи усі можливі випадки. У кожному з випадків перетворюємо розв'язок до найпростішого вигляду, використовуючи локальні дифеоморфізми простору x та автоморфізми алгебри A, якщо шукаємо класифікацію з точністю до слабкої еквівалентності, або лише локальні дифеоморфізми, якщо шукаємо класифікацію з точністю до сильної еквівалентності.

Недоліки цього методу полягають у необхідності розв'язувати складну нелінійну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних.

У даній роботі використано інший підхід, який полягає у послідовній класифікації реалізацій в серіях вкладених підалгебр алгебри A, починаючи з одновимірної підалгебри або іншої підалгебри з відомими реалізаціями та закінчуючи алгеброю A. Застосувавши останній метод отримано наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай векторні поля вигляду* (4.1) *задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі* $sl(2,\mathbb{R})$. *Тоді існують заміни змінних та автоморфізми алгебри, що зводять ці поля до одного з нееквівалентних виглядів:*

1) $\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3;$
2) $\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad (x_1^2 + x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2;$
3) $\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad (x_1^2 - x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2;$
4) $\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2;$
5) $\partial_1, \quad x_1\partial_1, \quad x_1^2\partial_1.$

Доведення. Для доведення даної теореми, застосовано метод послідовної класифікації реалізацій в серіях вкладених підалгебр алгебри A, починаючи з нееквівалентних реалізацій

$$\langle\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2\rangle; \qquad \langle\partial_1, \quad x_1\partial_1\rangle;$$

некомутативної двовимірної алгебри $A_{2.1}\colon [e_1, e_2] = e_1$, яка є підалгеброю алгебри $sl(2,\mathbb{R})$. $\square$

Теорема 4.2. *Перелік нееквівалентних реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ вичерпується такими наборами векторних полів:*

$$
\begin{aligned}
&1)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3,\quad \partial_4;\\
&2)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3,\\
&\quad x_2\partial_1+2x_2x_3\partial_2+(x_3^2+x_4)\partial_3;\\
&3)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3,\\
&\quad x_2\partial_1+2x_2x_3\partial_2+(x_3^2+c)\partial_3,\quad c\in\{-1;0;1\};\\
&4)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad (x_1^2+x_2^2)\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\quad \partial_3;\\
&5)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad (x_1^2-x_2^2)\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\quad \partial_3;\\
&6)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\quad \partial_3;\\
&7)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\quad x_2x_3\partial_2;\\
&8)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2,\quad x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\quad x_2\partial_2;\\
&9)\ \partial_1,\quad x_1\partial_1, x_1^2\partial_1,\quad \partial_2.
\end{aligned}
$$

Доведення. Повна група автоморфізмів алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ (див. Додаток А) є прямим добутком груп автоморфізмів алгебр $sl(2,\mathbb{R})$ та A_1. Розширимо реалізації алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ до реалізацій $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$, додавши оператор e_4 найбільш загального вигляду $e_4=\eta^a(x)\partial_a$.

Розглянемо детально побудову реалізацій у випадку $R(sl(2,\mathbb{R}),1)$. Загальний вигляд оператора e_4, котрий комутує з базисними елементами алгебри $R(sl(2,\mathbb{R}),1)$ такий:

$$e_4=\xi^1x_2\partial_1+(2\xi^1x_3+\xi^2)x_2\partial_2+(\xi^1x_3^2+\xi^2x_3+\xi^3)\partial_3+\xi^j\partial_j,$$

де ξ^a — довільні функції від $\hat{x}$. Вигляд операторів e_1, e_2 та e_3 зберігається під дією наступних перетворень:

$$\tilde{x}_1=x_1+\frac{f^1x_2}{1-f^1x_3},\quad \tilde{x}_2=\frac{f^2x_2}{(1-f^1x_3)^2},$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{f^2 x_3}{1 - f^1 x_3} + f^3, \quad \tilde{x}_j = f^j,$$

де f^a — довільні функції від $\hat{x}$. Під дією цих перетворень оператор e_4 переходить у оператор $\tilde{e}_4$ того самого вигляду з такими функціями $\tilde{\xi}^a$:

$$\tilde{\xi}^1 = \frac{1}{f^2}(\xi^1 + \xi^2 f^1 + \xi^3 (f^1)^2 + \xi^j f^1_j),$$

$$\tilde{\xi}^2 = \xi^2 + 2\xi^3 f^1 - 2\tilde{\xi}^1 (f^3)^2 + \xi^j \frac{f^2_j}{f^2},$$

$$\tilde{\xi}^3 = \xi^3 f^2 - \tilde{\xi}^1 (f^3)^2 - \tilde{\xi}^2 f^3 + \xi^3 f^2 + \xi^j f^3_j, \quad \tilde{\xi}^j = \xi^k f^j_k.$$

Тут і надалі нижні індекси позначають частинну похідну за відповідною змінною x_a.

Можливі два випадки.

1) $\exists j$: $\xi^j \neq 0$. Тоді оператор e_4 можна звести до вигляду $\tilde{e}_4 = \partial_4$ та отримати реалізацію $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 1)$.

2) $\tilde{\xi}^j = 0$. Вираз $I = (\xi^2)^2 - 4\xi^1\xi^3$ є інваріантом наведених перетворень змінних ξ. Таким чином, можемо покласти $\tilde{\xi}_1 = 1$, $\tilde{\xi}_2 = 0$, $\tilde{\xi}_3 = I$. Якщо $I = \mathrm{const}$ то отримаємо реалізацію $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 3)$, інакше можна вибрати нову змінну $\tilde{x}_4 = I$ та отримати реалізацію $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 2)$.

Опускаємо обчислення реалізацій $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 4\text{–}9)$, оскільки вони простіші за наведені та отримуються аналогічним чином, починаючи з трьох інших реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})$.

Нееквівалентність отриманих реалізацій легко доводиться використовуючи техніку запропоновану у роботі [124]. $\square$

Теорема 4.3. *Існує точно дві нееквівалентні реалізації алгебри* $so(3)$ *векторними полями вигляду* (4.1)*:*

$$1)\ \ -\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2, \quad -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2, \quad \partial_1;$$

$$2)\ \ -\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2 + \sin x_1 \sec x_2 \partial_3,$$

$$-\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2 + \cos x_1 \sec x_2 \partial_3, \quad \partial_1.$$

Зауваження 4.1. Реалізації $R(so(3),1)$ та $R(so(3),2)$ добре відомі. Повноту цього переліку реалізацій вперше доведено у роботі [160]. Наведений вигляд реалізацій не є оптимальним для усіх застосувань, тому класифікація з теореми 4.3 не є канонічною.

Розглянемо реалізацію $R(so(3),1)$ рангу два більш докладно. Вона діє транзитивно на многовиді S^2. За допомогою стереографічної проекції $\operatorname{tg} x_1 = t/x$, $\operatorname{ctg}\ x_2 = \sqrt{x^2+t^2}$ цю реалізацію можна звести до добре відомої реалізації на площині [67]:

$$(1+t^2)\partial_t + xt\partial_x, \quad x\partial_t - t\partial_x, \quad -xt\partial_t - (1+x^2)\partial_x.$$

Якщо розмірність x-простору не менша за три, то змінні x_1, x_2 та неявну змінну x_3 в реалізації $R(so(3),1)$ можна проінтерпретувати як кути та радіус у сферичних координатах (вкладення S^2 у $\mathbb{R}^3$). Тоді у відповідних декартових координатах реалізація $R(so(3),1)$ набуває добре відомого вигляду:

$$x_2\partial_3 - x_3\partial_2, \qquad x_3\partial_1 - x_1\partial_3, \qquad x_1\partial_2 - x_2\partial_1,$$

який породжується стандартним зображенням групи $SO(3)$ у $\mathbb{R}^3$.

Теорема 4.4. *Перелік нееквівалентних реалізацій алгебри $so(3)\oplus A_1$ векторними полями в просторі довільної (скінченної) кількості змінних вичерпується такими:*

1) $-\sin x_1 \tan x_2\partial_1 - \cos x_1\partial_2,$
$-\cos x_1 \tan x_2\partial_1 + \sin x_1\partial_2, \quad \partial_1, \quad \partial_3;$
2) $-\sin x_1 \tan x_2\partial_1 - \cos x_1\partial_2 + \sin x_1 \sec x_2\partial_3,$
$-\cos x_1 \tan x_2\partial_1 + \sin x_1\partial_2 + \cos x_1 \sec x_2\partial_3, \quad \partial_1, \quad \partial_3;$
3) $-\sin x_1 \tan x_2\partial_1 - \cos x_1\partial_2 + \sin x_1 \sec x_2\partial_3,$
$-\cos x_1 \tan x_2\partial_1 + \sin x_1\partial_2 + \cos x_1 \sec x_2\partial_3, \quad \partial_1, \quad x_4\partial_3;$
4) $-\sin x_1 \tan x_2\partial_1 - \cos x_1\partial_2 + \sin x_1 \sec x_2\partial_3,$
$-\cos x_1 \tan x_2\partial_1 + \sin x_1\partial_2 + \cos x_1 \sec x_2\partial_3, \quad \partial_1, \quad \partial_4.$

Доведення. Група автоморфізмів алгебри $so(3) \oplus A_1$ є прямою сумою груп автоморфізмів алгебр $so(3)$ та A_1 (див. Додаток А). Для класифікації реалізацій алгебри $so(3) \oplus A_1$ використовуємо реалізації $R(so(3),1)$ і $R(so(3),2)$. Для зручності перепишемо їх як реалізацію, параметризовану за допомогою параметра $\alpha \in \{0;1\}$:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2 + \alpha \sin x_1 \sec x_2 \partial_3, \\ e_2 &= -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2 + \alpha \cos x_1 \sec x_2 \partial_3, \\ e_3 &= \partial_1. \end{aligned}$$

Величини $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ відповідають двом реалізаціям $R(so(3),1)$ та $R(so(3),2)$.

Розглянемо оператор e_4 у найбільш загальному вигляді $e_4 = \xi^a(x)\partial_a$ та отримаємо рівняння на $\xi^a(x)$ з умови комутування оператора e_4 з рештою базисних елементів:

$$\xi^a_1 = 0, \quad \xi^2_2 = 0, \quad \xi^j_2 = 0; \tag{4.2a}$$

$$\begin{gathered} \alpha\xi^2_3 - \xi^1 \cos x_2 = 0, \quad \alpha\xi^1_3 \cos x_2 + \xi^2 = 0, \\ \xi^3_2 \cos x_2 + \alpha\xi^1 = 0; \end{gathered} \tag{4.2b}$$

$$\begin{gathered} \xi^1_2 - \xi^1 \tan x_2 = 0, \quad \alpha\xi^3_3 - \alpha\xi^2 \tan x_2 = 0, \\ \alpha\xi^j_3 = 0. \end{gathered} \tag{4.2c}$$

З умов (4.2a) випливає, що $\xi^2 = \xi^2(\check{x})$ та $\xi^j = \xi^j(\check{x})$.

У випадку $\alpha = 0$ з (4.2b) отримуємо, що $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 0$ і $\xi^3 = \xi^3(\check{x})$. Тоді e_4 має вигляд $e_4 = \xi^p(\check{x})\partial_p$, де $p = \overline{3,n}$ та один з коефіцієнтів ξ^p не дорівнює нулю. Використовуючи допустимі заміни змінних $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\tilde{x}_p = f^p(\check{x})$, можна покласти $\xi^3 = 1$ та $\xi^j = 0$. (“Допустимі” означає, що ці перетворення зберігають вигляд операторів e_1, e_2 та e_3.) В результаті отримуємо реалізацію $R(so(3) \oplus A_1, 1)$.

Розглянемо випадок $\alpha = 1$. Загальний розв'язок системи (4.2a)–(4.2c) наступний:

$$\xi^1 = \frac{\varphi^1 \sin x_3 + \varphi^2 \cos x_3}{\cos x_2}, \quad \xi^2 = \varphi^2 \sin x_3 - \varphi^1 \cos x_3,$$

$$\xi_3 = \varphi^3 - (\varphi^1 \sin x_3 + \varphi^2 \cos x_3) \tan x_2, \quad \xi^j = \varphi^j,$$

де φ^a — довільні функції від $\hat{x}$. Таким чином, оператор e_4 можна записати у вигляді:

$$e_4 = \varphi^1 e_1' + \varphi^2 e_2' + \varphi^3 e_3' + \varphi^j \partial_j,$$

де оператори e_1', e_2', e_3' отримуються з операторів e_1, e_2, e_3 перестановкою змінних x_1 та x_3.

Наступним кроком є спрощення оператора e_4. Оскільки в цьому випадку прямий метод знаходження допустимих перетворень змінних надзвичайно складний і громіздкий, використовуємо інфінітезимальний підхід.

Однопараметрична група локальних перетворень простору змінних x зберігає вигляд операторів e_1, e_2, e_3, якщо її інфінітезимальний генератор Q комутує з цими операторами. Таким чином, Q має такий самий вигляд як і e_4:

$$Q = \rho^1 e_1' + \rho^2 e_2' + \rho^3 e_3' + \rho^j \partial_j,$$

де ρ^a — довільні функції від $\hat{x}$.

Можливі два випадки: $\xi^j = 0$ або $\exists j$: $\xi^j \neq 0$. В будь-якому з цих випадків оператор e_4 за допомогою допустимих перетворень $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\tilde{x}_3 = x_3$, $\tilde{x}_j = f^j(\hat{x})$ можна звести до вигляду:

$$e_4 = \varphi^1 e_1' + \varphi^2 e_2' + \varphi^3 e_3' + \beta \partial_4, \quad \beta \in \{0, 1\}.$$

Надалі використовуємо лише перетворення, що зберігають $\hat{x}$, і, таким чином, вважаємо, що $\rho^j = 0$.

Введемо векторні позначення $\bar{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, $\bar{\rho} = (\rho^1, \rho^2, \rho^3)$, $\bar{\rho}_4 = (\rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3)$, та $\bar{e}' = (e_1', e_2', e_3')$. Комутатор $[e_4, Q]$ можна представити у наступному вигляді:

$$[e_4, Q] = (\bar{\rho} \times \bar{\varphi} - \beta \bar{\rho}_4) \cdot \bar{e}',$$

де символи “$\times$” та “$\cdot$” позначають векторний та скалярний добутки векторів. Скінченні перетворення $\widetilde{\bar{\varphi}} = \bar{\gamma}(\varepsilon, \bar{\varphi}, \hat{x})$, породжені оператором Q, знаходяться інтегруванням рівнянь Лі:

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\varepsilon} = \bar{\rho} \times \bar{\gamma} - \beta\bar{\rho}_4, \quad \bar{\gamma}|_{\varepsilon=0} = \bar{\varphi}, \tag{4.3}$$

де ε — груповий параметр, компоненти $\hat{x}$ вважаються сталими. Таким чином,

$$\bar{\gamma} = OJ(\varepsilon)O^{\mathrm{T}}\bar{\varphi} - \beta O\int_0^{\varepsilon} J(\varepsilon)d\varepsilon\; O^{\mathrm{T}}\bar{\rho}_4,$$

де O — ортогональна матриця, третій стовпчик якої має вигляд $\bar{\rho}/|\bar{\rho}|$,

$$J(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos|\bar{\rho}|\varepsilon & -\sin|\bar{\rho}|\varepsilon & 0 \\ \sin|\bar{\rho}|\varepsilon & \cos|\bar{\rho}|\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

див. також додаток А. У випадку $\beta = 0$ φ^1 та φ^2 можна покласти нулями за допомогою перетворень $\widetilde{\bar{\varphi}} = \bar{\gamma}(\varepsilon, \bar{\varphi}, \hat{x})$, звідси $\tilde{e}_4 = \tilde{\varphi}^3(\hat{x})\partial_3$. В результаті отримуємо реалізації $R(so(3)\oplus A_1, 2)$ та $R(so(3)\oplus A_1, 3)$, якщо $\varphi_3 = \mathrm{const}$ або $\varphi_3 \neq \mathrm{const}$ відповідно.

У випадку $\beta = 1$ вибираємо $\bar{\rho}$ як розв'язок системи

$$\int_0^{\varepsilon} J(\varepsilon)d\varepsilon\; O^{\mathrm{T}}\bar{\rho}_4 = J(\varepsilon)O^{\mathrm{T}}\bar{\varphi},$$

де ε — фіксоване так, що існує $(\int_0^{\varepsilon} J(\varepsilon)d\varepsilon)^{-1}$. Тоді перетворений вектор $\bar{\varphi}$ дорівнює нульовому, тобто $\tilde{e}_4 = \partial_4$ і маємо реалізацію $R(so(3)\oplus A_1, 4)$. $\square$

4.2. Реалізації алгебр Лі на дійсній площині

Серед задач класичної теорії алгебр Лі існує дві важливі класифікаційні задачі. Однією з таких задач є задача класифікації структур алгебр Лі, тобто класифікація можливих комутаційних співвідношень між базисними елементами. Інша задача була поставлена С. Лі і полягає у класифікації різних зображень алгебр Лі, зокрема векторними полями, з точністю до локальних дифеоморфізмів.

Реалізації алгебр Лі векторними полями однієї та двох комплексних змінних були прокласифіковані самим С. Лі [93]. У 1992 році А. Гонзалез-Лопес зі співавторами впорядкували класифікацію Лі реалізацій комплексних алгебр Лі [66] та розширили її до дійсного випадку [67]. На жаль, у згаданій класифікації алгебр Лі векторними полями на дійсній площині, було пропущено один випадок та не вказано умови, при яких наведені переліки реалізацій є нееквівалентними. Крім того, низькорозмірні алгебри Лі були включені до серій скінченновимірних алгебр з довільними функціями у коефіцієнтах. Таким чином, застосування цієї класифікації у випадках невисокої розмірності алгебри Лі вимагало попереднього розв'язування систем диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Метою даного підрозділу є побудова повної та зручної у застосуванні класифікації реалізацій алгебр Лі довільної скінченної розмірності $n \in \mathbb{N}$ векторними полями на дійсній площині вигляду

$$e_i = \xi_i(x, y)\partial_x + \eta_i(x, y)\partial_y, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Існує два різних підходи до класифікації реалізацій алгебр Лі векторними полями. Перший підхід полягає у використанні класифікації алгебр Лі та пошуку базисних векторних полів, що задовольняють заданим комутаційним співвідношенням. Другий підхід полягає у прямій побудові скінченновимірних просторів векторних полів, замкнених відносно стандартної дужки Лі.

Будемо позначати ∂/∂_x, ∂/∂_y як ∂_x, ∂_y. Індекси i та j змінюються від 1 до r, де область зміни r будемо визначати у кожному випадку окремо. Мітка N_0 складається з двох частин, які позначають номер сторінки (від 57 до 73) та номер реалізації у роботі Лі [93]. Мітки N_1 та N_2 відповідають нумерації дійсних та комплексних реалізацій у роботах [67] та [66] відповідно, а N_3 відповідає нумерації реалізацій, запропонованій у [124], а саме $R(A, n)$ позначає n-ту реалізацію алгебри A з роботи [124]. Якщо розмірність алгебри, що розглядається, більша за чотири, то ця розмірність ставиться у відповідність номеру N_3. Символ N без будь-яких індексів нумерує реалізації, що відповідають класифікації отриманій у дисертаційній роботі.

Твердження 4.1. *Перелік нееквівалентних реалізацій скінченновимірних алгебр Лі, що діють в дійсній площині, наведено у таблиці 4.1.*

Таблиця 4.1. Реалізації алгебр Лі на дійсній площині.

N	Реалізації	N_1	N_0	N_3
1	∂_x	9	$57, (1)$	$R(A_1, 1)$
2	∂_x, ∂_y	22	$57, (2)$	$R(2A_1, 1)$
3	∂_x, $y\partial_x$	20	$57, (4)$	$R(2A_1, 2)$
4	∂_x, $x\partial_x + y\partial_y$	—	$57, (3)$	$R(A_{2.1}, 1)$
5	∂_x, $x\partial_x$	10	$57, (5)$	$R(A_{2.1}, 2)$
6	∂_y, $x\partial_y$, $\xi_1(x)\partial_y$	20	$57, (14)$	$R(3A_1, 5)$
7	$\partial_y, y\partial_y$, ∂_x	23	$73, (10)$	$R(A_{2.1} \oplus A_1, 3)$
8	$e^{-x}\partial_y$, ∂_x, ∂_y	22	$57, (8)$	$R(A_{2.1} \oplus A_1, 4)$
9	∂_y, ∂_x, $x\partial_y$	22	$57, (9)$	$R(A_{3.1}, 3)$
10	∂_y, ∂_x, $x\partial_x + (x + y)\partial_y$	25	$57, (11)$	$R(A_{3.2}, 2)$
11	$e^{-x}\partial_y$, $-xe^{-x}\partial_y$, ∂_x	22	$57, (7)$	$R(A_{3.2}, 3)$
12	∂_x, ∂_y, $x\partial_x + y\partial_y$	12	$57, (10)$	$R(A_{3.3}, 2)$
13	∂_y, $x\partial_y$, $y\partial_y$	21	$57, (15)$	$R(A_{3.3}, 4)$
14	∂_x, ∂_y, $x\partial_x + ay\partial_y$, $0 < \lvert a\rvert \le 1, a \ne 1$	12	$57, (10)$	$R(A^a_{3.4}, 2)$
15	$e^{-x}\partial_y$, $e^{-ax}\partial_y$, ∂_x, $0 < \lvert a\rvert \le 1, a \ne 1$	22	$57, (6)$	$R(A^a_{3.4}, 3)$
16	∂_x, ∂_y, $(bx + y)\partial_x + (by - x)\partial_y$, $b \ge 0$	1	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 57, (10)	$R(A^b_{3.5}, 2)$
17	$e^{-bx}\sin x\partial_y,\ e^{-bx}\cos x\partial_y,\ \partial_x,\ b \ge 0$	22	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 57, (6)	$R(A^b_{3.5}, 3)$
18	∂_x, $x\partial_x + y\partial_y$, $(x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$	2	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 57, (13); 73, (4)	$R(sl(2, \mathbb{R}), 2)$
19	$\partial_x + \partial_y$, $x\partial_x + y\partial_y$, $x^2\partial_x + y^2\partial_y$	17	$57, (13); 73, (4)$	$R(sl(2, \mathbb{R}), 3)$
20	∂_x, $x\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_y$, $x^2\partial_x + xy\partial_y$	18	$57, (16); 72, (10)$	$R(sl(2, \mathbb{R}), 4)$
21	∂_x, $x\partial_x$, $x^2\partial_x$	11	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 57, (16); 72, (10)	$R(sl(2, \mathbb{R}), 5)$

Таблиця 4.1. (Продовження.)

N	Реалізації	N_1	N_0	N_3
22	$y\partial_x - x\partial_y,\ (1+x^2-y^2)\partial_x + 2xy\partial_y,$ $2xy\partial_x + (1+y^2-x^2)\partial_y$	3	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 57, (13); 73, (4)	$R(so(3),1)$
23	$\partial_y,\, x\partial_y,\, \xi_1(x)\partial_y,\, \xi_2(x)\partial_y$	20	58, (8)	$R(4A_1, 11)$
24	$\partial_x,\, x\partial_x,\, \partial_y,\, y\partial_y$	13	58, (6)	$R(2A_{2.1}, 5)$
25	$e^{-x}\partial_y,\, \partial_x,\, \partial_y,\, y\partial_y$	23	58, (1)	$R(2A_{2.1}, 7)$
26	$e^{-x}\partial_y,\, -xe^{-x}\partial_y,\, \partial_x,\, \partial_y$	22	57, (21)	$R(A_{3.2}{\oplus}A_1, 9)$
27	$e^{-x}\partial_y,\, e^{-ax}\partial_y,\, \partial_x,\, \partial_y,\, 0<\lvert a\rvert\le 1, a\ne 1$	22	57, (20)	$R(A^a_{3.4}{\oplus}A_1, 9)$
28	$e^{-bx}\sin x\partial_y,\ e^{-bx}\cos x\partial_y,\ \partial_x,\ \partial_y,\ b\ge 0$	22	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 57, (20)	$R(A^b_{3.5}{\oplus}A_1, 8)$
29	$\partial_x,\, x\partial_x,\, y\partial_y,\, x^2\partial_x + xy\partial_y$	19	58, (7)	$R(sl(2,\mathbb{R}){\oplus}A_1, 8)$
30	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_x,\, x^2\partial_x$	14	58, (3)	$R(sl(2,\mathbb{R}){\oplus}A_1, 9)$
31	$\partial_y,\, -x\partial_y,\, \frac{1}{2}x^2\partial_y,\, \partial_x$	22	57, (23)	$R(A_{4.1}, 8)$
32	$e^{-bx}\partial_y,\, e^{-x}\partial_y,\, -xe^{-x}\partial_y,\, \partial_x$	22	57, (18)	$R(A^{b\ne1}_{4.2}, 8)$
33	$e^{-x}\partial_y,\, -x\partial_y,\, \partial_y,\, \partial_x$	22	57, (22)	$R(A_{4.3}, 8)$
34	$e^{-x}\partial_y,\, -xe^{-x}\partial_y,\, \frac{1}{2}x^2e^{-x}\partial_y,\, \partial_x$	22	57, (19)	$R(A_{4.4}, 7)$
35	$\partial_y,\, x\partial_y,\, \xi_1(x)\partial_y,\, y\partial_y$	21	58, (9)	$R(A^{1,1,1}_{4.5}, 10)$
36	$\bar{e}^{ax}\partial_y,\, \bar{e}^{bx}\partial_y,\, \bar{e}^{x}\partial_y,\, \partial_x,\, -1{\le}a{<}b{<}1,\, ab{\ne}0$	22	57, (17)	$R(A^{a,b,1}_{4.5}, 7)$
37	$e^{-ax}\partial_y,\ e^{-bx}\sin x\partial_y,\ e^{-bx}\cos x\partial_y,\ \partial_x,\, a>0$	22	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 57, (17)	$R(A^{a,b}_{4.6}, 6)$
38	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_y,\, x\partial_x + (2y+x^2)\partial_y$	25	58, (5)	$R(A_{4.7}, 5)$
39	$\partial_y,\, \partial_x,\, x\partial_y,\, (1+b)x\partial_x + y\partial_y,\, \lvert b\rvert\le 1$	24	58, (4)	$R(A^b_{4.8}, 5)$
40	$\partial_y,\, -x\partial_y,\, \partial_x,\, y\partial_y$	23	58, (2); 72, (7)	$R(A^0_{4.8}, 7)$
41	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_x + y\partial_y,\, y\partial_x - x\partial_y$	4	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 58, (6)	$R(A_{4.10}, 6)$
42	$\sin x\partial_y,\, \cos x\partial_y,\, y\partial_y,\, \partial_x$	23	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 58, (1)	$R(A_{4.10}, 7)$
43	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_x - y\partial_y,\, y\partial_x,\, x\partial_y$	5	71, (3)	$\dim A = 5$
44	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_x,\, y\partial_y,\, y\partial_x,\, x\partial_y$	6	71, (2)	$\dim A = 6$
45	$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y,\ y\partial_x - x\partial_y,$ $(x^2-y^2)\partial_x - 2xy\partial_y,\ 2xy\partial_x - (y^2-x^2)\partial_y$	7	$\overset{\mathbb{C}}{\sim}$ 73, (3)	$\dim A = 6$

Таблиця 4.1. (Продовження.)

N	Реалізації	N_1	N_0	N_3
46	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_x,\, y\partial_y,\, x^2\partial_x,\, y^2\partial_y$	16	$73,(3)$	$\dim A = 6$
47	$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x,\ y\partial_y,\ y\partial_x,\ x\partial_y,$ $x^2\partial_x + xy\partial_y,\ xy\partial_x + y^2\partial_y$	8	$71,(1)$	$\dim A = 8$
48	$\partial_y,\, x\partial_y,\, \xi_1(x)\partial_y,\, \ldots,\, \xi_r(x)\partial_y,\, r \geq 3$	20	$73,(2)$	$\dim A \geq 5$
49	$y\partial_y,\, \partial_y,\, x\partial_y,\, \xi_1(x)\partial_y,\, \ldots,\, \xi_r(x)\partial_y,\, r \geq 2$	21	$72,(8)$	$\dim A \geq 5$
50	$\partial_x,\, \eta_1(x)\partial_y,\, \ldots,\, \eta_r(x)\partial_y,\, r \geq 4$	22	$73,(1)$	$\dim A \geq 5$
51	$\partial_x,\, y\partial_y,\, \eta_1(x)\partial_y,\, \ldots,\, \eta_r(x)\partial_y,\, r \geq 3$	23	$72,(7)$	$\dim A \geq 5$
52	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_x + cy\partial_y,\, x\partial_y,\, \ldots,\, x^r\partial_y,\, r \geq 2$	24	$72,(5)$	$\dim A \geq 5$
53	$\partial_x,\, \partial_y,\, x\partial_y,\, \ldots,\, x^{r-1}\partial_y, x\partial_x{+}(ry{+}x^r)\partial_y,\, r \geq 3$	25	$72,(6)$	$\dim A \geq 5$
54	$\partial_x,\, x\partial_x,\, y\partial_y,\, \partial_y,\, x\partial_y,\, \ldots,\, x^r\partial_y,\, r \geq 1$	26	$72,(4)$	$\dim A \geq 5$
55	$\partial_x,\ \partial_y,\ 2x\partial_x + ry\partial_y,\ x^2\partial_x + rxy\partial_y,$ $x\partial_y,\ x^2\partial_y,\ \ldots,\ x^r\partial_y,\ r \geq 1$	27	$71,(4); 72,(1)$	$\dim A \geq 5$
56	$\partial_x, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y,$ $\partial_y, x\partial_y, x^2\partial_y,\ \ldots, x^r\partial_y, r \geq 0$	$15; 28$	$73,(5); 72,(2)$	$\dim A \geq 5$

У таблиці 4.1 функції $1,\, x,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_r$ є лінійно незалежними, а функції $\eta_1, \ldots, \eta_r$ утворюють фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння порядку r зі сталими коефіцієнтами

$$\eta^{(r)}(x) + c_1\eta^{(r-1)}(x) + \cdots + c_r\eta(x) = 0.$$

Зауваження 4.2. Реалізація рангу два некомутативної двовимірної дійсної алгебри Лі $\langle \partial_x, x\partial_x + y\partial_y \rangle$ (випадок $N = 4$) пропущена у роботі [67]. Але її можна включити у серію реалізацій $\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x{+}cy\partial_y, x\partial_y, \ldots, x^r\partial_y \rangle$, $r \geq 1$ (випадок $N_1 = 24$), переписавши останню у вигляді $\langle \partial_x, x\partial_x + cy\partial_y, x^k\partial_y, k = 0, \ldots, r \rangle$ та наклавши додаткові умови $c = 1$ та $x^r = 0$ при $r = -1$.

Коли побудовано повний перелік нееквівалентних реалізацій алгебр Лі фіксованої розмірності, то постає питання відділення реалізацій заданої алгебри Лі від реалізацій інших алгебр тієї самої розмірності. Це питання стає особливо складним у випадку параметризованих серій реалізацій.

Приклад 4.1. Розглянемо серію $\{A^b_{4.8}\}$ [10] дійсних чотиривимірних алгебр Лі, параметризовану параметором $|b| \le 1$. При фіксованому значенні b базисні елементи $A^b_{4.8}$ задовольняють канонічні комутаційні співвідношення

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1+b)e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = be_3.$$

В рамках першого підходу отримано дві нееквівалентні реалізації алгебри $A^b_{4.8}$ векторними полями в просторі двох змінних, при $|b| < 1$

$$\begin{aligned} &\langle \partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x,\ (1+b)x\partial_x + y\partial_y \rangle, \\ &\langle \partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ (1+b)x\partial_x + by\partial_y \rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

У випадку $b = \pm 1$ існує єдина нееквівалентна реалізація, оскільки при таких значеннях параметра реалізації (4.5) еквівалентні і слід вибрати лише одну з них.

С. Лі використовував другий підхід до побудови усіх можливих реалізацій скінченновимірних алгебр Лі на площині. В отриманому ним переліку алгебри з серії $\{A^b_{4.8}\}$ представлені наступними реалізаціями

$$\langle \partial_y, \partial_x, x\partial_y, x\partial_x + \tilde{b}y\partial_y \rangle,\ \tilde{b} \in \mathbb{R}, \quad \text{та} \quad \langle \partial_y, -x\partial_y, \partial_x, y\partial_y \rangle. \tag{4.6}$$

Насправді набори реалізацій (4.5) та (4.6) співпадають. Щоб довести це, спочатку перепозначимо змінні x та y у (4.6) (а саме, $x \leftrightarrow y$) та зсунемо параметр $\tilde{b}$: $\tilde{b} = 1 + b'$. Перенумерувавши базис у першій реалізації з (4.6) у випадку $|b'| \le 1$, отримаємо першу реалізацію з (4.5), де $b = b'$. Якщо $|b'| > 1$, перша реалізація з (4.6) зводиться до другої реалізації з (4.5) при $b = 1/b'$ за допомогою додаткових одночасних перетворень базису та змінних: $\tilde{e}_1 = b'e_1$, $\tilde{e}_2 = e_3$, $\tilde{e}_3 = -b'e_2$, $\tilde{e}_4 = be_4$; $\tilde{x} = bx$, $\tilde{y} = by$. Друга реалізація з (4.6) співпадає з другою реалізацією з (4.5), де $b = 0$.

Наведені міркування пояснюють в деякий спосіб, чому значення параметра $b = \pm 1$ є сингулярними для серії алгебр Лі $\{A^b_{4.8}\}$ з точки зору кількості реалізацій.

Зауваження 4.3. Очевидно, що реалізації з різних серій, наведених у таблиці 4.1, нееквівалентні одна одній, але можуть існувати еквівалентні реалізації, що належать до однієї і тієї ж серії.

Дослідимо питання нееквівалентності всередині серій реалізацій, наведених у таблиці 4.1.

Розглянемо реалізації

$$N=6,23,48: \quad \langle \xi_1(x)\partial_y,\ \xi_2(x)\partial_y,\ \ldots,\ \xi_{r+2}(x)\partial_y\rangle, \quad r\geq 1, \tag{4.7}$$

$$N=35,49: \quad \langle y\partial_y,\ \xi_1(x)\partial_y,\ \xi_2(x)\partial_y,\ \ldots,\ \xi_{r+2}(x)\partial_y\rangle, \quad r\geq 1, \tag{4.8}$$

параметризовані довільними лінійно незалежними дійснозначними функціями ξ_i.

Будь-яка реалізація з серій (4.7) або (4.8) переходить у реалізацію з тієї ж серії при заміні базису з несингулярною сталою матрицею (c_{ij}) та несингулярних замінних змінних $\tilde{x}=\varphi(x)$, $\tilde{y}=\psi(x)y$. З допомогою таких перетворень еквівалентності функції-параметри ξ_i змінюються наступним чином: $\tilde{\xi}_i(\tilde{x})=c_{ij}\psi(x)\xi_j(x)|_{\tilde{x}=\varphi(x)}$. Таким чином, не втрачаючи загальності, можемо покласти $\tilde{\xi}_{r+1}=1$ та $\tilde{\xi}_{r+2}=\tilde{x}$. Звідси, серії реалізацій (4.7) та (4.8) набувають вигляду наведеного в таблиці 4.1, а саме

$$\begin{aligned}&\langle \partial_{\tilde{y}},\ \tilde{x}\partial_{\tilde{y}},\ \tilde{\xi}_1(\tilde{x})\partial_{\tilde{y}},\ \ldots,\ \tilde{\xi}_r(\tilde{x})\partial_{\tilde{y}}\rangle,\\ &\langle \tilde{y}\partial_{\tilde{y}},\ \partial_{\tilde{y}},\ \tilde{x}\partial_{\tilde{y}},\ \tilde{\xi}_1(\tilde{x})\partial_{\tilde{y}},\ \ldots,\ \tilde{\xi}_r(\tilde{x})\partial_{\tilde{y}}\rangle.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Строго кажучи, нормалізовані серії (4.9) також містять еквівалентні реалізації, а відповідні перетворення еквівалентності є обмеженнями на перетворення еквівалентності, наведені вище.

Наступний випадок — це дві серії реалізацій

$$N=50: \quad \langle \partial_x,\eta_1(x)\partial_y,\ \ldots,\ \eta_r(x)\partial_y\rangle, \quad r\geq 4, \tag{4.10}$$

$$N=51: \quad \langle \partial_x,y\partial_y,\eta_1(x)\partial_y,\ \ldots,\ \eta_r(x)\partial_y\rangle, \quad r\geq 3 \tag{4.11}$$

параметризовані дійсними функціями η_i, які утворюють фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння порядку r

зі сталими коефіцієнтами

$$\eta^{(r)}(x) + c_1\eta^{(r-1)}(x) + \cdots + c_r\eta(x) = 0.$$

Перетворення, що зводять будь-яку реалізацію з серій $N = 50$ та $N = 51$ до реалізації з тієї самої серії, породжуються заміною базису з несингулярною сталою матрицею (c_{ij}) та замінами змінних $\tilde{x} = a_1x + a_0$, $\tilde{y} = by + f(x)$, де $f(x) = b_0\eta_0(x) + b_1\eta_1(x) + \cdots + b_r\eta_r(x)$, $a_1, a_0, b, b_0, \ldots, b_r \in \mathbb{R}$, $a_1b \neq 0$. Функція $\eta_0(x)$ є розв'язком звичайного диференціального рівняння $\eta_0^{(r)}(x) + c_1\eta_0^{(r-1)}(x) + \cdots + c_r\eta_0(x) = 1$ та у випадку $N = 51$ додатково $b_0 = 0$. Ці перетворення еквівалентності діють на функції η_i наступним чином: $\tilde{\eta}_i(a_1x + a_0) = c_{ij}\eta_j(x)$.

4.3. Диференціальні інваріанти груп Лі, що діють на площині

Основи теорії диференціальних інваріантів закладено в класичних роботах Лі, Трессе [142, 143] і Картана та розвинені в наш час [14, 53, 54, 115]. Коротко сформулюємо необхідні означення та твердження, слідуючи [115] та [14] в загальних рисах.

Розглянемо локальну r-параметричну групу G, що діє на $M \subset X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ та позначимо через $\mathrm{pr}^{(n)}G$ продовжену групу перетворень, яка діє на підмножині простору потоків $M^{(n)} = M \times \mathbb{R}^n$.

Нехай $\mathfrak{g}$ — r-вимірна алгебра Лі, що відповідає групі G з базисними інфінітезимальними операторами $\{e_i = \xi_i(x, y)\partial_x + \eta_i(x, y)\partial_y\}$. Тоді продовжена алгебра $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$ породжується продовженими диференціальними операторами першого порядку:

$$e_i^{(n)} = \xi_i(x, y)\partial_x + \eta_i(x, y)\partial_y + \sum_{k=1}^{n} \eta_i^k(x, y_{(k)})\partial_{y^{(k)}}.$$

Тут і надалі $n, k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, r$, а $y_{(k)} = (y, y', \ldots, y^{(k)})$ — набір із залежної змінної y та її похідних за змінною x порядків не вище k.

Означення 4.5. Гладка функція $I = I(x, y_{(n)})\colon M^{(n)} \to \mathbb{R}$ називається *диференціальним інваріантом* порядку n групи G, якщо I є інваріантом продовженої групи $\mathrm{pr}^{(n)}G$, а саме

$$I(\mathrm{pr}^{(n)}g \cdot (x, y_{(n)})) = I(x, y_{(n)}), \quad (x, y_{(n)}) \in M^{(n)}$$

для усіх $g \in G$, для яких $\mathrm{pr}^{(n)}g \cdot (x, y_{(n)})$ визначені.

В інфінітезимальних термінах $I(x, y_{(n)})$ є диференціальним інваріантом n-го порядку групи G, якщо $e_i^{(n)} I(x, y_{(n)}) = 0$ для будь-якого базису інфінітезимальних генераторів $e_i^{(n)}$ алгебри $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$.

Розглянемо набори рангів $r_k = \operatorname{rank}\{(\xi_i, \eta_i, \eta_i^1, \dots, \eta_i^k),\ i = 1, \dots, r\}$. Для подальших тверджень зручно ввести число $\nu = \min\{k \in \mathbb{Z} \,|\, r_k = r\}$. Оскільки послідовність $\{r_k\}$ не спадає, обмежена величиною r та досягає значення r, то число ν існує та мають місце співвідношення $r_\nu = r_{\nu+1} = \dots = r$.

Означення 4.6. Нехай $\mathrm{pr}^{(\nu)}\mathfrak{g}$ породжується набором продовжених інфінітезимальних операторів $\{e_i^{(\nu)}\}$ та L — матриця, утворена їх коефіцієнтами:

$$L = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^{(\nu)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^1 & \dots & \eta_2^{(\nu)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r^1 & \dots & \eta_r^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Максимальний мінор матриці L, який тотожно не дорівнює нулю, називається *визначником Лі*.

Важливість наведених означень пояснюється тим фактом, що кожну систему звичайних диференціальних рівнянь, інваріантну відносно групи продовженої дії $\mathrm{pr}^{(n)}G$, локально можна представити у вигляді об'єднання рівнянь, переписаних у термінах диференціальних інваріантів G, та умов занулення визначників Лі.

Природнім є питання: чи можливо вибрати мінімальний набір диференціальних інваріантів, що дозволяє отримати усі диференціальні інваріанти заданого порядку за допомогою скінченної кількості усталених операцій. Відповідь на це питання позитивна.

Нижче коротко сформулюємо кілька результатів, які стосуються диференціальних інваріантів груп Лі, що діють на площині.

Означення 4.7. Максимальний набір I_n функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку не вище n (тобто інваріантів продовженої групи $\mathrm{pr}^{(n)}G$) називається *універсальним диференціальним інваріантом* порядку n групи G.

Зауважимо, що розмірність простору потоків $M^{(n)}$ обчислюється як $\dim M^{(n)} = n + 2$, а кількість функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку n як $d_n = n + 2 - r_n$.

Зрозуміло, що будь-який диференціальний інваріант I порядку n групи G з необхідністю є диференціальним оператором порядку $(n+l)$ групи G, $l \geq 0$. Таким чином, для будь-яких $n, l \geq 0$ універсальний диференціальний інваріант I_{n+l} можна отримати розширенням універсального диференціального інваріанта I_n.

Означення 4.8. Векторне поле (або диференціальний оператор) δ на нескінченно продовженому просторі потоків $M^{(\infty)}$ називається *оператором інваріантного диференціювання* групи G, якщо для будь-кого диференціального інваріанта I групи G вираз δI також є диференціальним інваріантом G.

Будь-який оператор δ, що комутує з усіма формально нескінченно продовженими базисними інфінітезимальними генераторами e_i^∞ відповідної алгебри Лі, є оператором інваріантного диференціювання групи G. Для кожної групи Лі, що діє на дійсній чи комплексній площині, існує рівно один незалежний над полем інваріантів даної групи оператор інваріантного диференціювання.

Для кожної групи Лі G існує скінченний *базис диференціальних інваріантів*, тобто скінченний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів такий, що будь-який диференціальний інваріант G можна отримати з нього за допомогою скінченної кількості функціональних операцій та операцій інваріантного диференціювання. Базис диференціальних інваріантів групи G завжди міститься в універсальному диференціальному інваріанті $I_{\nu+1}$.

Для повного опису диференціальних інваріантів усіх груп перетворень, що діють на дійсній площині, будуємо функціональний базис диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання для кожної алгебри зі списку нееквівалентних алгебр Лі векторних полів на дійсній площині (див. підрозділ 4.2).

Використовуючи інфінітезимальний підхід, знаходимо базиси диференціальних інваріантів як частину універсального інваріанта порядку $(\nu+1)$. Конструктивна процедура побудови операторів інваріантного диференціювання виводиться безпосередньо з умови їх комутування з формально нескінченно продовженими елементами алгебри. А саме, шукаємо оператор інваріантного диференціювання як оператор повного диференціювання D_x з додатковим множником λ, що залежить від x та $y_{(\nu)}$: $X = \lambda(x, y_{(\nu)})D_x$, де $\lambda\colon M^{(\nu)} \to \mathbb{R}$. Функція λ неявно визначається рівнянням $\varphi(x, y_{(\nu)}, \lambda) = 0$, де φ задовольняє умову:

$$\overline{\zeta_i^\nu}\varphi = 0, \qquad \overline{\zeta_i^\nu} = \xi_i\partial_x + \eta_i\partial_y + \eta_i^1\partial_{y'} + \cdots + \eta_i^\nu\partial_{y^{(\nu)}} + (\lambda D_x)\xi_i\partial_\lambda.$$

Іншими словами, $\varphi(x, y_{(\nu)}, \lambda)$ має бути інваріантом потоків, породжених векторними полями $\overline{\zeta_i^\nu}$. Зауважимо, що $\operatorname{rank}\{(\overline{\zeta_i^\nu}), i = 1, \ldots, r\} = r$. Універсальний інваріант $\overline{I}$ полів $\overline{\zeta_i^\nu}$ можна представити у вигляді $\overline{I} = (I_\nu, \hat{I})$, де $\hat{I}\colon M^{(\nu)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\partial\hat{I}/\partial\lambda \neq 0$. Таким чином, невідома функція λ знаходиться з умови $\hat{I}(x, y_{(\nu)}, \lambda) = C$ для фіксованої сталої C.

Приклад 4.2. Розглянемо детально алгебру Лі $A^b_{3.5}$, $b \geq 0$, породжену базисними елементами (випадок $N = 17$ таблиці 4.1 та 4.2):

$$e_1 = \partial_y, \quad e_2 = x\partial_y, \quad e_3 = -(1 + x^2)\partial_x + (b - x)y\partial_y.$$

Другі продовження операторів мають вигляд:

$$\begin{aligned} e_1^{(2)} &= \partial_y, \\ e_2^{(2)} &= x\partial_y + \partial_{y'}, \\ e_3^{(2)} &= -(1+x^2)\partial_x + (b-x)y\partial_y - (y-(b+x)y')\partial_{y'} + (b+3x)y''\partial_{y''}. \end{aligned}$$

Оскільки розмірність алгебри $r = 3$ та ранг першого продовження $r_1 = 3$, то ранги решти продовжених алгебр також дорівнюють 3: $r_1 = r_2 = \cdots = r = 3$. В цьому випадку $\nu = 1$. Таким чином, базис диференціальних інваріантів міститься в універсальному диференціальному інваріанті $I_{\nu+1} = I_2$. Визначник Лі $\mathcal{L}$ обчислюється як визначник квадратної матриці, утвореної коефіцієнтами $e_i^{(2)}$, $i = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{L} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -(1+x^2) & (b-x)y & -(y-(b+x)y') \end{pmatrix} = -(1+x^2).$$

Визначник Лі не породжує інваріантних диференціальних рівнянь.

Знайдемо базис диференціальних інваріантів. Диференціальних інваріантів порядків 0 та 1 не існує, оскільки $d_0 = 0 + 2 - 2 = 0$ та $d_1 = 1 + 2 - r_1 = 0$. Універсальний диференціальний інваріант I_2, так само як і базис диференціальних інваріантів, утворений єдиною (оскільки $d_2 = 2 + 2 - r_2 = 1$) функцією $I = I(x, y, y', y'')$. Остання визначається умовами $e_i^{(2)} I = 0$, $i = 1, 2, 3$, які еквівалентні перевизначеній лінійній системі диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I}{\partial y} = 0, \quad x\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial y'} = 0, \\ &-(1+x^2)\frac{\partial I}{\partial x} + (b-x)y\frac{\partial I}{\partial y} - (y-(b+x)y')\frac{\partial I}{\partial y'} + (b+3x)y''\frac{\partial I}{\partial y''} = 0. \end{aligned}$$

З двох перших рівнянь слідує, що $I = I(x, y'')$. Базис диференціальних інваріантів цієї реалізації знаходимо як набір функціонально незалежних інтегралів для редукованої характеристичної системи для третього рівняння: $I_2 = \{y''(1+x^2)^{\frac{3}{2}} e^{b \arctan x}\}$.

Остання задача, яку слід розв'язати, щоб описати усі диференціальні інваріанти цієї реалізації,— це побудова оператора інваріантного диференціювання.

Шукаємо оператор інваріантного диференціювання у вигляді $\lambda(x,y,y')D_x$. Тут D_x — оператор повного диференціювання. Функція λ неявно задається рівнянням $\varphi(x,y,y',\lambda)=0$, де φ — несталий розв'язок перевизначеної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad x\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=0,$$

$$(1+x^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x}-(b-x)y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(y-(b+x)y')\frac{\partial\varphi}{\partial y'}+2x\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0.$$

Два перші рівняння дають умову $\varphi=\varphi(x,\lambda)$. Тоді останнє рівняння містить умову $\varphi=\varphi(\omega)$, де $\omega=\lambda(1+x^2)^{-1}$, тобто функція λ знаходиться з рівняння $\lambda(1+x^2)^{-1}=1$. Відповідний оператор інваріантного диференціювання має вигляд $(1+x^2)D_x$.

Всі отримані результати представлені у вигляді таблиці 4.2 та можуть застосовуватись для групової класифікації звичайних диференціальних рівнянь довільного фіксованого порядку. Аналогічно можна описувати диференціальні інваріанти груп перетворень з невеликою кількістю параметрів в просторах більше ніж двох змінних, використовуючи класифікацію реалізацій низькорозмірних алгебр Лі [124] та застосовувати їх до дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Зауваження 4.4. Вигляд диференціальних інваріантів суттєво залежить від явного вигляду реалізацій. Таким чином, для того, щоб побудувати оптимальний набір інваріантів, слід вибирати оптимальний вигляд реалізацій. Наприклад, для реалізації $\langle e^{-bx}\sin x\partial_y,\ e^{-bx}\cos x\partial_y,\ \partial_x\rangle$, де $b\geq 0$ $(N=17)$, фундаментальний диференціальний інваріант, оператор інваріантного диференціювання та визначник Лі мають вигляд:

$$I_2=y''+2by'+(b^2+1)y,\quad X=D_x,\quad L=-e^{-2bx}.$$

Для еквівалентної реалізації $\langle \partial_y,\ x\partial_y,\ -(1+x^2)\partial_x + (b-x)y\partial_y \rangle$, що розглядалась у прикладі 4.1, відповідні інваріанти складніші:

$$I_2 = y''(1+x^2)^{3/2} e^{b \arctan x}, \quad X = (1+x^2)D_x, \quad L = -(1+x^2).$$

Випадки, позначені "$*$" у таблиці 4.2 відрізняються від випадків з такими ж номерами зміною ролей залежної і незалежної змінних. Вони наведені одночасно, оскільки різні форми можуть бути зручними для різних застосувань.

У таблиці 4.2 також використовуються наступні позначення:

$$S_{k+3} = (k+1)^2\big(y^{(k)}\big)^2 y^{(k+3)} - 3(k+1)(k+3)y^{(k)}y^{(k+1)}y^{(k+2)} + \\ + 2(k+2)(k+3)\big(y^{(k+1)}\big)^3,$$

$$Q_{k+2} = (k+1)y^{(k)}y^{(k+2)} - (k+2)\big(y^{(k+1)}\big)^2, \quad \tilde{Q}_3 = y'''B_1 - 3y'(y'')^2,$$

$$B_0 = 1 + x^2 + y^2, \quad B_1 = 1 + (y')^2,$$

$$P_{i,j}(\varphi,\psi) = \varphi^{(i)}\psi^{(j)} - \varphi^{(j)}\psi^{(i)}, \quad R_4 = 3y''y^{\mathrm{IV}} - 5(y''')^2,$$

$$\tilde{U}_5 = 4y^{\mathrm{V}}B_1^3 Q + 10y^{\mathrm{IV}}y''B_1^3\left(4y'''y' + 3(y'')^2\right) - 5(y^{\mathrm{IV}})^2 B_1^4 + \\ + 40(y''')^2(y'')^2\left((y')^2 - 2\right)B_1^2 - 40(y''')^3 y' B_1^3 - \\ - 180y'''y'(y'')^4\left((y')^2 - 1\right)B_1^2 - (y'')^6\left(45(6(y')^2 + 1) - 135(y')^4\right),$$

$$U_5 = (y')^2\left(Q_3 D_x^2 Q_3 - \tfrac{5}{4}(D_x Q_3)^2\right) + y'y''Q_3 D_x Q_3 - \left(2y'y''' - (y'')^2\right)Q_3^2,$$

$$V_7 = (y'')^2\big(S_5 D_x^2 S_5 - \tfrac{7}{6}(D_x S_5)^2\big) + y''y'''S_5 D_x S_5 - \tfrac{1}{2}\left(9y''y^{\mathrm{IV}} - 7(y''')^2\right)S_5^2,$$

$$W(f_1, f_2, \dots, f_r) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_r(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_r'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(r-1)}(x) & f_2^{(r-1)}(x) & \dots & f_r^{(r-1)}(x) \end{vmatrix},$$

$$K_r(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r) = y^{(r)} + c_1 y^{(r-1)} + c_1 y^{(r-1)} + \dots + c_r y,$$

де $c_1, \dots, c_r$ — сталі коефіцієнти звичайного диференціального рівняння r-го порядку $\eta^{(r)}(x) + c_1\eta^{(r-1)}(x) + \dots + c_r\eta(x) = 0$ розв'язками якого є функції $\eta_1(x)$, …, $\eta_r(x)$.

Таблиця 4.2. Диференціальні інваріанти, оператори інваріантного диференціювання та визначники Лі реалізацій алгебр Лі на площині.

N	Базис диференціальних інваріантів	Оператор	визначник Лі
1	y	D_x	const
1*	x, y'	D_x	const
2	y', y''	D_x	const
3	y, $\frac{y''}{y'^3}$	$\frac{1}{y'}D_x$	$-(y')^2$
3*	x, y''	D_x	const
4	y'	yD_x	y
5	y, $\frac{y''}{(y')^2}$	$\frac{1}{y'}D_x$	y'
5*	x, $\frac{y''}{y'}$	D_x	y'
6	x, $y''\xi_1'''(x) - y'''\xi_1''(x)$	D_x	$\xi_1''(x)$
7	$\frac{y''}{y'}$	D_x	y'
8	$y'' + y'$	D_x	$-e^{-x}$
9	y''	D_x	const
10	$y''e^{y'}$	$e^{y'}D_x$	const
11	$y'' + 2y' + y$	D_x	$-e^{-2x}$
12	$\frac{y'''}{(y'')^2}$	$\frac{1}{y''}D_x$	$-y''$
13	x, $\frac{y'''}{y''}$	D_x	$-y''$

Таблиця 4.2. (Продовження.)

N	Базис диференціальних інваріантів	Оператор	визначник Лі
14	$y''y'^{\frac{2-a}{a-1}}$	$(y')^{\frac{1}{a-1}}D_x$	$(a-1)y'$
15	$y''+(a+1)y'+ay$	D_x	$(1-a)e^{-(1+a)x}$
16	$y''e^{-c\arctan y'}B_1^{-3/2}$	$e^{-c\arctan y'}B_1^{-1/2}D_x$	B_1
17	$y''+2by'+(b^2+1)y$	D_x	$-e^{-2bx}$
18	$(y''y+(y')^2+1)B_1^{-3/2}$	$2yB_1^{-1/2}D_x$	$2y^2B_1$
19	$(y''(x-y)+2y'(1+y'))(y')^{-3/2}$	$(x-y)(y')^{-1/2}D_x$	$2y'(x-y)^2$
20	y^3y''	y^2D_x	y^2
21	$x,\ (y')^{-2}Q_3$	D_x	$y(y-x)y'$
21*	$y,\ (3y''^2-2y'y''')(y')^{-4}$	$\frac{1}{y'}D_x$	y'
22	$y''B_0B_1^{-3/2}+2(y-xy')B_1^{-1/2}$	$B_0B_1^{-1/2}D_x$	$B_0^2B_1$
23	$x,\ y'''P_{2,4}(\xi_1,\xi_2)+y''P_{4,3}(\xi_1,\xi_2)+y^{(4)}$	D_x	$P_{2,3}(\xi_1,\xi_2)$
24	$\frac{y'y'''}{(y'')^2}$	$\frac{y'}{y''}D_x$	$y'y''$
25	$\frac{y'''+y''}{y''+y'}$	D_x	$-e^{-x}(y''+y')$
26	$y'''+2y''+y'$	D_x	$-e^{-2x}$
27	$y'''+(1+a)y''+ay'$	D_x	$a(a-1)e^{-(1+a)x}$
28	$y'''+2by''+(1+b^2)y'$	D_x	$-(1+b^2)e^{-2bx}$
29	$S_3Q_2^{-3/2}$	$\sqrt{\frac{y}{y''}}D_x$	$-2y^2y''$
30	$Q_3(y')^{-4}$	$\frac{1}{y'}D_x$	$2y'^2$
31	y'''	D_x	const
32	$y'''+(b+2)y''+(2b+1)y'+by$	D_x	$(b-1)^2e^{-(b+2)x}$
33	$y'''+y''$	D_x	$-e^{-x}$
34	$y'''+3y''+3y'+y$	D_x	$-e^{-3x}$
35	$x,\ P_{2,4}(\xi_1,y)/P_{2,3}(\xi_1,y)$	D_x	$P_{2,3}(\xi_1,y)$
36	$y'''+(a+b+1)y''+(ab+a+b)y'+aby$	D_x	$\frac{(b-a)(1-a)(1-b)}{e^{(a+b+1)x}}$
37	$y'''+(2b+a)y''+(b^2+2ab+1)y'+a(b^2+1)y$	D_x	$\frac{((b-a)^2+1)}{e^{(2b+a)x}}$

Таблиця 4.2. (Продовження.)

N	Базис диференціальних інваріантів	Оператор	визначник Лі
38	$y'''e^{\frac{y''}{2}}$	$e^{\frac{y''}{2}}D_x$	const
39	$b=1:\quad y'',\ y^{\mathrm{IV}}(y''')^{-2}$	$\frac{1}{y'''}D_x$	y'''
	$b\neq 1:\quad (y'')^{\frac{2-b}{b-1}}$	$y''^{\frac{1}{b-1}}D_x$	$(1-b)y''$
40	$\frac{y'''}{y''}$	D_x	$-y''$
41	$(y'')^{-2}B_1y'''-3y'$	$\frac{B_1}{y''}D_x$	$3y''B_1$
42	$\frac{y'''+y'}{y''+y}$	D_x	$y''+y$
43	$(3y''y^{\mathrm{IV}}-5(y''')^2)(y'')^{-8/3}$	$(y'')^{-1/3}D_x$	y''
44	$S_5R_4^{-3/2}$	$y''R_4^{-1/2}D_x$	$(y'')^2R_4$
45	$\tilde{U}_5\tilde{Q}_3^{-3}$	$B_1\tilde{Q}_3^{-1/2}D_x$	$-16B_1\tilde{Q}_3^2$
46	$U_5Q_3^{-3}$	$y'Q_3^{-1/2}D_x$	$-4y'Q_3^{-2}$
47	$V_7S_5^{-8/3}$	$y''S_5^{-1/3}D_x$	$-2y''S_5^2$
48	$x,\ W(y'',\xi_1'',\xi_2'',\ldots,\xi_r'')$	D_x	$W(\xi_1'',\xi_2'',\ldots,\xi_r'')$
49	$x,\ D_x\ln\lvert W(y'',\xi_1'',\xi_2'',\ldots,\xi_r'')\rvert$	D_x	$W(y'',\xi_1'',\ldots,\xi_r'')$
50	$K_r(\eta_1,\ldots,\eta_r)$	D_x	$W(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_r)$
51	$D_x\ln\lvert K_r(\eta_1,\ldots,\eta_r)\rvert$	D_x	$W(y,\eta_1,\ldots,\eta_r)$
52	$c\neq r+1:\quad (y^{(r+1)})^{\frac{2-c+r}{c-r-1}}y^{(r+2)}$	$(y^{(r+1)})^{\frac{1}{c-r-1}}D_x$	$y^{(r+1)}$
	$c=r+1:\quad y^{(r+1)},\ \frac{y^{(r+3)}}{(y^{(r+2)})^2}$	$\frac{1}{y^{(r+2)}}D_x$	$y^{(r+2)}$
53	$y^{(r+1)}e^{\frac{y^{(r)}}{r!}}$	$e^{\frac{y^{(r)}}{r!}}D_x$	const
54	$\frac{y^{(r+1)}y^{(r+3)}}{(y^{(r+2)})^2}$	$\frac{y^{(r+1)}}{y^{(r+2)}}D_x$	$y^{(r+1)}y^{(r+2)}$
55	$Q_{r+3}(y^{(r+1)})^{-\frac{2r+8}{r+2}}$	$(y^{(r+1)})^{-\frac{2}{r+2}}D_x$	$y^{(r+1)}$
56	$S_{r+4}Q_{r+3}^{-3/2}$	$y^{(r+1)}Q_{r+3}^{-1/2}D_x$	$y^{(r+1)}Q_{r+3}$

4.4. Висновки до розділу 4

У розділі 4 побудовано усі нееквівалентні реалізації три- та чотиривимірних нерозв'язних алгебр Лі, отримано класифікацію алгебр Лі векторних полів, що діють на дійсній площині та повний опис їх диференціальних інваріантів.

Результати цього розділу можна застосувати до групової класифікації звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку над полем дійсних чисел та для побудови рівнянь в частинних похідних та їх систем, інваріантних відносно дійсних нерозв'язних алгебр Лі розмірностей не вище чотирьох, а також до теорії індукованих зображень, до побудови різницевих схем для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, для знаходження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь за допомогою нелокальних перетворень [51] та ін.

Основні результати розділу 4 опубліковано в роботах [109–111, 113].

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином:

1. Розроблено теоретичні основи для вивчення контракцій алгебр Лі над дійсним і комплексним полями та запропоновано нові необхідні критерії існування контракцій алгебр Лі. Побудовано ряд важливих прикладів, які спростовують відомі гіпотези і твердження та дають підстави для формулювання нових гіпотез.

2. Доведено теорему, що містить повний перелік необхідних критеріїв існування контракцій низькорозмірних алгебр Лі. На основі цієї теореми виокремлено усі випадки, коли між двома фіксованими алгебрами не існує контракцій.

3. Сформульовано алгоритм знаходження контракцій скінченновимірних алгебр Лі, за допомогою якого описано всі слабо нееквівалентні контракції дійсних низькорозмірних алгебр Лі. Використовуючи отримані контракції, досліджено рівні та ко-рівні низькорозмірних алгебр Лі відносно контракцій та розширено класифікацію контракцій на випадок комплексного поля.

4. Знайдено всі нееквівалентні реалізації дійсних нерозв'язних алгебр Лі розмірностей не вищих ніж чотири векторними полями в просторі довільної скінченної кількості змінних.

5. Отримано повну класифікацію алгебр Лі векторних полів, що діють на площині, та вичерпно описано множину їх диференціальних інваріантів, а саме: базиси диференціальних інваріантів, визначники Лі та оператори інваріантного диференціювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1980. — 456 с.

[2] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964. — 356 с.

[3] Дынкин Е.Б. Структура полупростых алгебр // Усп. матем. наук. — 1947. — **2**, № 4 (20). — С. 59–127.

[4] Жданов Р.З., Лагно В.И. О новых реализациях групп Пуанкаре $P(1,2)$, $P(2,2)$ // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 4. — С. 447–462.

[5] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. — Новокузнецкий Физико-математический институт. — 2000. — 308 с.

[6] Крючкович Г.И. Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений // Усп. матем. наук. — 1954. — **9**, № 1 (59). — С. 3–40.

[7] Крючкович Г.И. О движениях в полуприводимых римановых пространствах // Усп. матем. наук. — 1957. — **12**, № 6 (78). — С. 149–156.

[8] Лыхмус Я.Х. Предельные (сжатые) группы Ли // Труды Второй летней школы по вопросам физики элементарных частиц (Отепаа, 1967), Часть IV, Ин-т физики и астрономии АН Эстонской ССР, Эстония — 1969. — С. 3–132.

[9] Морозов В.В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1958. — № 4 (5). — С. 161–171.

[10] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — № 1 (32). — С. 114–123.

[11] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — № 3 (34). — С. 99–106.

[12] Мубаракзянов Г.М. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — № 4 (35). — С. 104–116.

[13] Мубаракзянов Г.М. Некоторые теоремы о разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1966. — № 6 (55). — С. 95–98.

[14] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[15] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[16] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966. — 495 с.

[17] Сафиуллина Е.Н. Классификация нильпотентных алгебр Ли размерности 7 / Кандидатская диссертация.— Казанский университет — 1964.

[18] Agaoka Y. On the variety of 3-dimensional Lie algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics — 1999. — **3**. — P. 5–17.

[19] Agaoka Y. An algorithm to determine the isomorphism classes of 4-dimensional complex Lie algebras // Linear Algebra Appl. — 2002. — **345**. — P. 85–118.

[20] Amaldi U. Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario, part I // Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane — 1901. — **39**. — P. 273–316.

[21] Amaldi U. Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario, part II // Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane — 1902. — **40**. — P. 105–141.

[22] Andrada A., Barberis M.L., Dotti I., Ovando G. Product structures on four dimensional solvable Lie algebras // Homology Homotopy Appl. — 2005. — **7**. — P. 9–37.

[23] Barut A.O. Conformal group to Schrödinger group to dynamical group-The maximal kinematical group of the massive Schrödinger particle // Helv. Phys. Acta — 1973. — **46**. — P. 496–503.

[24] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. — 2001. — **69**. — P. 43–94.

[25] Bianchi L. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni. — Pisa: Spoerri. — 1918. — 590 p.

[26] Borel A. Linear algebraic groups. — Benjamin, Inc. —1969.

[27] Bourlioux A., Cyr-Gagnon C., Winternitz P. Difference schemes with point symmetries and their numerical tests // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — **39**. — P. 6877–6896.

[28] Boyko V., Patera J., Popovych R. Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — **39**. — P. 5749–5762.

[29] Bratzlavsky F. Sur les algebres et les groupes de Lie résolubles de dimension trois et quatre. — Memoire de Licence, Université Libre de Bruxelles — 1959.

[30] Brennich R.H. Analytic contraction of Lie-groups // Rep. Math. Phys. — 1974. — **6**. — P. 343–360.

[31] Burde D. Degenerations of nilpotent Lie algebras // J. of Lie Theory — 1999. — **9**. — P. 193–202.

[32] Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras // Comm. Algebra2005. —**33**. — P. 1259–1277.

[33] Burde D., Steinhoff C. Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras // J. Algebra — 1999. — **214**. — P. 729–739.

[34] Campoamor-Stursberg R. A contraction formula for the invariants of the coadjoint representation of Lie algebras // Algebras Groups Geom. — 2002. — **19**. — P. 385–394.

[35] Campoamor-Stursberg R. Contractions of Lie algebras and generalized Casimir invariants // Acta Phys. Polon. B — 2003. — **34**. — P. 3901–3919.

[36] Carinena J.F., Grabowski J., Marmo G. Some physical applications of systems of differential equations admitting a superposition rule // Rep. Math. Phys. — 2001. — **48**. — P. 47–58.

[37] Carles R. Variétés des algèbres de Lie de dimension inférieure ou égale à 7 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B — 1979. — **289**. — P. A263–A266.

[38] Carles R., Diakité Y. Sur les varietes d' algebres de Lie de dimension ≤ 7 // J. Algebra — 1984. — **91**. — P. 53–63.

[39] Celeghini E., Tarlini M. Contraction of group representations II // Nuovo Cimento B — 1981. — **65**. — P. 172–180.

[40] Cerquetelli N., Ciccoli N., Nucci M.C. Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth order ordinary differential equations // J. Nonlinear Math. Phys. — 2002. — **9**, № 2. — P. 24–35.

[41] Conatser C.W. Contractions of the low-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. — 1972. — **13**. — P. 196–203.

[42] de Graaf W.A. Classification of solvable Lie algebras // Exp. Math. — 2005. — **14**. — P. 15–25.

[43] de Montigny M. Graded contractions of affine Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 1996. — **29**. — P. 4019–4034.

[44] de Montigny M., Patera J. Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — **24**. — P. 525–547

[45] de Montigny M., Niederle J., Nikitin A.G. Galilei invariant theories. I. Constructions of indecomposable finite-dimensional representations of the homogeneous Galilei group: directly and via contractions // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — **39**. — P. 9365–9385.

[46] Dobrescu A. La classification des groupes de Lie réels a quatre parametres // Acad. Repub. Pop. Roumaine Stud. Cerc. Mat. — 1953. — **4**. — P. 395–436.

[47] Doebner H.D., Melsheimer O. Limitable dynamical groups in quantum mechanics. I. General theory and a spinless model // J. Math. Phys. — 1968. — **9**. — P. 1638–1656.

[48] Doebner H.D., Melsheimer O. On a class of generalized group contractions // Nuovo Cimento A(10) — 1967. — **49**. — P. 306–311.

[49] Doubrov B.M., Komrakov B.P. Contact Lie algebras of vector fields on the plane // Geometry and Topology — 1999. — **3**. — P. 1–20.

[50] Dozias J. Sur les algèbres de Lie résolubles réelles de dimension inférieure ou égale à 5. — Thèse de 3 cycle, Faculté des Sciences de Paris — 1963.

[51] Edelstein R.M., Govinder K.S., Mahomed F.M. Solution of ordinary differential equation via nonlocal transformations // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — **34**. — P. 1141–1152.

[52] Ellis G.F.R., Sciama D.W. On a class of model universes satisfying the perfect cosmological principle // Perspectives in Geometry and Relativity (Essays in honour of V. Hlavatý), Editor B. Hoffman, Bloomington, Indiana University Press — 1966. — P. 150–160.

[53] Fels M., Olver P.J. Moving coframes: I. A practical algorithm // Acta Appl. Math. — 1998. — **51**. — P. 161–213.

[54] Fels M., Olver P.J. Moving coframes: II. Regularization and theoretical foundations // Acta Appl. Math. — 1999. — **55**. — P. 127–208.

[55] Fialowski A., O'Halloran J. A comparison of deformations and orbit closure // Comm. Algebra. — 1990. — **18**. — P. 4121–4140.

[56] Fialowski A., Penkava M. Deformations of four dimensional Lie algebras // math.RT/0512354.

[57] Fialowski A., de Montigny M. Deformations and contractions of Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — **38**. — P. 6335–6349.

[58] Fushchych W.I., Lahno V.I., Zhdanov R.Z. On nonlinear representations of the conformal algebra $AC(2,2)$ // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1993. — **9**. — P. 44–47.

[59] Fushchych W.I., Tsyfra I.M., Boyko V.M. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic field // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 2. — P. 210–221.

[60] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotations group $O(n)$ and its extensions: $E(n)$, $P(1,n)$, $G(1,n)$ // Acta Appl. Math. — 1992. — **28**, № 1. — P. 69–92.

[61] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries of nonlinear Dirac equations. — Kyiv, Mathematical Ukraina Publishers. — 1997.

[62] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Lahno V.I. On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie

vector fields // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 3. — P. 295–308.

[63] Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras // Ann. Math. — 1964. — **79**. — P. 59–103.

[64] Gilmore R. Lie groups, Lie algebras, and some of their applications. — Wiley-Interscience — 1974. — 579 p.

[65] Gong M.P. Classifcation of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and R). — Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada. — 1998. — 165 p.

[66] González-López A., Kamran N., Olver P.J. Lie algebras of differential operators in two complex variables // American J. Math. — 1992. — **114**. — P. 1163–1185.

[67] Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P.J., Lie algebras of vector fields in the real plane // Proc. London Math. Soc. — 1992. — **64**. — P. 339–368.

[68] Gorbatsevich V.V. Contractions and degenerations of finite-dimensional algebras // Soviet Math. (Iz. VUZ) — 1991. — **35**,№10. — P. 17–24.

[69] Gorbatsevich V.V. Anticommutative finite-dimensional algebras of the first three levels of complexity // St. Petersburg Math. J. — 1994. — **5**. — P. 505–521.

[70] Gorbatsevich V.V. On the level of some solvable Lie algebras // Siberian Math. J. — 1998. — **39**. — P. 872–883.

[71] Goze M., Khakimdjanov Yu. Nilpotent Lie algebras. — Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Mathematics and its Applications, **361**. — 1996.

[72] Grunewald F., O'Halloran J. Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six // J. Algebra — 1988. — **112**. — P. 315–325.

[73] Grunewald F., O'Halloran J. Deformations of Lie algebras // J. Algebra — 1993. — **162** 210–224.

[74] Havlicek M., Patera J., Pelantova E., Tolar J. On Pauli graded contractions of $sl(3, \mathbb{C})$ // J. Nonlin. Math. Phys. — 2004. — **11**. — P. 37–42.

[75] Hegerfeldt G.C. Some properties of a class of generalized Inönu–Wigner contractions // Nuovo Cimento A (10) — 1967. — **51**. — P. 439–447.

[76] Hermann R. Lie groups for physisits. — Benjamin Inc., N.Y. — 1966.

[77] Holman W.J. The asymptotic forms of the fano function: The representation functions and Wigner coefficients of $SO(4)$ and $E(3)$ // Ann. Phys. — 1969. — **52**. — P. 176–191.

[78] Huddleston P.L. Inönu–Wigner contractions of the real four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. — 1978. — **19**. — P. 1645–1649.

[79] Inönu E. Contractions of Lie groups and their representations / Group theoretical concepts and Methods in elementary particle physics (Lectures Istanbul Summer School Theoret. Phys., 1962). — New York: Gordon and Breach, 1964. — P. 391–402.

[80] Inönu E., Wigner E.P. On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1953. — **39**. — P. 510–524.

[81] Inönu E., Wigner E.P. On a particular type of convergence to a singular matrix // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1954. — **40**. — P. 119–121.

[82] Kantor I.L., Patera J. A construction of transitively differential groups of degree 3 // J. Math. Phys. — 1994. — **35**, N 1. — P. 443–458.

[83] Kirillov A.A., Neretin Yu.A. The variety A_n of n-dimensional Lie algebra structures // Amer. Math. Soc. Transl. — 1984. — **137**, № (2). — P. 21–30.

[84] Lahno V.I. Realizations of the Poincaré algebra and Poincaré-invariant equations in three-dimensional space-time // Rep. Math. Phys. — 2000. — **46**, № 1/2. — P. 137–142.

[85] Lahno V., Zhdanov R. Towards a classification of realizations of the Euclid algebra $e(3)$ // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. — **30**. — С. 146–150.

[86] Lauret J. Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups // Differential Geom. Appl. — 2003. — **18**. — P. 177–194.

[87] Lee H.C. Sur les groupes de Lie réels à trois paramètres // J. Math. Pures Appl. — 1947. — **26**. — P. 251–267.

[88] Lie S., Über Differentiation // Math. Ann. — 1884. — **24**. — P. 537–578.

[89] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. — Leipzig: B.G. Teubner, 1891. — 568 s.

[90] Lie S. Gruppenregister, Gesammetle Abhandlungen, Vol. 5. — Leipzig: B.G. Teubner, 1924, P. 767–773.

[91] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen // Math. Ann. — 1880. — **16**. — P. 441–528; див. також Gesammetle Abhandlungen, Vol. 6, Leipzig, B.G. Teubner, 1927, 1–94.

[92] Lie S. Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Naturv. — 1883. — **9**. — P. 371–393.

[93] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, Vol.1–3. — Leipzig, 1888, 1890, 1893, — 645 s., 568 s., 830 s.

[94] Levine R.D. Lie algebraic approach to molecular structure and dynamics / Mathematical Frontiers in Computational Chemical Physics, ed. D.G. Truhlar // IMA Volumes in Mathematics and its Applications. — New York: Springer-Verlag — 1988. — **15**. — P. 245–261.

[95] Levy-Nahas M. Deformation and contraction of Lie algebras // J. Math. Phys. — 1967. —**8**. — P. 1211–1222.

[96] Lõhmus J., Tammelo R. Contractions and deformations of space-time algebras. I. General theory and kinematical algebras // Hadronic J. — 1997. — **20**. — P. 361–416.

[97] Lutfullin M. On covariant realizations of the Poincaré group $P(1,3)$ // Rep. Math. Phys. — 2002. — **50**, № 1. — P. 195–209.

[98] Lutfullin M. Realization of the Euclidian algebra within the class of complex Lie vector field // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. — **30**. — С. 151–156.

[99] Lutfullin M., Popovych R. Realizations of real 4-dimensional solvable decomposed Lie algebras // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **43**. — С. 466–469.

[100] MacCallum M.A.H. On the enumeration of the real four-dimensional Lie algebras / On Einstein's Path: essays in honor of Engelbert Schucking. — New York: Springer Verlag, 1999. — P. 299–317.

[101] Magnin L. Sur les algebres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7 // J. Geom. Phys. — 1986. — **3**. — P. 119–144.

[102] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations // J. Math. Phys. — 1989. — **30**, № 12. — P. 2770–2777.

[103] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Symmetry Lie algebras on n-th order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1990. — **151** — P. 80–107.

[104] Mickelsson J., Niederle J. Contraction of representations of de Sitter groups // Commun. Math. Phys. — 1972. — **27**. — P. 167–180.

[105] Milson R. Representations of finite-dimensional Lie algebras by first-order differential operators. Some local results in the transitive case // J. London Math. Soc. (2) — 1995. — **52**, № 2. — P. 285–302.

[106] Moody R.V., Patera J. Discrete and coninous graded contractions of representations of Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — **24**. — P. 2227–2257.

[107] Ndogmo J.-C., Winternitz P. Solvable Lie algebras with abelian nilradicals // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — **27**, № 2. — P. 405–423.

[108] Neretin Yu.A. An estimate for the number of parameters defining an n-dimensional algebr // Math. USSR-Izv. —1988. — **30**. — P. 283–294.

[109] Nesterenko M. Realizations of real unsolvable low-dimensional Lie algebras / Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2003. — P. 55.

[110] Nesterenko M. Differential invariants of transformation groups on the real plane // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2004. — **50**, ч. 1. — С. 211–213.

[111] Nesterenko M. Transformation groups on real plane and their differential invariants // Int. J. Math. Math. Sci. — 2006. — **2006**, Article ID 17410. — 17 pages.

[112] Nesterenko M., Boyko V. Realizations of indecomposable solvable 4-dimensional real Lie algebras // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **43**, ч. 2. — С. 474–477.

[113] Nesterenko M., Popovych R. Realizations of real unsolvable low-dimensional Lie algebras // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **55**. — С. 163–168.

[114] Nesterenko M., Popovych R. Contractions of low-dimensional Lie algebras // math-ph/0608018. — 2006. — 46 pages.

[115] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations // Lie Groups and Appl. — 1994. — **1**. — P. 177–192.

[116] Olver P. Equivalence, invariants, and symmetry. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — 525 p.

[117] Onishchik A.L., Vinberg E.B. Lie groups and Lie algebras III. Structure of Lie groups and Lie algebras. Encyclopaedia of Mathematical Science. — Springer, Berlin. — 1994. — **41**.

[118] Patera J. Graded contractions of Lie algebras, representations and tensor products // AIP Conf. Proc. — New York: Amer. Inst. Phys. — 1992. — **266**. — P. 46–54.

[119] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys. — 1976. — **17**, № 6. — P. 986–994.

[120] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. — 1977. — **18**, № 7. — P. 1449–1455.

[121] Patera J., Zassenhaus H. The construction of solvable Lie algebras from equidimensional nilpotent algebras // Linear Algebra Appl. — 1990.— **133**. — P. 89–120.

[122] Patera J., Zassenhaus H. Solvable Lie algebras of dimension ≤ 4 over perfect fields // Linear Algebr. Appl. — 1990. — **142**. — P. 1–17.

[123] Popovych R., Boyko V. Differential invariants and application to Riccati-type systems // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **43**. — С. 184–193.

[124] Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — **36**. — P. 7337–7360.

[125] Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // math-ph/0301029v7. — 2005. — 39 pages.

[126] Post G. A class of graded Lie algebras of vector fields and first order differential operators // J. Math. Phys. — 1994. — **35**, N 12. — P. 6838–6856.

[127] Post G. On the structure of transitively differential algebras // J. Lie Theory — 2001. — **11**, N 1. — P. 111–128.

[128] Post G. On the structure of graded transitive Lie algebras // J. Lie Theory — 2002. — **12**, N 1. — P. 265–288.

[129] Rideau G., Winternitz P. Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group // J. Math. Phys. —1993. — **34**, N 2. — P. 558–570.

[130] Rubin J.L., Winternitz P. Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals // J. Phys. A — 1993. — **26**,N 5. — P. 1123–1138.

[131] Saletan E.J. Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. — 1961. — **2**. — P. 1–21.

[132] Schmucker A., Czichowski G. Symmetric algebras and normal forms of third order ordinary differential equations // J. Lie Theory. — 1998. — **8**, № 1. — P. 129–137.

[133] Schwarz F. Solving second-order differential equations with Lie symmetry // Acta Appl. Math. — 2000. — **60**. — P. 39–113.

[134] Seeley C. Degenerations of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over **C** // Comm. Algebra — 1990. — **18**. — P. 3493–3505.

[135] Seeley C. 7-dimensional nilpotent Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — **335**, № 2. — P. 479–496.

[136] Segal I.E. A class of operator algebras which are determined by groups // Duke Math. J. — 1951. — **18**. — P. 221–265.

[137] Sharp W.T. Racah algebra and the contraction of groups // Report AECL-1098, CRT-935; Chalk River, Ontario (Canada) — 1960.

[138] Shnider S., Winternitz P. Classification of systems of nonlinear ordinary differential equations with superposition principles // J. Math. Phys. — 1984. — **25**, № 11. — P. 3155–3165.

[139] Shnider S., Winternitz P. Nonlinear equations with superposition principles and the theory of transitive primitive Lie algebras // Lett. Math. Phys. — 1984. — **8**. — P. 69–78.

[140] Steinhoff C. Klassifikation und Degeneration von Lie Algebren. — Diplomarbeit, Düsseldorf. — 1997. — 90 p.

[141] Tremblay S., Winternitz P. Solvable Lie algebras with triangular nilradicals // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. **31**. — P. 789–806.

[142] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. — 1894. — **18**. — P. 1–88.

[143] Tresse A. Determination des invariants ponctuels de l'equation differentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$ // S. Hirzel, Leiptzig — 1896.

[144] Tsagas Gr. Classification of nilpotent Lie algebras of dimension eight // J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser. — 1999. — **12**, N 3. — P. 179–183.

[145] Tsagas Gr., Kobotis A., Koukouvinos T. Classification of nilpotent Lie algebras of dimension nine whose maximum abelian ideal is of dimension seven // Int. J. Comput. Math. — 2000. — **74**, N 1. — P. 5–28.

[146] Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. — 1988. — **29**, № 10. — P. 2139–2144.

[147] Turkowski P. Solvable Lie algebras of dimension six // J. Math. Phys. — 1990. — **31**, № 6. — P. 1344–1350.

[148] Turkowski P. Structure of real Lie algebras // Linear Algebra Appl. — 1992. — **171**. — P. 197–212.

[149] Vergne M. Reductibilité de la variété des algèbres // C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B — 1966. — **263**. — P. A4–A6.

[150] Vergne M. Variétés des algébres de Lie nilpotente. — Thésis, Fac. Sci. de Paris. — 1966.

[151] Vergne M. Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes // C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B — 1968. —**264**. — P. A867–A870.

[152] Vergne M. Construction de représentations irréductibles des groupes de Lie résolubles / Représentations des groupes de Lie résolubles, Editors P. Bernat et al., Monographies de la Société Mathématique de France, Vol.4, Dunod, Paris — 1972.

[153] Vranceanu G. Lecons de geométrie différentielle. — Bucarest, 1947. — P. 105–111.

[154] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — **34**, № 13. — P. 2883–2911.

[155] Umlauf K.A. Über die Zussammesetzung der endlichen continuierlichen Transformationgruppen, indsbesondere der Gruppen von Range Null. — Leipzig, 1891.

[156] Weimar-Woods E. The three-dimensional real Lie algebras and their contractions // J. Math. Phys. — 1991. — **32**. — P. 2028-2033.

[157] Weimar-Woods E. Contractions of Lie algebras: generalized Inönu–Wigner contractions versus graded contractions // J. Math. Phys. — 1995. — **36**. — P. 4519–4548.

[158] Weimar-Woods E. Contractions, generalized Inönu–Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras // Rev. Math. Phys — 2000. — **12**. — P. 1505–1529.

[159] Yehorchenko I.A. Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations / Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. — Kyiv: Inst. of Math. Acad. of Sci. Ukraine, 1992. — P. 62–66.

[160] Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Fushchych W.I. On covariant realizations of the Euclid group // Comm. Math. Phys. — 2000. — **212**. — P. 535–556.

Додаток А

Алгебраїчні характеристики дійсних низькорозмірних алгебр Лі

У Додатку А зібрані різні результати, що стосуються низькорозмірних алгебр Лі. Дані переліки містять як добре відомі уточнені та виправлені результати, так і нові характеристики, отримані в ході досліджень за темою дисертаційної роботи. Класифікація та нумерація цих алгебр відповідає запропонованій Г.М. Мубаракзяновим. Для кожної алгебри A наведено

- лише ненульові комутатори між базисними елементами,
- ряд похідних,
- нижній центральний ряд,
- групу Int внутрішніх автоморфізмів (а саме, загальний вигляд матриці, що задає Int у вибраному базисі A),
- повну групу автоморфізмів Aut (а саме, загальний вигляд матриці, що задає Aut у вибраному базисі A, завжди маємо на увазі, що ці матриці не вироджені),
- базис алгебри диференціювань Der,
- набір M_0 власних мегаідеалів (за винятком невласних мегаідеалів $\{0\}$ та вся алгебра A, які існують для кожної алгебри),
- набір Ch_0 власних характеристичних ідеалів, які не є мегаідеалами,
- набір I_0 власних ідеалів, які не є характеристичними,

- повний набір S Int-нееквівалентних власних підалгебр впорядкованих відносно розмірностей та структур,
- набір функціонально незалежних інваріантів алгебри.

Використовуємо наступні параметри:

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varkappa, \gamma, \nu, \zeta, p, q, \alpha_{ij}, \theta_i \in \mathbb{R}, \quad p^2 + q^2 = 1,$$

та позначення:

$m^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ (для фіксованих значень $i_1, \ldots, i_k$ та $j_1, \ldots, j_k$) є визначником матриці $(a_{ij})^{i \in \{i_1 \ldots i_k\}}_{j \in \{j_1 \ldots j_k\}}$;

$s^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 j_2}$ є скалярним добутком підстовпчиків та j_2-го стовпчиків, а саме $s^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 j_2} = a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} + a_{i_2 j_1} a_{i_2 j_2} + \cdots + a_{i_k j_1} a_{i_k j_2}$;

E_{ij} (для фіксованих значень i та j) позначає матрицю $(\delta_{ii'} \delta_{jj'})$ де i' та j' пробігають номери рядків та стовпиків відповідно, тобто матриця з одиницею на перетині i-го рядка та j-го стовпчика та рештою нульових елементів;

індекси i, j, k, i', j', k' змінюються від 1 до $\dim A$; δ_{ik} — символ Кронекера.

Перелік нееквівалентних підалгебр тривимірних та чотиривимірних алгебр Лі наведено згідно класифікації Патери та Вінтерніца [120], де базисні елементи підалгебр наведені у такому порядку, що базисні елементи відповідної алгебри диференціювань записані праворуч від крапки з комою. Для абелевих підалгебр крапка з комою, що має стояти вкінці, опускається. Функціонально незалежні набори інваріантів алгебр Лі наведені згідно роботи [119].

А.1. Дійсні двовимірні алгебри Лі

$\boldsymbol{2A_1}$: (абелева)
Ряд похідних: $A^{(1)} = 0$, $A^{(2)} = 0$, ...
Нижній центральний ряд: $A^1 = 0$, $A^2 = 0$, ...

Будь-який векторний підпростір $2A_1$ є підалгеброю а також ідеалом в $2A_1$, крім того $\mathrm{Aut}(2A_1) = GL(2, \mathbb{R})$.

$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{21},\ E_{22} \quad \dim \mathrm{Der} = 4$

$\mathrm{M}_0\colon$ —

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0 = S$

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1 + \varkappa e_2 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$

Зауважимо, що можливе інше нормування параметрів для одновимірних підалгебр: $\langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \rangle$, $0 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1$.

Інваріанти: e_1, e_2

$\boldsymbol{A_{2.1}}$: (розв'язна) $[e_1, e_2] = e_1$
Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1 \rangle$, $A^{(2)} = 0$, ...
Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1 \rangle$, $A^2 = \langle e_1 \rangle$, ...

$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_2} & \theta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{12} \quad \dim \mathrm{Der} = 2$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1 \rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1 \rangle$

Інваріанти: немає

A.2. Дійсні тривимірні алгебри Лі

$\boldsymbol{3A_1}$: [2(0)] (абелева, Біанчі I)

Ряд похідних: $A^{(1)} = 0$, $A^{(2)} = 0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1 = 0$, $A^2 = 0$, ...

Будь-який векторний підпростір $3A_1$ є підалгеброю та ідеалом в $3A_1$, та $\mathrm{Aut}(3A_1) = GL(3, \mathbb{R})$.

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{21},\ E_{22},\ E_{23},\ E_{31},\ E_{32},\ E_{33}$ $\dim \mathrm{Der} = 9$

$\mathrm{M}_0\colon$ —

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0 = S$

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1 + \varkappa e_2 + \gamma e_3 \rangle$, $\langle e_2 + \varkappa e_3 \rangle$, $\langle e_3 \rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1 + \varkappa e_3, e_2 + \gamma e_3 \rangle$, $\langle e_1 + \varkappa e_2, e_3 \rangle$, $\langle e_2, e_3 \rangle$

Зауважимо, що можливе інше нормування параметрів для одновимірних підалгебр: $\langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \rangle$, $0 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \leq 1$.

Інваріанти: e_1, e_2, e_3

$\boldsymbol{A_{2.1} \oplus A_1}$: [(0)(1)] (розкладна, розв'язна, Біанчі III)

$[e_1, e_2] = e_1$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1 \rangle$, $A^{(2)} = 0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1 \rangle$, $A^2 = \langle e_1 \rangle$, ...

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_2} & \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{12},\ E_{32},\ E_{33}$ $\dim \mathrm{Der} = 4$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_1, e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_2 + \varkappa e_3; e_1\rangle$

$\mathrm{S}\colon\ \text{1-dim} \sim A_1\colon \langle pe_3 + qe_2\rangle,\ \ \langle e_1 + \varepsilon e_3\rangle,\ \ \langle e_1\rangle$

$\quad\ \text{2-dim} \sim 2A_1\colon \langle e_2, e_3\rangle,\ \ \langle e_1, e_3\rangle$

$\qquad\qquad \sim A_{2.1}\colon \langle e_2 + \varkappa e_3; e_1\rangle$

Інваріанти: e_3

$\boldsymbol{A_{3.1}}$: $[(0)^2]$ (алгебра Вейля та Гейзенберга, нільпотентна, Біанчі II)

$[e_2, e_3] = e_1$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1\rangle$, $A^{(2)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1\rangle$, $A^2 = 0, \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} m_{23}^{23} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11} + E_{22},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{23},\ E_{32},\ -E_{22} + E_{33} \qquad \dim \mathrm{Der} = 6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_1, pe_2 + qe_3\rangle$

$\mathrm{S}\colon\ \text{1-dim} \sim A_1\colon \langle e_1\rangle,\ \ \langle pe_2 + qe_3\rangle$

$\quad\ \text{2-dim} \sim 2A_1\colon \langle e_1, pe_2 + qe_3\rangle$

Інваріанти: e_1

$\boldsymbol{A_{3.2}}$: $[(1)^2]$ (розв'язна, Біанчі IV)

$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^{(2)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^2 = \langle e_1, e_2\rangle, \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_3} & \theta_3 e^{\theta_3} & \theta_1+\theta_2 \\ 0 & e^{\theta_3} & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{11}+E_{22},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{23} \quad \dim \mathrm{Der} = 4$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3; e_1\rangle$

Інваріанти: $e_1 \exp(-e_2/e_1)$

A

$\boldsymbol{A_{3.3}}$: [2(1)] (розв'язна, Біанчі V)

$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^{(2)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^2 = \langle e_1, e_2\rangle, \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_3} & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_3} & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{11},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{21},\ E_{22},\ E_{23} \quad \dim \mathrm{Der} = 6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1, e_2\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle pe_1 + qe_2\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_3\rangle,\ \langle pe_1 + qe_2\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3; pe_1 + qe_2\rangle$

Інваріанти: e_2/e_1

$\boldsymbol{A^a_{3.4}}$: $[(1)(a)]$ (розв'язна, Біанчі VI)

$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = ae_2,\ -1 \le a < 1,\ a \ne 0$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^{(2)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^2 = \langle e_1, e_2\rangle, \ldots$

Int: $\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{a\theta_3} & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-1 < a < 1,\ a \ne 0$:

Aut: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Der: $E_{11},\ E_{13},\ E_{22},\ E_{23}$ $\dim \mathrm{Der} = 4$

M_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle$

Ch_0: —

I_0: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_1 + \varepsilon e_2\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3; e_1\rangle,\ \langle e_3; e_2\rangle$

Інваріанти: $e_1^{-a}e_2$

$a = -1$ ($\sim p(1,1)$, тобто алгебра Пуанкаре у $\mathbb{R}^{1,1}$):

Aut: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Der: $E_{11},\ E_{13},\ E_{22},\ E_{23}$ $\dim \mathrm{Der} = 4$

M_0: $\langle e_1, e_2\rangle$

Ch_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle$

I_0: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_1 + \varepsilon e_2\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3; e_1\rangle,\ \langle e_3; e_2\rangle$

Інваріанти: e_1e_2

$\boldsymbol{A^b_{3.5}}$: $[(b,1)]$ (розв'язна, Біанчі VII)

$[e_1,e_3]=be_1-e_2,\ [e_2,e_3]=e_1+be_2,\ b\geq 0$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2\rangle$, $A^{(2)}=0,\ \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2\rangle,\ \ldots$

Канонічні комутаційні співвідношення алгебри типу VII за класифікацією Біанчі: $[e_1',e_2']=0$, $[e_1',e_3']=e_2'$, $[e_2',e_3']=-e_1'+he_2'$, $h^2<4$ можна звести до канонічних комутаційних співвідношень алгебри $A^b_{3.5}$ за допомогою заміни базису: $e_1=-\frac{2b}{h}e_1'+be_2'$, $e_2=e_2'$, $e_3=\frac{2b}{h}e_3'$, $b=\frac{h}{\sqrt{4-h^2}}$.

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} \cos\theta_3 e^{b\theta_3} & \sin\theta_3 e^{b\theta_3} & b\theta_1+\theta_2 \\ -\sin\theta_3 e^{b\theta_3} & \cos\theta_3 e^{b\theta_3} & -\theta_1+b\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b>0\colon$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11}+E_{22},\ E_{12}-E_{21},\ E_{13},\ E_{23}\quad \dim\mathrm{Der}=4$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1,e_2\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1,e_2\rangle$

Інваріанти: $(e_1^2+e_2^2)\exp\left(-2b\arctan\dfrac{e_2}{e_1}\right)$

$b=0$ ($\sim e(2)$, тобто алгебра Евкліда у $\mathbb{R}^2$):

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & -\alpha_{11} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11}+E_{22},\ E_{12}-E_{21},\ E_{13},\ E_{23}\quad \dim\mathrm{Der}=4$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1, e_2\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$

Інваріанти: $e_1^2+e_2^2$

$\boldsymbol{sl(2,\mathbb{R})}$: $[e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_1,e_3]=2e_2$
($\sim su(1,1)\sim so(1,2)\sim sp(1,\mathbb{R})$, проста, Біанчі VIII, досконала)

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^{(2)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, …

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, …

Канонічні комутаційні співвідношення алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ можна звести до канонічних комутаційних співвідношень алгебри $so(1,2)$ $[e'_1,e'_2]=-e'_3$, $[e'_2,e'_3]=e'_1$, $[e'_3,e'_1]=e'_2$, за допомогою заміни базису $e'_i=e_j\beta_{ji}$, де

$$(\beta_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac12 & \frac12 \end{pmatrix}.$$

У базисі $\{e'_i\}$ Int співпадає з матричною групою $\mathrm{Lor}(1,2)$ 3×3 матриць Лоренца, тобто

$\mathrm{Int}(so(1,2))\colon\ J^1(\varphi_1)J^2(\varphi_2)J^3(\varphi_3)$, де

$$J^1(\varphi_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi_1 & \sinh\varphi_1 \\ 0 & \sinh\varphi_1 & \cosh\varphi_1 \end{pmatrix},\qquad J^2(\varphi_2)=\begin{pmatrix} \cosh\varphi_2 & 0 & \sinh\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi_2 & 0 & \cosh\varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$J^3(\varphi_3)=\begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\quad \mathrm{Int}(sl(2,\mathbb{R}))\colon\ (\beta_{ij})J^1(\varphi_1)J^2(\varphi_2)J^3(\varphi_3)(\beta_{ij})^{-1}$

$\mathrm{Aut}(so(1,2))$ співпадає з матричною групою $SO(1,2)$ спеціальних псев-

доортогональних 3×3 матриць, які породжуються елементами $\mathrm{Int}(so(1,2)) = \mathrm{Lor}(1,2)$ та додатковим дискретним перетворенням:
$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Таким чином, група автоморфізмів алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ записується у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(sl(2,\mathbb{R}))\colon\ & (\beta_{ij})J^1(\varphi_1)J^2(\varphi_2)J^3(\varphi_3)(\beta_{ij})^{-1}, \\ & (\beta_{ij})\mathcal{E}J^1(\varphi_1)J^2(\varphi_2)J^3(\varphi_3)(\beta_{ij})^{-1} \end{aligned}$$
$\mathrm{Der}\colon\ E_{12}+2E_{23},\ 2E_{21}+E_{32},\ E_{11}-E_{33}\quad \dim\mathrm{Der}=3$

$\mathrm{M}_0\colon$ —

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_1+e_3\rangle$

2-dim $\sim A_{2.1}$: $\langle e_2; e_1\rangle$

Інваріанти: $e_2^2-(e_1e_3+e_3e_2)/2$

***so*(3)**: $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_3,e_1]=e_2,\ [e_1,e_2]=e_3$ $\quad$ ($\sim su(2)\sim sp(1)$, проста, Біанчі IX, досконала)

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^{(2)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, …

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, …

Для алгебри $so(3)$, Aut співпадає з Int і є матричною групою $SO(3)$ спеціальних ортогональних 3×3 матриць, тобто
$$\mathrm{Aut}=\mathrm{Int}\colon\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},\quad \text{де } \alpha_{ij}\alpha_{kj}=\delta_{ik} \text{ та } \det(\alpha_{ij})=1.$$
В явному вигляді будь-яка спеціальна ортогональна 3×3 матриця (α_{ij}) може бути представлена через кути Ейлера φ_i: $(\alpha_{ij})=J^1(\varphi_1)J^2(\varphi_2)J^3(\varphi_3)$, де $J^i(\varphi_i)$ матриця поворотів на кут φ_i відносно i-ї осі:

$$J^1(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}, \qquad J^2(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$J^3(\varphi_3) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{23}+E_{32},\ E_{31}+E_{13},\ E_{12}-E_{21} \quad \dim\mathrm{Der}=3$

$\mathrm{M}_0\colon$ —

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle$

Інваріанти: $e_1^2+e_2^2+e_3^2$

A.3. Дійсні чотиривимірні алгебри Лі

$\boldsymbol{4A_1}$: [3(0)] (абелева)

Ряд похідних: $A^{(1)}=0$, $A^{(2)}=0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1=0$, $A^2=0$, ...

Будь-який векторний підпростір $4A_1$ є підалгеброю та ідеалом в $4A_1$, та $\mathrm{Aut}(4A_1)=GL(4,\mathbb{R})$.

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{14},\ E_{21},\ E_{22},\ E_{23},\ E_{24},\ E_{31},\ E_{32},\ E_{33},\ E_{34},\ E_{41},\ E_{42},\ E_{43},\ E_{44} \quad \dim\mathrm{Der}=16$

$\mathrm{M}_0\colon$ —

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0 = S$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1 + \varkappa e_2 + \gamma e_3 + \zeta e_4\rangle$, $\langle e_2 + \varkappa e_3 + \gamma e_4\rangle$, $\langle e_3 + \varkappa e_4\rangle$, $\langle e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1 + \varkappa e_3 + \gamma e_4, e_2 + \zeta e_3 + \nu e_4\rangle$, $\langle e_1 + \varkappa e_2 + \gamma e_4, e_3 + \zeta e_4\rangle$, $\langle e_2 + \varkappa e_4, e_3 + \gamma e_4\rangle$, $\langle e_1 + \varkappa e_2 + \gamma e_3, e_4\rangle$, $\langle e_2 + \varkappa e_3, e_4\rangle$, $\langle e_3, e_4\rangle$.

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1 + \varkappa e_4, e_2 + \gamma e_4, e_3 + \zeta e_4\rangle$, $\langle e_1 + \varkappa e_2, e_3, e_4\rangle$, $\langle e_2, e_3, e_4\rangle$, $\langle e_1 + \varkappa e_3, e_2 + \gamma e_3, e_4\rangle$

Інваріанти: e_1, e_2, e_3, e_4

$\boldsymbol{A_{2.1} \oplus 2A_1}$: $[2(0)(1)]$ (розкладна, розв'язна)

$[e_1, e_2] = e_1$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1\rangle$, $A^{(2)} = 0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1\rangle$, $A^2 = \langle e_1\rangle$, ...

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_2} & \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

Der: E_{11}, E_{12}, E_{32}, E_{33}, E_{34}, E_{42}, E_{43}, E_{44} $\dim \mathrm{Der} = 8$

M_0: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_3, e_4\rangle$, $\langle e_1, e_3, e_4\rangle$

Ch_0: —

I_0: $\langle pe_3 + qe_4\rangle$, $\langle e_2 + \varkappa e_3 + \gamma e_4; e_1\rangle$, $\langle e_1, pe_3 + qe_4\rangle$, $\langle e_2 + \varkappa(qe_3 - pe_4), pe_3 + qe_4; e_1\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle$, $\langle pe_3 + qe_4\rangle$, $\langle e_2 + \varkappa e_3 + \gamma e_4\rangle$, $\langle e_1 + pe_3 + qe_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_2 + \varkappa(qe_3 - pe_4), pe_3 + qe_4\rangle$, $\langle e_3, e_4\rangle$, $\langle e_1 + qe_3 - pe_4, pe_3 + qe_4\rangle$, $\langle e_1, pe_3 + qe_4\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_2 + \varkappa e_3 + \gamma e_4; e_1\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_2, e_3, e_4\rangle$, $\langle e_1, e_3, e_4\rangle$

$\sim A_{2.1} \oplus A_1$: $\langle e_2 + \varkappa(qe_3 - pe_4), pe_3 + qe_4; e_1\rangle$

Інваріанти: e_3, e_4

$\mathbf{2}\boldsymbol{A}_{\mathbf{2.1}}$: $[(0)(1),(1)\,2(0)]$ (розкладна розв'язна, досконала)

$[e_1,e_2]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_3$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_3\rangle$, $A^{(2)}=0,\ \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_3\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_3\rangle,\ \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_2} & \theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\theta_4} & \theta_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{11},\ E_{12},\ E_{33},\ E_{34}$ $\quad \dim\mathrm{Der}=4$

M_0: $\langle e_1,e_3\rangle,\ \ \langle e_2+\varepsilon e_4;e_1,e_3\rangle$

Ch_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_2;e_1\rangle,\ \langle e_4;e_3\rangle,\ \langle e_2,e_3;e_1\rangle,\ \langle e_1,e_4;e_3\rangle,\ \ \langle e_2+\varkappa e_4;e_1,e_3\rangle$, $\varkappa\neq 0,\pm1$

I_0: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_2+\varkappa e_4\rangle,\ \langle e_2+\varepsilon e_3\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_3\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_2,e_4\rangle,\ \ \langle e_2,e_3\rangle,\ \ \langle e_1,e_4\rangle,\ \ \langle e_1,e_3\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_2+\varkappa e_4;e_1\rangle,\ \ \langle e_4+\varkappa e_2;e_3\rangle,\ \ \langle e_2+\varepsilon e_3;e_1\rangle,\ \ \langle e_4+\varepsilon e_1;e_3\rangle$, $\langle e_2+e_4;e_1+\varepsilon e_3\rangle$

3-dim $\sim A_{2.1}\oplus A_1$: $\langle e_2,e_4;e_1\rangle,\ \ \langle e_2,e_3;e_1\rangle,\ \ \langle e_2,e_4;e_3\rangle,\ \ \langle e_1,e_4;e_3\rangle$

$\sim A_{3.3}$: $\langle e_2+e_4;e_1,e_3\rangle$

$\sim A_{3.4}^a$: $\langle e_2+\varkappa e_4;e_1,e_3\rangle$

Параметр a в алгебрі $A_{3.4}^a$ задовольняє умову:

$$a=\begin{cases} \varkappa, & -1\le\varkappa<1,\ \varkappa\neq0,\\ \frac{1}{\varkappa}, & |\varkappa|>1 \end{cases}$$

Інваріанти: немає

$\boldsymbol{A_{3.1}} \oplus \boldsymbol{A_1}$: $[(0)^2(0)]$ (розкладна нільпотентна)

$[e_2, e_3] = e_1$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1 \rangle$, $A^{(2)} = 0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1 \rangle$, $A^2 = 0$, ...

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} m_{23}^{23} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{12},\ E_{13},\ E_{14},\ E_{11}+E_{22},\ E_{23},\ E_{32},\ E_{11}+E_{33},\ E_{42},\ E_{43},\ E_{44}$

$\dim \mathrm{Der} = 10$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1 \rangle,\ \langle e_1, e_4 \rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_1 + \varkappa e_4 \rangle,\ \langle e_4 \rangle,\ \langle e_1, e_4 + \varkappa(pe_2 + qe_3) \rangle,\ \langle e_1, pe_2 + qe_3 \rangle,\ \langle e_1, pe_2 + qe_3, e_4 \rangle,$
$\quad \langle e_2 + \nu e_4, e_3 + \gamma e_4; e_1 \rangle,\ \ \varkappa \neq 0$

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1 + \varkappa e_4 \rangle,\ \langle e_4 \rangle,\ \langle pe_2 + qe_3 + \varkappa e_4 \rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_4 + \varkappa(pe_2 + qe_3) \rangle,\ \langle e_4, pe_2 + qe_3 \rangle,\ \langle e_1 + \varkappa e_4, pe_2 + qe_3 \rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, pe_2 + qe_3, e_4 \rangle$

$\sim A_{3.1}$: $\langle e_2 + \varkappa e_4, e_3 + \gamma e_4; e_1 \rangle$

Інваріанти: e_1, e_4

$\boldsymbol{A_{3.2}} \oplus \boldsymbol{A_1}$: $[(0)(1)^2]$ (розкладна розв'язна)

$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2 \rangle$, $A^{(2)} = 0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $A^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$, ...

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_3} & \theta_3 e^{\theta_3} & \theta_1 + \theta_2 & 0 \\ 0 & e^{\theta_3} & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

Der: $E_{12},\ E_{13},\ E_{11}+E_{22},\ E_{23},\ E_{43},\ E_{44}\quad \dim\mathrm{Der}=6$

M_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle, \langle e_1,e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle$

Ch_0: —

I_0: $\langle e_3+\varkappa e_4; e_1,e_2\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_2+\varkappa e_4\rangle,\ \langle e_3+\varkappa e_4\rangle,\ \langle e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_4,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_2+\varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_1,e_4\rangle,\ \langle e_2,e_4\rangle,\ \langle e_3,e_4\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3+\varkappa e_4; e_1\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\sim A_{2.1}\oplus A_1$: $\langle e_3,e_4; e_1\rangle$

$\sim A_{3.2}$: $\langle e_3+\varkappa e_4; e_1,e_2\rangle$

Інваріанти: $e_1\exp(-e_2/e_1)$, e_4

$\boldsymbol{A_{3.3}}\oplus\boldsymbol{A_1}$: $[(0)\,2(1)]$ (розкладна розв'язна)

$[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2\rangle$, $A^{(2)}=0$, …

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2\rangle$, …

$$\mathrm{Int}:\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & 0 & \theta_1 & 0\\ 0 & e^{\theta_3} & \theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad \mathrm{Aut}:\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{pmatrix}$$

Der: $E_{11},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{21},\ E_{22},\ E_{23},\ E_{43},\ E_{44}\quad \dim\mathrm{Der}=8$

M_0: $\langle e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle$

Ch_0: —

I_0: $\langle pe_1+qe_2\rangle,\ \langle pe_1+qe_2,e_4\rangle,\ \langle e_3+\varkappa e_4; e_1,e_2\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_4\rangle,\ \langle pe_1+qe_2\rangle,\ \langle e_3+\varkappa e_4\rangle,\ \langle pe_1+qe_2+\varepsilon e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_3,e_4\rangle,\ \langle pe_1+qe_2,e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2+\varepsilon e_4\rangle,$
$\langle e_1+\varepsilon e_4, e_2+\varkappa e_1\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3+\varkappa e_4; pe_1+qe_2\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\sim A_{2.1} \oplus A_1$: $\langle e_3, e_4; pe_1 + qe_2\rangle$

$\sim A_{3.2}$: $\langle e_3 + \varkappa e_4; e_1, e_2\rangle$

Інваріанти: e_2/e_1, e_4

$\boldsymbol{A^a_{3.4}} \oplus \boldsymbol{A_1}$: $[(0)(1)(a)]$ (розкладна розв'язна)

$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = ae_2,\ -1 \le a < 1,\ a \ne 0$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^{(2)} = 0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^2 = \langle e_1, e_2\rangle$, ...

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{\theta_3} & 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & e^{a\theta_3} & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-1 < a < 1,\ a \ne 0\colon$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{13},\ E_{22},\ E_{23},\ E_{43},\ E_{44} \qquad \dim \mathrm{Der} = 6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_4\rangle,\ \langle e_2, e_4\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_4\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_3 + \varkappa e_4; e_1, e_2\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_1 + \varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_2 + \varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_3 + \varkappa e_4\rangle,$
$\langle e_1 + \varepsilon e_2 + \varkappa e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_4\rangle,\ \langle e_2, e_4\rangle,\ \langle e_3, e_4\rangle,\ \langle e_1 + \varepsilon e_2, e_4\rangle,$
$\langle e_1, e_2 + \varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_1 + \varepsilon e_4, e_2 + \varkappa e_4\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3 + \varkappa e_4; e_1\rangle,\ \langle e_3 + \varkappa e_4; e_2\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_4\rangle$

$\sim A_{2.1} \oplus A_1$: $\langle e_3, e_4; e_1\rangle,\ \langle e_3, e_4; e_2\rangle$

$\sim A^a_{3.4}$: $\langle e_3 + \varkappa e_4; e_1, e_2\rangle$

Інваріанти: $e_1^{-a}e_2$, e_4

$a=-1$:

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{13},\ E_{22},\ E_{23},\ E_{43},\ E_{44}\qquad \dim\mathrm{Der}=6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_1,e_4\rangle,\ \langle e_2,e_4\rangle$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_3+\varkappa e_4; e_1,e_2\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_2+\varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_3+\varkappa e_4\rangle,$
$\langle e_1+\varepsilon e_2+\varkappa e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_4\rangle,\ \langle e_2,e_4\rangle,\ \langle e_3,e_4\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_2,e_4\rangle,$
$\langle e_1,e_2+\varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_4,e_2+\varkappa e_4\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3+\varkappa e_4;e_1\rangle,\ \langle e_3+\varkappa e_4;e_2\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\sim A_{2.1}\oplus A_1$: $\langle e_3,e_4;e_1\rangle,\ \langle e_3,e_4;e_2\rangle$

$\sim A_{3.4}^a$: $\langle e_3+\varkappa e_4;e_1,e_2\rangle$

Інваріанти: e_1e_2, e_4

$\boldsymbol{A_{3.5}^b\oplus A_1}$: $[(0)(b,1)]$ (розкладна розв'язна)

$[e_1,e_3]=be_1-e_2,\ [e_2,e_3]=e_1+be_2,\ b\geq 0$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2\rangle$, $A^{(2)}=0,\ \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2\rangle,\ \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} \cos\theta_3 e^{b\theta_3} & \sin\theta_3 e^{b\theta_3} & b\theta_1+\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_3 e^{b\theta_3} & \cos\theta_3 e^{b\theta_3} & -\theta_1+b\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b>0\colon$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{12}-E_{21},\ E_{13},\ E_{11}+E_{22},\ E_{23},\ E_{43},\ E_{44} \qquad \dim\mathrm{Der}=6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_4\rangle,\ \ \langle e_1,e_2\rangle,\ \ \langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_3+\varkappa e_4;e_1,e_2\rangle$

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_4\rangle,\ \ \langle e_1+\varkappa e_4\rangle,\ \ \langle e_3+\gamma e_4\rangle,\ \ \varkappa\ge 0$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_4,e_2\rangle,\ \ \langle e_1,e_4\rangle,\ \ \langle e_3,e_4\rangle,\ \ \varkappa\ge 0$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\sim A^b_{3.5}$: $\langle e_3+\varkappa e_4;e_1,e_2\rangle$

Інваріанти: $(e_1^2+e_2^2)\exp\left(-2b\arctan\dfrac{e_2}{e_1}\right)$, e_4

$b=0\colon$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{12}-E_{21},\ E_{13},\ E_{11}+E_{22},\ E_{23},\ E_{43},\ E_{44} \qquad \dim\mathrm{Der}=6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_4\rangle,\ \ \langle e_1,e_2\rangle,\ \ \langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_3+\varkappa e_4;e_1,e_2\rangle$

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_4\rangle,\ \ \langle e_1+\varkappa e_4\rangle,\ \ \langle e_3+\gamma e_4\rangle,\ \ \varkappa\ge 0$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_4,e_2\rangle,\ \ \langle e_1,e_4\rangle,\ \ \langle e_3,e_4\rangle,\ \ \varkappa\ge 0$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1,e_2,e_4\rangle$

$\sim A^0_{3.5}$: $\langle e_3+\varkappa e_4;e_1,e_2\rangle$

Інваріанти: $e_1^2+e_2^2$, e_4

$\boldsymbol{sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1}$: $[e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_1,e_3]=2e_2$ (нерозв'язна)

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^{(2)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, ...

$$\mathrm{Int}\colon\ \begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&0\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&0\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix},$$

тут підматриця $(\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ належить $\mathrm{Int}(sl(2,\mathbb{R}))$

$$\mathrm{Aut}\colon\ \begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&0\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&0\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&0\\ 0&0&0&\alpha_{44}\end{pmatrix},$$

тут підматриця $(\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ належить $\mathrm{Aut}(sl(2,\mathbb{R}))$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11}-E_{33},\ E_{12}+2E_{23},\ 2E_{21}+E_{32},\ E_{44}\quad \dim\mathrm{Der}=4$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_4\rangle,\ \langle ; e_1,e_2,e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_2+\varkappa e_4\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_4\rangle,\ \langle e_1+e_3+\gamma e_4\rangle,\ \varkappa\geq 0$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1,e_4\rangle,\ \langle e_2,e_4\rangle,\ \langle e_1+e_3,e_4\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_2+\varkappa e_4; e_1\rangle$

3-dim $\sim A_{2.1}\oplus A_1$: $\langle e_2,e_4;e_1\rangle$

$\sim sl(2,\mathbb{R})$: $\langle ; e_1,e_2,e_3\rangle$

Інваріанти: $e_2^2-(e_1e_3+e_3e_1)/2,\ e_4$

$\boldsymbol{so(3)\oplus A_1}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_3,e_1]=e_2$ (нерозв'язна)

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^{(2)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, ...

Int: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, тут підматриця $(\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ належить $SO(3)$

Aut: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$, тут підматриця $(\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ належить $SO(3)$

Der: $E_{12} - E_{21},\ E_{13} - E_{31},\ E_{32} - E_{23},\ E_{44} \quad \dim \mathrm{Der} = 4$

M$_0$: $\langle e_4\rangle,\ \langle ; e_1, e_2, e_3\rangle$

Ch$_0$: —

I$_0$: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_4\rangle,\ \langle e_1 + \varkappa e_4\rangle,\ \varkappa \geq 0$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_4\rangle$

3-dim $\sim so(3)$: $\langle ; e_1, e_2, e_3\rangle$

Інваріанти: $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$, e_4

$\boldsymbol{A_{4.1}}$: $[(0)^3]$ (нерозкладна нільпотентна)

$[e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^{(2)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2\rangle$, $A^2 = \langle e_1\rangle$, $A^3 = 0, \ldots$

Int: $\begin{pmatrix} 1 & \theta_4 & \frac{1}{2}\theta_4^2 & \theta_2 \\ 0 & 1 & \theta_4 & \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Aut: $\begin{pmatrix} \alpha_{33}\alpha_{44}^2 & \alpha_{23}\alpha_{44} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{33}\alpha_{44} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$

Der: $E_{13},\ E_{14},\ E_{12} + E_{23},\ E_{24},\ E_{11} + E_{22} + E_{33},\ E_{34},\ 2E_{11} + E_{22} + E_{44}$

$\dim \mathrm{Der} = 7$

M$_0$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_4+\varkappa e_3, e_2; e_1\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_3+\varkappa e_1\rangle$, $\langle e_4+\varkappa e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_3\rangle$, $\langle e_2, e_3+\varkappa e_1\rangle$, $\langle e_1, e_4+\varkappa e_3\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\sim A_{3.1}$: $\langle e_4+\varkappa e_3, e_2; e_1\rangle$

Інваріанти: e_1, $e_2^2-2e_1e_3$

$\boldsymbol{A^b_{4.2}}$: $[(b)(1)^2]$ (нерозкладна розв'язна)

$[e_1,e_4]=be_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_2+e_3,\ b\neq 0$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^{(2)}=0$, ...

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, ...

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{b\theta_4} & 0 & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_4} & \theta_4 e^{\theta_4} & \theta_2+\theta_3 \\ 0 & 0 & e^{\theta_4} & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b\neq 0,\ b\neq 1\colon$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{22} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: E_{11}, E_{14}, E_{23}, E_{24}, $E_{22}+E_{33}$, E_{34} $\quad\dim \mathrm{Der}=6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_3+\varkappa e_1\rangle$, $\langle e_1+\varepsilon e_2\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1+\varkappa e_2, e_3\rangle$, $\langle e_2, e_3\rangle$, $\langle e_1+\varepsilon e_3, e_2\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4; e_1\rangle$, $\langle e_4; e_2\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\sim A_{3.2}$: $\langle e_4; e_2, e_3\rangle$

$\sim A^a_{3.4}$: $\langle e_4; e_1, e_2\rangle$

Параметр a в алгебрі $A^a_{3.4}$ задовольняє умову: $a = \begin{cases} b, & -1 \le b < 1,\ b \neq 0, \\ \frac{1}{b}, & |b| > 1 \end{cases}$

Інваріанти: $e_2^b/e_1,\ e_2 \exp(-e_3/e_2)$

$b = 1:$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{22} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{11},\ E_{13},\ E_{14},\ E_{21},\ E_{23},\ E_{24},\ E_{22} + E_{33},\ E_{34}$ $\quad \dim \mathrm{Der} = 8$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_2\rangle,\ \ \langle e_1, e_2\rangle,\ \ \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_1 + \varkappa e_2\rangle,\ \ \langle e_2, e_3 + \varkappa e_1\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle pe_1 + qe_2\rangle,\ \ \langle e_3 + \varkappa e_1\rangle,\ \ \langle e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle,\ \ \langle e_1 + \varkappa e_2, e_3\rangle,\ \ \langle e_2, e_3 + \varkappa e_1\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4; pe_1 + qe_2\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\sim A_{3.2}$: $\langle e_4; e_2, e_3 + \varkappa e_1\rangle$

$\sim A_{3.3}$: $\langle e_4; e_1, e_2\rangle$

Інваріанти: $e_2/e_1,\ e_2 \exp(-e_3/e_2)$

$\boldsymbol{A_{4.3}}$: $[(1)(0)^2]$ (нерозкладна розв'язна)

$[e_1, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2\rangle,\ A^{(2)} = 0,\ \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2\rangle,\ A^2 = \langle e_1\rangle,\ A^3 = \langle e_1\rangle, \ldots$

$$\text{Int}: \begin{pmatrix} e^{\theta_4} & 0 & 0 & \theta_1 \\ 0 & 1 & \theta_4 & \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Aut}: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{22} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{11},\ E_{14},\ E_{23},\ E_{24},\ E_{22}+E_{33},\ E_{34}$ $\quad \dim \mathrm{Der} = 6$

M_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_2, e_3\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

Ch_0: —

I_0: $\langle e_4 + \varkappa e_3, e_2; e_1\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_2\rangle,\ \langle e_3+\varkappa e_1\rangle,\ \langle e_4+\varkappa e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1+\varkappa e_2, e_3\rangle,\ \langle e_2, e_3\rangle,\ \langle e_2, e_3+\varepsilon e_1\rangle,\ \langle e_2, e_4+\varkappa e_3\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4+\varkappa e_3; e_1\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\sim A_{2.1}\oplus A_1$: $\langle e_4+\varkappa e_3, e_2; e_1\rangle$

$\sim A_{3.1}$: $\langle e_3, e_4; e_2\rangle$

Інваріанти: $e_2,\ e_3 - e_2\ln(e_1)$

$\boldsymbol{A_{4.4}}$: $[(1)^3]$ (нерозкладна розв’язна)

$[e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_1 + e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle,\ A^{(2)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle,\ A^2 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle, \ldots$

$$\text{Int}: \begin{pmatrix} e^{\theta_4} & \theta_4 e^{\theta_4} & \frac{1}{2}\theta_4^2 e^{\theta_4} & \theta_1+\theta_2 \\ 0 & e^{\theta_4} & \theta_4 e^{\theta_4} & \theta_2+\theta_3 \\ 0 & 0 & e^{\theta_4} & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Aut}: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{11}+E_{22}+E_{33},\ E_{13},\ E_{14},\ E_{24},\ E_{12}+E_{23},\ E_{34}$ $\quad \dim \mathrm{Der} = 6$

M_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

Ch_0: —

I_0: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_3\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_4\rangle$

$$\begin{aligned} \text{2-dim} &\sim 2A_1\colon \langle e_1+\varkappa e_3, e_2\rangle,\ \ \langle e_1,e_3\rangle,\ \ \langle e_2,e_3\rangle \\ &\sim A_{2.1}\colon \langle e_4; e_1\rangle \\ \text{3-dim} &\sim 3A_1\colon \langle e_1,e_2,e_3\rangle \\ &\sim A_{3.2}\colon \langle e_4; e_1, e_2\rangle \end{aligned}$$

Інваріанти: $e_1\exp(-e_2/e_1)$, $(2e_1e_3-e_2^2)/e_1^2$

$\boldsymbol{A_{4.5}^{a,b,c}}$: $[(a)(b)(c)]$ (нерозкладна розв'язна)

$[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=be_2,\ [e_3,e_4]=ce_3,\ abc\neq 0$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^{(2)}=0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle, \ldots$

$$\text{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{a\theta_4} & 0 & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{b\theta_4} & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & e^{c\theta_4} & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-1\le a<b<c=1,\ \ b>0$ if $a=-1$:

$$\text{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{11},\ E_{14},\ E_{22},\ E_{24},\ E_{33},\ E_{34}$ $\quad \dim \mathrm{Der}=6$

M_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_2,e_3\rangle,\ \langle e_1,e_3\rangle,\ \langle e_1,e_2,e_3\rangle$

Ch_0: —

I_0: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_3\rangle, \langle e_2+\varepsilon e_3\rangle,\ \langle e_1+\varepsilon e_2+\varkappa e_3\rangle$, $\varkappa\neq 0$

$$\begin{aligned} \text{2-dim} &\sim 2A_1\colon \langle e_1,e_2\rangle,\ \ \langle e_1,e_3\rangle,\ \ \langle e_2,e_3\rangle,\ \ \langle e_1,e_2+\varepsilon e_3\rangle,\ \ \langle e_2,e_1+\varepsilon e_3\rangle, \\ &\qquad\quad \langle e_3,e_1+\varepsilon e_2\rangle, \langle e_1+\varepsilon e_3, e_2+\varkappa e_3\rangle,\ \ \varkappa\neq 0 \\ &\sim A_{2.1}\colon \langle e_4;e_1\rangle,\ \ \langle e_4;e_2\rangle,\ \ \langle e_4;e_3\rangle \\ \text{3-dim} &\sim 3A_1\colon \langle e_1,e_2,e_3\rangle \end{aligned}$$

$\sim A^{v}_{3.4}$: $\langle e_4; e_1, e_3\rangle^{*}$, $\langle e_4; e_2, e_3\rangle^{**}$, $\langle e_4; e_1, e_2\rangle^{***}$

Параметр v в алгебрі $A^{v}_{3.4}$ задовольняє умову $v = a$ у випадку *, $v = b$ у випадку ** та $v = \begin{cases} a/b, & |a/b| < 1, \\ b/a, & |a/b| > 1 \end{cases}$ у випадку ***.

Інваріанти: e_3^a/e_1^c, e_2^a/e_1^b

$a = b = 1$, $c \neq 1$:

$$\mathrm{Aut}: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{12},\ E_{14},\ E_{21},\ E_{22},\ E_{24},\ E_{33},\ E_{34}\quad \dim \mathrm{Der} = 8$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle pe_1 + qe_2\rangle,\ \langle e_3, pe_1 + qe_2\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_3\rangle$, $\langle pe_1 + qe_2\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_2 + \varepsilon e_3\rangle$, $\langle e_1 + \varkappa e_2 + \varepsilon e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_3, pe_1 + qe_2\rangle$, $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_2, e_1 + \varepsilon e_3\rangle$, $\langle e_1 + \varkappa e_2, e_2 + \varepsilon e_3\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4; e_3\rangle$, $\langle e_4; pe_1 + qe_2\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\sim A_{3.3}$: $\langle e_4; e_1, e_2\rangle$

$\sim A^{c}_{3.4}$: $\langle e_4; e_3, pe_1 + qe_2\rangle$

Інваріанти: e_3/e_1^c, e_2/e_1

$a = b = c = 1$:

$$\mathrm{Aut}: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{12},\ E_{13},\ E_{14},\ E_{21},\ E_{22},\ E_{23},\ E_{24},\ E_{31},\ E_{32},\ E_{33},\ E_{34}$

$\dim \mathrm{Der} = 12$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_1+\varkappa e_2+\gamma e_3\rangle,\ \langle e_2+\varkappa e_3\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_1+\varkappa e_3, e_2+\gamma e_3\rangle,\ \langle e_1+\varkappa e_2, e_3\rangle,$
$\langle e_2, e_3\rangle$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_2+\gamma e_3\rangle,\ \langle e_2+\varkappa e_3\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_3, e_2+\gamma e_3\rangle,\ \langle e_1+\varkappa e_2, e_3\rangle,\ \langle e_2, e_3\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4; e_1+\varkappa e_2+\gamma e_3\rangle,\ \langle e_4; e_2+\varkappa e_3\rangle,\ \langle e_4; e_3\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\sim A_{3.3}$: $\langle e_4; e_1+\varkappa e_3, e_2+\gamma e_3\rangle,\ \langle e_4; e_1+\varkappa e_2, e_3\rangle,\ \langle e_4; e_2, e_3\rangle$

Інваріанти: $e_3/e_1,\ e_2/e_1$

$\boldsymbol{A^{a,b}_{4.6}}$: $[(a)(b,1)]$ (нерозкладна розв'язна)

$[e_1, e_4] = ae_1,\ [e_2, e_4] = be_2 - e_3,\ [e_3, e_4] = e_2 + be_3,\ a > 0$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $A^{(2)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $A^2 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle, \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{a\theta_4} & 0 & 0 & a\theta_1 \\ 0 & e^{b\theta_4}\cos\theta_4 & e^{b\theta_4}\sin\theta_4 & b\theta_2+\theta_3 \\ 0 & -e^{b\theta_4}\sin\theta_4 & e^{b\theta_4}\cos\theta_4 & -\theta_2+b\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & -\alpha_{23} & \alpha_{22} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11},\ E_{14},\ E_{24},\ E_{34},\ E_{22}+E_{33},\ E_{23}-E_{32}\qquad \dim\mathrm{Der} = 6$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_2, e_3\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ -$

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_3\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \varkappa \geq 0$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1+\varkappa e_3, e_2\rangle,\ \langle e_2, e_3\rangle,\ \varkappa \geq 0$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4; e_1\rangle$

3-dim $\sim 3A_1$: $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$\sim A^b_{3.5}$: $\langle e_4; e_2, e_3\rangle$

Інваріанти: $(e_2^2+e_3^2)\exp\left(-2b\arctan\dfrac{e_3}{e_2}\right),\ \dfrac{e_1^b}{(e_2^2+e_3^2)^a}$

$\boldsymbol{A_{4.7}}$: $[(0)^2,(2)(1)^2]$ (нерозкладна розв'язна)

$[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=2e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_2+e_3$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle,\ A^{(2)}=\langle e_1\rangle,\ A^{(3)}=0,\ \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle,\ A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle,\ \ldots$

$$\mathrm{Int}:\ \begin{pmatrix} e^{2\theta_4} & -\theta_3e^{\theta_4} & -\theta_3\theta_4e^{\theta_4}+\theta_2e^{\theta_4} & \theta_1+\theta_2\theta_3-\frac{1}{2}\theta_3^2 \\ 0 & e^{\theta_4} & \theta_4e^{\theta_4} & \theta_2+\theta_3 \\ 0 & 0 & e^{\theta_4} & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Aut}:\ \begin{pmatrix} \alpha_{33}^2 & -\alpha_{33}\alpha_{34} & -m^{23}_{34}-\alpha_{33}\alpha_{34} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{33} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $2E_{11}+E_{22}+E_{33},\ E_{14},\ E_{12}+E_{13}-E_{34},\ E_{23},\ E_{13}+E_{24}$ $\quad \dim\mathrm{Der}=5$

M_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_2,e_3;e_1\rangle$

Ch_0: —

I_0: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_3\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4;e_1\rangle,\ \langle e_4;e_2\rangle$

3-dim $\sim A_{3.1}$: $\langle e_2,e_3;e_1\rangle$

$\sim A^{\frac{1}{2}}_{3.4}$: $\langle e_4;e_1,e_2\rangle$

Інваріанти: немає

$\boldsymbol{A_{4.8}^b}$: $[(0)^2,(1+b)(1)(b)]$ (нерозкладна розв'язна)

$[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=(1+b)e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=be_3,\ |b|\le 1$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1,e_2,e_3\rangle,\ A^{(2)}=\langle e_1\rangle,\ A^{(2)}=0,\ \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1,e_2,e_3\rangle,\ A^2=\langle e_1,e_2,e_3\rangle,\ \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{(1+b)\theta_4} & -\theta_3e^{\theta_4} & \theta_2e^{b\theta_4} & (1+b)\theta_1+b\theta_2\theta_3 \\ 0 & e^{\theta_4} & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & e^{b\theta_4} & b\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|b|<1,\ b\neq 0\colon$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33} & \alpha_{12} & \alpha_{33}\alpha_{24} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & -b\alpha_{12}\alpha_{22}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{12}-bE_{34},\ E_{14},\ E_{11}+E_{22},\ E_{13}+E_{24},\ E_{11}+E_{33}\qquad \dim\mathrm{Der}=5$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_3\rangle,\ \langle e_2,e_3;e_1\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon$ —

$\mathrm{I}_0\colon$ —

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_4\rangle,\ \langle e_2+\varepsilon e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_3\rangle,\ \langle e_1,e_2+\varepsilon e_3\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4;e_1\rangle,\ \langle e_4;e_2\rangle,\ \langle e_4;e_3\rangle$

3-dim $\sim A_{3.1}$: $\langle e_2,e_3;e_1\rangle$

$\sim A_{3.4}^a$: $\langle e_4;e_1,e_2\rangle^*,\ \langle e_4;e_1,e_3\rangle^{**}$

Параметр a ів алгебрі $A_{3.4}^a$ задовольняє умови:

$$a=\begin{cases} 1+b, & |1+b|<1, \\ 1/(1+b), & |1+b|>1 \end{cases}\quad \text{у випадку } * \quad \text{та}$$

$$a=\begin{cases} b/(1+b), & |b/(1+b)|<1 \text{ or b} = -\frac{1}{2}, \\ (1+b)/b, & |b/(1+b)|>1 \end{cases}\quad \text{у випадку } **.$$

Інваріанти: немає

$b=0:$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33} & \alpha_{12} & \alpha_{33}\alpha_{24} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{12},\ E_{14},\ E_{11}+E_{22},\ E_{13}+E_{24},\ E_{11}+E_{33}\qquad \dim\mathrm{Der}=5$

Цю групу автоморфізмів можна отримати із загального випадку $|b|<1$, $b\neq 0$ за допомогою підстановки $b=0$, але ці два випадки не можуть бути об'єднані в один, оскільки існує додатковий (позначений *) мегаідеал у випадку $b=0$.

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_3\rangle,\ \langle e_2,e_3;e_1\rangle,\ \langle e_4;e_1,e_2\rangle^*$
$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$
$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_4+\varkappa e_3;e_1,e_2\rangle,\ \ \varkappa\neq 0$
$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_2\rangle,\ \langle e_3\rangle,\ \langle e_2+\varepsilon e_3\rangle,\ \langle e_4+\varkappa e_3\rangle$
2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1,e_3\rangle,\ \langle e_1,e_2+\varepsilon e_3\rangle,\ \langle e_3,e_4\rangle$
$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4+\varkappa e_3;e_1\rangle,\ \langle e_4;e_2\rangle$
3-dim $\sim A_{2.1}\oplus A_1$: $\langle e_3,e_4;e_1\rangle$
$\sim A_{3.1}$: $\langle e_2,e_3;e_1\rangle$
$\sim A_{3.2}$: $\langle e_4+\varkappa e_3;e_1,e_2\rangle,\ \ \varkappa\neq 0$
$\sim A_{3.3}$: $\langle e_4;e_1,e_2\rangle$

Інваріанти: немає

$b=1:$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} m^{23}_{23} & -m^{23}_{24} & -m^{23}_{34} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{12}-E_{34},\ E_{14},\ E_{11}+E_{22},\ E_{23},\ E_{13}+E_{24},\ E_{32},\ E_{11}+E_{33}$

$\dim \mathrm{Der} = 7$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \ \langle e_2, e_3; e_1\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ \langle e_1, pe_2 + qe_3\rangle$

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\colon\ & 1\text{-dim} \sim A_1\colon \langle e_1\rangle,\ \ \langle pe_2 + qe_3\rangle,\ \ \langle e_4\rangle\\ & 2\text{-dim} \sim 2A_1\colon \langle e_1, pe_2 + qe_3\rangle\\ & \qquad\quad\ \sim A_{2.1}\colon \langle e_4; e_1\rangle,\ \ \langle e_4; pe_2 + qe_3\rangle\\ & 3\text{-dim} \sim A_{3.1}\colon \langle e_2, e_3; e_1\rangle\\ & \qquad\quad\ \sim A_{3.4}^{1/2}\colon \langle e_4; e_1, pe_2 + qe_3\rangle\end{aligned}$$

Інваріанти: немає

$b = -1\colon$

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix}\alpha_{22}\alpha_{33} & \alpha_{22}\alpha_{34} & \alpha_{33}\alpha_{24} & \alpha_{14}\\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24}\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\alpha_{32}\alpha_{23} & -\alpha_{32}\alpha_{24} & -\alpha_{23}\alpha_{34} & \alpha_{14}\\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ 0 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34}\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{12} + E_{34},\ E_{14},\ E_{11} + E_{22},\ E_{13} + E_{24},\ E_{11} + E_{33} \qquad \dim \mathrm{Der} = 5$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \ \langle e_2, e_3; e_1\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ \langle e_1, e_3\rangle,\ \ \langle e_1, e_2\rangle$

$\mathrm{I}_0\colon\ -$

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\colon\ & 1\text{-dim} \sim A_1\colon \langle e_1\rangle,\ \ \langle e_2\rangle,\ \ \langle e_2 + \varepsilon e_3\rangle,\ \ \langle e_3\rangle,\ \ \langle e_4 + \varkappa e_1\rangle\\ & 2\text{-dim} \sim 2A_1\colon \langle e_1, e_2\rangle,\ \ \langle e_1, e_3\rangle,\ \ \langle e_1, e_2 + \varepsilon e_3\rangle,\ \ \langle e_4, e_1\rangle\\ & \qquad\quad\ \sim A_{2.1}\colon \langle e_4 + \varkappa e_1; e_2\rangle,\ \ \langle e_4 + \varkappa e_1; e_3\rangle\\ & 3\text{-dim} \sim A_{2.1} \oplus A_1\colon \langle e_4, e_1; e_2\rangle,\ \ \langle e_4, e_1; e_3\rangle\\ & \qquad\quad\ \sim A_{3.1}\colon \langle e_2, e_3; e_1\rangle\end{aligned}$$

Інваріанти: e_1, $e_1 e_4 - (e_2 e_3 + e_3 e_2)/2$

$\boldsymbol{A_{4.9}^{a}}$: $[(0)^2, (2a)(a, 1)]$ (нерозкладна розв'язна)

$[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = 2ae_1,\ [e_2, e_4] = ae_2 - e_3,\ [e_3, e_4] = e_2 + ae_3,\ a \geq 0$

Ряд похідних: $A^{(1)} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $A^{(2)} = \langle e_1\rangle$, $A^{(3)} = 0, \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $A^2 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, ...

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} e^{2a\theta_4} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \cos\theta_4 e^{a\theta_4} & \sin\theta_4 e^{a\theta_4} & a\theta_2+\theta_3 \\ 0 & -\sin\theta_4 e^{a\theta_4} & \cos\theta_4 e^{a\theta_4} & -\theta_2+a\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{тут}$$

$a_{12} = -(\theta_2\sin\theta_4 + \theta_3\cos\theta_4)e^{a\theta_4}$, $a_{13} = (\theta_2\cos\theta_4 - \theta_3\sin\theta_4)e^{a\theta_4}$ та $a_{14} = 2a\theta_1 + a\theta_2\theta_3 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$.

$a > 0$:

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} s^{23}_{33} & (a^2+1)^{-1}(m^{23}_{34} - as^{23}_{34}) & -(a^2+1)^{-1}(am^{23}_{34} + s^{23}_{34}) & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{33} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & -\alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der: $aE_{12} + E_{13} - (1+a^2)E_{34},\ E_{14},\ -E_{12} + E_{24} + aE_{34},\ -E_{23} + E_{32},$
$2E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad \dim\mathrm{Der} = 5$

M_0: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2, e_3; e_1\rangle$

Ch_0: —

I_0: —

S: 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_4\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_4; e_1\rangle$

3-dim $\sim A_{3.1}$: $\langle e_2, e_3; e_1\rangle$

Інваріанти: немає

$a = 0$:

$$\mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \pm s^{23}_{33} & m^{23}_{34} & \mp s^{23}_{34} & \alpha_{14} \\ 0 & \pm\alpha_{33} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \mp\alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Der: $E_{13} - E_{34},\ E_{14},\ -E_{12} + E_{24},\ -E_{23} + E_{32},\ 2E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad \dim\mathrm{Der} = 5$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1\rangle,\ \ \langle e_2, e_3; e_1\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ -$

$\mathrm{I}_0\colon\ -$

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \ \langle e_2\rangle,\ \ \langle e_4+\varkappa e_1\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle,\ \ \langle e_1, e_4\rangle$

3-dim $\sim A_{3.1}$: $\langle e_2, e_3; e_1\rangle$

Інваріанти: e_1, $2e_1e_4+e_2^2+e_3^2$

$\boldsymbol{A_{4.10}}$: $[2(1),(0,1)(0)]$ (нерозкладна, розв'язна, досконала)

$[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2,\ [e_1,e_4]=-e_2,\ [e_2,e_4]=e_1$

Ряд похідних: $A^{(1)}=\langle e_1, e_2\rangle$, $A^{(2)}=0,\ \ldots$

Нижній центральний ряд: $A^1=\langle e_1, e_2\rangle$, $A^2=\langle e_1, e_2\rangle,\ \ldots$

$$\mathrm{Int}\colon \begin{pmatrix} \cos\theta_4 e^{\theta_3} & \sin\theta_4 e^{\theta_3} & \theta_1 & \theta_2 \\ -\sin\theta_4 e^{\theta_3} & \cos\theta_4 e^{\theta_3} & \theta_2 & -\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Aut}\colon \begin{pmatrix} \pm\alpha_{22} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \pm\alpha_{23} \\ \mp\alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \mp\alpha_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Der}\colon\ E_{11}+E_{22},\ E_{14}+E_{23},\ E_{13}-E_{24},\ E_{12}-E_{21}\quad \dim\mathrm{Der}=4$

$\mathrm{M}_0\colon\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \ \langle e_2, e_3; e_1\rangle, \langle e_4; e_1, e_2\rangle$

$\mathrm{Ch}_0\colon\ \langle e_4+\varkappa e_3; e_1, e_2\rangle,\ \ \varkappa\neq 0$

$\mathrm{I}_0\colon\ -$

$\mathrm{S}\colon$ 1-dim $\sim A_1$: $\langle e_1\rangle,\ \ \langle e_3\rangle,\ \ \langle e_4+\varkappa e_3\rangle$

2-dim $\sim 2A_1$: $\langle e_1, e_2\rangle,\ \ \langle e_3, e_4\rangle$

$\sim A_{2.1}$: $\langle e_3; e_1\rangle$

3-dim $\sim A_{3.3}$: $\langle e_3; e_1, e_2\rangle$

$\sim A_{3.5}^{|\varkappa|}$: $\langle e_4+\varkappa e_3; e_1, e_2\rangle$

Інваріанти: немає