Wstęp do form modularnych

semestr: letni
osoba prowadząca: Masha Vlasenko
(Instytut Matematyczny PAN)

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

14 czerwca, 2021

Formy modularne

"Modular forms are functions on the complex plane that are inordinately symmetric. They satisfy so many internal symmetries that their mere existence seem like accidents. But they do exist." - Barry Mazur

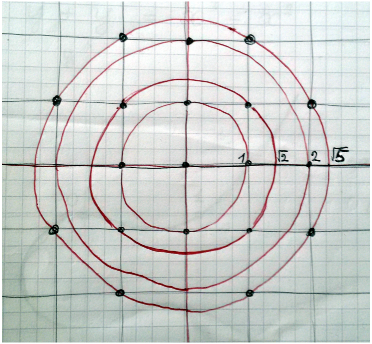
"Formy modularne to funkcje zmiennej zespolonej posiadające tak dużo symetrii, że samo ich istnienie wygląda na zbieg okoliczności. Jednak one istnieją."

Mianowicie: forma modularna wagi k to funkcja spelniająca

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

dla każdych $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ takich że $a \cdot d - b \cdot c = 1$.

Przykład 1: równania diofantyczne



$$a_n = \#\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2+y^2 = n\}$$

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	1	4	4	0	4	8	

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

forma modularna wagi 1

Przykład 2: kombinatoryka

$p(n) =$ liczba sposobów napisania n jako sumę liczb dodatnich

np. $p(5) = 7$

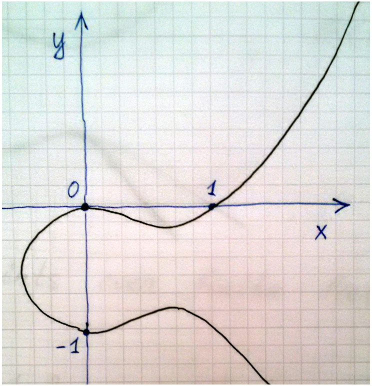
$$5 = 5, \quad 5 = 4 + 1, \quad 5 = 3 + 2, \quad 5 = 3 + 1 + 1$$
$$5 = 2 + 2 + 1, \quad 5 = 2 + 1 + 1 + 1, \quad 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$f(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) e^{2\pi i n z} \right)^{-1}$$

forma modularna wagi $1/2$

Przykład 3: geometria arytmetyczna

$y^2 + y = x^3 - x^2$ krzywa eliptyczna

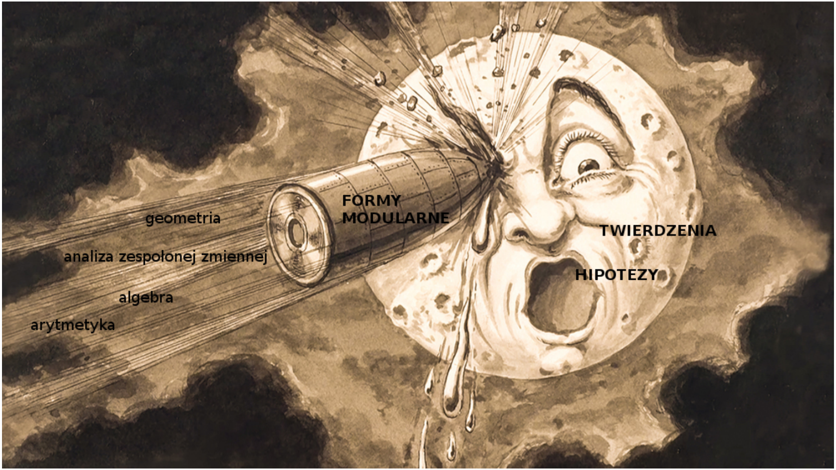


p liczba pierwsza

$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$

$$N_p = \#\Big\{(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \mid$$
$$y^2 + y \equiv x^3 - x^2 \mod p\Big\}$$

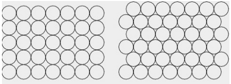
istnieje forma modularna wagi 2
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$
taka że
$a_p = p - N_p$
dla wszystkich $p \neq 11$



* tu został użyty oryginalny rysunek z "Podroży na księżyc" Georges'a Méliès'a

Co można udowodnić za pomocą form modularnych?

- Wielkie Twierdzenie Fermata (Andrew Wiles, 1995)
  $x^n + y^n \neq z^n$, $n \geqslant 3$
- optymalne pakowanie sfer



... w wymiarze 8 (Maryna Viazovska, 2016)

- Monstrous Moonshine (1992, Richard Borcherds)

grupa monster M
największa z 26 sporadycznych w klasyfikacji skończonych prostych grup, $\#M \approx 8 \cdot 10^{53}$

W przyszłości:

geometria + arytmetyka = geometria arytmetyczna

Metahipoteza (program Langlandsa):

rozmaitości algebraiczne	$\longleftrightarrow$	formy automorficzne
nad cialami liczbowymi		(uogólnienie form modularnych)

(Przykład 3 powyżej oraz Wielkie Twierdzenie Fermata dotyczą jednego z niewielu udowodnionych przypadków, kiedy rozmaitość jest krzywą eliptyczną nad $\mathbb{Q}$)

Nasz kurs:

- oparty na przykłady i ćwiczenia
- nie zakładamy dużo wiedzy od uczęstników
  uwaga: oprócz standardowych algebry i analizy 1go roku studiów, koniecznie potrzebne są podstawy teorii funkcji analitycznych zmiennej zespolonej (kurs "Funkcje analityczne" w semestrze zimowym)
- nie będzie "black box"ów: udowodnimy podstawowe twierdzenia teorii używając w zasadzie elementarnych argumentów