Топологічний мінімум

СЕРГІЙ МАКСИМЕНКО

Зміст

1. Топологія

Означення 1.1. *Нехай X — довільна множина, і $\tau = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ — довільна сім'я підмножин в X. Тоді τ називається* ***топологією*** *на X, якщо виконані такі умови:*

(1) $\varnothing, X \in \tau$,
(2) *якщо $U, V \in \tau$, то їх перетин $U \cap V \in \tau$,*
(3) *для довільної сім'ї $\{U_j\}_{j\in J} \subset \tau$ її об'єднання $\bigcup\limits_{i\in J} U_j \in \tau$.*

При цьому пара (X, τ) називається ***топологічним простором****, кожна з множин $U_i \in \tau$ називається* ***відкритою****, а її доповнення $X \setminus U_i$ —* ***замкненою****.*

Відкритим околом *точки $x \in X$ називається довільна відкрита підмножина $U \in \tau$, яка містить точку x.*

Околом *точки $x \in X$ називається довільна підмножина $B \subset X$, яка містить деякий відкритий окіл точки x.*

Скрізь далі вважатимемо, що (X, τ) та (Y, σ) — топологічні простори.

Задача 1.2. Нехай $\sigma = \{X \setminus U \mid U \in \tau\}$ — сукупність всіх замкнених множин. Довести, що

(1) $\varnothing, X \in \sigma$,
(2) якщо $A, B \in \sigma$, то їх об'єднання $A \cup B \in \sigma$,
(3) для довільної сім'ї $\{A_j\}_{j\in J} \subset \sigma$ її перетин $\bigcap\limits_{i\in J} A_j \in \sigma$.

Задача 1.3. Нехай Z – множина і $f : Z \to X$ – відображення. Довести, що сукупність множин
$$f^{-1}(\tau) := \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau\}$$
утворює топологію на Z. Ця топологія називається ***прообразом*** топології τ.

Означення 1.4. *Нехай τ, σ — дві топології на X. Тоді τ називається* ***слабшою*** *за σ, а σ —* ***сильнішою*** *за τ, якщо $\tau \subset \sigma$.*

Задача 1.5. Довести, що дискретна топологія $\tau = 2^X$ на X є найсильнішою за всі інші топології.

Задача 1.6. Довести, що тривіальна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$ на X є найслабшою за всі інші топології.

Означення 1.7. *Відображення $f : X \to Y$ називається* ***неперервним****, якщо*
$$f^{-1}(\sigma) \subset \tau,$$
тобто для кожної відкритої в Y множини $U \in \sigma$ її прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в X, тобто належить до τ.

Відображення $f : X \to Y$ називається ***неперервним в точці*** *$x \in X$, якщо для кожного околу $V_{f(x)}$ точки $f(x)$ в Y існує такий окіл U_x точки x в X, що $f(U_x) \subset V_{f(x)}$.*

Відображення $f : X \to Y$ називається ***факторним****, якщо f сюр'єктивне і підмножина $A \subset Y$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли $f^{-1}(A)$ є відкритою в X.*

Неперервне відображення $f : X \to Y$ називається ***відкритим*** *якщо $f(\tau) \subset \sigma$, тобто для кожної відкритої підмножини $U \subset X$ її образ $f(U)$ є відкритим в Y.*

Неперервне відображення $f : X \to Y$ називається ***замкненим*** *якщо для кожної замкненої підмножини $A \subset X$ її образ $f(A)$ є замкненим в Y.*

Кажуть, що відображення $f : X \setminus \{x\} \to Y$ ***має границю*** *$y \in Y$* ***в точці*** *x, якщо відображення $\hat{f} : X \to Y$ визначене за формулою $\hat{f}(x) = y$ і $\hat{f} = f$ на $X \setminus \{x\}$ є неперервним в точці x. Це записується так:*
$$\lim_{s \to x} f(s) = y.$$

Задача 1.8. Довести, що відображення $f : X \to Y$ – неперервне тоді і лише тоді, коли для кожної замкненої в Y множини A її прообраз $f^{-1}(A)$ є замкненою множиною в X.

Задача 1.9. Довести, що відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і лише тоді, коли воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

Задача 1.10. Нехай $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$ – довільні відображення такі, що f неперервне в точці $x \in X$, а g неперервне в точці $f(x) \in Y$. Довести, що їх композиція $g \circ f : X \to Z$ є неперервною в точці x.

Задача 1.11. Довести, що кожне факторне відображення є неперервним.

Задача 1.12. Довести, що відкриті і замкнені сюр'єктивні відображення є факторними.

Задача 1.13. Нехай $f : X \to Y$ сюр'єктивне відображення (не обов'язково неперервне). Довести, що наступні умови еквівалентні:

(1) f – факторне
(2) множина $V \subset Y$ замкнена тоді і лише тоді, коли її прообраз $f^{-1}(V)$ є замкненим в X.

Задача 1.14. Нехай τ' і τ дві топології на X. Довести, що наступні умови є еквівалентними:

(1) $\tau' \supset \tau$, тобто топологія τ' сильніша за τ;
(2) тотожне відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$ є неперервним;

Задача 1.15. Нехай Z – множина і $f : Z \to X$ – відображення. Показати, що відображення топологічних просторів $f : (Z, f^{-1}(\tau)) \to (X, \tau)$ є неперервним.

Задача 1.16. Нехай $f : X \to Y$ – відображення, не обов'язково неперервне. Тоді на X маємо дві топології τ та $f^{-1}(\sigma)$. Розглянемо наступну комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & & (Y,\sigma) \\ & (X, f^{-1}(\sigma)) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Довести, що f неперервне тоді і лише тоді, коли $f^{-1}(\sigma) \subset \tau$.

Задача 1.17. Нехай ми маємо комутативну діаграму (не обов'язково неперервних) відображень топологічних просторів:

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (Y,\sigma) \\ & (Z,\nu) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Припустимо, що g – сюр'єктивне і факторне. Довести, що f буде неперервним тоді і лише тоді, коли неперервним є h.

2. Передбаза та база топології

Задача 2.1. Нехай X — множина і $A, B \subset X$ — довільні непорожні підмножини. Побудувати мінімальну топологію на X, в якій A та B будуть відкритими.

Яке число відкритих множин в таких топологіях в залежності від співвідношень між A та B?

Задача 2.2. Нехай X — множина і $\gamma = \{Q_i\}_{i\in\Sigma}$ — довільна сім'я підмножин в X. Описати мінімальну топологію на X, в якій всі множини Q_i є відкритими.

Означення 2.3. *Сім'я підмножин $\beta = \{V_i\}_{i\in\Lambda}$ називається **базою топології** τ **в точці** x, якщо кожен відкритий окіл U точки x містить деякий елемент $V \in \beta$.*

*Сім'я підмножин $\beta = \{V_i\}_{i\in\Lambda}$ називається **базою топології** τ на X, якщо кожен непорожній елемент $U \in \tau$ є об'єднанням деяких елементів з β.*

*Сім'я підмножин $\gamma = \{Q_i\}_{i\in\Sigma}$ називається **передбазою топології** τ на X, якщо сім'я всіх можливих скінченних перетинів елементів з γ:*

$$\beta = \{ \bigcap_{j\in F} Q_j \mid F \text{ скінчена підмножина в } \Sigma \}$$

утворює базу топології на X.

Означення 2.4. *Топологічний простір X задовольняє* ***першу аксіому зліченості****, якщо X має злічену базу в кожній своїй точці.*

Топологічний простір X задовольняє ***другу аксіому зліченості****, якщо X має злічену базу.*

Задача 2.5. Показати, що кожен метричний простір задовольняє першу аксіому зліченості.

Див. також задачі 5.9, 7.3.

3. Індукована топологія

Означення 3.1. *Нехай A – підмножина топологічного простору (X, τ) і $i_A : A \subset X$ – відображення вкладення. Тоді топологія*

$$\tau_A := i_A^{-1}(\tau)$$

називається ***індукованою топологією*** *на A.*

Задача 3.2. Довести, що відображення $i_A : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ є неперервним.

Задача 3.3. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення між топологічними просторами і $A \subset X$. Тоді обмеження $f|_A : A \to Y$ є неперервним.

Задача 3.4. Нехай $A \subset X$. Довести такі твердження.

(1) $\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$, тобто підмножина $B \subset A$ є відкритою в τ_A тоді і лише тоді, коли $B = U \cap A$ для деякої відкритої в X множини U.
(2) Підмножина $B \subset A$ є замкненою в τ_A тоді і лише тоді, коли $B = U \cap A$ для деякої замкненої в X множини U.

Іншими словами, відкриті (замкнені) множини в τ_A – це «сліди» відкритих (замкнених) множив в X на A.

Задача 3.5. Нехай $A \subset U \subset X$. Довести такі твердження.

(1) Якщо A відкрита в U, а U — відкрита в X, то A відкрита в X.
(2) Якщо A замкнена в U, а U — замкнена в X, то A замкнена в X.

4. Внутрішність, межа, зовнішність та замикання множини

Означення 4.1. *Точка $x \in X$ називається* ***внутрішньою*** *для підмножини $A \subset X$, якщо існує окіл точки цієї точки, який міститься в A.*

Точка $x \in X$ називається ***зовнішньою*** *для підмножини $A \subset X$, якщо існує окіл точки цієї точки, який не перетинає A, тобто міститься в $X \setminus A$.*

Точка $x \in X$ називається ***межовою*** *для підмножини $A \subset X$, якщо кожен окіл цієї точки перетинає A і $X \setminus A$.*

Точка $x \in X$ називається ***граничною*** *для підмножини $A \subset X$, якщо кожен окіл цієї точки перетинає множину $A \setminus x$, тобто містить точку з A відмінну від x.*

Точка $x \in X$ називається ***дотику*** *для підмножини $A \subset X$, якщо кожен окіл цієї точки перетинає множину A.*

Сукупність усіх внутрішніх точок множини A називається ***внутрішністю*** *множини A і позначається через $\operatorname{Int}(A)$.*

Сукупність усіх зовнішнх точок множини A називається ***зовнішністю*** *множини A і позначається через $\operatorname{Ext}(A)$.*

Сукупність усіх межових точок множини A називається ***межею*** *множини A і позначається через $\mathrm{Fr}\,(A)$.*

Об'єднання внутрішності та межі називається ***замиканням*** *множини A і позначається через $\overline{A}$, тобто $\overline{A} = \mathrm{Int}\,(A) \cup \mathrm{Fr}\,(A)$.*

Задача 4.2. Показати, що для кожної підмножини A топологічнго простору X має місце *розбиття* таке X:

$$X \;=\; \underbrace{\mathrm{Int}\,(A) \;\sqcup\; \mathrm{Fr}\,(A)}_{\overline{A}} \;\sqcup\, \mathrm{Ext}\,(A)\,,$$

тобто ці множини попарно не перетинаються, а їх об'єднання дає весь простір X.

Задача 4.3. Показати, що $\mathrm{Int}\,(A)$ та $\mathrm{Ext}\,(A)$ є відкритими множинами, а $\mathrm{Fr}\,(A)$ та $\overline{A}$ – замкненими.

Задача 4.4. Показати, що замикання $\overline{A}$ тотожне з множиною усіх точок дотику множини A.

Задача 4.5. Нехай $A \subset B \subset X$ дві підмножини топологічного простору (X, τ). Позначимо через $\mathrm{Int}_B(A)$, $\mathrm{Fr}_B(A)$ та $\mathrm{cl}_B(A)$ відповідно внутрішність, межу та замикання A в топології τ_B. Чи правда, що

$$\mathrm{Int}_B(A) = \mathrm{Int}(A) \cap B, \qquad \mathrm{Fr}_B(A) = \mathrm{Fr}(A) \cap B, \qquad \mathrm{cl}_B(A) = \mathrm{cl}(A) \cap B?$$

Якщо ні, то встановити включення в яку сторону завжди виконуються, і навести контрприклади для протилежних включень.

Задача 4.6. Використовуючи означення точки дотику, довести, що сукупність усіх точок дотику множини A (тобто її замикання $\overline{A}$) є замкненою множиною

Задача 4.7. Довести такі тотожності:

(1) $\mathrm{Int}\,(X \setminus A) = \mathrm{Ext}\,(A)$;
(2) $\mathrm{Fr}\,(X \setminus A) = \mathrm{Fr}\,(A)$;
(3) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathrm{Int}\,(A)$;
(4) $\mathrm{Ext}\,(X \setminus A) = \mathrm{Int}\,(A)$

Іншими словами, має місце така діаграма:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X & = & \mathrm{Int}\,(A) \arrow[rr, dash, bend left, "\overline{A}"] \arrow[d, equal] & \bigsqcup & \mathrm{Fr}\,(A) \arrow[d, equal] & \bigsqcup & \mathrm{Ext}\,(A) \arrow[d, equal] \\
X & = & \mathrm{Ext}\,(X \setminus A) & \bigsqcup & \mathrm{Fr}\,(X \setminus A) \arrow[rr, dash, bend right, "\overline{X \setminus A}"'] & \bigsqcup & \mathrm{Ext}\,(X \setminus A)
\end{tikzcd}$$

Задача 4.8. Нехай U, Y — підмножини в X, причому U — відкрита. Показати, що якщо U перетинає замикання Y, то U також перетинає і саму множину Y.

Задача 4.9. Перевірити наступні чотири властивості замикання:

(1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
(2) $A \subset \overline{A}$;
(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

де A та B — довільні підмножини в X.

Задача 4.10. (Теорема Куратовського) Нехай X — довільна підмножина і 2^X — множина всіх її підмножин. Припустимо, що задане відображення $\mathrm{cl} : 2^X \to 2^X$, яке має властивості аналогічні властивостям із задачі 4.9:

(1) $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$;
(2) $A \subset \mathrm{cl}(A)$;
(3) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$;
(4) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$;

де A та B — довільні підмножини в X.

Нехай також $\sigma = \mathrm{cl}(2^X) = \{\mathrm{cl}(A) \mid A \subset X\}$ — сукупність образів усіх підножин з X при відображенні cl, і $\tau = \{X \setminus A \mid A \in \sigma\}$ — сукупність відповідних доповнень.

Довести, що тоді τ є топологією на X, в якій $\overline{A} = \mathrm{cl}(A)$ для кожної підмножини $A \subset X$, і, зокрема, σ є сукупністю всіх замкнених множин в τ.

Відображення cl, що має властивості (1)-(4) називається *оператором Куратовського*

Задача 4.11. Показати, що властивості (1)-(4) відображення cl в задачі 4.10 рівносильні виконанню однієї умови:

$$A \cup \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(B)) \;=\; \mathrm{cl}(A \cup B) \setminus \mathrm{cl}(\varnothing)$$

для довільних підмножин $A, B \subset X$.

Задача 4.12. Множина є замкненою тоді і лише тоді, коли вона тотожна зі своїм замиканням.

Задача 4.13. Замикання множини A тотожне з перетином всіх замкнених підмножин, що містять A:

$$\overline{A} = \bigcap_{F\text{ - замкнена і } A \subset F} F.$$

Означення 4.14. *Сім'я підмножин $\alpha = \{A_i\}_{i\in\Lambda}$ в X називається* ***локально скінченною****, якщо у кожної точки $x \in X$ існує окіл, який перетинається лише із скінченним числом елементів з α.*

Задача 4.15. Довести, що об'єднання локально скінченної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною.

Задача 4.16. Навести приклад сім'ї замкнених множин, об'єднання якої не є замкненим.

5. Всюди щільні та ніде не щільні множини

Задача-означення 5.1. Нехай $A \subset X$ — підмножина. Показати, що наступні умови є еквівалентними:

(1) $\overline{A} = X$;
(2) A перетинає кожну відкриту непорожну множину $U \in \tau$.

Якщо виконана одна з цих умов, то A називається ***всюди щільною*** в X.

Задача-означення 5.2. Нехай $A \subset X$ — підмножина. Показати, що наступні умови є еквівалентними:

(1) $\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) = \varnothing$;
(2) кожна відкрита підмножина $U \in \tau$ містить точку, що не належить A, тобто $U \setminus A \neq \varnothing$.

Якщо виконана одна з цих умов, то A називається ***ніде не щільною*** в X.

Задача 5.3. Кожна множина є всюди щільною в своєму замиканні.

Задача 5.4. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення і $A \subset X$ — всюди щільна підмножина. Показати, що $f(A)$ є всюди щільною в Y.

Задача 5.5. Нехай $f : X \to Y$ — відкрите сюр'єктивне відображення і $B \subset Y$ — всюди щільна підмножина. Показати, що $f^{-1}(B)$ є всюди щільною в X.

Задача 5.6. Нехай $A \subset X$ — всюди щільна підмножина. Довести, що будь-яка надмножина $B \supset A$ є також всюди щільною.

Задача 5.7. Нехай $A \subset X$ — ніде не щільна підмножина. Довести, що будь-яка підмножина $B \subset \overline{A}$ є також ніде не щільною.

Означення 5.8. *Топологічний простір X називається* ***сепарабельним*** *якщо він має злічену всюди щільну підмножину.*

Задача 5.9. Довести, що кожен топологічний простір з другою аксіомою зліченості є сепарабельним.

6. Послідовності

Означення 6.1. *Нехай $K \subset \mathbb{N}$ — довільна нескінченна підмножина.* ***Послідовністю*** *в топологічному просторі називається довільне відображення*

$$x : K \to X.$$

Образ $x(i)$ зручно позначати через x_i, а саму послідовність записувати у вигляді $\{x_i\}_{i \in K}$.

Кажуть, що послідовність $\{x_i\}_{i\in K}$ ***збігається*** *до точки $a \in X$, якщо кожен окіл U точки a містить всі члени цієї послідовності починаючи з деякого номера.*

Іншими словами, для заданого околу U точки a знайдеться такий індекс N, що $x_i \in U$ для всіх $i > N$ які належать до K.

Якщо $L \subset K$ — нескінченна підмножина, то обмеження $x|_L : L \to X$ називається ***підпослідовністю*** *послідовності x.*

Задача 6.2. Якщо послідовність $x : K \to X$ збігається до точки $a \in X$, то будь-яка її підпослідовність $x|_L : L \to X$ також збігається до a.

Зокрема, якщо відкинути довільне *скінченне!* число елементів послідовності x, то вона все одно збігатиметься до a.

7. Неперервні відображення

Задача 7.1. Нехай $f : X \to Y$ — довільне відображення між топологічними просторами. Показати, що наступні умови є еквівалентними:

(1) f — неперервне, тобто прообраз кожної відкритої в Y множини є відкритим, див. означення 1.7;
(2) прообраз $f^{-1}(A)$ кожної замкненої в Y множини A є замкненим;

(3) для довільної підмножини $A \subset X$ виконана умова: $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
(4) для довільної підмножини $B \subset Y$ виконана умова: $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$;
(5) для довільної підмножини $B \subset Y$ виконана умова: $f^{-1}(\mathrm{Int}\,(B)) \subset \mathrm{Int}\,(f^{-1}(B))$;
(6) прообраз <u>деякої</u> бази (передбази) топології на Y є базою (передбазою) топології на X.
(7) прообраз <u>довільної</u> бази (передбази) топології на Y є базою (передбазою) топології на X.

Задача 7.2. Нехай $f : X \to Y$ та $g : Y \to Z$ — неперервні відображення. Довести, що їх композиція $g \circ f : X \to Z$ є також неперервною.

Задача 7.3. Нехай $f : X \to Y$ — довільне відображення між топологічними просторами. Розглянемо такі дві умови на f:

(1) f — неперервне;
(2) якщо послідовність $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ збігається до деякої точки $a \in X$, то послідовність образів $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ збігається до точки $f(a)$.

Довести, що (1)⇒(2), а якщо X задовольняє першу аксіому зліченості, то (2)⇒(1).

Означення 7.4. *Нехай $A \subset X$ — підмножина. Сім'я підмножин $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ в X називається* ***покриттям*** *множини A, якщо $A \subset \bigcup\limits_{i\in\Lambda} U_i$.*

Покриття називається ***відкритим*** *(відп.* ***замкненим****), якщо кожен його елемент є відкритою (відп. замкненою) підмножиною в X.*

Задача 7.5. Нехай $f : X \to Y$ — відображення між топологічними просторами і $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ — *відкрите* покриття X. Довести, що відображення f — неперервне тоді і лише тоді, коли обмеження $f|_{U_i} : U_i \to Y$ є неперервним для кожного $i \in \Lambda$.

Задача 7.6. Нехай $f : X \to Y$ — відображення між топологічними просторами і $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$ — *локально скінченне замкнене* покриття X. Довести, що відображення f — неперервне тоді і лише тоді, коли обмеження $f|_{A_i} : A_i \to Y$ є неперервним для кожного $i \in \Lambda$.

8. Аксіоми віддільності

Означення 8.1. *Топологічний простір X задовольняє* ***аксіому віддільності*** *T_0, якщо для кожної пари різних точок $x \neq y \in X$ <u>хоча б одна з них</u> має окіл, який не місить другу точку.*

Топологічний простір X задовольняє ***аксіому віддільності*** *T_1, якщо для кожної пари різних точок $x \neq y \in X$ <u>кожна з них</u> має окіл, який не місить другу точку.*

Топологічний простір X задовольняє ***аксіому віддільності*** *T_2, якщо для кожної пари різних точок $x \neq y \in X$ існують околи U_x and U_y, що не перетинаються: $U_x \cap U_y = \varnothing$. T_2-простори також називаються* ***хаусдорфовими****.*

Топологічний простір X задовольняє ***аксіому віддільності*** *T_3, якщо для кожної точки $x \in X$ та замкненої підмножини $A \subset X$, яка не місить точку x, існують околи U_x and U_A, що не перетинаються: $U_x \cap U_A = \varnothing$. Простори, що задовольняють аксіоми T_1 та T_3 називають* ***регулярними****.*

Топологічний простір X задовольняє ***аксіому віддільності*** $T_{3\frac{1}{2}}$*, якщо для кожної точки $x \in X$ та замкненої підмножини $A \subset X$, яка не місить точку x, існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$ така, що $f(x) = 0$ і $f(A) = 1$. Простори, що задовольняють аксіоми T_1 та $T_{3\frac{1}{2}}$ називають* ***цілком регулярними****.*

Топологічний простір X задовольняє ***аксіому віддільності*** T_4*, якщо для довільних диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують околи U_A and U_B, що не перетинаються: $U_A \cap U_B = \varnothing$. Простори, що задовольняють аксіоми T_1 та T_4 називають* ***нормальними****.*

Задача 8.2. Довести імплікації: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Задача 8.3. Нехай (X, τ) — топологічний простір. Довести, що наступні умови є еквівалентними:

(1) X задовольняє аксіому T_1;
(2) кожна одноточкова підмножина $\{x\}$ в X є замкненою;
(3) для кожної точки x перетин всіх відкритих множин, що містять x тотожний $\{x\}$:

$$\{x\} = \bigcap_{x \in V \in \tau} V.$$

Задача 8.4. Нехай X — топологічний простір. Введемо на ньому відношення $x \leq y$ тоді і лише тоді, коли $x \in \overline{\{y\}}$. Довести, що $\leq$ є рефлексивним і симетричним, але, взагалі кажучи, воно не є транзитивним.

Задача 8.5. Нехай (X, τ) — топологічний простір. Довести, що наступні умови є еквівалентними:

(1) X задовольняє аксіому T_2;
(2) для кожної точки x перетин замикань всіх відкритих множин, що містять x тотожний $\{x\}$:

$$\{x\} = \bigcap_{x \in V \in \tau} \overline{V}.$$

Задача 8.6. Показати, що скінченний хаусдорфовий топологічний простір є дискретним.

Задача 8.7. Нехай $f, g : X \to Y$ — два неперервних відображення між топологічними просторами і $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ — множина тих точок, в яких значення f та g тотожні. Довести, що якщо Y — хаусдорфовий, то A — замкнена множина.

Задача 8.8. Нехай $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ послідовність в топологічному просторі X, яка збігається до точок a і b одночасно. Показати, що якщо X — хаусдорфовий, то $a = b$.

9. Компактність

Означення 9.1. *Топологічний простір X називається* ***компактним*** *якщо кожне його відкрите покриття $\alpha = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ містить скінчене підпокриття, тобто можна знайти лише скінчене число множин $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k} \in \alpha$ таке, що $X = \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$.*

Задача 9.2. Довести, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Задача 9.3. Нехай $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — послідовність точок топологічного простору X, яка збігається до деякої точки a. Довести, що множина $K = \{a, x_1, x_2, \ldots\}$ всіх точок цієї послідовності разом з точкою a є компактною.

Задача 9.4. Довести, що об'єднання скінченного числа компактних підмножин є компактною множиною.

Задача 9.5. Довести, що перетин довільного числа компактних підмножин є компактною множиною.

Задача 9.6. (Теорема Гейне-Бореля) Нехай X — компактний топологічний простір. Тоді кожна послідовність в X має граничну точку.

Задача 9.7. Нехай X — сепарабельний топологічний простір. Припустимо, що кожна послідовність в X має граничну точку. Довести, що тоді X компактний.

Задача 9.8. Нехай $K \subset X$ — компактна підмножина. Довести, що якщо X — хаусдорфовий, то K — замкнена.

Задача 9.9. Довести, що неперервне відображення компактного простору в хаусдорфовий є замкненим.

Задача 9.10. (Теорема Вейєрштраса) Нехай X — компактний топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Довести, що тоді існують точки $x_{min}, x_{max} \in X$, в яких f приймає своє мінімальне і максимальне значення відповідно.

Задача 9.11. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення. Якщо X — компактний, то його образ $f(X)$ є компактною підмножиною в Y в індукованій топології.

10. Зв'язніть та лінійна зв'язність

Означення 10.1. *Топологічний простір X називається **не зв'язним**, якщо його можна представити як диз'юнктне об'єднання двох свої непорожніх відкрито-замкнених множин, тобто існують такі дві підмножини $A, B \subset X$, що*

(1) кожна з множин A, B є непорожньою, відкритою і замкненою;
(2) $A \cap B = \varnothing$;
(3) $A \cup B = X$.

*В протилежному випадку X називається **зв'язним**.*

Задача 10.2. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення. Довести, що якщо X — зв'язний, то його образ $f(X)$ є зв'язним в індукованій топології з Y.

Задача 10.3. Нехай $A, B \subset X$ — такі підмножини, що $A \subset B \subset \overline{A}$. Довести, що якщо A — зв'язна, то B також зв'язна. Зокрема, замикання зв'язної множини є зв'язним.

Задача 10.4. Нехай $A, B \subset X$ — дві зв'язних підмножини. Довести, що якщо вони перетинаються, тобто $A \cap B \neq \varnothing$, то їх об'єднання $A \cup B$ є зв'язним.

Задача 10.5. Нехай $A_1, \dots, A_k \subset X$ — скінченне число зв'язних підмножини. Довести, що якщо $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ для $i = 1, \dots, k-1$, то їх об'єднання $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ є зв'язним.

Означення 10.6. ***Шляхом** в топологічному просторі X називається довільне неперервне відображення $f : [a, b] \to X$ відрізка $[a, b]$. При цьому кажуть, $f(a)$ називається **початком** шляху f, а $f(b)$ — його **кінцем**, і що f **з'єднує** точки $f(a)$ та $f(b)$.*

*Топологічний простір X називається **лінійно зв'язним**, якщо для довільних двох точок $x, y \in X$ існує шлях, який їх з'єднує. В протилежному випадку X називається **лінійно не зв'язним**.*

Задача 10.7. Довести, що кожен лінійно зв'язний топологічний простір є зв'язним.

Задача 10.8. Нехай X — це підмножина в $\mathbb{R}^2$, що є об'єднанням графіка функції $f : (0, +\infty) \to [0, 1]$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, та відрізка $[-1, 1]$ на осі Oy. Довести, що X є зв'язним, але не лінійно зв'язним.

11. Топологічний добуток

Задача-означення 11.1. *Нехай (X, τ) (Y, σ) — топологічні простори,*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

— їх декартів добуток, і

$$\beta = \{U \times V \mid U \in \tau, V \in \sigma\}$$

сім'я підмножин в $X \times Y$, що складається з усіх можливих декартових добутків відкритих множин з X та Y. Показати, що β є базою деякої топології на $X \times Y$.

В цій топології $X \times Y$ називається ***топологічним добутком*** *просторів X та Y, а сама топологія* ***тихонівською****.*

Задача-означення 11.2. *Більш загально, нехай $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \Lambda}$ — довільна сім'я топологічних просторів, $X = \prod_{i \in \Lambda} X_i$ — декартовий добуток множин X_i і*

$$\beta = \left\{ \prod_{i \in \Lambda} U_i \mid U_i \in \tau, \textit{причому } U_i \neq X_i \textit{ лише для скінченого числа індексів } i \in \Lambda \right\}$$

сім'я підмножин в X, що складається з усіх можливих декартових добутків відкритих множин з X_i, які відрізняються від X_i лише для скінченного числа індексів. Показати, що β є базою деякої топології на X.

В цій топології X називається ***топологічним добутком*** *просторів X_i, $i \in \Lambda$, а сама топологія* ***тихонівською****.*

Для кожного $i \in \Lambda$ визначимо відображення $p : X \to X_i$ за формулою $p(\{x_j\}_{j \in \Lambda}) = x_i$, тобто p_i ставить у відповідність точці $\{x_j\}_{j \in \Lambda}$ її i-ту координату. Воно називається ***проекцією*** *на X_i.*

Задача 11.3. Довести, що кожне відображення проекції $p_i : \prod_{i \in \Lambda} X_i \to X_i$ є відкритим.

Навести приклад, коли воно не є замкненим.

Задача 11.4. Нехай A та $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \Lambda}$ — топологічні простори і для кожного $i \in \Lambda$ задано відображення $f_i : Y \to X_i$. Це відображення індукує відображення $f : A \to \prod_{i \in \Lambda} X_i$ за формулою $f(a) = \big(\{f_i(a)\}_{i \in \Lambda}\big)$.

Довести, що

(1) $f_i = p_i \circ f$ для всіх $i \in \Lambda$;
(2) f є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервним є кожне з відображень f_i.

Задача 11.5. (Теорема Тихонова. Простий варіант) Довести, що топологічний добуток скінченного числа компактних просторів є компактним.

Задача 11.6. (Теорема Тихонова) Довести, що топологічний добуток довільного числа компактних просторів є компактним.

Задача 11.7. Нехай X — топологічний простір і $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ — підмножина в $X \times X$, яку називають *діагоналлю*. Довести, що X є хаусдорфовим тоді і лише тоді, коли його діагональ Δ є замкненою в $X \times X$.

Задача 11.8. Довести, що топологічний добуток зв'язних топологічних просторів є зв'язним.

Задача 11.9. Довести, що топологічний добуток лінійно зв'язних топологічних просторів є лінійно зв'язним.

Задача 11.10. Довести, що топологічний добуток лінійно зв'язних топологічних просторів є лінійно зв'язним.

Задача 11.11. Довести, що топологічний добуток T_k-просторів, $k \in \{0,1,2\}$, також задовольняє аксіому віддільності T_k.

Задача 11.12. Нехай $f_i : X \to Y_i$, $i \in \Lambda$, – довільна сім'я відображень, кожне з яких неперервне в точці $x \in X$. Довести, що їх добуток $f = \prod_{i\in\Lambda} f_i : X \to \prod_{i\in\Lambda} Y_i$, $f(s) = (f_i(s))_{s\in\Lambda}$ є неперервним в точці x.

12. Диференційовні відображення

Задача 12.1. Довести, що відображення $\pi, \mu : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначені за формулами

$$\pi(x,y) = x+y, \qquad \mu(x,y) = xy,$$

є неперервними.

Задача 12.2. Нехай $Mat(n,m)$ – множина усіх $n\times m$ матриць (n рядків, m стовпців), або лінійних відображень $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Ототожнимо її природним чином з топологічним простором $\mathbb{R}^{nm}$. Довести, що відображення

$$\begin{aligned}
&\mu : Mat(n,m)\times Mat(m,l) \to Mat(n,l), && \mu(A,B) = BA\\
&\pi : Mat(n,m)\times Mat(n,m) \to Mat(n,m), && \pi(A,B) = A+B\\
&\alpha : Mat(n,m)\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, && \alpha(A,x) = Ax
\end{aligned}$$

множення та додавання матриць є неперервними.

Задача 12.3. Нехай (X,τ) – топологічний простір, $f,g : X \to \mathbb{R}$ – дві функції неперервні в деякій точці $p \in X$. Довести, що тоді функції $f+g, fg : X \to \mathbb{R}$ виначені за формулами $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ та $(fg)(x) = f(x)g(x)$ є неперервними в точці p.

Означення 12.4. *Нехай $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ – деяка функція, визначена на відкритому інтервалі.* ***Похідною*** *f в точці $p \in (a,b)$ називається границя*

$$f'(p) := \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$

Якщо ця границя існує і є скінченною, то f називається ***диференційовним*** *в точці p.*

Означення 12.5. *Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита підмножина, $f : U \to \mathbb{R}$ деяка функція, $p = (p_1,\dots,p_m) \in U$ – точка і $k \in \{1,\dots,m\}$.* ***Частинною похідною*** *f* ***в точці*** *p* ***по змінній*** *x_k називається границя*

$$f'_{x_k}(p) := \lim_{x_k\to p_k} \frac{f(p_1,\dots,p_{k-1},x_k,\ p_{k+1},\dots,p_k) - f(p)}{x_k - p}.$$

Іншими словами $f'_{x_k}(p)$ – це похідна обмеження f на множину

$$\{(p_1,\dots,p_{k-1})\}\times\mathbb{R}\times\{(p_{k+1},\dots,p_k)\}\ \cap\ U.$$

Означення 12.6. *Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита підмножина і $f : U \to \mathbb{R}^n$ деяке відображення. Тоді f називається* ***диференційовним*** *в точці $p \in U$, якщо існує таке лінійне відображення $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, що відображення*

$$\Delta(f,p,A) : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \Delta(f,p,A)(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(p) - A(x-p)}{|x-p|}, & x \neq p, \\ 0, & x = p \end{cases}$$

є неперервним в точці p.

В більш "звичних" термінах границь це означає, що

$$\lim_{U \ni x \to p} \Big(\frac{f(x) - f(p) - A(x-p)}{|x-p|} \Big) = 0. \tag{1}$$

а в термінах "нескінченно малих величин" – що

$$f(x) = f(p) + A(x-p) + o(|x-p|)$$

для всіх $x \in U$ достатньо близьких до p.

Відображення A називається ***відображенням Якобі*** *f в точці p, а його матриця –* ***матрицею Якобі****. Вона має розмір $n \times m$ (n рядків і m стовпчиків) і позначається $f'(p)$.*

Зокрема, якщо $f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}$ – функція, то $A = (a_1, \dots, a_m)$ – вектор-рядок довжини m. Він також називається ***градієнтом*** *f* ***в точці*** *p і позначається $\nabla f(p)$.*

Кажуть, що f є ***неперервно диференційовним*** *в точці p, або* ***належить класу*** *C^1, якщо f диференційовне у всіх точках деякого відкритого околу $W \subset U$ точки p, а відображення $f' : W \to Mat(n,m) \equiv \mathbb{R}^{nm}$, яке ставить у відповідність точці $q \in W$ її матрицю Якобі $f'(q)$ є неперервним.*

Задача 12.7. Нехай $U = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ – деяка функція і $p \in U$. Довести, що означення 12.4 та 12.6 еквівалентні. Якщо ці умови виконуються, то лінійне відображення $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначається за формулою $A(u) = f'(p)u$, і ми маємо тотожність $f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + o(|x-p|)$.

Задача 12.8. Довести, що якщо $f : U \to \mathbb{R}^n$ – диференційовне в точці $p \in U$, то f також є неперервним в цій точці.

Задача 12.9. Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита підмножина, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ деяке відображення і $p = (p_1, \dots, p_m) \in U$. Розглянемо наступні умови:

(a) f диференційовне в точці p;
(b) кожна координатна функція $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, диференційовна в точці p.

Довести, що з (a) випливає (b).

Показати, також що якщо (a) виконується, і $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$ – матриця Якобі f в точці p, то i-й рядок $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ цієї матриці є матрицею Якобі (або градієнтом) $\nabla f_i(p)$ координатної функції f_i.

Задача 12.10. Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита підмножина, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ деяке відображення і $p = (p_1, \dots, p_m) \in U$. Довести, що наступні умови еквівалентні:

(a) f неперервно диференційовне в точці p;
(b) кожна координатна функція $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, неперервно диференційовна в точці p.

Задача 12.11. Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита підмножина, $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ – відображення, $t \in \mathbb{R}$, $p \in U$, $A, B \in Mat(n, m)$. Довести тотожності

$$\Delta(f, p, A) + \Delta(g, p, B) = \Delta(f + g, p, A + B), \qquad \Delta(tf, p, tA) = t\Delta(f, p, A).$$

Вивести з них, що якщо f, g – диференційовні в точці p, то відображення

$$f + g,\ tf : U \to \mathbb{R}^n, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (tf)(x) = tf(x),$$

також диференційовні в точці p.

13. Іммерсії, субмерсії

Нехай $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} = \{|z| = 1\}$ – одиничне коло в площині.

Задача 13.1. Довести, що відображення $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$, є локальним дифеоморфізмом.

Задача 13.2. Нехай $r \geq 1$. Довести, що для довільних C^r многовидів M, N, відображення проєкція $p : M \times N \to M$, $p(x, y) = x$ є C^r субмерсією.

Задача 13.3. Зобразити ліні рівня таких функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ на площині

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$;
(2) $f(x, y) = x^2 - y^2$;
(3) $f(x, y) = xy$;
(4) $f(x, y) = xy(x + y)$;
(5) $f(x, y) = x^3 + xy^2$;
(6) $f(x, y) = x^4 + y^4$;
(7) $f(x, y) = (x^2 + y^2)(3x^2 + 4y^2)$ (схематично);
(8) Нехай $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – відображення комплексної площини в себе визначене за формулою $g(z) = z^n = (x + iy)^n$ для деякого $n \geq 1$ і $f(x, y) = Re(x + iy)$, або $f(x, y) = Im(x + iy)$.

Задача 13.4. Для наступних відображень визначити точки в яких вони є іммерсіями, субмерсіями, локальними дифеоморфізмами

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y^2)$;
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y^3 + xy)$;

Предметний покажчик