Групи Лі

СЕРГІЙ МАКСИМЕНКО

План

Рекомендована література

[1] Дж. Адамс, Лекции по группам Ли. – М.: Наука, 1979, download

[2] J. Gleason, Existence and uniqueness of Haar measure, download

[3] M. Goto, On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 20, No. 1 (Jan., 1969), pp. 157-162 download

1. Топологічні групи

Нехай G – множина, на якій задано топологію τ і структуру групи, тобто два відображення множення і взяття оберненого

$$\mu : G \times G \to G, \qquad \nu : G \to G,$$

тобто

(1) $\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c)$ для всіх $a, b, c \in G$;

(2) існує такий $e \in G$, що $\mu(e, a) = \mu(a, e) = a$ для всіх $a \in G$ – цей елемент називають нейтральним, або одиницею G;

(3) $\mu(a, \nu(a)) = e$ для кожного $a \in G$, елемент $\nu(a)$ називається оберненим до a.

Трійка (τ, μ, ν) задає структуру топологічної групи на G, якщо μ, ν є неперервними в топології τ.

Підгрупами топологічної групи називають замкнені підгрупи. Нехай G, H – топологічні групи. Гомоморфізмом $\phi : G \to H$ топологічних груп називається неперервний гомоморфізм цих груп.

Нехай далі G – топологічна група. Зручно позначати $\mu(a, b) = ab$, $\nu(a) = a^{-1}$.

Задача 1.1. Довести, що для кожного $a \in G$ відображення лівого і правого зсуву $L_a, R_a : G \to G$, $L_a(x) = ax$, $R_a(x) = xa$, – гомеоморфізми G. Зокрема, спряження $x \mapsto a^{-1}xa$, тобто композиція $L_{a^{-1}} \circ R_a$ – також гомеоморфізм.

Задача 1.2. Довести, що відображення взяття оберненого елемента $\nu : G \to G$ – гомеоморфізм G.

Задача 1.3. Довести, що топологічні групи та їх неперервні гомоморфізми утворюють категорію. Ізоморфізми в цій категорії – це ізоморфізми груп, які також є гомеоморфізмами.

Задача 1.4. Довести, що для топологічної групи G наступні умови еквівалентні:

1) G є T_1-простором;
2) одиниця e є замкненою множиною;
3) $\{e\} = \cap_{e \in V \in \tau} V$, де V пробігає множину всіх околів e.

Задача 1.5. Довести, що для топологічної групи G наступні умови еквівалентні:

1) G є T_2-простором;
2) $\{e\} = \cap_{e \in V \in \tau} \overline{V}$, де V пробігає множину всіх околів e.

Задача 1.6. Нехай $b, c \in G$ і $a = bc^{-1}$. Довести, що для довільного околу U_a існують такі околи U_b і U_c точок b і c відповідно, такі, що $U_b U_c^{-1} \subset U_a$.

Задача 1.7. Нехай $V \subset U \subset G$ – довільні підмножини, і W_e – окіл e такий, що або $VW_e^{-1} \subset U$ або $W_e^{-1}V \subset U$. Тоді $\overline{V} \subset Int(U)$.

Задача 1.8. Довести, що кожна топологічна група є T_3-простором, але не обов'язково T_0, T_1, або T_2.

Задача 1.9. Довести, що кожна компактна топологічна група є T_4-простором, але не обов'язково T_0, T_1, або T_2.

Задача 1.10. Довести, що T_1 топологічна група є T_2-простором, а отже умови задач 1.4 та 1.5 еквівалентні.

Задача 1.11. Довести, що компонента зв'язності G_e одиниці e в G є нормальною топологічною підгрупою, тобто це нормальна підгрупа в G, яка також є замкненою підмножиною в G.

Задача 1.12. Довести, що компонента лінійної зв'язності G_e одиниці e в G є нормальною підгрупою групи G, але вона не обов'язково замкнена.

Задача 1.13. Показати, що для кожного (неперервного) гомоморфізму топологічних груп $\phi : G \to H$ маємо, що $\phi(G_e) \subset H_e$, а тому від індукує гомоморфізм

$$\phi_e : G/G_e \to H/H_e.$$

Довести, що якщо ϕ – сюр'єктивний, то ϕ_e – також сюр'єктивний. Навести приклад, коли ϕ – ін'єктивний, але ϕ_e – не є ін'єктивним.

Задача 1.14. Довести, що в топологічній групі G замикання підгрупи є підгрупою.

Задача 1.15. Довести, що в топологічній групі G кожна відкрита підгрупа є замкненою.

Задача 1.16. Довести, що в топологічній групі G замикання нормальної підгрупи є нормальною підгрупою.

Задача 1.17. Довести, що в топологічній групі G, яка задовольняє аксіому T_1

1.17.1. централізатор кожного елемента $Z(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ є замкненою підгрупою;
1.17.2. центр групи $Z(G) = \{x \in G \mid ax = xa \text{ для всіх } a \in G\}$ є замкненою підгрупою;
1.17.3. нормалізатор $N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$ замкненої підгрупи H є замкненою підгрупою;
1.17.4. кожна замкнена підгрупа скінченого індексу відкрита;
1.17.5. якщо G компактна, то кожна відкрита підгрупа має скінченний індекс;
1.17.6. замикання комутативної підгрупи є комутативною підгрупою.

Комутатор двох елементів $a, b \in G$ це

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}.$$

Комутант групи - це підгрупа породжена комутаторами елементів. Вона позначається $[G, G]$.

Задача 1.18. Відкрита проблема: отримати умови за яких комутант топологічної групи буде замкненою підгрупою.

Нехай $H \subset G$ – підгрупа і $p : G \to G/H$ природне відображення в множину правих (або лівих) суміжних класів і наділимо G/H відповідною факторною топологією.

Задача 1.19. Нехай $H \subset G$ – підгрупа топологічної групи і $p : G \to G/H$ природне відображення в множину правих (або лівих) суміжних класів. Наділимо G/H відповідною факторною топологією.

1.19.1. Довести, що p – відкрите відображення.
1.19.2. G/H – T_1-простір тоді і тільки тоді, коли H – замкнена.

Задача 1.20. Нехай $\phi : G \to H$ – сюр'єктивний гомоморфізм топологічних груп, $\ker(\phi)$ – його ядро і $\hat{\phi} : G/\ker(\phi) \cong H$ – *ізоморфізм груп*, для якого наступна діаграма комутативна:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & H \\ & G/\ker(\phi) \arrow[ur, "\hat{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Показати, що $\hat{\phi}$ – неперервний.

Зауважимо, що $\hat{\phi}$, взагалі кажучи, не є гомеоморфізмом, а тому не буде *ізоморфізмом топологічних груп*. Навести такий приклад.

2. Дії груп

Нехай G – група з одиницею e і X – множина. *Лівою дією групи G на X* називається відображення $\mu : G \times X \to X$, яке задовольняє такі умови:

- $\mu(e, x) = x$ для всіх $x \in X$;
- $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ для всіх $x \in X$ і $g, h \in G$.

Якщо перепозначити $\mu(g, x) = gx$, то ці умови перепишуться так:

- $ex = x$ для всіх $x \in X$;
- $g(h, x) = (gh)x$ для всіх $x \in X$ і $g, h \in G$.

Аналогічно *права дія групи G на X* називається відображення $\mu : X \times G \to X$, яке задовольняє такі умови:

- $\mu(x, e) = x$ для всіх $x \in X$;
- $\mu(\mu(x, g), h) = \mu(x, gh)$ для всіх $x \in X$ і $g, h \in G$.

Відмінність лівої і правої дій в тому, що при дії добутком gh на x, в лівій дії, спочатку застосовується h, а потім g, а в правій – навпаки, спочатку g, а потім h.

Якщо G і X наділені топологіями, в яких μ – неперервне, то дія називається *неперервною (відносно даних топологій)*.

Якщо G – група Лі, X – многовид класу C^r, і μ – диференційовне класу C^r, то дія називається *диференційовною (класу C^r)*.

Задача 2.1. Нехай $\mu : G \times X \to X$ – ліва дія. Довести, що тоді $\nu : X \times G \to X$, $\nu(x, g) = \mu(g^{-1}, x)$, є правою дією.

Задача 2.2. Нехай $\nu : X \times G \to X$ – права дія. Довести, що тоді $\mu : G \times X \to X$, $\mu(g, x) = \nu(x, g^{-1})$, є лівою дією.

Надалі розглядатимемо лише ліві дії. Нехай $\mu : G \times X \to X$ – ліва дія. Для кожного $g \in G$ позначимо через $L_g : X \to X$ відображення визначене за формулою $L_g(x) = gx$.

Задача 2.3. Нехай $\mu : G \times X \to X$ – ліва дія. Довести наступні твердження.

2.3.1) $L_e = \mathrm{id}_X$, $L_g \circ L_h = L_{gh}$.

2.3.2) Показати, що кожне L_g є біекцією.

2.3.3) Якщо дія неперервна, то L_g – гомеоморфізм X.

2.3.4) Якщо дія диференційовна, то L_g – дифеоморфізм класу C^r.

Задача 2.4. Нехай $\mu : G \times X \to X$ – ліва дія. Нехай Σ_X – група всіх біекцій X на себе відносно операції композиції відображень. Показати, що відповідність $\bar{\mu} : G \to \Sigma_X$, $\bar{\mu}(g) = L_g$ – гомоморфізм.

Задача 2.5. Нехай $\gamma : G \to \Sigma_X$ довільний гомоморфізм в групу біекцій X. Довести, що тоді відображення $\mu : G \times X \to X$ визначене за формулою $\mu(g, x) = \gamma(g)(x)$, є лівою дією G на X.

Таким чином дія групи на множині це те ж саме, що гомоморфізм цієї дії в групу біекцій X.

Ядро $\ker(\bar{\mu})$ називається *ядром неефективності дії μ*.

Задача 2.6. Нехай $\mu : G \times X \to X$ – ліва дія. Довести що наступні умови еквівалентні:

2.6.1) $\ker(\bar{\mu})$ – тривіальне;

2.6.2) $\bar{\mu} : G \to \Sigma_X$ – ін'єктивний;

2.6.3) якщо $gx = x$ для всіх $x \in X$, то $g = e$.

Дія μ називається *ефективною*, якщо виконана одна з цих умов. В протилежному випадку μ називають *неефективною*.

Нехай $\mu : G \times X \to X$ – ліва дія. Тоді

- *стабілізатор* точки x це підмножина в що складається з усіх елементів групи, які залишають x «на місці»:

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\};$$

- *орбіта* точки x це підмножина в X, що складається з усіх образів точки x при дії елементами з G:
$$O_x := \{gx \in X \mid g \in G\};$$
- множина *нерухомих точок* елемента $g \in G$ – це
$$Fix(g) := \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Задача 2.7. Довести, що стабілізатор G_x точки x є підгрупою в G

Задача 2.8. Показати, що якщо дія неперервна, а X – хаусдорфовий, то стабілізатор G_x кожної точки $x \in X$ є замкненою підгрупою в G

Задача 2.9. Нехай $x \in X$ і $g, h \in G$. Довести що наступні умови еквівалентні:

2.9.1) $gx = hx$;

2.9.2) $g^{-1}h \in G_x$;

2.9.3) g і h належать одному лівому суміжному класу G по стабілізатору G_x.

Задача 2.10. Нехай $x \in X$ і $\phi_x : G \to O_x$ – відображення визначене за формулою $\phi_x(g) = gx$. Показати, що індукує бієкцію $\bar{\phi}_x : G/G_x \to O_x$ яка робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\phi_x"] \arrow[dr, "p"'] & & O_x \\ & G/G_x \arrow[ur, "\bar{\phi}_x"'] & \end{tikzcd}$$

де p – природне відображення в множину лівих суміжних класів G/G_x.

Задача 2.11. Припустимо, що G і X – скінченні. Довести, що тоді для довільної точки $x \in X$ маємо, що $|G| = |O_x|\,|G_x|$.

Задача 2.12. Довести, що орбіти різних точок або не перетинаються, або тотожні. Іншими словами кодна дія групи визначає *розбиття* X на орбіти.

Зазвичай, якщо дія μ зрозуміла з контексту, то через X/G позначається простір орбіт, тобто фактор-множина по розбиттю на орбіти дії.

Задача 2.13. Нехай $x \in X$ і $g \in G$. Довести, що $G_{gx} = gG_xg^{-1}$. Зокрема стабілізатори точок, x і g_x, які належать одній орбіті, є спряженими підгрупами в G, а відображення $\alpha_g : G_x \to G_{gx}$, $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$ є ізоморфізмом групи G_x на G_{gx}.

Навпаки, показати, що якщо стабілізатори G_x і G_y деяких точок $x, y \in X$ – спряжені, то ці точки належать одній орбіті.

Задача 2.14. Нехай $g, h \in G$. Довести, що $Fix(ghg^{-1}) = g(Fix(h))$. Зокрема, L_g індукує бієкцію $Fix(h)$ на $Fix(ghg^{-1})$. Показати, що якщо дія неперервна, то ця бієкція є гомеоморфізмом.

Задача 2.15. (Лема Бернсайда) Припустимо, що G і X – скінченні. Довести що тоді
$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Fix(g).$$
Тобто кількість орбіт дії – це середнє значення кількості нерухомих точок по всіх елементах групи.

Підказка. Для доведення розгляньте множину $A = \{(g,x) \in G\times X \mid gx = x\} \subset G\times X$. Тоді

$$A = \sqcup_{g\in G} g \times Fix(g) = \sqcup_{x\in X} G_x \times x = \sqcup_{O\in X/G} \sqcup_{x\in O} G_x \times x$$

звідки $|A| = \sum\limits_{g\in G} |Fix(g)| = \sum\limits_{x\in X} |G_x| = \sqcup\limits_{O\in X/G} \sqcup\limits_{x\in O} |G_x|$. З того, що стабілізатори точок однієї орбіти мають однакове число елеменів, виведіть, що перша остання сума дорівнює $|X/G|\,|G|$.

Задача 2.16. Довести що наступні умови еквівалентні:

2.16.1) для кожної точки $x \in X$ її стабілізатор $G_x = \{e\}$ «тривіальний», тобто є одиничною підгрупою;

2.16.2) якщо $gx = x$ для деякого $g \in G$ і $x \in X$, то $g = e$;

2.16.3) для кожного $g \in G$, $Fix(g) \neq \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $g = e$;

2.16.4) для кожного $x \in X$ відображення $\phi_x : G \to O_x$, $\phi_x(g) = gx$, є бієкцією.

Якщо виконана одна з цих умов, то дія називається *вільною*.

Задача 2.17. Довести що наступні умови еквівалентні:

2.17.1) для довільних точок $x, y \in X$ їх стабілізатори G_x і G_y – спряжені в G;

2.17.2) для будь-яких $x, y \in X$ існує $g \in G$ таке, що $y = gx$;

2.17.3) для кожного $x \in X$ відображення $\phi_x : G \to O_x$, $\phi_x(g) = gx$ – сюр'єктивне.

Якщо виконана одна з цих умов, то дія називається *транзитивною*.

Підмножина $A \subset X$ називається *інваріантною відносно дії* G або G-*інваріантною*, якщо $gA = A$ для всіх $g \in G$.

Задача 2.18. Нехай $A \subset X$ – G-інваріантна підмножина. Показати, що відображення $\bar{\mu}_A : G \to \Sigma_A$, $\mu_A(g) = g|_A : A \to A$, – гомоморфізм. Довести, що підмножина

$$Q_A := \{g \in G \mid ga = a \text{ для всіх } a \in A\}$$

є нормальною підгрупою в G. Ототожнити її з ядром гомоморфізму $\bar{\mu}_A$.

3. Матричні групи над $\mathbb{R}$

Нехай $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ – множина всіх квадратних матриць над $\mathbb{R}$. Вона утворює алгебру $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$ відносно додавання та множення матриць, а також множення матриць на дійсні числа. Ототожнимо її з гладким многовидом $\mathbb{R}^{n^2}$.

Нехай також E – одинична матриця. Для матриці $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{R}, n)$ нехай A^t – транспонована і A^{-1} – обернена до A, $\det(A)$ або $|A|$ позначатимуть визначник матриці A, а $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ – сума діагональних елементів A, яка називається *слід* матриці A.

Задача 3.1. Показати, що відображення визначника $\det : M(\mathbb{R}, n) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$, є аналітичним (зокрема класу C^∞) гомоморфізмом моноїдів $(M(\mathbb{R}, n), *)$ та $(\mathbb{R}, \cdot)$ відносно їх множень. Іншими словами, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Задача 3.2. Довести, що $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ для всіх $A, B \in M(\mathbb{R}, n)$. Більш того, якщо $|A| \neq 0$, то $\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(B)$.

Задача 3.3. Довести, що відображення $\langle\cdot,\cdot\rangle : M(\mathbb{R}, n) \times M(\mathbb{R}, n) \to \mathbb{R}$, $\langle A, B\rangle \mapsto \operatorname{tr}(AB^t)$, тотожне із звичайним скалярним добутком в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Розглянемо наступні підгрупи матриць відносно множення:

- $GL(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid |A| \neq 0\}$ – всі невироджені матриці;
- $GL^{+}(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid |A| > 0\}$ – всі матриці з додатним визначником;
- $SL(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid |A| = 1\}$ – спеціальна лінійна група;
- $SL^{\pm}(n) = \{A \in GL(\mathbb{R}, n) \mid |A| = \pm 1\}$ – ця група зазвичай не має спеціальної назви;
- $O(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid AA^{t} = E\}$ – ортогональна група;
- $SO(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid AA^{t} = E, |A| = 1\} = SL(n) \cap O(n)$.

Задача 3.4. Перевірити, що всі вказані вище підмножини дійсно є групами відносно множення матриць.

Задача 3.5. Показати, що в топології $M(\mathbb{R}, n)$:

- $GL(\mathbb{R}, n)$ і $GL^{+}(\mathbb{R}, n)$ – відкриті підмножини, а отже гладкі підмноговиди многовиду $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$;
- $GL(\mathbb{R}, n)$ має рівно дві компоненти зв'язності;
- $GL^{+}(\mathbb{R}, n)$ є тотожною компонентою зв'язності, тобто компонентою зв'язності одиничної матриці.

За означенням, дотичне розшарування $TM(\mathbb{R}, n)$ многовиду $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ (як Євклідового простору) ототожнюється з $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$, а дотичне розшарування TU кожної відкритої підмножини $U \subset M(\mathbb{R}, n)$ – ототожнюється з $U \times \mathbb{R}^{n^2}$, Більш точно, існує природна бієкція $TU = U \times \mathbb{R}^{n^2}$ і ми вводимо на TU топологію з $U \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Зокрема, дотичне розшарування $TGL(\mathbb{R}, n)$ ототожнюється з

$$TGL(\mathbb{R}, n) \equiv GL(\mathbb{R}, n) \times \mathbb{R}^{n^2}.$$

Задача 3.6. Показати, що в топології $M(\mathbb{R}, n)$ група $SL(n)$ –

3.6.1) замкнена;

3.6.2) некомпактна;

3.6.3) лінійно зв'язна;

3.6.4) дотичний простір групи $SL(n)$ в одиниці E складається з матриць, які мають нульовий слід: $T_E SL(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

Задача 3.7. Показати, що існують гомеоморфізми $GL(\mathbb{R}, n) \cong SL(n) \times (\mathbb{R} \setminus 0) \cong SL^{\pm}(n) \times (0, +\infty)$. Зокрема, вкладення $SL(n) \subset GL^{+}(\mathbb{R}, n)$ та $SL^{\pm}(n) \subset GL(\mathbb{R}, n)$ є гомотопічними еквівалентностями.

Задача 3.8. (Характеризація ортогональних матриць) Нехай $A \in M(\mathbb{R}, n)$. Довести, що наступні умови еквівалентні:

3.8.1) $A \in O(n)$, тобто $AA^{t} = E$;

3.8.2) $(Ax, Ay) = (x, y)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}^{n}$;

3.8.3) $(Ax, Ax) = (x, x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}^{n}$.

Розглянемо функцію $\phi : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}$, $\phi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (x, x)$. Тоді 3.8.3) означає, що $\phi(Ax) = \phi(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^{n}$.

Задача 3.9. Показати, що процес ортогоналізації Грамма-Шмідта, можна інтерпретувати як сильну деформаційну ретракцію $GL(\mathbb{R}, n)$ на $O(n)$.

Інше доведення того, що $O(n)$ є сильним деформаціним ретрактом міститься в задачі 3.17

Задача 3.10. Довести, що для матриці $A \in M(\mathbb{R}, n)$ наступні умови еквівалентні:

3.10.1) A – *симетрична*, тобто $A = A^t$;

3.10.2) $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Задача 3.11. Показати, що якщо матриця $A \in M(\mathbb{R}, n)$ – симетрична, то її власні значення є дійсними і в деяком базисі вона діагоналізується.

Симетрична матриця $A \in M(\mathbb{R}, n)$ називається *додатньо визначеною*, якщо $(Ax, x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}n$. Позначимо через $\mathcal{A}$ – множину всіх додатньо визначених матриць

Задача 3.12. Показати, що $\mathcal{A}$ – опукла підмножина в $M(\mathbb{R}, n)$, а значить стягувана.

Задача 3.13. Показати, що симетрична $A \in M(\mathbb{R}, n)$ є *додатньо визначеню* тоді і тільки тоді, коли її всі власні значення додатні. Зокрема, тоді A – невироджена і існує така додатньо визначена матриця B, що $B^2 = A$.

Задача 3.14. Довести, що $\mathcal{A} \cap O(n) = \{E\}$

Задача 3.15. Довести, що для довільної матриці $A \in GL(\mathbb{R}, n)$, AA^t – додатньо визначена. Зокрема, існує матриця $B \in \mathcal{A}$, така, що $B^2 = AA^t$. Показати, що в цьому випадку, $B^{-1}A$ – ортогональна.

Задача 3.16. (Полярний розклад невиродженої матриці). Використовуючи попередню задачу 3.15 показати, що для довільної матриці $A \in GL(\mathbb{R}, n)$ існують такі матриці $B \in \mathcal{A}$ і $P \in O(n)$, що $A = BP$. Більш того, відповідність $\gamma : GL(\mathbb{R}, n) \to \mathcal{A} \times O(n)$, $\gamma(A) = (B, P)$, є гомеоморфізмом.

Задача 3.17. Вивести із задач 3.12 та 3.16, що вкладення $O(n)$ є сильним деформаційним ретрактом $GL(\mathbb{R}, n)$

Задача 3.18. Показати, що в топології $M(\mathbb{R}, n)$

3.18.1) $O(n)$ і $SO(n)$ – компактні;

3.18.2) $O(n)$ має рівно дві компоненти зв'язності;

3.18.3) $SO(n)$ є тотожною компонентою зв'язності $O(n)$;

3.18.4) дотичний простір групи $SO(n)$ в одиниці E складається з кососиметричний матриць: $T_E SO(n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n) \mid A^t = -A\}$.

Задача 3.19. Нехай $A, B : (a, b) \to M(\mathbb{R}, n)$ – дві криві класу C^1. Довести, що

$$\big(A(t)B(t)\big)' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Задача 3.20. Нехай $A \in M(\mathbb{R}, n)$ і $L_A, R_A : M(\mathbb{R}, n) \to M(\mathbb{R}, n)$ – відображення множення на A справа і зліва:

$$L_A(X) = AX, \qquad R_A(X) = XA.$$

Показати, що дотичні відображення $TL_A, TR_A : TM(\mathbb{R}, n) \to TM(\mathbb{R}, n)$ задаються формулами:

$$TL_A(X, V) = (AX, AV), \qquad TR_A(X, V) = (XA, VA),$$

для всіх $X \in M(\mathbb{R}, n)$ і дотичних векторів $V \in T_X M(\mathbb{R}, n)$.

Задача 3.21. Нехай $A \in GL(\mathbb{R}, n)$ і $\nu : M(\mathbb{R}, n) \to M(\mathbb{R}, n)$, $\nu(A) = A^{-1}$, – відображення взяття оберненої матриці. Зокрема, $\nu(E) = E$, а тому маємо дотичне відображення

$$T_E\nu : T_E GL(\mathbb{R}, n) \to T_E GL(\mathbb{R}, n).$$

Показати, що $T_E\nu(V) = -V$ для всіх $V \in T_E GL(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Підказка. Нехай крива $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL(\mathbb{R}, n)$ задає дотичний вектор $V \in T_E GL(\mathbb{R}, n)$, тобто $A(0) = E$ і $A'(0) = V$. Тоді $A(t)A(t)^{-1} \equiv E$. Продиференціюйте цю тотожність по t і покладіть $t = 0$.

Задача 3.22. Нехай $\exp : M(\mathbb{R}, n) \to M(\mathbb{R}, n)$ – відображення, визначене за формулою

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{A^n}{n!} = E + A + \tfrac{A^2}{2} + \tfrac{A^3}{3!} + \cdots + \tfrac{A^n}{n!} + \cdots$$

Матриця $\exp(A)$ називається *експонентою* матриці A і також позначається через e^A. Довести такі твердження

3.22.1) Для кожної матриці A ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ збігається. Іншими словами, послідовність його частинних сум, як послідовність точок в $M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ – збіжна. Таким чином $\exp$ – коректно визначене відображення.

3.22.2) Якщо матриці A, B комутують, тобто $AB = BA$, то $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

3.22.3) Якщо A – невироджена, то $\exp(ABA^{-1}) = A\exp(B)A^{-1}$.

3.22.4) $\exp(A^t) = (\exp(A))^t$.

3.22.5) Якщо $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – діагональна, то $\exp(A) = \operatorname{diag}\big(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\big)$, зокрема вона теж діагональна.

3.22.6) Більш загально, $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ – блочно діагональна, то

$$\exp(A) = \operatorname{diag}\big(\exp(A_1), \ldots, \exp(A)k)\big),$$

зокрема вона теж блочно діагональна.

3.22.7) Якщо A – верхньо (нижньо) трикутна, з діагоналлю $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, то $\exp(A)$ – також верхньо (нижньо) трикутна, з діагоналлю $[e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}]$.

3.22.8) $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$ для всіх $A \in M(\mathbb{R}, n)$.

3.22.9) $\exp(A)$ – невироджена для всіх $A \in M(\mathbb{R}, n)$, тобто $\exp(M(\mathbb{R}, n)) \subset GL(\mathbb{R}, n)$.

3.22.10) Для кожної матриці $A \in M(\mathbb{R}, n)$ відображення $\phi : \mathbb{R} \to GL(\mathbb{R}, n)$,

$$\phi(t) = \exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{A^n}{n!} t^n = E + At + \tfrac{A^2}{2} t^2 + \cdots + \tfrac{A^n}{n!} t^n + \cdots$$

є аналітичним гомоморфізмом адитичної групи $(\mathbb{R}, +)$ в групу $GL(\mathbb{R}, n)$ відносно множення, тобто $\phi(t+s) = \psi(t)\psi(s)$. Причому, $\phi(0) = E$ і $\phi'(0) = A \in T_E GL(\mathbb{R}, n)$.

3.22.11) Нехай $0 \in M(\mathbb{R}, n)$ – нульова матриця. Тоді $\exp(0) = E$, а відповідне дотичне відображення $T_0 \exp : T_0 M(\mathbb{R}, n) \to T_0 M(\mathbb{R}, n)$ задається формулою $T_0 \exp(V) = V$ для всіх $V \in T_0 M(\mathbb{R}, n)$. Зокрема, $\exp$ індукує дифеоморфізм деякого околу 0 в $T_0 M(\mathbb{R}, n) = M(\mathbb{R}, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ на деякий окіл E в $GL(\mathbb{R}, n)$.

3.22.12) Більш загально, визначимо відображення $Q : TM(\mathbb{R}, n) \to M(\mathbb{R}, n) \times M(\mathbb{R}, n)$ за формулою

$$Q(A, V) = (A, \exp(V)),$$

для $A \in M(\mathbb{R}, n)$ і $V \in T_A M(\mathbb{R}, n)$. Тоді Q індукує дифеоморфізм деякого околу підмноговиду $M(\mathbb{R}, n) \times 0$ (нульового перерізу дотичного розшарування $TM(\mathbb{R}, n)$) на окіл діагоналі $\Delta = \{(V, V) \mid V \in M(\mathbb{R}, n)\}$ в $M(\mathbb{R}, n) \times M(\mathbb{R}, n)$.

4. Кватерніони

5. Векторні поля на многовидах

Задача 5.1. Довести, для товільних C^k-многовидів (M, α), (N, β) без межі (α, β – відповідні C^k-атласи), їх добуток $M \times N$ також має структуру C^k-многовиду з атласом

$$\alpha \times \beta := \{\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid (U, \phi) \in \alpha, (V, \psi) \in \beta\},$$

що складається з попарних добутків карт з α і β.

Показати, що при $k \geq 1$ існує канонічний C^{k-1} дифеоморфізм $T(M \times N) \cong TM \times TN$.

Нехай M – C^k-многовид і $p : TM \to M$ – дотичне розшарування. Векторне поле на многовиді M – це переріз дотичного розшарування, тобто відображення $s : M \to TM$, таке, що $p \circ s = \mathrm{id}_M$. Іншими, словами, в кожній точці $x \in M$ вибирається деякий дотичний вектор $s(x) \in T_x M$.

Інтерпретація векторних полів в термінах звичайних диференціальних рівнянь. Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита підмножина, $F : U \to \mathbb{R}^n$ – C^1-відображення і

$$\dot{x} = F(x) \tag{1}$$

система диференціальних рівнянь. Розв'язати цю систему означає для кожної точки $x \in U$ необхідно знайти криву $\gamma_x : (-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \to U$ таку, що $\gamma_x(0) = x$ і $(\gamma_x)'_t = F(\gamma_x(t))$, для деякого $\varepsilon_x > 0$, яке залежить від $x \in U$.

Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ і $\delta > 0$ нехай $K_\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^n [x_i - \delta, x_i + \delta]$ – куб з центром в точці x і сторонами по 2δ.

Згідно загальної теорії має місце теорема про *існування, єдиність і гладку залежність від початкових даних розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь:*

Теорема. *Якщо F належить класу C^k, то для кожної точки $x \in U$ існують, $\varepsilon, \delta > 0$ і єдине C^k-відображення $\Phi : K_\delta(x) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$ такі, що*

(а) $K_\delta(x) \subset U$;
(б) $\Phi(y, 0) = y$ *для всіх* $y \in K_\delta(x)$
(в) $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(y, t) = F(\Phi(y, t))$ *для всіх* $y \in K_\delta(x)$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Іншими словами, для фіксованого $y \in K_\delta(x)$ відображення $\phi_y : [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$, $\phi(t) = \Phi(y, t)$ є єдиним розв'язком системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = F(x)$, який задовольняє початкову умову $\phi(0) = y$.

Це твердження можна перекласти на мову векторних полів.

– Так як U – відкрита підмножина в $\mathbb{R}^n$, тобто підмноговид, то для кожної точки $x \in U$ її дотичний простір $T_x U$ канонічним чином ототожнюється з $\mathbb{R}^n$.
– За означенням, дотичне розшарування до U – це об'єднання дотичних просторів $T_x U$ по всіх точках $x \in U$: $TU = \sqcup_{x \in U} T_x U$. Це об'єднання можна також канонічним чином ототожнити з $U \times \mathbb{R}^n$. Введемо на TU топологію з $U \times \mathbb{R}^n$ і вважатимемо, що, $TU \equiv U \times \mathbb{R}^n$ як топологічні простори.
– Тоді відображення $F : U \to \mathbb{R}^n$ разом з системою диференціальних рівнянь $\dot{x} = F(x)$ можна інтерпретувати як переріз $\hat{F} : U \to TU = U \times \mathbb{R}^n$ дотичного розшарування U визначений за формулою: $\hat{F}(x) = (x, F(x))$. Розв'язати таку систему означає, що через

кожну точку $x \in U$ потрібно провести криву $\gamma_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ таку, що $\gamma_x(0) = x$ і дотичний вектор до γ_x в точці $\gamma_x(t)$ тотожний з $\hat{F}(\gamma_x(t))$.

– Розв'язки системи (1) також називають *інтегральними кривими векторного поля* $\hat{F}$.

Задача 5.2. Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита підмножина, $F : U \to \mathbb{R}^n$ – C^1-відображення (векторне поле на U).

5.2.1. Нехай $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ – розв'язок системи (1). Тоді для довільного $a > 0$ крива $\alpha : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to U$, $\alpha(t) = \gamma(t-a)$ також є єдиним розв'язком системи (1), таким, що $\alpha(a) = \gamma(0)$.

5.2.2. Показати, що кожен розв'язок системи (1) продовжується єдиним чином на деякий максимальний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

5.2.3. Показати, що образи інтегральних кривих в U векторного поля F або не перетинаються або тотожні. Таким чином коже векторне поле на U задає розбиття U на образи інтегральних кривих. Ці образи називаються *орбітами* векторного поля F.

5.2.4. Нехай $\Phi : K_\delta(x) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$ – відображення як в теоремі вище. Довести, що якщо $s, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ такі, що $s + t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, то

$$\Phi(\Phi(y, s), t) = \Phi(y, s + t).$$

5.2.5. Нехай $\mathcal{U} = \sqcup_{x \in U}(a_x, b_x) \subset U \times \mathbb{R}$ – об'єднання областей визначення всіх розв'язків системи (1). Довести, що $\mathcal{U}$ є відкритим околом $U \times 0$ в $U \times \mathbb{R}$.

Більш того, розглянемо відображення $\Phi : \mathcal{U} \to U$ визначене за формулою $\Phi(x, t) = \gamma_x(t)$, де γ_x – максимальний розв'язок (1), такий, що $\gamma_x(0) = x$, $(x, t) \in \mathcal{U}$. Показати, Φ належить класу C^k і задовольняє умови: $\Phi(y, 0) = y$ і $\Phi(\Phi(y, s), t) = \Phi(y, s + t)$ якщо визначена права і ліва частини останньої тотожності.

Це відображення Φ називається *локальним потоком поля* F.

5.2.6. Припустимо, що кожен розв'язок системи (1) продовжується до єдиного розв'язку $\gamma : \mathbb{R} \to U$ визначеного на всій числовій прямій. Показати, що Φ продовжується до єдиного C^k відображення $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U$, яке задовольняє таким умовам:
- $\Phi(y, 0) = y$,
- $\Phi(\Phi(y, s), t) = \Phi(y, s + t)$,
- $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(y, t) = F(\Phi(y, t))$,

для всіх $y \in U$, $s, t \in \mathbb{R}$. Довести, що Φ є дією групи $\mathbb{R}$ на U.

В цій ситуації Φ називається *(глобальним) потоком поля* F.

5.2.7. Нехай $h : U \to V$ – дифеоморфізм і $G : V \to TV$ – векторне поле визначене за формулою: $G(h(x)) = T_x h(F(x))$, тобто воно робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "Th"] & TV \\ U \arrow[u, "F"] \arrow[r, "h"] & V \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

Таким чином, якщо в точці $x \in U$ маємо вектор $F(x)$, то в її образі $h(x)$ вектор $G(h(x))$ є образом вектора $F(x)$ відносно дотичного відображення $T_x h$. В цьому випадку векторні поля F та G називатимемо *h-узгодженими*.

Довести, що якщо $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ – інтегральна крива поля F, то $h \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ – інтегральна крива поля G. Іншими словами, h переводить інтегральні криві векторного поля F в інтегральні криві векторного поля G.

5.2.8. Припустимо, що векторні поля $F : U \to TU$ і $G : V \to TV$ – h-узгоджені і нехай $\Phi : \mathcal{U} \to U$ і $\Psi : \mathcal{V} \to V$ – їх локальні потоки. Довести, що $\Psi_t(y) = h \circ \Phi_t \circ h^{-1}(y)$ для всіх $(y, t) \in \mathcal{V}$.

5.2.9. Нехай $h : U \to U$ – дифеоморфізм, такий, що $F(h(x)) = T_x h(F(x))$ для всіх $x \in U$, тобто має місце комутативна діаграма:

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "Th"] & TU \\ U \arrow[u, "F"] \arrow[r, "h"] & U \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Показати, що h переставляє інтегральні криві поля F.

6. Групи Лі

Групою Лі називають топологічну групу G, яка є C^1-многовидом і для якої відображення множення $\mu : G \times G$ та взяття оберненого $\nu : G \to G$ належать класу C^1.

Скрізь нижче G – група Лі з одиницею e і $n = \dim G$ як многовиду.

Додаткова інформація, яка виникає при розгляді групи Лі полягає в вивченні дотичного відображення до відображення множення:

$$T\mu : T(G \times G) \equiv TG \times TG \to TG.$$

Задача 6.1. Зауважимо, що існує природне вкладення

$$\lambda : G \times T_e G \equiv (0 \times G) \times (T_e G \times e) \subset TG \times TG = T(G \times G).$$

6.1.1. Довести, що композиція

$$T\mu \circ \lambda : G \times T_e G \xrightarrow{\lambda} T(G \times G) \xrightarrow{T\mu} TG$$

є дифеоморфізмом. Зокрема, дотичне розшарування до групи Лі завжди є тривіальним.

6.1.2. Кожне векторе поле $F : G \to TG$ (як переріз дотичного розшарування) задається відображенням $G \to TG \cong \mathbb{R}^n$.

Задача 6.2. Аналогічно до задачі 6.1 показати, що існує вкладення

$$\rho : T_e G \times G \subset T(G \times G),$$

таке, що композиція

$$T\mu \circ \rho : T_e G \times G \cong TG$$

є дифеоморфізмом.

Геометричний зміст задач 6.1 і 6.2 в тому, що кожен дотичний вектор $v \in T_g G$ до деякого елемента $g \in G$ є

- образом єдиного дотичного вектора $l \in T_e G$ при дотичному відображенні $T_e L_g$ до лівого зсуву на елемент g, тобто $v = T_e L_g(l)$, а також
- образом єдиного дотичного вектора $r \in T_e G$ при дотичному відображенні $T_e R_g$ до правого зсуву на елемент g, тобто $v = T_e R_g(r)$.

Векторне поле $F : G \to TG$ називається *ліво-інваріантним* (*право-інваріантним*), якщо воно інваріантне відносно всіх лівих (правих) зсувів, тобто для кожного $g \in G$ має місце ліва (права) комутативна діаграма:

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "TL_g"] & TG \\ G \arrow[u, "F"] \arrow[r, "L_g"] & G \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TG \arrow[r, "TR_g"] & TG \\ G \arrow[u, "F"] \arrow[r, "R_g"] & G \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Задача 6.3. Нехай $F : G \to TG$ – векторне поле на G і $v = F(e) \in T_eG$.

6.3.1. Показати, що F – ліво інваріантне, тоді і тільки тоді $F(g) = TL_g \circ F(e) = TL_g(v)$ для всіх $g \in G$.

6.3.2. Показати, що F – право інваріантне, тоді і тільки тоді $F(g) = TR_g \circ F(e) = TR_g(v)$ для всіх $g \in G$.

6.3.3. Показати, що існує бієкція між T_eG, тобто дотичними векторами до e, і множиною всіх ліво-інваріантних (право-інваріантних) векторних полів.

Кожен C^1 гомоморфізм $\phi : \mathbb{R} \to G$ називається *однопараметричною підгрупою в* G.

Задача 6.4. Нехай $\phi : \mathbb{R} \to G$ – неперервний гомоморфізм, який є дисеренційовним в точці $t = 0$. Показати, що тоді ϕ належить класу C^1 і є інтегральною кривою люваінваріантного векторного поля, яке відповідає вектору $\phi'(0) \in T_eG$.

Задача 6.5. Нехай F – ліво-інваріантне векторне поле, $v = F(e)$, і $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ – інтегральна крива цього поля, тобто $\phi'(t) = F(\phi(t))$ для всіх $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, і така, що $\phi(0) = e$.

6.5.1. Показати, що для всіх $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ таких, що $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ виконується співвідношення $\phi(s + t) = \phi(s)\phi(t)$. Іншими словами, ϕ – "локальний гомоморфізм".

6.5.2. Довести, що ϕ продовжується до гомоморфізма $\phi : \mathbb{R} \to G$, який також є інтегральною кривою F.

Таким чином маємо канонічні бієкції між

- простором T_eG дотичних векторів до e;
- множиною ліво-інваріантних векторних полів;
- множиною право-інваріантних векторних полів;
- множиною однопараметричних підгруп в G.

Крім того, на множині векторних полів існує білінійна кососиметна операція дужки $[\cdot, \cdot]$, яка перетворює цю множину в алгебру Лі. Ми обговоримо цю операцію пізніше. Зокрема, ця операція задана на ліво-інваріантних векторних полях, а значить на дотичних векторах до e. Тому T_eG також називають *алгеброю Лі* групи Лі.

Для кожного $v \in T_eG$, позначимо через $\phi_v : \mathbb{R} \to G$ – відповідну однопараметричну підгрупу, тобто гомоморфізм такий, що $(\phi_v)'(0) = v$.

Відображення

$$\exp : T_eG \to G, \qquad \exp(v) = \phi_v(1),$$

називається *екпоненційним відображенням групи Лі* G.

Задача 6.6. Довести такі твердження

6.6.1. Показати, що для довільних $s \in \mathbb{R}$, $v \in T_eG$ і $t \in \mathbb{R}$, маємо, що $\phi_{sv}(t) = \phi_v(st)$

6.6.2. Показати, що для кожного $v \in T_eG$ однопараметричну підгрупу $\phi_v : \mathbb{R} \to G$ можна визначити як $\phi_v(t) = \exp(vt)$.

6.6.3. Довести, що експоненційне відображення є диференційовним.

6.6.4. Обчислити дотичне відображення до нього в $0 \in T_eG$.

6.6.5. Довести, що exp індукує дифеоморфізм деякого околу $0 \in T_eG$ на деякий окіл $e \in G$.

Таким чином експоненційне відображення переводить прямі, що проходять через $0 \in T_eG$ на однопараметричні підгрупи.

Задача 6.7. Нехай $f : G \to H$ – C^1-гомоморфізм груп Лі. Зокрема, $f(e_G) = e_H$. Показати, що має місце комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} T_{e_G}G & \xrightarrow{Tf} & T_{e_H}H \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{f} & H. \end{array}$$

Задача 6.8. Довести, що кожна локально зв'язна топологічна група породжується довільним околом одиниці.

Задача 6.9. Нехай $f : G \to H$ – C^1-гомоморфізм зв'язних груп Лі. Показати, що він однозначно задається дотичним відображенням $T_ef : T_{e_G}G \to T_{e_H}H$.

Задача 6.10. Нехай $T_eG = W \oplus W'$ – розклад дотичного простору в пряму суму двох підпросторів. Довести, що тоді відображення $g : T_eG \to G$, визначене за формулою $g(w, w') = \exp(w)\exp(w)$, є локальним дифеоморфізмом околу $0 \in T_eG$ на окіл одиниці $e \in G$.

Задача 6.11. Нехай $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ – локальна карта околу одиниці $e \in G$така, що $\phi(e) = 0$ і $V \subset U$ – відкритий окіл e такий, що $VV \subset U$. Визначимо відображення

$$\nu : \phi(V) \times \phi(V) \to \mathbb{R}^n, \qquad \nu(x, y) = \phi(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)),\ x, y \in \phi(V),$$

яке можна розглядати як "множення в локальній карті ϕ". Очевидно, що $\nu(0, 0) = 0$. Довести, що дотичне відображення

$$T_{(0,0)}\nu : T_0\mathbb{R}^n \times T_0\mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^n,$$

визначається за формулою

$$T_{(0,0)}\nu(u, v) = u + v.$$

Іншими словами, $\phi(xy) \approx \phi(x) + \phi(y) + o(|\phi(x)| + |\phi(x)|)$.

Задача 6.12. Нехай H – замкнена підгрупа групи Лі G. Довести, що H є гладким підмноговидом, а отже групою Лі.

6.12.1. Нехай $\{\}$

Задача 6.13. Нехай $f : G \to H$ – неперервний гомоморфізм груп Лі. Показати, що він є диференційовним.

7. Максимальні тори в компактних групах Лі