Про реалізації та представлення $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Микола Старий
Аспірант, Інститут Математики

International Conference of Young Mathematicians
Kyiv, 2025

04.06.2025

Мета роботи

Мета нашої роботи полягала у порівнянні різних методів, що використовуються для побудови представлень алгебр Лі. Досліджуваним об'єктом є дійсні та комплексні прості тривимірні алгебри Лі

Замкнені підзадачі,які ми розв'язали

- Побудова всіх нееквівалентних реалізацій (представлення векторними полями) алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
- Порівняння реалізацій, отриманих з незвідних зображень $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ із реалізаціями $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ отриманими прямим методом (наразі розглянуто лише три випадки).

Алгебри Лі

- Означимо (комплексну) *алгебру Лі* як наступну пару:

$$\mathfrak{g} = (V, [\cdot,\cdot]), \quad [\cdot,\cdot]\colon\ V \times V \to V,$$

  - V є лінійним простором, $\dim_{\mathbb{C}} V = n < \infty$
  - $[\cdot,\cdot]\colon V \times V \to V$ це білінійне відображення, що задовільняє таким властивостям

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad [x, y] = -[y, x],$$
$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

- Нехай $V = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, тоді $\mathfrak{g} \leftrightarrow c_{ij}^k \in \mathbb{C}$, $i, j, k = 1, \dots, n$

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k.$$

Коефіцієнти c_{ij}^k називають *структурними сталими*.

Зображення та реалізації

- *Зображення* алгебри Лі $\mathfrak{g}$ визначається як наступний гомоморфізм алгебр Лі
$$\phi\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V).$$
- *Приєднане* зображення: Візьмемо $V = \mathfrak{g}$, на якому означимо відображення
$$\mathrm{ad}\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{ad}_x(y) = [x, y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$
- *Реалізацією*
$$R\colon\ \mathfrak{g} \to \mathrm{Vec}(M),$$
називається гомоморфізм $\mathfrak{g}$. Тут $M \subset \mathbb{C}^m$ є доменом, $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ та $\mathrm{Vec}(M)$ є простором векторних полів на M з аналітичними коефіцієнтами.

  Реалізації $R_1\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vec}(M_1)$ та $R_2\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vec}(M_2)$ називаються *еквівалентними*, якщо існує автоморфізм $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ та голоморфне відображення $f\colon\ M_1 \to M_2$, такі, що для будь-якого $g \in \mathfrak{g}$
$$R_1(g) = f_* R_2(Ag), \qquad f_*\colon \mathrm{Vec}(M_1) \to \mathrm{Vec}(M_2)$$

Нееквівалентні реалізації $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Чотири нееквівалентні реалізації $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

1. $\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3,$
2. $\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ \left(x_1^2 + x_2^2\right)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2,$
3. $\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2,$
4. $\partial_1,\ x_1\partial_1,\ x_1^2\partial_1.$

- Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., *Realizations of real low-dimensional Lie algebras*, J. Phys. A 36 (2003), no. 26, 7337–7360, arXiv:math-ph/0301029
- Nesterenko M. O., Popovych R.O., *Realizations of real unsolvable low-dimensional Lie algebras*, in Proceedings of the Third Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations (September 22–28, 2003, Kyiv), arXiv:math-ph/0510015.

Реалізація рангу три

Реалізація $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ породжується векторними полями $A_k \in \mathfrak{g}$, що інваріантні відносно дії канонічної форми θ групи Лі $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.
Виберемо елемент

$$G \ni g = e^{i\alpha e_1} e^{i\beta e_2} e^{i\gamma e_3},$$

що відповідає канонічній формі

$$\theta(\alpha, \beta, \gamma) = ie^{i\beta}\left(e_1 + 2i\gamma e_2 + \gamma^2 e_3\right) \mathrm{d}\alpha + (\mathrm{ie}_2 - \gamma \mathrm{e}_3)\mathrm{d}\beta + \mathrm{ie}_3 \mathrm{d}\gamma.$$

З умови $\theta(A_k) = e_k$ маємо таку реалізацію

$$\begin{cases} A_1 = -ie^{-i\beta}\partial_\alpha - 2\gamma\partial_\beta + i\gamma^2\partial_\gamma \\ A_2 = -i\partial_\beta - \gamma\partial_\gamma \\ A_3 = -i\partial_\gamma \end{cases}$$

Вона зводиться до випадку 1 на попередньому слайді (реалізація рангу три) за допомогою наступного перетворення координат

$$x_1 = \gamma + \frac{e^{-i\beta}}{\alpha}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{e^{-i\beta}}{\alpha^2}, \qquad \tilde{x}_3 = \frac{1}{\alpha},$$

та заміни базису

$$\tilde{A}_1 = iA_3, \qquad \tilde{A}_2 = -A_2, \qquad \tilde{A}_3 = -iA_1.$$

Реалізація рангу один

Реалізацію

$$e_1 = \partial_1, \quad e_2 = x_1\partial_1, \quad e_3 = x_1^2\partial_1$$

не можна лінеаризувати використовуючи невироджені перетворення.

Припустимо, що існує невироджена заміна

$$\tilde{x}_i(x_1) = f_i(x_1), \quad i = 1, \ldots, m$$

яка зводить другий та третій оператори до наступного вигляду

$$\tilde{e}_2 = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ji} f_i \partial_{\tilde{x}_j}, \quad \tilde{e}_3 = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ji} f_i \partial_{\tilde{x}_j}, \quad a_{ji}, b_{ji} \in \mathbb{C}$$

Тоді, з умови $\tilde{e}_3 = x_1\tilde{e}_2$, можна отримати систему функціональних рівнянь, яка є лінійною та однорідною відносно $f_1, \ldots, f_m$, що суперечить невиродженості заміни.

Матричні зображення та реалізації

Нехай $\mathfrak{g}$ є алгеброю Лі, що визначена комутаційними співвідношеннями

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

Якщо $\mathfrak{g}$ має матричне зображення $(\phi(e_i))_\alpha^\beta = (\Phi_i)_\alpha^\beta \in \mathrm{GL}(\mathrm{m}, \mathbb{C})$,

то набір диференціальних операторів першого порядку

$$\Psi_i = \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\sum_{\beta=1}^{m} (\Phi_i)_\alpha^\beta x_\beta \right) \partial_\alpha, \quad i = 1, \ldots, n = \dim \mathfrak{g}$$

є реалізацією $\mathfrak{g}$.

І навпаки: реалізацію з лінійними коефіцієнтами задає матричне зображення $\mathfrak{g}$.

Незвідні зображення $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: $[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 2e_2.$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -d+2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -d+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чи є реалізації $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, які не можна отримати з ϕ_i?

Так, реалізацію рангу один не можна так отримати.

Реалізації з лінійними коефіцієнтами

Реалізації $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, які відповідають матричним зображенням ϕ_i:

$$\Psi_1 = \sum_{i=2}^{d+1}(i-1)x_{i-1}\partial_i, \quad \Psi_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1}(-d-2+2i)x_i\partial_i,$$

$$\Psi_3 = \sum_{i=1}^{d}(-d+i-1)x_i\partial_i.$$

Наприклад, коли $d=1$, отримуємо реалізацію R_I:

$$\psi_1 = x_1\partial_2, \quad \psi_2 = \frac{1}{2}\left(x_2\partial_2 - x_1\partial_1\right), \quad \psi_3 = -x_2\partial_1.$$

Для $d=2$ (випадок приєднаного зображення) маємо іншу реалізацію R_{II}:

$$\psi_1 = x_1\partial_2 + 2x_2\partial_3, \quad \psi_2 = -x_3\partial_3 - x_1\partial_1, \quad \psi_3 = -2x_2\partial_1 - x_3\partial_2.$$

Перетворення до відомої форми

- Після перетворення

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{x_1^2},$$

реалізація R_I співпадає з випадком 3 зі списку нееквівалентних реалізацій:

$$\tilde{\Psi}_1 = \partial_1, \quad \tilde{\Psi}_2 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad \tilde{\Psi}_3 = x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2.$$

- Після перетворення

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_2 + 1}{x_1} - x_2^2 + x_1x_3, \quad \tilde{x}_2 = x_1^{-\frac{1}{2}}\left(x_2^2 - x_1x_3\right), \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{x_1}.$$

вираз реалізації R_{II} співпадає з тим, що наведений як випадок 2 у списку нееквівалетних реалізацій:

$$\tilde{\Psi}_1 = \partial_1, \quad \tilde{\Psi}_2 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad \tilde{\Psi}_3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2.$$

Висновки

- Отримали список нееквівалентних реалізацій комплексної алгебри Лі $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
- Проаналізували дві реалізації, побудовані з низьковимірних матричних зображень та навели заміну змінних, яка зводить їх до відповідних представників із загальної класифікації.

Подальші дослідження:

- Звести усі незвідні зображення до відомих реалізацій.
- Скористатись алгебраїчними методами для побудови реалізації та порівняти їх з результатами прямого методу.
- Розглянути дійсні форми $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, їх зображення і реалізації.

Дякую за увагу!