Інтерактивна параметризація тором квазікристала Фібоначчі

KyivAcademUs 2026

Михайло О. КОРЕШКОВ, Марина О. НЕСТЕРЕНКО

Відділ математичної фізики Інституту математики НАН України
Університет “Київська Школа Економіки”

6 травня 2026 р.

Модельна множина Λ згідно методу перетинів та проєкцій (cut and project). [1]

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}^d & \xleftarrow{\ \ ||\ \ } & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\ \ \perp\ \ } & \mathbb{R}^d \\
 & & \cup & & \\
L & \xleftarrow{1-1} & \widetilde{L} & \xrightarrow{\text{щільний образ}} & L'
\end{array}
$$

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – вікно
2. $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ – ґратка
3. $\Lambda = \Lambda(\Omega) = \{x \mid \tilde{x} \in L, x' \in \Omega\} \subset L$ – модельна множина
4. "Ірраціональна проєкція" $\pi_\perp(\tilde{L})$ забезпечує щільність L' у $\mathbb{R}^d$, неперіодичність.

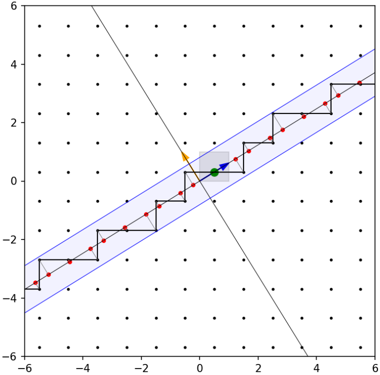


Рис.: Квазікристал Фібоначі як проєкція регулярної ґратки $\mathbb{Z}^2$ на пряму $y = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot x$ з ірраціональним кутом.

Такі побудови назвемо **математичним квазікристалом**.

Математичні квазікристали

- Математичні квазікристали є ідеалізованою моделлю **фізичних квазікристалів**, в яких атоми та молекули замінені точками.
- За відкриття фізичних квазікристалів — матеріалів без трансляційної симетрії, із “забороненою” поворотною симетрією та дискретними дифракційними картинами – Дену Шехтману було присуджено Нобелівську премію з хімії 2011 року.
- Матеріали на основі квазікристалів мають унікальні властивості з точки зору міцності, теплопровідності, оптики тощо.
- Математичні моделі використовуються для обчислень та прогнозування властивостей.

Визначення

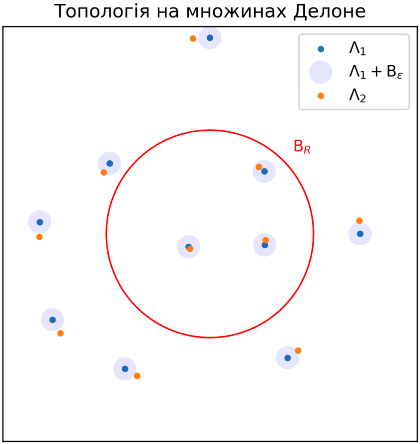
Множина $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ називається Делонівською (Delone set), якщо існують $r, R > 0$ такі, що $\min\{\|x - y\| : x, y \in \Lambda, y \neq x\} \geq r$ та $\max_x \min\{\|x - y\| : y \in \Lambda\} \leq R$.

Λ_1 та Λ_2 близькі якщо

$$\Lambda_1 \cap B_R \subset \Lambda_2 + B_\epsilon$$

$$\Lambda_2 \cap B_R \subset \Lambda_1 + B_\epsilon$$

Chabauty topology, Fell topology, Hausdorff distance.



Визначення (Локальна оболонка)

$$X(\Lambda) = \overline{\{t + \Lambda : t \in \mathbb{R}^d\}}$$

Замикання орбіти Λ відносно топології на множинах Делоне.

Lemma (Твердження)

Якщо $C \in X(\Lambda)$, то

$$\forall R : \exists s, t \in \mathbb{R}^d : (C - t) \cap B_R = (\Lambda - s) \cap B_R,$$

тобто будь-який локальний патерн C можна знайти в Λ з точністю до зсуву. Кажуть, що C та Λ локально еквівалентні чи локально нерозрізненні (LI). $X(\Lambda)$ називають класом локальної еквівалентності.

Теорема

$X(\Lambda)$ - компакт [2]

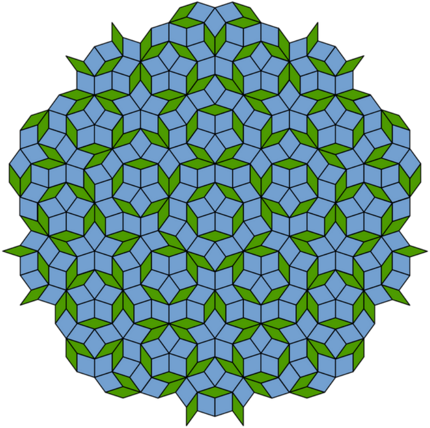


Рис.: Замощення Пенроуза – приклад декорації квазікристала.

Локальна оболонка замощення Пенроуза містить всі можливі замощення площини, породжені цими десятьма плитками.

Парметризація тором

$$\Lambda = \Lambda(W) = \{x \in L : x' \in W\} = \pi_{phys}(\tilde{L} \cap \pi_{int}^{-1}(W)),$$

$$\Lambda_{(a,b)} = a + \Lambda(-b + W) = \{x + a : x \in L, x' + b \in W\}.$$

$$(a, b)_L = \{(a', b') \mid \Lambda_{(a',b')} = \Lambda_{(a,b)}\}.$$

Теорема

$X(\Lambda)$ параметризується тором $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ однозначно майже всюди (torus parametrization). [3]

Бо $\tilde{L}$ – це решітка.

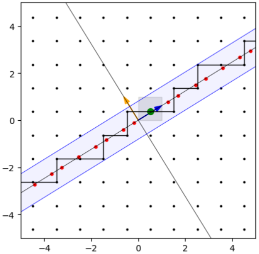
Інтерактивна демонстрація параметризації тором

x 0.516

y 0.363

```
tau = 1.618, tau' = -0.618, 1/tau = 0.618
uv coordinates: 0.535720, 0.031907
xy coordinates: 0.516000, 0.363000
W = -0.688, 0.688
pos_chain: 9 points, neg_chain: 10 points
CHAIN
aabaababa|abababaaba
```

Figure 1



https://github.com/mkrooted256/fibonacci-torus-notebook/

Застосування

Приклад: потенціал квазікристала як локальна функція відносно $X(\Lambda)$.

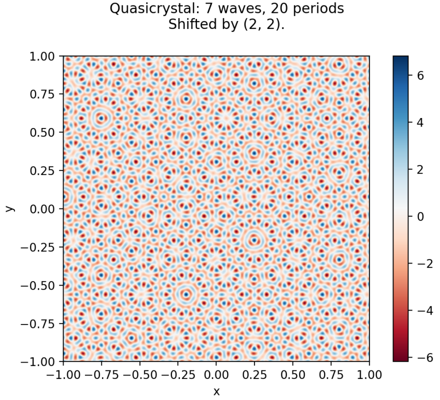


Рис.: Сума 7 пласких хвиль навколо $(2, 2)$

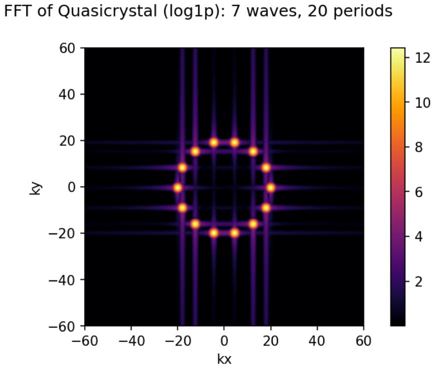


Рис.: Дискретне перетворення Фур'є (gaussian mask, log scale)

Подальші напрямки дослідження

- Побудова та обчислення конкретних локальних функцій.
- Теорія L_2 функцій на торі як модель локальних функцій.
- Застосування Фур'є аналізу на торі для наближення локальних функцій.

Дякую за увагу

Михайло Корешков
аспірант відділу математичної фізики
Інституту математики НАН України
mykhailo.koreshkov@gmail.com

Марина Нестеренко
доктор фізико-математичних наук,
провідна наукова співробітниця Інституту математики НАН України,
заступниця декана факультету математики з наукової роботи
Київської школи економіки

Подяки

НФДУ

Проєкт 2025.07/0405 "Алгебраїчні методи дослідження рівнянь математичної фізики" реалізується завдяки грантовій підтримці Національного фонду досліджень України. Зміст, висвітлений в цій роботі, може не співпадати з поглядами Національного фонду досліджень України і є виключною відповідальністю Інституту математики НАН України.

Джерела I

R. Moody, M. Nesterenko, and J. Patera, "Computing with almost periodic functions," *Foundations of Crystallography*, vol. 64, no. 6, pp. 654–669, 2008. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/0808.1814v1

C. Radin and M. Wolff, "Space tilings and local isomorphism," *Geometriae Dedicata*, vol. 42, no. 3, pp. 355–360, 1992. [Online]. Available: https://web.ma.utexas.edu/users/radin/papers/local-isomorphism-s.pdf

M. Baake, J. Hermisson, and P. A. B. Pleasants, "The torus parametrization of quasiperiodic li-classes," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 30, no. 9, p. 3029, may 1997. [Online]. Available: https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/9/016