

# Математичні квазікристали

Вступ, фізичне обґрунтування, проективна конструкція  
cut-and-project

Михайло Корешков

Відділ математичної фізики Інституту математики НАН України

2 березня 2026 р.

# Кристалографічні симетрії

Crystal family	Lattice system	Point group (Schönflies notation)	14 Bravais lattices				
			Primitive (P)	Base-centered (S)	Body-centered (I)	Face-centered (F)	
Triclinic (a)		$C_1$					
Monoclinic (m)		$C_{2h}$					
			mP	mS			
Orthorhombic (o)		$D_{2h}$					
			oP	oS	oI	oF	
	Tetragonal (t)		$D_{4h}$				
				tP		tI	
Hexagonal (h)	Rhombohedral	$D_{3d}$					
			hR				
	Hexagonal	$D_{6h}$					
			hP				
Cubic (c)		$O_h$					
			cP		cI	cF	

Рис.: Кристалографічні ґратки у 3D (Bravais lattice on wiki)

Ґратка Браве  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$

$\mathbb{R}^d / \Gamma$  – компактна топологічна група.

$$\Gamma = \mathbb{Z}b_1 \oplus \mathbb{Z}b_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_d.$$

$b_1, \dots, b_n$  лінійно незалежні.

$t \in \mathbb{R}^d$  - період  $S \subset \mathbb{R}^d$ , якщо  $t + S = S$ .

Точкову множину  $S$  називають кристалографічною, якщо її періоди утворюють ґратку Браве.

## Теорема (the crystallographic restriction)

Нехай  $S \subset \mathbb{R}^d$  - кристалографічна точкова множина,  $R \in O(d)$  - ортогональний оператор, що переводить  $S$  в себе ( $RS = S$ ).

Тоді період  $R$  скінченний, при чому для  $d = 1$  маємо  $k \in \{1, 2\}$ , для  $d = 2$  та  $d = 3$  маємо  $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

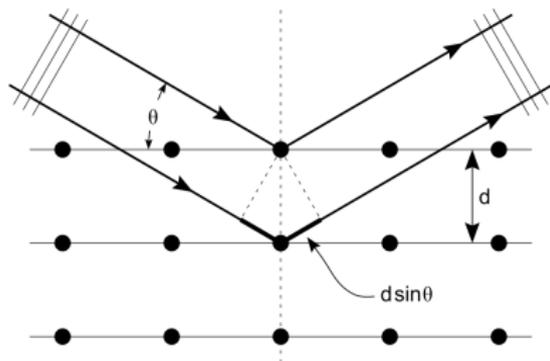


Рис.: Дифракція на ґратці (з wiki)

Ґратка як набір паралельних шарів. Закон Бреґа (Bragg's Law).

$$n\lambda = 2d \sin \theta, \quad (|\vec{k}| = \lambda)$$

Дуальна ґратка

$$\Gamma^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot y = 0 \forall x \in \Gamma\}$$

$$A_k(r) = e^{2\pi k \cdot r}$$

$$\forall r \in \Gamma, k \in \Gamma^* : A_k(r) = 1$$

Якщо  $\Gamma$  - ґратка, то

$$\Delta = \Gamma - \Gamma = \Gamma$$

## Гребінець Дірака

$$\omega = \omega_\Gamma = \sum_{x \in \Gamma} \delta_x$$

## Автокореляція (функція Патерсона)

$$\gamma_\omega := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(B_r(0))} \sum_{x, y \in \Gamma \cap B_r(0)} \delta_{x-y} = \sum_{z \in \Delta} \nu(z) \delta_z$$

$$\gamma_\omega = d \sum_{x \in \Gamma} \delta_x, \quad d = \text{dens}(\Gamma) = \frac{1}{\det(b_1, b_2, \dots, b_d)}$$

## Формула сумування Пуасона

$$\widehat{\sum_{x \in \Gamma} \delta_x} = d \sum_{y \in \Gamma^*} \delta_y$$

Дифракційний малюнок (інтенсивність перетворення Фур'є = перетворення Фур'є автокореляції)

$$\hat{\gamma}_\omega = d^2 \sum_{y \in \Gamma^*} \delta_y$$

Дискретна множина піків на дуальній ґратці.

Визначення (інтуїтивне наївне визначення)

Кристал – структура із дискретним дифракційним малюнком

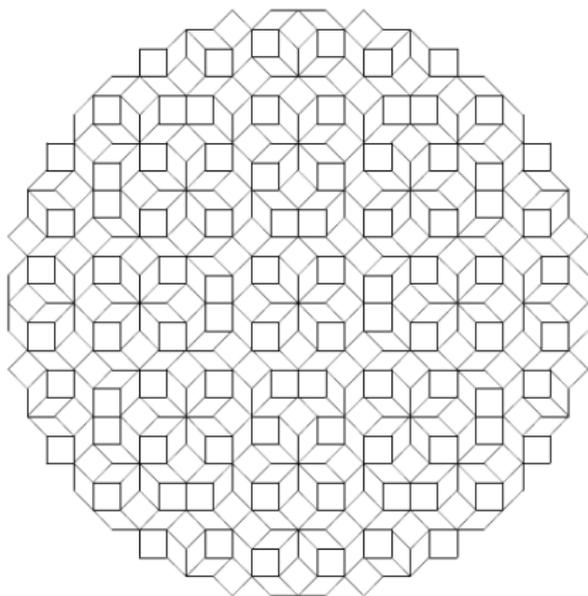
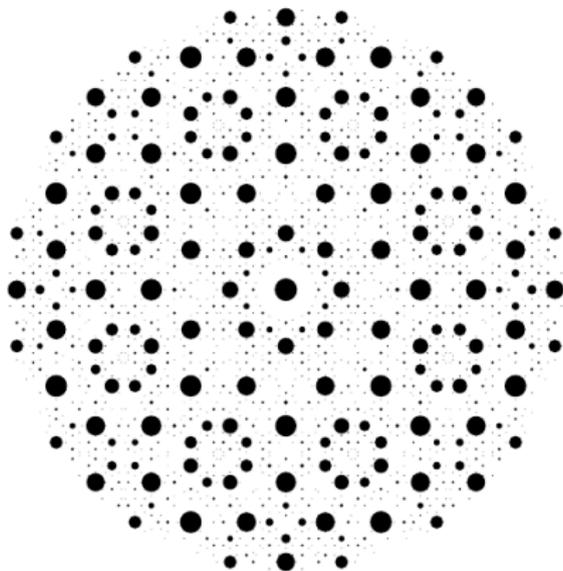


Рис.: 8-симетричне заощення Ammann-Beenker [1, р. 3]



**Рис.:** Дифракційний малюнок 8-симетричного замощення Амманн-Беккер. Розмір дисків пропорційний інтенсивності піку. Зображено піки інтенсивності більше за 0.1% центрального.

- 1 Порядок 8 поворотної симетрії свідчить про некристалографічну симетрію, але дифракційний малюнок все ще дискретний.
- 2 Множина піків – щільна.

### Визначення (інтуїтивне визначення майже періодичності)

Дискретна множина називається майже періодичною, якщо вона має дискретний дифракційний малюнок ( $\hat{\gamma}(\Lambda)$ ), або нетривіальну дискретну компоненту дифракційного малюнка.

Метод перетинів та проєкцій (cut and project). Модельні множини (model sets). [2]

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\parallel} & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p & \xrightarrow{\perp} & \mathbb{R}^p \\ & & \cup & & \\ L & \xleftarrow{1-1} & \tilde{L} & \xrightarrow{\text{щільний образ}} & L' \end{array}$$

- 1  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  – вікно
- 2  $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$  – ґратка (коренева ґратка)
- 3  $\Lambda = \Lambda(\Omega) = \{x \mid \tilde{x} \in L, x' \in \Omega\} \subset L$  – модельна множина
- 4 “Ірраціональна проєкція”  $\pi_{\perp}(\tilde{L})$  забезпечує щільність  $L'$  у  $\mathbb{R}^p$ , неперіодичність.

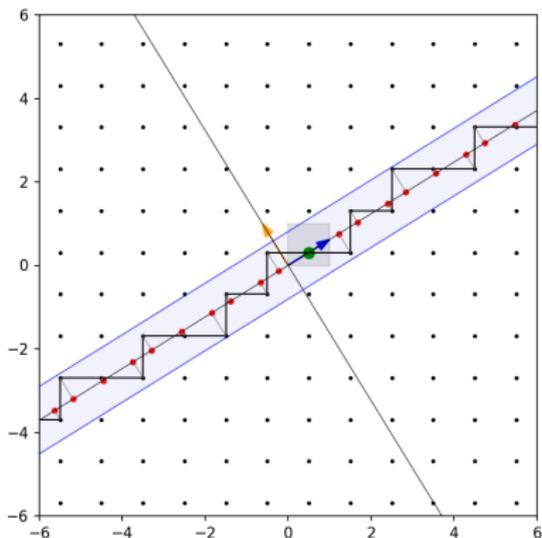


Рис.: Квазікристал Фібоначі як проєкція регулярної ґратки  $\mathbb{Z}^2$  на пряму  $y = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot x$  з ірраціональним кутом.

## Типова конструкція

- 1 Ґратка (регулярна чи коренева)  $\tilde{L}$  у просторі вищої розмірності.
- 2 Гіперплощина  $L$ , на яку ізометрично проєктуватиметься ґратка – це простір квазікристала.
- 3 Вікно  $\Omega$  перпендикулярно до гіперплощини, яке фільтруватиме точки ґратки. Часто беруть проєкцію фундаментальної області ґратки на перпендикулярний простір.

Інша інтерпретація – заощення, декорування  $\Lambda$ . Замість проєкції точок, проєктуються цілі  $d$ -вимірні грані гіперкубів чи  $d$ -полігони, натягнуті на кореневу систему.

Два розфарбування проекції граней ґратки на простір квазікристалу Фібоначі. Зв'язок замощення із проекцією точок.

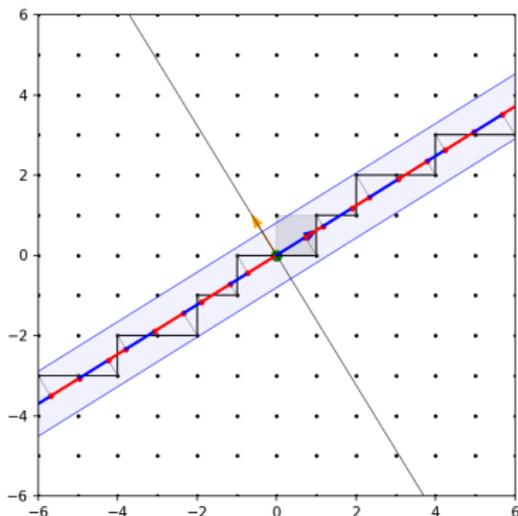


Рис.: Колір суміжних граней різних.

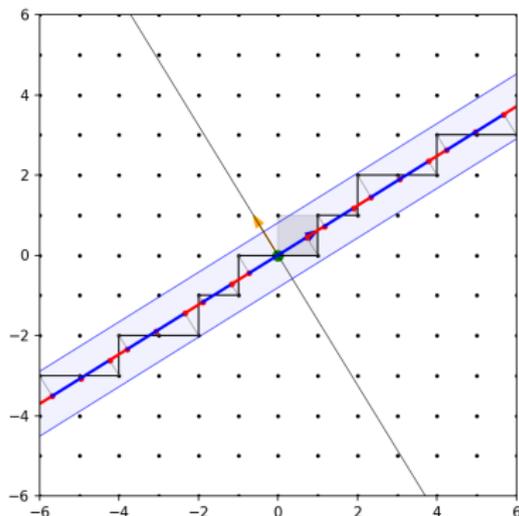


Рис.: Колір граней залежно від типу.

Cut and Project Tiling by Grant Glouster:

<https://gglouster.github.io/cut-and-project-tiling/>

# Коренева ґратка $A_n$

$$A_n = \{x \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 0\}$$

Примітивні корені  $A_n$ :  $e_i - e_j$ ,  $i \neq j$ , де  $e_i$  - стандартний базис  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

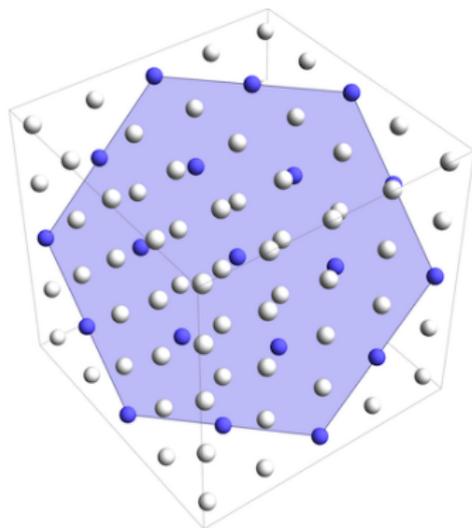
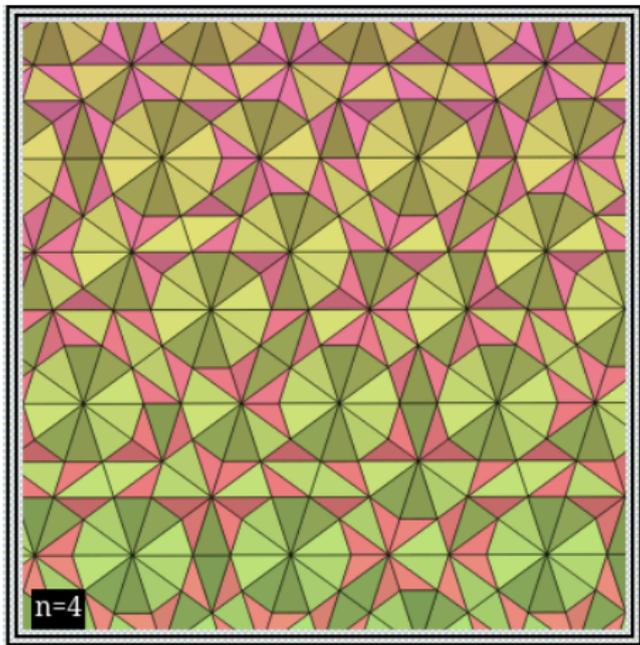


Рис.: Коренева ґратка  $A_2$  ([3])

Проекція комірок Делоне кореневої ґратки  $A_4$  на площину дає замощення Тьубінгена, що має 5-симетрію.



**Рис.:** Замощення Тьубінгена з  $n = 4$  (згенеровано за допомогою ПЗ Greg Egan, <https://www.gregegan.net/APPLETS/31/31.html>)

Інший погляд на квазікристал – сума хвиль із ірраціональними частотами. Найпростіша конструкція:

$$f(x) = \sin(x) + \sin(\tau x) =$$
$$u(x, y)|_{y=\tau x} = \sin(x) + \sin(y)|_{y=\tau x}$$

$$f(x) = u(x, y)|_{y=\tau x} = \sin(x) + \sin(y)|_{y=\tau x}$$

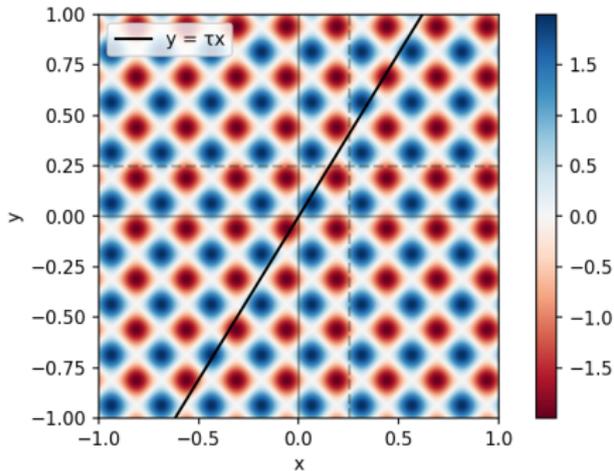


Рис.: Графік  $u(x, y)$

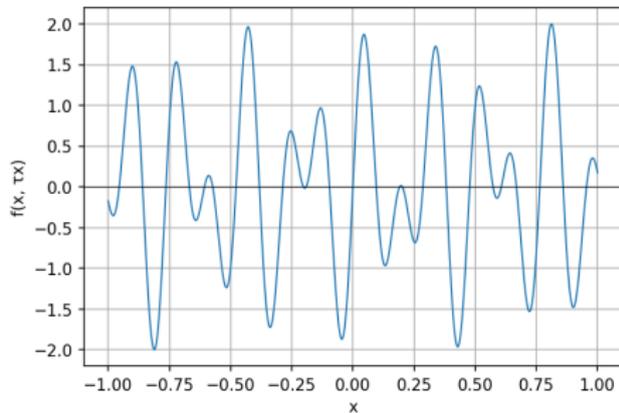
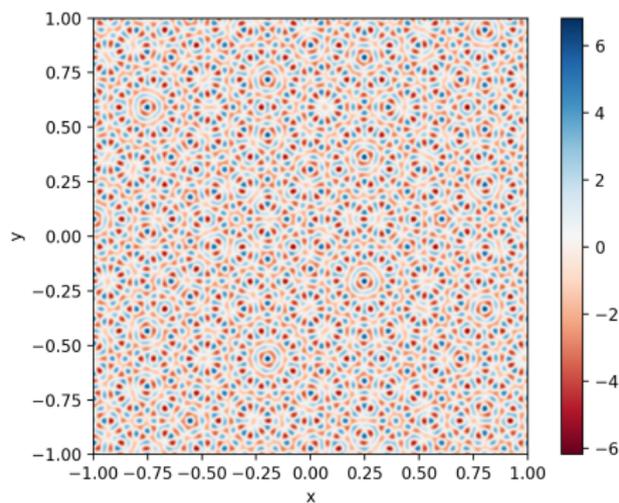


Рис.: Графік  $f(x)$

# Квазікристал як сума хвиль

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \sin(2\pi \vec{r} \cdot \vec{k}_i), \quad \vec{k}_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{N} \\ \sin \frac{2\pi i}{N} \end{pmatrix}$$

Quasicrystal: 7 waves, 20 periods  
Shifted by (2, 2).



FFT of Quasicrystal (log1p): 7 waves, 20 periods

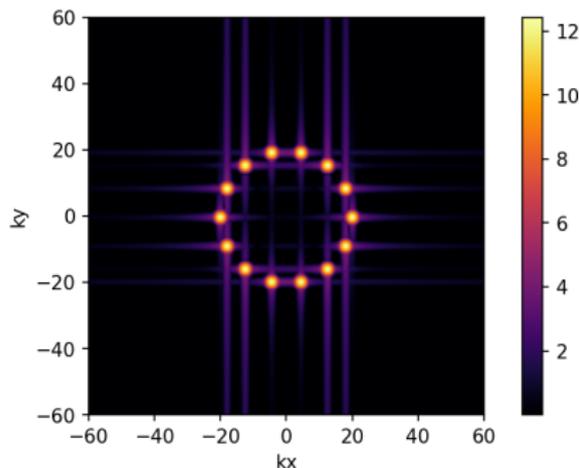


Рис.: Сума 7 плоских хвиль навколо (2, 2)

Рис.: Дискретне перетворення Фур'є (gaussian mask, log scale)

- 1 7-кратна симетрія (та 14-кратна)
- 2 Неперіодичність відносно трансляцій
- 3 Дискретний дифракційний малюнок навіть на відстані від осі симетрії

# Сума $N$ хвиль як проєкція

Нехай  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $A_n(\vec{x}) = \cos 2\pi x_n$  – набір  $N$  перпендикулярних пласких хвиль. Визначимо площину  $L = \text{span}(e_u, e_v)$ , де

$$e_u = \left( \cos \frac{2\pi}{N} \quad \cos \frac{2\pi \cdot 2}{N} \quad \dots \quad \cos \frac{2\pi \cdot N}{N} \right)$$

$$e_v = \left( \sin \frac{2\pi}{N} \quad \sin \frac{2\pi \cdot 2}{N} \quad \dots \quad \sin \frac{2\pi \cdot N}{N} \right)$$

Обмежимо  $A(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N A_n(\vec{x})$  на площину  $L$ .

$$\begin{aligned} A(\vec{x})|_L &= \sum_{n=1}^N \cos(2\pi x(u, v) \cdot e_n) = \sum_{n=1}^N \cos \left( 2\pi \left( \cos \frac{2\pi n}{N} u + \sin \frac{2\pi n}{N} v \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sin(2\pi \vec{r} \cdot \vec{k}_i) = f(u, v) \end{aligned}$$

# Перетин площин ґратки

Техніка візуалізації перетину площини  $L$  із площинами ґратки  $\mathbb{Z}^N$ .

$$A(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N \lfloor \sin \pi x_n + 1 \rfloor \pmod{2}$$

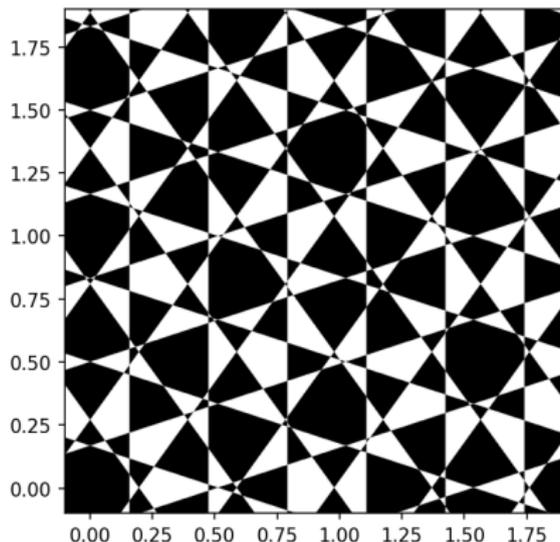
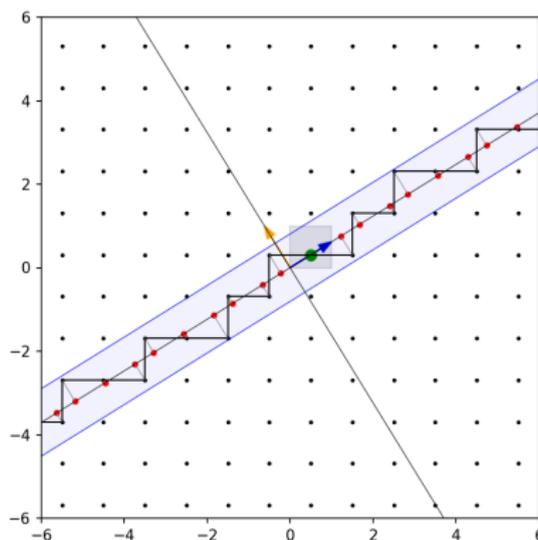


Рис.: Слід перетину площини  $L$  із площинами 5-вимірної ґратки  $\mathbb{Z}^5$ , центрований навколо  $(0.9, 0.9)$ .

# Проектування гіперкубів

Будуємо квазікристал (замощення) проектуючи вершини (грані) гіперкуба  $\mathbb{Z}^N$  на площину  $L$ , якщо вони лежать у вікні  $\Omega$ . Вікно – проекція  $[0, 1]^N$  на  $L^\perp$ .



- 1 Перебір точок на площині, пошук найближчих центрів гіперкубів
- 2 Пошук у ширину на точках ґратки
- 3 Лінійне програмування
- 4 Обчислення проєкції гіперкуба на перпендикулярний простір (опукла оболонка проєкцій вершин) [4]
- 5 Пошук найближчого гіперкуба до сліду на площині [3]
- 6 “multigrid” [5]

Точка перетину не завжди лежить у проєкції грані гіперкуба.  
Орієнтація гіперкуба складна.

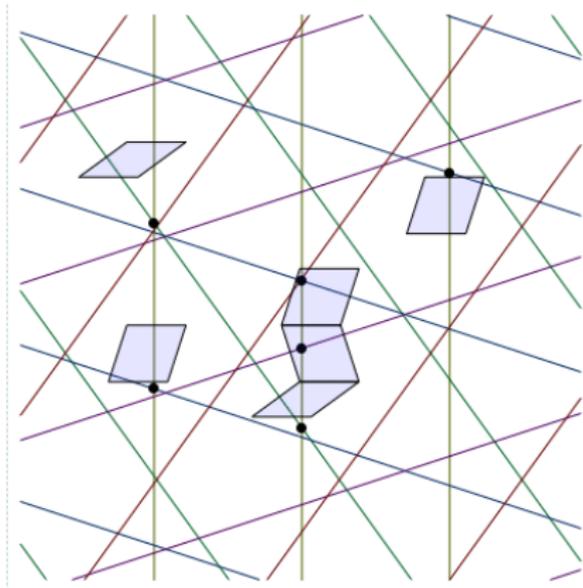


Рис.: Приклад проєкції для  $\mathbb{Z}^5$  ґратки [3]

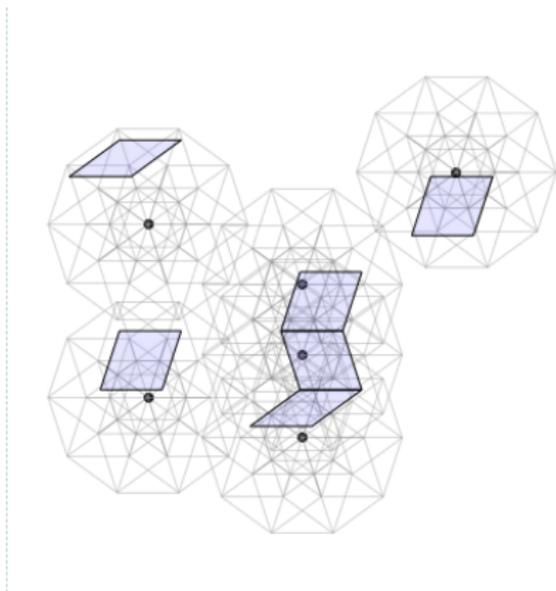


Рис.: Проєкція усіх граней відповідних найближчих гіперкубів [3]

Локальна оболонка. Клас локальної нерозрізненості (local indistinguishability).

## Визначення

Множина  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  називається Делонівською (Delone set), якщо існують  $r, R > 0$  такі, що  $\min\{\|x - y\| : x, y \in \Lambda, y \neq x\} \geq r$  та  $\max_x \min\{\|x - y\| : y \in \Lambda\} \leq R$ .

## Визначення (LI-клас (описово))

Делонівські множини  $A, B$  локально нерозрізнені, якщо  $\forall x \in A, r > 0 : \exists t \in \mathbb{R}^d : t + (A \cap B_r(x)) = B \cap B_r(T(x))$ , де  $t$  діє як трансляція. [1]

$\Lambda_1$  та  $\Lambda_2$  близькі якщо

$$\Lambda_1 \cap B_R \subset \Lambda_2 + B_\epsilon$$

$$\Lambda_2 \cap B_R \subset \Lambda_1 + B_\epsilon$$

Chabauty topology, Fell topology, Hausdorff distance.

## Визначення (Локальна оболонка)

$$X(\Lambda) = \overline{\{t + \Lambda : t \in \mathbb{R}^d\}}$$

## Теорема

$X(\Lambda)$  - компакт [6]

## Теорема

$X(\Lambda)$  параметризується тором  $\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$  однозначно майже всюди (torus parametrization). [7]

Замикання орбіти. Існування нових граничних точок пов'язане із дискретним дифракційним малюнком квазікристала.

## Наступні кроки

- 1 Дискретна топологія
- 2 Підняття функцій на  $X(\Lambda)$  (відповідно, на  $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ ), локальні відносно  $\Lambda$  функції
- 3  $L^2(X(\Lambda))$  та Фур'є-аналіз локальних функцій
- 4 Техніки обчислення коефіцієнтів Фур'є-розкладу
- 5 Чисельні експерименти



M. Baake, "A guide to mathematical quasicrystals," 1999. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/math-ph/9901014>



R. Moody, M. Nesterenko, and J. Patera, "Computing with almost periodic functions," *Foundations of Crystallography*, vol. 64, no. 6, pp. 654–669, 2008. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/0808.1814v1>



G. Egan, "debruijn applet: Mathematical details," 2008. [Online]. Available: <https://www.gregegan.net/APPLETS/12/deBruijnNotes.html>



M. E. Rule, "Algorithms for rendering quasicrystal tilings," 2020. [Online]. Available: <https://crawlingrobotfortress.blogspot.com/2020/09/algorithms-for-rendering-quasicrystal.html>



G. Glouser, "Cut and project tiling applet on github," 2018. [Online]. Available: <https://gglouser.github.io/cut-and-project-tiling/>



C. Radin and M. Wolff, "Space tilings and local isomorphism," *Geometriae Dedicata*, vol. 42, no. 3, pp. 355–360, 1992. [Online]. Available: <https://web.ma.utexas.edu/users/radin/papers/local-isomorphism-s.pdf>



M. Baake, J. Hermisson, and P. A. B. Pleasants, "The torus parametrization of quasiperiodic li-classes," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 30, no. 9, p. 3029, may 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/9/016>

Дякую за увагу

**Михайло Корешков**

*Аспірант відділу математичної фізики*

*Інституту математики НАН України*

*mykhailo.koreshkov@gmail.com*