

C^* -алгебри. III. Конструкція Гельфанда-Наймарка-Сігала

1. Конструкція Гельфанда-Наймарка-Сігала

1. Нехай $\mathcal{A} = \mathcal{C}[0, 1]$. Визначимо функціонал на $\mathcal{A}$ наступним чином:

$$\rho(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (a) Показати що ρ це стан.
(b) Порахувати ГНС пару (π, ξ) наступним чином. Розглянути простір $L_2[0, 1]$, та взяти константну функцію $\xi(t) = 1, t \in [0, 1]$. Побудувати зображення $\mathcal{A}$ на $L_2[0, 1]$ таким чином, щоб (π, ξ) стало ГНС-парою для $\mathcal{A}$;

- (c) Показати, що π - це точне зображення; тобто:

$$\pi(f) = 0 \Rightarrow f = 0, f \in \mathcal{A};$$

- (d) Показати, що замикання $\pi(\mathcal{A})$ в слабкій операторній топології це максимальна абелева алгебра фон Неймана. Описати її.

2. Нехай $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$. Показати, що для довільного стану ϕ у цій алгебрі можна підібрати елемент h такий, що:

- (a) $\text{trace}(h) = 1$;
(b) $\phi(x) = \text{trace}(hx), x \in \mathcal{A}$.

Показати, що стан *чистий* тоді і тільки тоді коли h це проектор рангу 1. Побудувати відповідне зображення алгебри.