

УДК 517.984.5

А. С. Горюнов, В. А. Михайлец

(Институт математики НАН Украины, Киев)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**We propose a regularization of the formal differential expression of order $m \geq 3$*

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in (a, b),$$

applying quasi-derivatives. The distribution coefficient q is supposed to have a primitive $Q \in L([a, b]; \mathbb{C})$. For the symmetric case ($Q = \bar{Q}$) self-adjoint and maximal dissipative extensions of the minimal operator and its generalized resolvents are described. The resolvent approximation with respect to the norm of the considered operators is also investigated.

The case $m = 2$ for $Q \in L_2([a, b]; \mathbb{C})$ was investigated earlier.

Предлагается регуляризация формального дифференциального выражения порядка $m \geq 3$

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in (a, b),$$

посредством квазипроизводных. Предполагается, что коэффициент-распределение q имеет первообразную $Q \in L([a, b]; \mathbb{C})$. В симметрическом случае ($Q = \bar{Q}$) описаны самосопряженные, максимальные диссипативные расширения минимального оператора и его обобщенные резольвенты. Изучена сходимость резольвент рассмотренных операторов по норме.

Случай $m = 2$ при $Q \in L_2([a, b]; \mathbb{C})$ исследован ранее.

1. Введение. Рассмотрим на конечном интервале $\mathcal{J} := (a, b)$ формальное дифференциальное выражение порядка m

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}. \quad (1)$$

Если $m = 2$ и коэффициент $q \in L(\mathcal{J}; \mathbb{R})$, то дифференциальное

*Исследование поддержано Государственным Фондом Фундаментальных Исследований Украины, грант № 28.1/017.

уравнение $l(y) = f$ является классическим уравнением Штурма–Лиувилля и изучено весьма полно. Современное изложение этой теории приведено во многих монографиях (см. [1] и приведенные там ссылки). Как выяснилось после работы [2], многие положения этой теории распространяются на существенно более общий случай

$$q = Q', \quad Q \in L_2(\mathcal{J}; \mathbb{C}), \quad (2)$$

где производная понимается в смысле обобщенных функций. В частности, это относится к физически содержательному случаю, когда q является мерой Радона на $\overline{\mathcal{J}}$ либо имеет неинтегрируемые точечные особенности. Подобные операторы задолго до этого возникали в различных задачах математической физики и исследовались очень многими авторами, главным образом, при помощи средств теории операторов (см. [3] и ссылки там).

В связи с этим представляет интерес задача о регуляризации дифференциального выражения (1) с сингулярным коэффициентом $q \notin L(\mathcal{J}; \mathbb{C})$ при произвольном значении $m > 2$. Ее решению посредством специально подобранных квазипроизводных и посвящена данная работа. При этом условие (2) нам удалось ослабить до следующего:

$$q = Q', \quad Q \in L(\mathcal{J}; \mathbb{C}) =: L_1. \quad (3)$$

Случай общего выражения Штурма–Лиувилля

$$l(y) = -(p(t)y')' + q(t)y, \quad t \in \mathcal{J}$$

с сингулярными коэффициентами

$$q = Q', \quad 1/p, Q/p, Q^2/p \in L_1$$

с аналогичных позиций исследован авторами ранее в работе [4].

Работа структурирована следующим образом.

В разделе 2 мы вводим регуляризацию формального дифференциального выражения (1) в предположении (3) и определяем соответствующие максимальный и минимальный операторы в гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{J}; \mathbb{C}) =: L_2$.

В разделе 3 найдены достаточные условия равномерной резольвентной аппроксимации расширений построенного минимального оператора L_{\min} семейством операторов того же класса.

В разделе 4 в предположении симметричности минимального оператора описываются все его самосопряженные и максимальные диссипативные расширения в терминах однородных граничных условий канонического вида. Эти расширения параметризуются соответственно унитарными операторами и сжатиями в \mathbb{C}^m . Такая параметризация является биективной и непрерывной.

В разделе 5 описываются все обобщенные резольвенты минимального оператора в полуплоскости $\text{Im}\lambda < 0$.

2. Регуляризация сингулярного выражения. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение (1) порядка $m \geq 3$ при условиях (3).

Введем последовательно квазипроизводные:

$$\begin{aligned} D^{[k]}y(t) &:= y^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, m-2}, \\ D^{[m-1]}y(t) &:= y^{(m-1)}(t) + i^{-m}Q(t)y(t), \\ D^{[m]}y(t) &:= (D^{[m-1]}y(t))' - i^{-m}Q(t)D^{[1]}y(t). \end{aligned}$$

В условиях (3) они являются квазипроизводными по Шину-Зеттлу (см. [6], Сек. 1).

Поэтому формальное выражение (1) можно корректно определить как квазидифференциальное выражение Шина-Зеттла

$$l[y] := i^m D^{[m]}.$$

Определение 1. Решение задачи Коши для резольвентного уравнения

$$l[y] - \lambda y = f \in L_2, \quad (D^{[k]}y)(c) = \alpha_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (4)$$

где $c \in \overline{\mathcal{J}}$ и $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, m-1}$, определяется как первая компонента решения задачи Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$w'(t) = A_\lambda(t)w(t) + \varphi(t), \quad w(c) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \quad (5)$$

где вектор-функция $w(t) := (D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), \dots, D^{[m-1]}y(t))$, квад-

ратная матрица-функция

$$A_\lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ i^{-m}\lambda & i^{-m}Q(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^{m \times m}, \quad (6)$$

а вектор-функция $\varphi(t) := (0, 0, \dots, 0, i^{-m}f(t)) \in L_1^m$.

Лемма 1. *Задача Коши (4) при условии (3) имеет решение на $\overline{\mathcal{J}}$. Оно единственно.*

Доказательство. Задача (5) при $A_\lambda(\cdot) \in L_1^{m \times m}$ имеет и притом единственное решение при каждом $c \in \overline{\mathcal{J}}$ и $(\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ в силу теоремы 1.2.1 монографии [1]. Поэтому утверждение леммы следует из определения 1 и указанной теоремы.

Введенное квазидифференциальное выражение $l[y]$ порождает в гильбертовом пространстве L_2 (см. [6, 7]) *максимальный* квазидифференциальный оператор

$$L_{\max} : y \rightarrow l[y],$$

$$\text{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \mid D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1}, D^{[m]}y \in L_2 \right\}.$$

Минимальный квазидифференциальный оператор определяется как сужение оператора L_{\max} на линейное многообразии

$$\text{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \text{Dom}(L_{\max}) \mid D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0, k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Лемма 2. *Если в равенствах (1) и (3) заменить выбранную первообразную Q произвольной*

$$\tilde{Q} := Q + c, \quad c \in \mathbb{C},$$

то операторы L_{\max}, L_{\min} не изменятся.

Доказательство. Покажем, что оператор $L_{\max} = L_{\max}(Q)$, совпадает с оператором $\tilde{L}_{\max} = L_{\max}(\tilde{Q})$. Обозначим через

$\tilde{D}^{[0]}y, \tilde{D}^{[1]}y, \dots, \tilde{D}^{[m]}y$ квазипроизводные, соответствующие отличной от Q первообразной \tilde{Q} .

Пусть $y \in \text{Dom}(L_{\max})$. Прямым подсчетом находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{[0]}y &= D^{[0]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), \\ &\dots\dots\dots, \\ \tilde{D}^{[m-2]}y &= D^{[m-2]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), \\ \tilde{D}^{[m-1]}y &= D^{[m-1]}y + i^{-m}c\tilde{D}^{[0]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), \\ \tilde{D}^{[m]}y &= D^{[m]}y \in L_2. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \text{Dom}(L_{\max}) \subset \text{Dom}(\tilde{L}_{\max}) &= \\ &= \left\{ y \mid \tilde{D}^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1}, \tilde{D}^{[m]}y \in L_2 \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\text{Dom}(L_{\max}) \supset \text{Dom}(\tilde{L}_{\max})$.
Наконец,

$$\tilde{L}_{\max}y = i^m \tilde{D}^{[m]}y = i^m D^{[m]}y = L_{\max}y, \quad y \in \text{Dom}(L_{\max}).$$

Покажем теперь, что $\tilde{L}_{\min} = L_{\min}$.
Пусть $y \in \text{Dom}(L_{\min})$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{[0]}y(a) &= D^{[0]}y(a) = 0, \\ \tilde{D}^{[0]}y(b) &= D^{[0]}y(b) = 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \tilde{D}^{[m-2]}y(a) &= D^{[m-2]}y(a) = 0, \\ \tilde{D}^{[m-2]}y(b) &= D^{[m-2]}y(b) = 0, \\ \tilde{D}^{[m-1]}y(a) &= D^{[m-1]}y(a) + i^{-m}c\tilde{D}^{[0]}y(a) = 0 + 0 = 0, \\ \tilde{D}^{[m-1]}y(b) &= D^{[m-1]}y(b) + i^{-m}c\tilde{D}^{[0]}y(b) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что $\text{Dom}(L_{\min}) \subset \text{Dom}(\tilde{L}_{\min})$. Аналогично устанавливается, что $\text{Dom}(L_{\min}) \supset \text{Dom}(\tilde{L}_{\min})$.

Поскольку $\tilde{L}_{\min}y = \tilde{L}_{\max}y = L_{\max}y = L_{\min}y$ на функциях $y \in \text{Dom}(L_{\min})$, то лемма доказана.

Рассмотрим наряду с (1) формально сопряженное дифференциальное выражение

$$l^+(y) = i^m y^{(m)}(t) + \bar{q}(t)y(t),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Обозначим через L_{\max}^+ и L_{\min}^+ порождаемые им максимальный и минимальный операторы в пространстве L_2 . Тогда из результатов монографии [6] для общих квазидифференциальных выражений Шина–Зеттла и приведенного нами выше следует

Теорема 1. *Операторы L_{\min} , L_{\min}^+ , L_{\max} , L_{\max}^+ являются плотно заданными и замкнутыми в пространстве L_2 ,*

$$L_{\min}^* = L_{\max}^+, \quad L_{\max}^* = L_{\min}^+.$$

Если функция q вещественнозначна, то оператор $L_{\min} = L_{\min}^+$ является симметрическим с индексом дефекта (m, m) и

$$L_{\min}^* = L_{\max}, \quad L_{\max}^* = L_{\min}.$$

3. Аппроксимация резольвенты. Рассмотрим семейство квазидифференциальных выражений вида (1) $l_\varepsilon[y]$ с коэффициентами $q_\varepsilon = Q'_\varepsilon \in L_1$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Соответствующие им квазипроизводные будем обозначать через $D_\varepsilon^{[0]}y, D_\varepsilon^{[1]}y, \dots, D_\varepsilon^{[m]}y$.

В гильбертовом пространстве L_2 с нормой $\|\cdot\|_2$ такие выражения при каждом ε порождают операторы $L_{\min}^\varepsilon, L_{\max}^\varepsilon$. Пусть матрицы $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m \times m}$, а векторы

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a), \dots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b), \dots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Зададим для каждого фиксированного значения ε операторы

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon[y],$$

$$\text{Dom}(L_\varepsilon) = \{y \in \text{Dom}(L_{\max}^\varepsilon) \mid \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0\}.$$

Очевидно, что

$$L_{\min}^\varepsilon \subset L_\varepsilon \subset L_{\max}^\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Будем обозначать через $\rho(L)$ резольвентное множество оператора L . Напомним, что операторы L_ε сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0+$ к оператору L_0 в смысле равномерной резольвентной сходимости, $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$, если существует $\mu \in \mathbb{C}$ такое, что $\mu \in \rho(L_0)$, $\mu \in \rho(L_\varepsilon)$ для достаточно малых ε и

$$\|(L_\varepsilon - \mu)^{-1} - (L_0 - \mu)^{-1}\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Это определение не зависит от выбора $\mu \in \rho(L_0)$ [8].

Введем обозначение $c^\vee(t) := \int_a^t c(s) ds$.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 2. Пусть $\rho(L_0)$ непусто и при $\varepsilon \rightarrow 0+$ выполняются условия:

- 1) $\|(Q_\varepsilon - Q_0)^\vee\|_C \rightarrow 0$;
- 2) $\alpha(\varepsilon) \rightarrow \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \rightarrow \beta(0)$.

Тогда $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$.

Замечание 1. Условие $\|Q_\varepsilon - Q_0\|_1 \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0+$, очевидно, достаточно для выполнения условия 1).

Доказательство теоремы 2 основывается на одном вспомогательном результате.

Следуя работам [9, 10], введем

Определение 2. Обозначим через $\mathcal{M}^n(\mathcal{J}) =: \mathcal{M}^n, n \in \mathbb{N}$ класс всех параметризованных числом ε матриц-функций

$$R(\cdot; \varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \rightarrow L_1^{n \times n},$$

для которых решение задачи Коши

$$Z'(t; \varepsilon) = R(t; \varepsilon)Z(t; \varepsilon), \quad Z(a; \varepsilon) = I_n$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \|Z(\cdot; \varepsilon) - I_n\|_C = 0,$$

где $\|\cdot\|_C$ – sup-норма.

В работе [10] установлена следующая общая теорема.

Теорема 3. Пусть для краевой задачи

$$y'(t; \varepsilon) = A(t; \varepsilon)y(t; \varepsilon) + f(t; \varepsilon), \quad t \in \mathcal{J}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \quad (7)$$

$$U_\varepsilon y(\cdot; \varepsilon) = 0, \quad (8)$$

где матрицы-функции $A(\cdot, \varepsilon) \in L_1^{n \times n}$, вектор-функции $f(\cdot, \varepsilon) \in L_1^n$, а линейные непрерывные операторы

$$U_\varepsilon : C(\overline{\mathcal{J}}; \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

выполнены условия:

- 1) однородная предельная краевая задача (7), (8) с $\varepsilon = 0$ и $f(\cdot; 0) \equiv 0$ имеет только тривиальное решение;
- 2) $A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0) \in \mathcal{M}^n$;
- 3) $\|U_\varepsilon - U_0\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+$.

Тогда для достаточно малых ε существуют матрицы Грина $G(t, s; \varepsilon)$ задач (7), (8) и на квадрате $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$

$$\|G(\cdot, \cdot; \varepsilon) - G(\cdot, \cdot; 0)\|_\infty \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \quad (9)$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – норма в пространстве L_∞ .

Замечание 2. Условие 3) теоремы 3 нельзя заменить более слабым условием сильной сходимости операторов $U_\varepsilon \xrightarrow{s} U_0$ [10]. Однако, как нетрудно убедиться, для двухточечных краевых операторов

$$U_\varepsilon y := B_1(\varepsilon)y(a) + B_2(\varepsilon)y(b), \quad B_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad k \in \{1, 2\},$$

как условие сильной, так и условие равномерной сходимости равносильны тому, что

$$\|B_k(\varepsilon) - B_k(0)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Приведенное определение класса \mathcal{M}^n не является конструктивным. Имеются различные достаточные условия принадлежности

матричной функции $R(\cdot; \varepsilon)$ классу \mathcal{M}^n . В частности, из результатов работы А. Ю. Левина [11] следует

Лемма 3. Пусть $R(\cdot; \varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \rightarrow L_1^{n \times n}$. Если при $\varepsilon \rightarrow 0+$ выполнено одно из четырех (неэквивалентных между собой) условий:

- (α) $\|R(\cdot; \varepsilon)\|_1 = O(1)$,
- (β) $\|R^\vee(\cdot; \varepsilon)R(\cdot; \varepsilon)\|_C \rightarrow 0$,
- (γ) $\|R(\cdot; \varepsilon)R^\vee(\cdot; \varepsilon)\|_C \rightarrow 0$,
- (Δ) $\|R^\vee(\cdot; \varepsilon)R(\cdot; \varepsilon) - R(\cdot; \varepsilon)R^\vee(\cdot; \varepsilon)\|_C \rightarrow 0$,

то условие $\|R^\vee(\cdot; \varepsilon)\|_C \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0+$ равносильно включению $R(\cdot; \varepsilon) \in \mathcal{M}^n$.

Следующее утверждение позволит нам редуцировать теорему 2 к теореме 3.

Лемма 4. Функция $y(t)$ является решением краевой задачи

$$l_\varepsilon[y](t) = f(t; \varepsilon) \in L_2, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad (10)$$

$$\alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0 \quad (11)$$

тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$w(t) = (D_\varepsilon^{[0]}y(t), D_\varepsilon^{[1]}y(t), \dots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))$$

является решением краевой задачи

$$w'(t) = A(t; \varepsilon)w(t) + \varphi(t; \varepsilon), \quad (12)$$

$$\alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0, \quad (13)$$

где квадратная матрица-функция

$$A(\cdot; \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(\cdot; \varepsilon) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & i^{-m}Q(\cdot; \varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^{m \times m}, \quad (14)$$

где матрица-функция $A(\cdot; \varepsilon)$ задана формулой (14).

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0)) (A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0))^{\vee} &= \\ &= (A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0))^{\vee} (A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0)). \end{aligned}$$

Поэтому матричная функция $A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0)$ при $m \geq 3$ удовлетворяет условию (Δ) леммы 3.

Очевидно, что условие $\| (A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0))^{\vee} \|_C \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0+$ эквивалентно условию 1) теоремы 2. Поэтому из леммы 3 вытекает, что выполнены условия теоремы 3 для задачи (12), (13).

Это значит, что существуют матрицы Грина $G(t, s; \varepsilon)$ задач (12), (13), и выполняется предельное соотношение (9). Учитывая лемму 5, это влечет предельное равенство

$$\|\Gamma(\cdot, \cdot; \varepsilon) - \Gamma(\cdot, \cdot; 0)\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|L_{\varepsilon}^{-1} - L_0^{-1}\| &= \sup_{\|f\|_2=1} \left\| \int_a^b [\Gamma(t, s; \varepsilon) - \Gamma(t, s; 0)] f(s) ds \right\|_2 \leq \\ &\leq (b-a)^{1/2} \sup_{\|f\|_2=1} \left\| \int_a^b |\Gamma(t, s; \varepsilon) - \Gamma(t, s; 0)| |f(s)| ds \right\|_C \leq \\ &\leq (b-a) \|\Gamma(\cdot, \cdot; \varepsilon) - \Gamma(\cdot, \cdot; 0)\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \end{aligned}$$

что влечет утверждение теоремы 2.

4. Расширения симметрического минимального оператора. Всюду далее будем предполагать, что функции q и Q вещественнозначны. Это условие влечет формальную самосопряженность выражения $l[y]$ (см. [6]) и, согласно теореме 1, симметричность оператора L_{\min} . Поэтому содержателен вопрос об описании (при помощи однородных краевых условий) некоторых классов (самосопряженных, максимальных диссипативных) расширений в гильбертовом пространстве L_2 симметрического оператора L_{\min} . Для ответа на него мы будем использовать понятие пространства граничных значений.

Определение 3. Пусть L — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве \mathcal{H} с равными (конечными или бесконечными) дефектными числами. Тройка (H, Γ_1, Γ_2) , где H — вспомогательное гильбертово пространство, а Γ_1, Γ_2 — линейные

отображения $\text{Dom}(L^*)$ в H , называется пространством граничных значений (сокращенно ПГЗ) симметрического оператора L , если:

- 1) для любых $f, g \in \text{Dom}(L^*)$

$$(L^*f, g)_{\mathcal{H}} - (f, L^*g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H,$$
- 2) для любых векторов $f_1, f_2 \in H$ существует вектор $f \in \text{Dom}(L^*)$ такой, что $\Gamma_1 f = f_1, \Gamma_2 f = f_2$.

Из определения ПГЗ следует, что $f \in \text{Dom}(L)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$. ПГЗ существует для любого симметрического оператора с равными ненулевыми дефектными числами (см. [12] и приведенные там ссылки). Оно всегда не единственно.

Следующий результат является ключевым для дальнейшего.

Основная лемма. Пусть Γ_1, Γ_2 – линейные отображения из $\text{Dom}(L_{\max})$ в \mathbb{C}^m такие, что:

при $m = 2n, n \geq 2$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ \dots, \\ (-1)^n D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ \dots, \\ (-1)^{n-1} D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ \dots, \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ \dots, \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix}$$

а при $m = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ \dots, \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ \dots, \\ (-1)^{n-1} D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ \dots \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ \dots \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

где числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i$.

Тогда тройка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений оператора L_{\min} .

Замечание 3. Приведенные значения коэффициентов можно заменить произвольными наборами чисел, которые удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma = (-1)^n, \\ \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta = (-1)^{n+1}, \\ \alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma = 0, \\ \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta = 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Обозначим через L_K сужение оператора L_{\max} на множество функций $y(t) \in \text{Dom}(L_{\max})$, удовлетворяющих однородному краевому условию канонического вида

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0, \quad (16)$$

где K — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве \mathbb{C}^m .

В сочетании с результатами [12] Основная лемма влечет следующее описание самосопряженных расширений L_{\min} :

Теорема 4. Каждое L_K , где K — унитарный оператор в пространстве \mathbb{C}^m , является самосопряженным расширением оператора L_{\min} . Обратно, для каждого самосопряженного расширения \tilde{L} оператора L_{\min} найдется унитарный оператор K такой, что $\tilde{L} = L_K$. Соответствие между унитарными операторами $\{K\}$ и расширениями $\{\tilde{L}\}$ биективно.

Замечание 4. Из теоремы 2 и теоремы 4 вытекает, что отображение $K \rightarrow L_K$ является не только биективным, но и непрерывным.

Более точно, если унитарные операторы K_n сходятся по норме к оператору K , то

$$\left\| (L_K - \lambda)^{-1} - (L_{K_n} - \lambda)^{-1} \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \neq 0.$$

При этом, поскольку множество унитарных операторов в конечномерном пространстве \mathbb{C}^m компактно в метрике нормы оператора, то верно и обратное утверждение, то есть отображение

$$K \rightarrow (L_K - \lambda)^{-1}, \quad \text{Im} \lambda \neq 0$$

является при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ гомеоморфизмом.

Напомним известное определение.

Определение 4. Плотный заданный линейный оператор L в комплексном гильбертовом пространстве \mathcal{H} называют диссипативным, если

$$\text{Im} (Lf, f)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad f \in \text{Dom}(L)$$

и максимальным диссипативным, если, кроме того, у оператора L нет нетривиальных диссипативных расширений в пространстве \mathcal{H} .

В частности, каждый симметрический оператор – диссипативный, а самосопряженный – максимальный диссипативный. Поэтому для симметрического квазидифференциального оператора L_{\min} можно поставить вопрос об описании всех его максимальных диссипативных расширений. Согласно теореме Р. Филлипса [12, 13] каждое диссипативное расширение симметрического оператора является сужением его сопряженного. Поэтому любое максимальное диссипативное расширение оператора L_{\min} является сужением оператора L_{\max} .

Параметрическое описание всех максимальных диссипативных расширений симметрического квазидифференциального оператора L_{\min} дает

Теорема 5. Каждое L_K , где K – сжатие в пространстве \mathbb{C}^m , является максимально диссипативным расширением L_K оператора L_{\min} . Обратно, для каждого максимального диссипативного расширения \tilde{L} оператора L_{\min} найдется сжатие K такое, что $\tilde{L} = L_K$.

Соответствие между сжатиями $\{K\}$ и расширениями $\{\tilde{L}\}$ биективно.

Замечание 5. Отображение

$$K \rightarrow (L_K - \lambda)^{-1}, \operatorname{Im} \lambda < 0$$

является при каждом фиксированном λ гомеоморфизмом (см. замечание 4).

Перейдем к доказательствам сформулированных результатов. Доказательству Основной леммы предпошлем две леммы, являющиеся частными случаями соответствующих утверждений для общих квазидифференциальных выражений (см. [6]).

Лемма 6. Пусть $y, z \in \operatorname{Dom}(L_{\max})$. Тогда

$$\int_a^b \left(D^{[m]}y \cdot \bar{z} - y \cdot \overline{D^{[m]}z} \right) dx = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} D^{[m-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \Big|_{x=a}^{x=b}$$

Лемма 7. Для произвольных наборов комплексных чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}\}$, $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}\}$ существует функция $y \in \operatorname{Dom}(L_{\max})$ такая, что

$$D^{[k]}y(a) = \alpha_k, \quad D^{[k]}y(b) = \beta_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Доказательство Основной леммы. Достаточно показать, что тройка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) определения ПГЗ с $\mathcal{H} = L_2$. Согласно теореме 1, $L_{\min}^* = L_{\max}$. Согласно лемме 6

$$(L_{\max}y, z) - (y, L_{\max}z) = i^m \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} D^{[m-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Однако легко подсчитать, что в случае $m = 2n$

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z) = i^{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \Big|_{x=a}^{x=b},$$

и

$$(\Gamma_2 y, \Gamma_1 z) = i^{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Это показывает, что выполняется условие 1). Выполнение условия 2) следует непосредственно из леммы 7.

В случае $m = 2n + 1$ введем обозначения :

$$\Gamma_1 =: (\Gamma_{1a}, \Gamma_{1b}, \Gamma_{1ab}),$$

$$\Gamma_2 =: (\Gamma_{2a}, \Gamma_{2b}, \Gamma_{2ab}),$$

где

$$\Gamma_{1a} = i^{2n+1} \left(-D^{[2n]}y(a), \dots, (-1)^n D^{[n+1]}y(a) \right),$$

$$\Gamma_{1b} = i^{2n+1} \left(D^{[2n]}y(b), \dots, (-1)^{n+1} D^{[n+1]}y(a) \right),$$

$$\Gamma_{1ab} = i^{2n+1} \left(\alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \right),$$

$$\Gamma_{2a} = \left(D^{[0]}y(a), \dots, D^{[n-1]}y(a) \right),$$

$$\Gamma_{2b} = \left(D^{[0]}y(b), \dots, D^{[n-1]}y(b) \right),$$

$$\Gamma_{2ab} = \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a).$$

Тогда легко проверить, что

$$(\Gamma_{1a}y, \Gamma_{2a}z) = i^{2n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y(a) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(a)},$$

$$(\Gamma_{2a}y, \Gamma_{1a}z) = i^{2n+1} \sum_{k=n+2}^{2n+1} (-1)^k D^{[2n-k]}y(a) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(a)},$$

$$(\Gamma_{1b}y, \Gamma_{2b}z) = i^{2n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y(b) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(b)},$$

$$(\Gamma_{2b}y, \Gamma_{1b}z) = i^{2n+1} \sum_{k=n+2}^{2n+1} (-1)^k D^{[2n-k]}y(b) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(b)},$$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{1ab}y, \Gamma_{2ab}z) - (\Gamma_{2ab}y, \Gamma_{1ab}z) = \\ & = i^{2n+1} (-1)^n \left(D^{[n]}y(b) \cdot \overline{D^{[n]}z(b)} - D^{[n]}y(a) \cdot \overline{D^{[n]}z(a)} \right). \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что выполняется условие 1) определения 3. Выполнение условия 2) следует из леммы 7 и последнего из соотношений (15).

Доказательство теоремы 4 и теоремы 5. Утверждения теорем следуют из Основной леммы и теоремы 1.6 гл. 3 монографии [12] для ПГЗ абстрактного симметрического оператора.

5. Обобщенные резольвенты. Напомним известное

Определение 5. Обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора L называют операторную функцию R_λ комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, допускающую представление вида

$$R_\lambda f = P^+ (L^+ - \lambda I^+)^{-1} f, \quad f \in \mathcal{H},$$

где L^+ – какое-либо самосопряженное расширение оператора L с выходом, вообще говоря, в более широкое, чем \mathcal{H} , пространство \mathcal{H}^+ , I^+ – единичный оператор в \mathcal{H}^+ , P^+ – оператор ортогонального проектирования \mathcal{H}^+ на \mathcal{H} .

Операторная функция R_λ ($\text{Im} \lambda \neq 0$) является обобщенной резольвентой симметрического оператора L тогда и только тогда, когда

$$(R_\lambda f, g)_\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \quad f, g \in \mathcal{H},$$

где F_μ – обобщенная спектральная функция оператора L . Это означает, что операторная функция F_μ , $\mu \in \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами [14]:

- 1⁰. При $\mu_2 > \mu_1$ разность $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ является ограниченным неотрицательным оператором;
- 2⁰. $F_{\mu+} = F_\mu$ при всех вещественных μ ;
- 3⁰. При любом $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \|F_\mu x\|_\mathcal{H} = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|F_\mu x - x\|_\mathcal{H} = 0.$$

Параметрическое внутреннее описание всех обобщенных резольвент оператора L_{\min} дает

Теорема 6. Имеется взаимно однозначное соответствие между обобщенными резольвентами оператора L_{\min} и краевыми задачами

$$l[y] = \lambda y + h, \\ (K(\lambda) - I) \Gamma_1 y + i(K(\lambda) + I) \Gamma_2 y = 0,$$

где λ — комплексное число, $\operatorname{Im}\lambda < 0$, $h(x) \in L_2$, а параметр $K(\lambda)$ — регулярная в нижней полуплоскости операторная функция в пространстве \mathbb{C}^m такая, что $\|K(\lambda)\| \leq 1$. Оно задается равенством

$$R_\lambda h = y, \operatorname{Im}\lambda < 0.$$

Доказательство. В силу Основной леммы утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 работы [15].

1. Zettl A. Sturm–Liouville Theory. — Providence: American Mathematical Society, 2005. — 328 p.
2. Савчук А.М., Шкалик А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. — 1999. — **66**, № 6. — С. 897–912.
3. Albeverio S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. — New York: Springer-Verlag, 1988. — 452 p.
4. Gorimov A.S., Mikhailets V.A. Regularization of singular Sturm–Liouville equations // Methods Funct. Anal. Topology. — 2010. — № 2. — С. 120–130.
5. Шун Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Мат. сборник. — 1943. — **13(55)**, №1. — С. 39–70.
6. Everitt W.N., Markus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators. — Providence: American Mathematical Society, 1999. — 187 p.
7. Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. — 1975. — **5**, № 3. — P. 453–474.
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
9. Михайлец В.А., Рева Н.В. Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. — 2008. — № 9. — С. 23–27.
10. Михайлец В.А., Рева Н.В. Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Зб. праць Ін-ту математики. — 2008. — **5**, № 1. — С. 227–239.
11. Левин А.Ю. Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. — 1967. — **176**, № 4. — С. 774–777.
12. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — К.: Наук. думка, 1984. — 284 с.
13. Phillips R.S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — **90**. — P. 193–254.
14. Ахизер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
15. Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сборник. — 1976. — **100(142)**, № 2(6). — С. 210–216.