НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ГОРЮНОВ АНДРІЙ СЕРГІЙОВИЧ

УДК 517.984.5

ОДНОВИМІРНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В КОЕФІЦІЄНТАХ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2010

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
МИХАЙЛЕЦЬ Володимир Андрійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
СТОРОЖ Олег Георгійович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного і функціонального аналізу;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
КОНСТАНТІНОВ Олексій Юрійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри математичного аналізу.

Захист дисертації відбудеться "__"_________ 2011 р. о __ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "__"_________2010 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Роботу присвячено розвитку теорії квазідиференціальних операторів і її застосуванням до деяких класів диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах, а саме, операторів Штурма–Ліувілля та двочленних операторів довільного порядку.

В класичній теорії Штурма–Ліувілля коефіцієнти диференціального виразу вважаються неперервними функціями. Її основні положення залишаються в силі за умови інтегровності коефіцієнтів за Лебегом. Проте ці умови не охоплюють деякі важливі математичні моделі, які з'явились у фізиці в минулому сторіччі. У роботах фізиків було поставлено задачі, пов'язані з вивченням операторів, породжених виразом Шрьодінгера з кулонівським потенціалом, потенціалом, що є дельта-функцією або довільною мірою Радона. Отримані тут результати систематизовані і підсумовані в монографіях Альбеверіо та ін. [1, 2] та відображені в їх бібліографії, що містить кілька сот робіт.

Подальший істотний розвиток цього напрямку в одновимірному випадку пов'язано з роботами Савчука і Шкалікова [3, 4].

На скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ ними було розглянуто вираз Шрьодінгера

$$l(y) = -y''(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}, \tag{1}$$

за умови

$$q = Q', \quad Q \in L_2\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right),$$

де похідна функції Q розуміється в сенсі узагальнених функцій.

Використовуючи знайдену ними нетривіальну регуляризацію формального диференціального виразу (1) за допомогою квазіпохідних, вони визначили відповідні оператори як *квазі*диференціальні. Це дозволило їм, зокрема, дати опис самоспряжених розширень мінімального си-

[1] Solvable models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Höegh-Krohn, H. Holden. – Providence, RI : AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p.

[2] Albeverio S. Singular perturbations of differential operators / S. Albeverio, P. Kurasov. – Cambridge : Cambridge University Press, 2000. – 429 p. – (London Mathematical Society Lecture Note Series; 271.)

[3] Савчук А. М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Матем. Заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 897–912.

[4] Савчук А. М. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Труды Моск. мат. об-ва. – 2003. – Т. 64. – С. 159–212.

метричного оператора в рамках підходу Глазмана–Крейна–Наймарка та отримати достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації введених ними операторів операторами того ж класу, зокрема, диференціальними.

Представляє інтерес подальший розвиток цього плідного підходу і розповсюдження його на інші важливі класи диференціальних виразів, зокрема, такі, як повні вирази Штурма–Ліувілля та двочленні диференціальні вирази високого порядку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідної теми "Методи нелінійного аналізу та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь і задач математичної фізики". Номер державної реєстрації 0106U000513.

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є розвиток сучасної теорії квазідиференціальних операторів, побудова регуляризації за допомогою спеціальним чином підібраних квазіпохідних деяких класів диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах та розвиток на цій основі теорії таких операторів.

Об'єктом дослідження є загальні квазідиференціальні оператори довільного порядку, оператори Штурма–Ліувілля та двочленні диференціальні оператори високого порядку з узагальненими функціями в коефіцієнтах.

Предметом дослідження є неперервна залежність розглянутих операторів від параметра, опис самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних крайових задач, а також узагальнених резольвент симетричного мінімального оператора на основі концепції просторів граничних значень.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії операторів, функціонального аналізу та теорії диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

1. Знайдено достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації загальних квазідиференціальних операторів довільного порядку операторами того ж класу, зокрема, диференціальними.

2. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень, а також узагальнених резольвент мінімального квазідиференціального оператора в симетричному випадку.

3. Знайдено регуляризацію повного виразу Штурма–Ліувілля з сингулярними комплексними коефіцієнтами за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла.

4. Отримано достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації регуляризованих операторів звичайними диференціальними.

5. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень мінімального симетричного оператора Штурма–Ліувілля та його узагальнених резольвент.

6. Знайдено регуляризацію двочленного диференціального виразу високого порядку з сингулярним комплексним потенціалом за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла і достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації регуляризованих операторів.

7. Встановлено параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального двочленного диференціального оператора та його узагальнених резольвент.

Результати пп. 4, 5 є новими і для диференціального виразу (1).

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах, зокрема, при з'ясуванні їх спектральних властивостей.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження і постановка задач належать науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Ключові результати дисертації отримано спільно з ним. Інші результати роботи отримано автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

– семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники семінару – академік НАН України Ю. М. Березанський, член-кореспондент НАН України М. Л. Горбачук, член-кореспондент НАН України Ю. С. Самойленко);

– Дванадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2008 року.

– Міжнародній науковій конференції „Современные проблемы математики, механики и их приложений", Москва, МГУ, 30 березня – 2 квітня 2009 року;

– Міжнародній науковій конференції „Analytic methods of mechanics and complex analysis", Київ, 29 червня – 5 липня 2009 року;

– Українському математичному конгресі - 2009 (до 100-річчя від дня народження М. Боголюбова), Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 року;

– Тринадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 13-15 травня 2010 року;

– Міжнародній конференції „Mathematics and life sciences: possibilities, interlacements and limits", Київ, 5-8 серпня 2010 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в дванадцяти наукових працях, з яких п'ять є статтями у виданнях, що належать до переліку ВАК'у фахових наукових видань [1–5], а сім опубліковано в матеріалах шести міжнародних наукових конференцій [6–12].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 86 найменувань. Повний обсяг роботи складає 130 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи та наукову новизну одержаних результатів.

У *першому* розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури за її темою.

У *другому* розділі дисертації вивчається питання резольвентної апроксимації загальних квазідиференціальних операторів.

Квазідиференціальні оператори вперше було введено в роботах Д. Шина[5]. Потім ці результати були доопрацьовані в роботі А. Цеттла[6] та в монографії Еверітта і Маркуса[7] (див. також цитовані там роботи).

В підрозділі 2.1 наведено означення квазіпохідних Шина–Цеттла, введено квазідиференціальні оператори довільного порядку і сформульовано теорему про умови симетричності мінімального оператора.

[5]Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве / Д. Шин // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13(55), № 1. – С. 39–70.

[6]Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators / A. Zettl //Rocky Mountain J. Math. – 1975. – V. 5, № 3. – P. 453–474.

[7]Everitt W. N. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators / W. N. Everitt, L. Markus. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. – 187 p.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і на скінченному інтервалі $\mathcal{J} := (a, b)$ задано квадратну матрицю A комплекснозначних функцій $(a_{k,s})$ розміру $m \times m$ таку, що

$$\begin{array}{l} 1)\ a_{k,s} = 0 \text{ майже скрізь на } \mathcal{J},\ s > k+1; \\ 2)\ a_{k,s} \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}),\ a_{k,k+1} \neq 0 \text{ майже скрізь на } \mathcal{J}, \\ \quad k = 1, 2, ..., m,\ s = 1, 2, ..., k+1. \end{array} \tag{2}$$

Така матриця-функція називається матрицею Шина–Цеттла і визначає квазіпохідні функції $y(x) \in \mathrm{Dom}(A)$ порядків $k \leq m$:

$$D^{[0]}y := y,$$

$$D^{[k]}y := a_{k,k+1}^{-1}(t)\left((D^{[k-1]}y)' - \sum_{s=1}^{k} a_{k,s}(t) D^{[s-1]}y\right),\ k = 1, 2, ..., m-1,$$

$$D^{[m]}y := \left((D^{[m-1]}y)' - \sum_{s=1}^{m} a_{m,s}(t) D^{[s-1]}y\right).$$

Область визначення квазіпохідних $\mathrm{Dom}(A)$ є частиною множини $AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C})$, а саме:

$$\mathrm{Dom}(A) := \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Звідси випливає, що $D^{[m]}y \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C})$.

Квазідиференціальний вираз $l(y)$ порядку m визначається як

$$l(y) := i^m D^{[m]}y. \tag{3}$$

Цей вираз породжує в гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ з нормою $\|\cdot\|_2$ *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_{\max} : y \to l(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}(A) \,\middle|\, D^{[m]}y \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C}) \right\}.$$

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора $L_{\max}$ на множину

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0,\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Такий квазідиференціальний оператор є широким і змістовним узагальненням диференціального, що залежить лише від $m+1$ функціональних коефіцієнтів, в той час, як квазідиференціальний – від $\frac{1}{2}(m^2+m)+m-1$ коефіцієнтів виразу. Якщо ж коефіцієнти $a_{k,s}$ є достатньо гладкими, то квазідиференціальні оператори вироджуються в диференціальні.

Визначимо поряд з виразом (3) формально спряжений до $l(y)$ вираз $l^+(y)$. Формально спряжена (спряжена за Лагранжем) до A матриця-функція A^+ визначається за формулою

$$A^+ := -\Lambda_m^{-1}\overline{A^T}\Lambda_m,$$

де $\overline{A^T}$ — комплексно спряжена до транспонованої матриці A,

$$\Lambda_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $\Lambda_m^{-1} = (-1)^{m-1}\Lambda_m$.

Тому можна визначити відповідні квазіпохідні Шина–Цеттла, що позначаються $D^{\{0\}}y, D^{\{1\}}y, ..., D^{\{m\}}y$, з областю визначення

$$\mathrm{Dom}(A^+) := \left\{ y \,\middle|\, D^{\{k\}}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Відповідно, сам спряжений вираз визначається як $l^+(y) := i^m D^{\{m\}}y$.

Позначимо через $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ породжені ним максимальний і мінімальний оператори в просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$. В роботі Цеттла[6] доведено, що оператори $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ щільно задані і замкнені в просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$, $\quad L^*_{\min} = L^+_{\max}, \quad L^*_{\max} = L^+_{\min}$.

В підрозділі 2.3 досліджується питання резольвентої апроксимації квазідиференціальних операторів операторами того ж класу, зокрема, диференціальними з гладкими коефіцієнтами.

Розглянемо на скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ сім'ю матриць-функцій $A(\cdot;\varepsilon) := (a_{ij}(\cdot;\varepsilon))$, що задовольняють умови (2). Відповідні їм квазіпохідні будемо позначати через $D_\varepsilon^{[0]}y, D_\varepsilon^{[1]}y, ..., D_\varepsilon^{[m]}y$. Вони породжують сім'ю квазідиференціальних виразів $l_\varepsilon(y)$ вигляду (3).

В гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ такі вирази при кожному ε породжують оператори $L^{\varepsilon}_{\min}$, $L^{\varepsilon}_{\max}$. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) := \{D^{[0]}_{\varepsilon}y(a), D^{[1]}_{\varepsilon}y(a), \ldots, D^{[m-1]}_{\varepsilon}y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) := \{D^{[0]}_{\varepsilon}y(b), D^{[1]}_{\varepsilon}y(b), \ldots, D^{[m-1]}_{\varepsilon}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Задамо для кожного фіксованого значення ε оператори

$$L_{\varepsilon}y = l_{\varepsilon}(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\varepsilon}) = \{\, y \in \mathrm{Dom}\,(L^{\varepsilon}_{\max}) |\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) = 0 \}\,.$$

Очевидно, що

$$L^{\varepsilon}_{\min} \subset L_{\varepsilon} \subset L^{\varepsilon}_{\max}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Будемо позначати через $\rho(L)$ резольвентну множину оператора L та позначимо $R(\cdot;\varepsilon) := A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)$.

Теорема 2.5. *Нехай резольвентна множина граничного квазідиференціального оператора $\rho(L_0)$ непорожня і при $\varepsilon \to 0+$ виконані умови:*
1) *Задовольняється одна з чотирьох (нееквівалентних між собою) умов:*
(α) $\|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$;
(β) $\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon)\|_1 \to 0$;
(γ) $\|R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0$;
(Δ) $\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0$;
2) $\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_C \to 0$;
3) $\alpha(\varepsilon) \longrightarrow \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \longrightarrow \beta(0)$,
де $\|\cdot\|_C$ – норма в просторі $C(\mathcal{J}, \mathbb{C})$.
Тоді оператори L_{ε} збігаються до оператора L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Доведення теореми 2.5 грунтується на глибоких результатах робіт А. Ю. Левіна[8,9] і В. А. Михайлеця та Н. В. Реви[10].

Третій розділ присвячено дослідженню випадку формально самоспряжених квазідиференціальних виразів.

В цьому розділі ми припускаємо, що матриця Шина–Цеттла формально самоспряжена, тобто $A = A^{+}$. Тоді, очевидно, відповідний квазідиференціальний вираз є формально самоспряженим, тобто

$$l(y) = l^{+}(y).$$

В роботі Цеттла[6] доведено, що оператор $L_{\min} = L^{+}_{\min}$ є симетричним в просторі $L_2(\mathcal{J};\mathbb{C})$ з індексом дефекта (m,m) і $L^{*}_{\min} = L_{\max}$, $L^{*}_{\max} = L_{\min}$.

Отже, змістовним є питання про опис всіх його самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень.

Для параметризації цих розширень будемо використовувати теорію просторів граничних значень.

Теорема 3.3. *Нехай $m = 2n, n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\Gamma_{[1]}$, $\Gamma_{[2]}$ лінійні відображення з $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ в $\mathbb{C}^{2n}$ такі, що*

$$\Gamma_{[1]}y := i^{2n}\begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ \dots, \\ (-1)^{n}D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ \dots, \\ (-1)^{n-1}D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{[2]}y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ \dots, \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ \dots, \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix}$$

Тоді трійка $(\mathbb{C}^{2n}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ є простором граничних значень симетричного оператора $L_{\min}$.

[8] Левин А. Ю. Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 774–777.

[9] Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. – 1973. – Вып. 5. – С. 105–132.

[10] Михайлец В. А. Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

Теорема 3.4. *Нехай $m = 2n+1, n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]}$ лінійні відображення з $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ в $\mathbb{C}^{2n+1}$ такі, що*

$$\Gamma_{[1]}y := i^{2n+1}\begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ ...., \\ (-1)^{n-1}D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b)+ \\ \quad +\beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix}, \Gamma_{[2]}y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b)+ \\ \quad +\delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

де числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i$.

Тоді трійка $(\mathbb{C}^{2n+1}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ є простором граничних значень симетричного оператора $L_{\min}$.

За допомогою знайдених нами просторів граничних значень можна, зокрема, дати опис самоспряжених розширень мінімального квазідиференціального оператора.

Теорема 3.6. *Для будь-якого унітарного оператора K в просторі $\mathbb{C}^m$ звуження L_K оператора $L_{\max}$ на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_{[1]}y + i\,(K + I)\,\Gamma_{[2]}y = 0, \tag{4}$$

є самоспряженим розширенням оператора $L_{\min}$. Навпаки, для будь-якого самоспряженого розширення $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ існує унітарний оператор K в просторі $\mathbb{C}^m$ такий, що $\widetilde{L} = L_K$. Відповідність між унітарними операторами $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ є бієктивною.

З урахуванням теореми 2.4 ця параметризація є не лише бієктивною, але також і неперервною.

Теорема 3.7. *Самоспряжені розширення L_{K_j} оператора $L_{\min}$ збігаються до самоспряженого розширення L_K в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\|\left(L_K - \lambda\right)^{-1} - \left(L_{K_j} - \lambda\right)^{-1}\right\| \to 0,\ j \to \infty,\ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні унітарні оператори K_j збігаються за нормою до оператора K. Тому відображення

$$K \to \left(L_K - \lambda\right)^{-1},\ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0,$$

є при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ гомеоморфізмом.

Для операторів парного порядку в роботі описано самоспряжені розширення оператора $L_{\min}$, задані *розділеними* крайовими умовами.

Теорема 3.8. *У випадку $m = 2n$ крайові умови* (4)*, що визначають самоспряжені розширення L_K оператора $L_{\min}$ є розділеними тоді і тільки тоді, коли унітарна матриця K має блочно-діагональний вигляд*

$$K = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix},$$

де $K_a, K_b \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Аналогічні результати отримано для максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень (теореми 3.9 – 3.19).

Параметричний опис всіх узагальнених резольвент оператора $L_{\min}$ дає така теорема.

Теорема 3.20. 1) *Кожна узагальнена резольвента R_λ оператора $L_{\min}$ в півплощині $\operatorname{Im}\lambda < 0$ задається формулою $R_\lambda h = y$, де y — розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]}f + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]}f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ і $K(\lambda)$ — регулярна в нижній півплощині операторна функція в просторі $\mathbb{C}^m$ така, що $||K(\lambda)|| \le 1$.

2) *У півплощині $\operatorname{Im}\lambda > 0$ кожна узагальнена резольвента оператора $L_{\min}$ задається формулою $R_\lambda h = y$, де y — розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]}f - i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]}f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ і $K(\lambda)$ — регулярна у верхній півплощині операторна функція в просторі $\mathbb{C}^m$ така, що $||K(\lambda)|| \le 1$.

Ця параметризація узагальнених резольвент операторними функціями $K(\lambda)$ є бієктивною.

Четвертий та *п'ятий* розділи містять найбільш істотні, з точки зору можливих застосувань, результати дисертації. Вони стосуються операторів, породжених диференціальними виразами з узагальненими функціями в коефіцієнтах. Основою для цих результатів є результати розділів 2 і 3.

В *четвертому* розділі дисертації вивчаються оператори, породжені виразами Штурма–Ліувілля

$$l(y) = -(py')'(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}, \tag{5}$$

з коефіцієнтами

$$q = Q', \quad 1/p, Q/p, Q^2/p \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}), \tag{6}$$

де похідна розуміється в сенсі узагальнених функцій.

В підрозділі 4.1 наводиться *регуляризація* цих виразів за допомогою некласичних квазіпохідних. Введемо квазіпоходні:

$$D^{[0]}y = y,$$
$$D^{[1]}y = py' - Qy,$$
$$D^{[2]}y = (D^{[1]}y)' + \frac{Q}{p}D^{[1]}y + \frac{Q^2}{p}y.$$

За умов (6) вони є квазіпохідними Шина–Цеттла. Відповідна їм матриця Шина–Цеттла має вигляд

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{Q}{p} & \frac{1}{p} \\ -\frac{Q^2}{p} & -\frac{Q}{p} \end{pmatrix} \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{2\times 2}).$$

Тоді, оскільки коефіцієнти квазіпохідних задовольняють умови (2), вираз (5) можна визначити як квазідиференціальний вираз

$$l[y] := -D^{[2]}y.$$

Згідно з наведеними вище результатами для загального квазідиференціального оператора, вираз $l[y]$ породжує *максимальний* квазідиференціальний оператор $L_{\max}$ та *мінімальний* квазідиференціальний оператор $L_{\min}$ у гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$.

Приклади показують, що в загальному випадку $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ може складатися лише з негладких функцій. Зокрема, можливо, що $Q \in BV(\overline{\mathcal{J}})$ і

$$\forall\ [\alpha, \beta] \subset \mathcal{J} \quad \mathrm{Dom}(L_{\max}) \bigcap C^1([\alpha, \beta]) = \{0\}, x \in [\alpha, \beta].$$

Якщо ж коефіцієнти в (5) задовольняють умови

$$q, 1/p \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}),$$

то введені оператори $L_{\max}, L_{\min}$ співпадають з класичними операторами Штурма–Ліувілля. Якщо $p(\cdot) \equiv 1$ і $q \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$, то

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = W_2^2(\mathcal{J}, \mathbb{C}) \subset C^1(\mathcal{J}, \mathbb{C}).$$

Розглянемо вираз $l^{+}(y) = -(\overline{p}y')'(t) + \overline{q}(t)y(t)$, де риска над символом позначає комплексне спряження. Легко перевірити, що він є формально спряженим до (5). Позначимо через $L^{+}_{\max}$ і $L^{+}_{\min}$ відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені $l^{+}(y)$ у просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$.

Теорема 4.1. *Оператори* $L_{\min}$, $L^{+}_{\min}$, $L_{\max}$, $L^{+}_{\max}$ *замкнені і щільно задані в просторі* $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$,

$$L^{*}_{\min} = L^{+}_{\max}, \quad L^{*}_{\max} = L^{+}_{\min}.$$

У випадку, коли p *і* Q *є дійсними функціями, оператор* $L_{\min} = L^{+}_{\min}$ *є симетричним з індексом дефекта* $(2, 2)$, *і*

$$L^{*}_{\min} = L_{\max}, \quad L^{*}_{\max} = L_{\min}.$$

Підрозділ 4.2 присвячено дослідженню важливого питання резольвентної апроксимації введених нами операторів Штурма–Ліувілля.

Розглянемо сім'ю виразів $l_{\varepsilon}(y)$ вигляду (5) з коефіцієнтами

$$p_{\varepsilon}, q_{\varepsilon} = Q'_{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

що задовольняють умови (6).

За ними побудуємо матриці Шина–Цеттла

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} Q_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} & 1/p_{\varepsilon} \\ -Q^2_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} & -Q_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} \end{pmatrix} \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{2\times 2}) \tag{7}$$

та квазіпохідні $D^{[0]}_{\varepsilon}y, D^{[1]}_{\varepsilon}y, D^{[2]}_{\varepsilon}y$. За допомогою наведеної вище регуляризації визначимо квазідиференціальні вирази $l_{\varepsilon}[y] := -D^{[2]}_{\varepsilon}y$.

В гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ ці вирази породжують оператори $L^{\varepsilon}_{\min}$, $L^{\varepsilon}_{\max}$ для кожного ε. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) := \left\{ y(a), D^{[1]}_{\varepsilon}y(a) \right\}, \quad \mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) := \left\{ y(b), D^{[1]}_{\varepsilon}y(b) \right\} \in \mathbb{C}^2.$$

Як і в загальному випадку, для кожного фіксованого значення ε визначаються оператори

$$L_{\varepsilon}y = l_{\varepsilon}[y], \quad \mathrm{Dom}(L_{\varepsilon}) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}\,(L^{\varepsilon}_{\max}) \,|\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) = 0 \right\}.$$

Очевидно, що $L^{\varepsilon}_{\min} \subset L_{\varepsilon} \subset L^{\varepsilon}_{\max}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Теорема 4.3. *Нехай резольвентна множина* $\rho(L_0)$ *непорожня і для* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

(1) $\|1/p_\varepsilon\|_1 = O(1)$, $\|Q_\varepsilon/p_\varepsilon\|_1 = O(1)$, $\|Q_\varepsilon^2/p_\varepsilon\|_1 = O(1)$;

(2) $\|\int\limits_a^t (1/p_\varepsilon - 1/p_0)ds\|_C \to 0$;

(3) $\|\int\limits_a^t (Q_\varepsilon/p_\varepsilon - Q_0/p_0)ds\|_C \to 0$;

(4) $\|\int\limits_a^t (Q_\varepsilon^2/p_\varepsilon - Q_0^2/p_0)ds\|_C \to 0$;

(5) $\alpha(\varepsilon) \to \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \to \beta(0)$.

Тоді оператори L_ε *збігаються до оператора* L_0 *в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Твердження теореми 4.3 є новим і для випадку $p(\cdot) \equiv 1$. Воно істотно покращує результат роботи[3].

В підрозділі 4.3 окремо розглядається випадок, коли функції p, Q і, відповідно, $q = Q'$ є дійсними. В цьому випадку вираз $l[y]$ є формально самоспряженим, а мінімальний оператор $L_{\min}$ є симетричним.

Тому можна застосувати до нього наші попередні результати для загальних симетричних квазідиференціальних операторів. Зокрема, трійка $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де Γ_1, Γ_2 — лінійні відображення з $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ у $\mathbb{C}^2$ такі, що

$$\Gamma_1 y := \left(D^{[1]}y(a), -D^{[1]}y(b)\right), \ \Gamma_2 y := (y(a), y(b)), \tag{8}$$

є простором граничних значень для оператора $L_{\min}$ Штурма–Ліувілля з узагальненими функціями в коефіцієнтах.

В роботі отримано бієктивні і неперервні параметризації його самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень та бієктивну параметризацію узагальнених резольвент, аналогічні наведеним в теоремах 3.6–3.20 з Γ_1, Γ_2, що задані формулами (8). Вони є новими і для випадку $p(\cdot) \equiv 1$.

В *п'ятому* розділі дисертації досліджуються оператори, породжені на скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ формальним диференціальним виразом

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}, \quad m \geq 3, \tag{9}$$

де q — комплекснозначна функція, що задовольняє умову

$$q = Q', \quad Q \in L_1(\mathcal{J};\mathbb{C}). \tag{10}$$

Через сингулярність коефіцієнта такі вирази не можуть бути визначені традиційним чином. В роботі запропоновано регуляризацію виразу $l(y)$ за допомогою квазіпохідних. Вона наведена в підрозділі 5.1.

Введемо послідовно квазіпохідні:

$$\begin{aligned}
&D^{[k]}y(t) := y^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, m-2},\\
&D^{[m-1]}y(t) := y^{(m-1)}(t) + i^{-m}Q(t)y(t),\\
&D^{[m]}y(t) := (D^{[m-1]}y(t))' - i^{-m}Q(t)D^{[1]}y(t).
\end{aligned}$$

За умов (10) вони є квазіпохідними Шина–Цеттла.

Тому вираз (9) можна визначити як квазідиференціальний вираз

$$l[y] := i^m D^{[m]}y.$$

Як і в загальному випадку, квазідиференціальний вираз $l[y]$ породжує *максимальний* квазідиференціальний оператор $L_{\max}$ та *мінімальний* квазідиференціальний оператор $L_{\min}$ в гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J},\mathbb{C})$.

Якщо потенціал в (9) задовольняє умову

$$q \in L_1(\mathcal{J},\mathbb{C}),$$

то оператори $L_{\max}, L_{\min}$ співпадають зі звичайними диференціальними операторами.

Розглянемо вираз $l^+(y) = i^m y^{(m)}(t) + \overline{q}(t)y(t)$, де риска над символом позначає комплексне спряження. Легко перевірити, що він є формально спряженим до (9). Позначимо $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені $l^+(y)$ у просторі $L_2(\mathcal{J},\mathbb{C})$.

Теорема 5.1. *Оператори $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ замкнені і щільно задані в просторі $L_2(\mathcal{J},\mathbb{C})$,*

$$L^*_{\min} = L^+_{\max}, \quad L^*_{\max} = L^+_{\min}.$$

У випадку, коли q є дійсною функцією, оператор $L_{\min} = L^+_{\min}$ є симетричним з індексом дефекта (m,m), і

$$L^*_{\min} = L_{\max}, \quad L^*_{\max} = L_{\min}.$$

Підрозділ 5.2 присвячено дослідженню резольвентної апроксимації введених нами операторів.

Розглянемо сім'ю виразів $l_\varepsilon(y)$ вигляду (9) з коефіцієнтами

$$q_\varepsilon = Q'_\varepsilon \in L_1\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

За ними побудуємо матриці Шина–Цеттла

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{m\times m}) \tag{11}$$

та відповідні їм квазіпохідні $D_\varepsilon^{[0]}y, D_\varepsilon^{[1]}y, ..., D_\varepsilon^{[m]}y$. За допомогою вищенаведеної регуляризації визначимо вирази $l_\varepsilon(y)$ як квазідиференціальні $l_\varepsilon[y] := i^m D_\varepsilon^{[m]}y$.

В гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ ці вирази породжують оператори $L_{\min}^\varepsilon$, $L_{\max}^\varepsilon$ для кожного ε. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a), \dots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b), \dots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Як і в загальному випадку, для кожного фіксованого значення ε визначаються оператори

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon[y], \quad \mathrm{Dom}(L_\varepsilon) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}\left(L_{\max}^\varepsilon\right) \middle| \, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0 \right\}.$$

Очевидно, що $L_{\min}^\varepsilon \subset L_\varepsilon \subset L_{\max}^\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Теорема 5.2. *Нехай резольвентна множина $\rho(L_0)$ непорожня і для $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:*

$$1) \; \| \int_a^t (Q_\varepsilon(s) - Q_0(s))ds \|_C \to 0;$$

$$2) \; \alpha(\varepsilon) \to \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \to \beta(0).$$

Тоді оператори L_ε збігаються до оператора L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Умова $\|Q_\varepsilon - Q_0\|_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0+$, очевидно, достатня для виконання умови 1).

В підрозділі 5.3 розглядається випадок, коли функції Q і, відповідно, $q = Q'$ є дійсними. В цьому випадку вираз $l[y]$ є формально самоспряженим, і, відповідно, мінімальний оператор $L_{\min}$ є симетричним.

Нехай Γ_1, Γ_2 *— лінійні відображення з* $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ *в* $\mathbb{C}^m$ *такі, що: при* $m = 2n,\ n \geq 2$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ ..., \\ (-1)^{n-1}D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

а при $m = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ ...., \\ (-1)^{n-1}D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b)+ \\ +\beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix}, \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b)+ \\ +\delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

де числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i.$

Тоді трійка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *є простором граничних значень для оператора* $L_{\min}$.

В роботі отримано бієктивні і неперервні параметризації самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень та бієктивну параметризацію узагальнених резольвент оператора $L_{\min}$, аналогічні наведеним в теоремах 3.6–3.20 з Γ_1, Γ_2, що задані формулами (12), (13).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Отримано достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації квазідиференціальних операторів довільного порядку. У симет-

ричному випадку дано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального квазідиференціального оператора та його узагальнених резольвент.

2. Знайдено регуляризацію повного виразу Штурма–Ліувілля з сингулярними комплексними коефіцієнтами за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла і достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації породжених ним операторів.

3. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального оператора Штурма–Ліувілля та його узагальнених резольвент.

4. Знайдено регуляризацію двочленного диференціального виразу високого порядку з сингулярним комплексним потенціалом за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла і достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації породжених ним операторів.

5. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального двочленного диференціального оператора та його узагальнених резольвент.

Список опублікованих праць за темою дисертації

[1] Горюнов А. С. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Доповіді НАН України. — 2009. — № 4. — С. 19–24.

[2] Горюнов А. С. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Доповіді НАН України. — 2009. — № 9. — С. 27–31.

[3] Горюнов А. С. Резольвентная сходимость операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Математические заметки. — 2010 — Т. 87, № 2. — С. 311–315.

[4] Goriunov A. S. Regularization of singular Sturm–Liouville equations / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2010. — V. 16, № 2. — P. 120—130.

[5] Горюнов А. С. Регуляризация двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 1. — С. 49–67.

[6] Горюнов А. С. Крайові задачі для двочленного диференціального рівняння з сингулярним коефіцієнтом / А. С. Горюнов // Дванадцята міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука, 15–17 травня, 2008 р., Київ: Матеріали конф. — К.: Національний технічний університет України „КПІ", 2008. — С. 104.

[7] Горюнов А. С. Диссипативные краевые задачи для квазидифференциальных уравнений / А. С. Горюнов // „Современные проблемы математики, механики и их приложений": тезисы докл. — Москва, 2009. — С. 22-23.

[8] Goriunov A. S. On resolvent convergence of the Sturm–Liouville operators with singular potentials / A. S. Goriunov // Міжнародна конференція „Аналітичні методи механіки та комплексного аналізу": тези доповідей. — Київ, 2009. — С. 19–20.

[9] Горюнов А. С. Про збіжність операторів Штурма–Ліувілля з сингулярними потенціалами / А. С. Горюнов // „Український Математичний Конгрес – 2009". — Київ, 2009. — Режим доступу до тез доповідей:
http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Goriunov.pdf

[10] Goriunov A. S. Formally self-adjoint quasi-differential operators / A. S. Goriunov // „Український Математичний Конгрес – 2009". — Київ, 2009. — Режим доступу до тез доповідей:
http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Goriunov1.pdf

[11] Goriunov A. S. On regularization of singular Sturm–Liouville equations / A. S. Goriunov // Тринадцята міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука, 13–15 травня, 2010 р., Київ: Матеріали конф. — К.: Національний технічний університет України „КПІ", 2010. — С. 17.

[12] Goriunov A. S. On One-dimensional Differential Operators with Distribution Coefficients / A. S. Goriunov // Humboldt Kolleg "Mathematics and life sciences : Possibilities, interlacements and limits": Book of Abstracts. — Kiev, 2010. — С. 34–35.

АНОТАЦІЇ

Горюнов А. С. Одновимірні диференціальні оператори з узагальненими функціями в коефіцієнтах. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. Інститут математики НАН України, Київ, 2010.

В дисертаційній роботі розроблено теорію загальних квазідиференціальних операторів і дано її застосування до деяких класів диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах, а саме, операторів Штурма–Ліувілля та двочленних операторів довільного високого порядку.

Отримано достатні умови резольвентної апроксимації квазідиференціальних операторів та параметричний бієктивний опис всіх самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень і узагальнених резольвент таких операторів в термінах просторів граничних значень.

За допомогою регуляризації квазіпохідними диференціальні оператори з узагальненими функціями в коефіцієнтах коректно визначені як квазідиференціальні.

На основі цих результатів отримано достатні умови резольвентної апроксимації диференціальних операторів Штурма–Ліувілля та двочленних операторів порядку $m \geq 3$, зокрема, операторами з гладкими коефіцієнтами та параметричний бієктивний опис всіх самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень і узагальнених резольвент таких операторів в термінах просторів граничних значень.

Ключові слова: квазідиференціальний оператор, оператор Штурма–Ліувілля, сингулярний коефіцієнт, резольвентна апроксимація, самоспряжене розширення, узагальнена резольвента.

Горюнов А. С. Одномерные дифференциальные операторы с обобщенными функциями в коэффициентах. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 2010.

В диссертации дано систематическое исследование общих квазидифференциальных операторов и их применения к некоторым классам дифференциальных операторов с обобщенными функциями в коэффициентах, а именно, операторов Штурма–Лиувилля и двучленных операторов произвольного высокого порядка.

Диссертационная работа состоит из вступления, пяти глав, выводов и библиографии.

В первой главе дан обзор литературы по теме диссертации.

Второй и третий разделы работы посвящены исследованию общих квазидифференциальных операторов. Получены достаточные условия резольвентной аппроксимации, а также параметрическое биективное описание всех самосопряженных, максимальных диссипативных и максимальных аккумулятивных расширений и обобщенных резольвент таких операторов в терминах пространств граничных значений.

Четвертый и пятый разделы содержат наиболее важные, с точки зрения приложений, результаты диссертации, посвященные операторам, порожденным дифференциальными выражениями с обобщенными функ-

циями в коэффициентах.

При помощи регуляризации квазипроизводными дифференциальные операторы с обобщенными функциями в коэффициентах корректно определены как квазидифференциальные.

На основе этих результатов получены достаточные условия резольвентной аппроксимации дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля и двучленных операторов порядка $m \geq 3$, в частности, операторами с гладкими коэффициентами, а также параметрическое биективное описание всех самосопряженных, максимальных диссипативных и максимальных аккумулятивных расширений и обобщенных резольвент таких операторов в терминах пространств граничных значений.

Ключевые слова: квазидифференциальный оператор, оператор Штурма–Лиувилля, сингулярный коэффициент, резольвентная аппроксимация, самосопряженное расширение, обобщенная резольвента.

Goriunov A. S. One-dimensional differential operators with distribution coefficients. — Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.01 — mathematical analysis. Institute of mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2010.

Quasi-differential operators theory and its application to some classes of differential operators with distributional coefficients, namely Sturm–Liouville operators and binomial operators of the higher order are investigated in the thesis.

Sufficient conditions for the uniform resolvent approximation of quasi-differential operators are established. The parametrical bijective continuous parametrization of all self-adjoint, maximal dissipative and maximal accumulative extensions and generalised resolvents of these operators is found.

Due to regularization by means of Shin–Zettl quasi-derivatives differential operators with distributional coefficients are defined as quasi-differential.

On the basis of results obtained sufficient conditions for the uniform resolvent approximation of Sturm–Liouville operators and differential binomial operators of the higher order with distributional coefficients are established. The parametrical bijective continuous parametrization of all self-adjoint, maximal dissipative and maximal accumulative extensions and generalised resolvents of these operators is found.

Key words: quasi-differential operator, Sturm–Liouville operator, singular coefficient, resolvent approximation, generalized resolvent.

Підписано до друку 20.12.2010. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Ум. друк. арк. 1,4.
Тираж 130 пр. Зам. 140.

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.