НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГОРЮНОВ АНДРІЙ СЕРГІЙОВИЧ

УДК 517.984.5

ОДНОВИМІРНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В КОЕФІЦІЄНТАХ

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук,
професор
Михайлець Володимир Андрійович

Київ 2010

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

1. $\overline{\lambda}$ — комплексне число, спряжене до комплексного числа λ.
2. $\operatorname{Im}\lambda$ – уявна частина комплексного числа λ.
3. $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел.
4. $\mathbb{C}^m$ — m-вимірний комплексний простір векторів $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ з нормою
$$\|y\| := |y| = \max_i |y_i|.$$
5. $\mathbb{C}^{m\times m}$ — простір комплексних $m \times m$ матриць $A = (a_{ik})_{i,k=1}^m$ з нормою
$$\|A\| := |A| = \max_{i,k} |a_{ik}|.$$
6. A^{-1} — матриця, обернена до A.
7. A^T — транспонована матриця A.
8. I_m — одинична $m \times m$ - матриця.
9. $C(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$ — простір всіх комплекснозначних функцій $y(t)$, визначених і неперервних на відрізку $\overline{\mathfrak{J}} := [a, b]$, з нормою
$$\|y\|_C := \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)|.$$
10. $C^m(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$ — простір всіх комплекснозначних m раз неперервно диференційованих на $\overline{\mathfrak{J}}$ функцій з нормою
$$\|y\|_{C^m} := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y^{(k)}(t)|.$$
11. $C(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}^m)$ — простір всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : \overline{\mathfrak{J}} \to \mathbb{C}^m$ з неперервними на відрізку $\overline{\mathfrak{J}}$ елементами.

12. $L_\infty(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, визначених і суттєво обмежених на інтервалі $\mathcal{J} := (a, b)$, з нормою
$$\|y\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|.$$
13. $L_\infty(\mathcal{J}, \mathbb{C}^m)$ і $L_\infty(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : \mathcal{J} \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t) : \mathcal{J} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з суттєво обмеженими на інтервалі $\mathcal{J}$ елементами.
14. $L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, сумовних на інтервалі $\mathcal{J}$, з нормою
$$\|y\|_1 := \int\limits_a^b |y(t)| dt.$$
15. $L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^m)$ і $L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t) : \mathcal{J} \to \mathbb{C}^m$ та матриць - функцій $A(t) : \mathcal{J} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з сумовними на інтервалі $\mathcal{J}$ елементами.
16. $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, сумовних з квадратом на інтервалі $\mathcal{J}$, з нормою
$$\|y\|_2 := \int\limits_a^b |y(t)|^2 dt.$$
17. $AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}) = W_1^1(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C})$ — простір С. Л. Соболєва комплекснозначних абсолютно неперервних на відрізку $\overline{\mathcal{J}}$ функцій з нормою, яка визначається рівністю
$$\|y\|_{1,1} := \|y\|_C + \|y'\|_1.$$
18. $\mathcal{L}[E_1, E_2]$ — простір лінійних неперервних операторів із лінійного нормованого простору E_1 в лінійний нормований простір E_2.

19. $\mathrm{Dom}(L)$ — область визначення необмеженого лінійного оператора L.
20. L^* — оператор, спряжений до щільно заданого оператора L.
21. $B_n \xrightarrow{u} B$ — рівномірна збіжність операторів.
22. $B_n \xrightarrow{s} B$ — сильна збіжність операторів.
23. $B_n \xrightarrow{R} B$ — рівномірна резольвентна збіжність операторів.
24. $D^{[m]}y(t)$ — квазіпохідна m-го порядку функції $y(t)$.
25. $\mathbf{f_c}$ — росток неперервної функції f в точці c.

ВСТУП

Роботу присвячено розвитку теорії квазідиференціальних операторів і її застосуванням до деяких класів диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах, а саме, операторів Штурма–Ліувілля та двочленних операторів довільного порядку.

Актуальність тематики. В класичній теорії Штурма–Ліувілля коефіцієнти диференціального виразу вважаються неперервними функціями. Її основні положення залишаються в силі за умови інтегровності коефіцієнтів за Лебегом. Проте ці умови не охоплюють деякі важливі математичні моделі, які з'явились у фізиці в минулому сторіччі. У роботах фізиків було поставлено задачі, пов'язані з вивченням операторів, породжених виразом Шрьодінгера з кулонівським потенціалом, потенціалом, що є дельта-функцією або довільною мірою Радона. Отримані тут результати систематизовані і підсумовані в монографіях Альбеверіо, Гестезі, Хєег-Крон, Хольдена [1], Альбеверіо і Курасова [2] та відображені в їх бібліографії, що містить кілька сот робіт.

Подальший істотний розвиток цього напрямку в одновимірному випадку пов'язано з роботами Савчука і Шкалікова [77, 78].

На скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ ними було розглянуто вираз Шрьодінгера

$$l(y) = -y''(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}. \tag{1}$$

за умови:

$$q = Q', \quad Q \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C}),$$

де похідна функції Q розуміється в сенсі узагальнених функцій.

Використовуючи знайдену ними нетривіальну регуляризацію формального диференціального виразу (1) за допомогою квазіпохідних, вони визначили відповідні оператори як *квазі*диференціальні. Це дозволило їм, зокрема, дати опис самоспряжених розширень мінімального симетричного оператора в рамках підходу Глазмана–Крейна–Наймарка та отримати достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації введених ними операторів операторами того ж класу, зокрема, диференціальними.

Представляє інтерес подальший розвиток цього плідного підходу і розповсюдження його на інші важливі класи диференціальних виразів, зокрема, такі, як повні вирази Штурма–Ліувілля та двочленні диференціальні вирази високого порядку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідної теми "Методи нелінійного аналізу та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь і задач математичної фізики". Номер державної реєстрації 0106U000513.

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є розвиток сучасної теорії квазідиференціальних операторів, побудова регуляризації за допомогою спеціальним чином підібраних квазіпохідних деяких класів диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах та розвиток на цій основі теорії таких операторів.

Об'єктом дослідження є загальні квазідиференціальні оператори довільного порядку, оператори Штурма–Ліувілля та двочленні диференціальні оператори високого порядку з узагальненими функціями в коефіцієнтах.

Предметом дослідження є неперервна залежність розглянутих операторів від параметра, опис самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних крайових задач, а також узагальнених резольвент симетричного мінімального оператора на основі концепції просторів граничних значень.

Завдання дослідження:

1. Отримати достатні умови рівномірної резольвентної збіжності загальних квазідиференціальних операторів.
2. Дати опис всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень мінімального квазідиференціального оператора та його узагальнених резольвент.
3. Ввести регуляризацію сингулярного виразу Штурма–Ліувілля та сингулярного двочленного диференціального виразу за допомогою квазіпохідних і визначити відповідні оператори як квазідиференціальні.
4. Отримати достатні умови рівномірної резольвентної збіжності введених операторів в термінах коефіцієнтів виразів.
5. Дати опис всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень введених мінімальних операторів та їх узагальнених резольвент.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

1. Знайдено достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації загальних квазідиференціальних операторів довільного

порядку операторами того ж класу, зокрема, диференціальними.

2. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень, а також узагальнених резольвент мінімального квазідиференціального оператора в симетричному випадку.
3. Знайдено регуляризацію повного виразу Штурма–Ліувілля з сингулярними комплексними коефіцієнтами за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла.
4. Отримано достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації регуляризованих операторів звичайними диференціальними.
5. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень мінімального симетричного оператора Штурма–Ліувілля та його узагальнених резольвент.
6. Знайдено регуляризацію двочленного диференціального виразу високого порядку з сингулярним комплексним потенціалом за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла і достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації регуляризованих операторів.
7. Встановлено параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального двочленного диференціального оператора та його узагальнених резольвент.

Результати пп. 4, 5 є новими і для диференціального виразу (1).

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах, зокрема, при з'ясуванні їх спектральних властивостей.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії операторів, функціонального аналізу та теорії диференціальних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження і постановка задач належать науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Ключові результати дисертації отримано спільно з ним. Інші результати роботи отримано автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

– семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники семінару — академік НАН України Ю. М. Березанський, член-кореспондент НАН України М. Л. Горбачук, член-кореспондент НАН України Ю. С. Самойленко);

– Дванадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2008 року.

– Міжнародній науковій конференції „Современные проблемы математики, механики и их приложений”, Москва, МГУ, 30 березня – 2 квітня 2009 року;

– Міжнародній науковій конференції „Analytic methods of mechanics and complex analysis”, Київ, 29 червня – 5 липня 2009 року;

– Українськоиу математичному конгресі - 2009 (до 100-річчя від дня народження М. Боголюбова), Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 року;

– Тринадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 13-15 травня 2010 року;

– Міжнародній конференції „Mathematics and life sciences: possibilities, interlacements and limits“, Київ, 5-8 серпня 2010 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в дванадцяти наукових працях, з яких п'ять є статтями у виданнях, що належать до переліку ВАК'у фахових наукових видань [46], [47], [48], [49], [50], а сім опубліковано в матеріалах шести міжнародних наукових конференцій [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57].

Структура й об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 86 найменувань. Повний обсяг роботи складає 130 сторінок друкованого тексту.

Короткий зміст дисертації

У *вступі* обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи та наукову новизну одержаних результатів.

У *першому* розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури за її темою.

У *другому* розділі дисертації вивчається питання резольвентної апроксимації загальних квазідиференціальних операторів.

Квазідиференціальні оператори вперше було введено в роботах Д. Шина [81, 82, 83, 84, 85]. Потім ці результати були доопрацьовані в роботі А. Цеттла [37] та в монографії В. Еверітта і Л. Маркуса [7] (див. також цитовані там роботи).

В підрозділі 2.1 наведено означення квазіпохідних Шина–Цеттла, введено квазідиференціальні оператори довільного порядку і сформульовано теорему про умови симетричності мінімального оператора.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і на скінченному інтервалі $\mathfrak{J} := (a, b)$ задано квадратну матрицю A комплекснозначних функцій $(a_{k,s})$ розміру $m \times m$ таку, що

$$\begin{aligned} &1)\ a_{k,s} = 0 \text{ майже скрізь на } \mathfrak{J},\ s > k+1;\\ &2)\ a_{k,s} \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}),\ a_{k,k+1} \neq 0 \text{ майже скрізь на } \mathfrak{J},\\ &\quad k = 1, 2, \ldots, m,\ s = 1, 2, \ldots, k+1. \end{aligned} \tag{2}$$

Така матриця-функція називається матрицею Шина–Цеттла і визначає квазіпохідні функції $y(x) \in \mathrm{Dom}(A)$ порядків $k \leq m:$

$$D^{[0]}y := y,$$

$$D^{[k]}y := a^{-1}_{k,k+1}(t)\left((D^{[k-1]}y)' - \sum_{s=1}^{k} a_{k,s}(t) D^{[s-1]}y\right), k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$D^{[m]}y := \left((D^{[m-1]}y)' - \sum_{s=1}^{m} a_{m,s}(t) D^{[s-1]}y\right).$$

Область визначення квазіпохідних $\mathrm{Dom}(A)$ є частиною множини $AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$, а саме:

$$\mathrm{Dom}(A) := \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1}\ \right\}.$$

Звідси випливає, що $D^{[m]}y \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Квазідиференціальний вираз $l(y)$ порядку m визначається як

$$l(y) := i^m D^{[m]}y. \tag{3}$$

Цей вираз породжує в гільбертовому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ з нормою $\| \cdot \|_2$ *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_{\max} : y \to l(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}(A) \,\middle|\, D^{[m]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\}.$$

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора $L_{\max}$ на множину

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0,\, k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Такий квазідиференціальний оператор є широким і змістовним узагальненням диференціального, що залежить лише від $m+1$ функціональних коефіцієнтів, в той час, як квазідиференціальний – від $\frac{1}{2}(m^2 + m) + m - 1$ коефіцієнтів виразу.

Якщо ж коефіцієнти $a_{k,s}$ є достатньо гладкими, то в квазіпохідних можна розкрити дужки, і вони є звичайними диференціальними виразами, і, отже, квазідиференціальні оператори вироджуються в диференціальні. Нижче фактично доведено (теорема 2.4), що множина диференціальних операторів, заданих таким чином, є всюди щільною в множині квазідиференціальних в топології рівномірної резольвентної збіжності.

Визначимо поряд з виразом (3) формально спряжений до $l(y)$ вираз $l^+(y)$. Формально спряжена (спряжена за Лагранжем) до A матриця-функція A^+ визначається за формулою

$$A^+ := -\Lambda_m^{-1} \overline{A^T} \Lambda_m,$$

де $\overline{A^T}$ — комплексно спряжена до транспонованої матриці A,

$$\Lambda_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $\Lambda_m^{-1} = (-1)^{m-1}\Lambda_m$.

Тому можна визначити відповідні квазіпохідні Шина–Цеттла, що позначаються $D^{\{0\}}y, D^{\{1\}}y, ..., D^{\{m\}}y$, з областю визначення

$$\mathrm{Dom}(A^+) := \left\{ y \,\middle|\, D^{\{k\}}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\; k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Відповідно, сам спряжений вираз визначається як

$$l^+(y) := i^m D^{\{m\}}y.$$

Позначимо через $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ породжені ним максимальний і мінімальний оператори в просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Виконується така теорема [37]:

Теорема 2.1. *Оператори* $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ *щільно задані і замкнені в просторі* $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$,

$$L^*_{\min} = L^+_{\max}, \quad L^*_{\max} = L^+_{\min}.$$

Підрозділ 2.2 містить допоміжний результат, що належить В. А. Михайлецю та Н. В. Реві [73, 74] про достатні умови збіжності матриць Гріна загальних крайових задач систем диференціальних рівнянь. Наведено наступне означення.

Означення 2.1 [73, 74]. Позначимо через $\mathcal{M}^n(\mathfrak{J}) =: \mathcal{M}^n$, $n \in \mathbb{N}$ клас всіх параметризованих числом ε матриць-функцій

$$R(\cdot; \varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \to L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{n\times n}),$$

для яких розв'язок задачі Коші

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \quad Z(a;\varepsilon) = I_n$$

(тобто матрицант) задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|Z(\cdot;\varepsilon) - I_n\|_C = 0,$$

де $\|\cdot\|_C$ – sup-норма.

Означення класса $\mathcal{M}^n$ не є конструктивним. Існують різні достатні умови належності матричної функції $R(\cdot;\varepsilon)$ до класу $\mathcal{M}^n$. Зокрема, з результатів робіт А. Ю. Левіна [64, 65] випливає

Лема 2.3. *Нехай* $R(\cdot;\varepsilon) : [0,\varepsilon_0] \to L_1(\mathcal{J},\mathbb{C})^{n\times n}$. *Якщо при* $\varepsilon \to 0+$ *виконується одна з чотирьох (нееквівалентних між собою) умов:*

$$(\alpha) \quad \|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1),$$

$$(\beta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon)\|_1 \to 0,$$

$$(\gamma) \quad \|R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0,$$

$$(\Delta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0,$$

то умова

$$\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_C \to 0,\ \varepsilon \to 0+$$

рівносильна включенню

$$R(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{M}^n.$$

В підрозділі 2.3 досліджується питання резольвентої апроксимації квазідиференціальних операторів операторами того ж класу, зокрема, диференціальними з гладкими коефіцієнтами.

Розглянемо на скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ сім'ю матриць-функцій $A(\cdot;\varepsilon) := (a_{ij}(\cdot;\varepsilon))$, що задовольняють умови (2). Відповідні їм квазіпохідні будемо позначати через $D_\varepsilon^{[0]}y, D_\varepsilon^{[1]}y, \ldots, D_\varepsilon^{[m]}y$. Вони породжують сім'ю квазідиференціальних виразів $l_\varepsilon(y)$ вигляду (3).

В гільбертовому просторі $L_2\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right)$ такі вирази при кожному ε породжують оператори $L_{\min}^\varepsilon$, $L_{\max}^\varepsilon$. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Задамо для кожного фіксованого значення ε оператори

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_\varepsilon) = \left\{y \in \mathrm{Dom}\left(L_{\max}^\varepsilon\right) \middle|\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0\right\}.$$

Очевидно, що

$$L_{\min}^\varepsilon \subset L_\varepsilon \subset L_{\max}^\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Будемо позначати через $\rho(L)$ резольвентну множину оператора L.

Теорема 2.3. *Нехай резольвентна множина граничного квазідиференціального оператора $\rho(L_0)$ непорожня і виконані умови:*

1) $[A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)] \in \mathcal{M}^m$;

2) $\alpha(\varepsilon) \longrightarrow \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \longrightarrow \beta(0), \quad \varepsilon \to 0+.$

Тоді оператори L_ε збігаються до оператора L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Враховуючи лему 2.3, з теореми 2.3 випливають наступні достатні умови рівномірної резольвентної збіжності квазідиференціальних операторів.

Позначимо $R(\cdot;\varepsilon) := A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)$.

Теорема 2.4. *Нехай резольвентна множина граничного квазідиференціального оператора $\rho(L_0)$ непорожня і при $\varepsilon \to 0+$ виконані умови:*

1) *Виконується одна з чотирьох (нееквівалентних між собою) умов:*

$$(\alpha) \quad \|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1);$$

$$(\beta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon)\|_1 \to 0;$$

$$(\gamma) \quad \|R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0;$$

$$(\Delta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0;$$

2) $\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_C \to 0$;

3) $\alpha(\varepsilon)\longrightarrow\alpha(0), \quad \beta(\varepsilon)\longrightarrow\beta(0)$.

Тоді оператори L_ε збігаються до оператора L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Третій розділ присвячено дослідженню випадку формально самоспряжених квазідиференціальних виразів.

В цьому розділі ми припускаємо, що матриця Шина–Цеттла формально самоспряжена, тобто $A = A^+$. Тоді, очевидно, відповідний квазідиференціальний вираз є формально самоспряженим, тобто

$$l(y) = l^{+}(y).$$

Виконується така теорема [7]:

Теорема 3.1. *Оператор* $L_{\min} = L_{\min}^{+}$ *є симетричним в просторі* $L_2(\mathcal{J}; \mathbb{C})$ *з індексом дефекта* (m, m) *і*

$$L_{\min}^{*} = L_{\max}, \quad L_{\max}^{*} = L_{\min}.$$

Отже, змістовним є питання про опис всіх його самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень. Для параметризації цих розширень будемо використовувати теорію просторів граничних значень.

Наступні дві теореми дають у явному вигляді приклад просторів граничних значень для мінімального симетричного квазідиференціального оператора.

Теорема 3.3. *Нехай* $m = 2n, n \in \mathbb{N}$. *Позначимо через* $\Gamma_{[1]}$, $\Gamma_{[2]}$ *лінійні відображення з* $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ *в* $\mathbb{C}^{2n}$ *такі, що*

$$\Gamma_{[1]}y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ \ldots, \\ (-1)^{n}D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ \ldots, \\ (-1)^{n-1}D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{[2]}y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ \ldots, \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ \ldots, \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix}$$

Тоді трійка $(\mathbb{C}^{2n}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ *є простором граничних значень симетричного оператора* $L_{\min}$.

Теорема 3.4. *Нехай* $m = 2n{+}1, n \in \mathbb{N}$. *Позначимо через* $\Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]}$ *лінійні відображення з* $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ *в* $\mathbb{C}^{2n+1}$ *такі, що*

$$\Gamma_{[1]}y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ \dots, \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ \dots., \\ (-1)^{n-1} D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{[2]}y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ \dots, \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ \dots, \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

де числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i$.

Тоді трійка $(\mathbb{C}^{2n+1}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$*є простором граничних значень симетричного оператора* $L_{\min}$.

За допомогою знайдених нами просторів граничних значень можна, зокрема, дати опис самоспряжених розширень мінімального квазідиференціального оператора.

Теорема 3.6. *Для будь-якого унітарного оператора* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *звуження* L_K *оператора* $L_{\max}$ *на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_{[1]}y + i\,(K + I)\,\Gamma_{[2]}y = 0, \tag{4}$$

є самоспряженим розширенням оператора $L_{\min}$. *Навпаки, для будь-якого самоспряженого розширення* $\widetilde{L}$ *оператора* $L_{\min}$ *існує унітарний оператор* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *такий, що* $\widetilde{L} = L_K$. *Відповідність між унітарними операторами* $\{K\}$ *і розширеннями* $\{\widetilde{L}\}$ *є бієктивною.*

З урахуванням теореми 2.3 ця параметризація є не лише бієктивною, але також і неперервною в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Теорема 3.7. *Самоспряжені розширення* L_{K_j} *оператора* $L_{\min}$ *збігаються до самоспряженого розширення* L_K *в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\|(L_K - \lambda)^{-1} - \left(L_{K_j} - \lambda\right)^{-1}\right\| \to 0,\ j \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні унітарні оператори K_j *збігаються за нормою до оператора* K. *Тому відображення*

$$K \to (L_K - \lambda)^{-1}, \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

є при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *гомеоморфізмом.*

Для операторів парного порядку в роботі описано самоспряжені розширення оператора $L_{\min}$, задані *розділеними* крайовими умовами.

Теорема 3.8. *У випадку* $m = 2n$ *крайові умови* (4)*, що визначають самоспряжені розширення* L_K *оператора* $L_{\min}$*, є розділеними тоді і тільки тоді, коли унітарна матриця* K *має блочно-діагональний вигляд*

$$K = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix},$$

де $K_a, K_b \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Аналогічні результати отримано для максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень (теореми 3.9 – 3.19).

Параметричний опис всіх узагальнених резольвент оператора $L_{\min}$ дає

Теорема 3.20. 1) *Кожна узагальнена резольвента* R_λ *оператора* $L_{\min}$ *в півплощині* $\operatorname{Im}\lambda < 0$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y *— розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]} f + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]} f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *— регулярна в нижній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^m$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

2) *У півплощині* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *кожна узагальнена резольвента оператора* $L_{\min}$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y *— розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]} f - i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]} f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *— регулярна у верхній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^m$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

Ця параметризація узагальнених резольвент операторними функціями $K(\lambda)$ *є бієктивною.*

Четвертий та *п'ятий* розділи містять найбільш істотні, з точки зору можливих застосувань, результати дисертації. Вони стосуються операторів, породжених диференціальними виразами з узагальненими функціями в коефіцієнтах. Основою для цих результатів є результати розділів 2 і 3.

В *четвертому* розділі дисертації вивчаються оператори, породжені виразами Штурма–Ліувілля

$$l(y) = -(py')'(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathfrak{J}, \tag{5}$$

з коефіцієнтами

$$q = Q', \quad 1/p, Q/p, Q^2/p \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), \tag{6}$$

де похідна розуміється в сенсі узагальнених функцій.

В підрозділі 4.1 наводиться *регуляризація* цих виразів за допомогою некласичних квазіпохідних.

Введемо квазіпоходні:

$$\begin{aligned} &D^{[0]}y = y, \\ &D^{[1]}y = py' - Qy, \\ &D^{[2]}y = (D^{[1]}y)' + \frac{Q}{p}D^{[1]}y + \frac{Q^2}{p}y. \end{aligned}$$

За умов (6) вони є квазіпохідними Шина–Цеттла. Відповідна їм матриця Шина–Цеттла має вигляд

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{Q}{p} & \frac{1}{p} \\ -\frac{Q^2}{p} & -\frac{Q}{p} \end{pmatrix} \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{2\times 2}).$$

Тоді, оскільки коефіцієнти квазіпохідних задовольняють умови (2), вираз (5) можна визначити як квазідиференціальний вираз

$$l[y] := -D^{[2]}y.$$

Згідно з наведеними вище результатами для загального квазідиференціального оператора, вираз $l[y]$ породжує *максимальний* квазідиференціальний оператор $L_{\max}$ та *мінімальний* квазідиференціальний оператор $L_{\min}$ у гільбертовому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Приклади показують, що в загальному випадку $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ може складатися лише з негладких функцій. Зокрема, можливо, що $Q \in BV(\overline{\mathcal{J}})$ і

$$\forall\ [\alpha,\beta] \subset \mathcal{J} \quad \mathrm{Dom}(L_{\max}) \bigcap C^1([\alpha,\beta]) = \{0\}\,, x \in [\alpha,\beta].$$

Якщо ж коефіцієнти в (5) задовольняють умови

$$q, 1/p \in L_1\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right),$$

то введені оператори $L_{\max}, L_{\min}$ співпадають з класичними операторами Штурма–Ліувілля. Якщо $p(\cdot) \equiv 1$ і $q \in L_2\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right)$, то

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = W_2^2\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right) \subset C^1\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right).$$

Розглянемо вираз $l^+(y) = -(\overline{p}y')'(t) + \overline{q}(t)y(t)$, де риска над символом позначає комплексне спряження. Легко перевірити, що він є формально спряженим до (5). Позначимо через $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені $l^+(y)$ у просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$.

Теорема 4.1. *Оператори* $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ *замкнені і щільно задані в просторі* $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$,

$$L^*_{\min} = L^+_{\max}, \quad L^*_{\max} = L^+_{\min}.$$

У випадку, коли p *і* Q *є дійсними функціями, оператор* $L_{\min} = L^+_{\min}$ *є симетричним з індексом дефекта* $(2,2)$, *і*

$$L^*_{\min} = L_{\max}, \quad L^*_{\max} = L_{\min}.$$

Підрозділ 4.2 присвячено дослідженню важливого питання резольвентної апроксимації введених нами операторів Штурма–Ліувілля.

Розглянемо сім'ю виразів $l_\varepsilon(y)$ вигляду (5) з коефіцієнтами

$$p_\varepsilon, q_\varepsilon = Q'_\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

що задовольняють умови (6).

За ними побудуємо матриці Шина–Цеттла

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} Q_\varepsilon/p_\varepsilon & 1/p_\varepsilon \\ -Q_\varepsilon^2/p_\varepsilon & -Q_\varepsilon/p_\varepsilon \end{pmatrix} \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{2\times 2}) \tag{7}$$

та квазіпохідні $D_\varepsilon^{[0]}y, D_\varepsilon^{[1]}y, D_\varepsilon^{[2]}y$. За допомогою наведеної вище регуляризації визначимо квазідиференціальні вирази $l_\varepsilon[y] = -D_\varepsilon^{[2]}y$.

В гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ ці вирази породжують оператори $L^\varepsilon_{\min}$, $L^\varepsilon_{\max}$ для кожного ε.

Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a) := \left\{y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a)\right\}, \quad \mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \left\{y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b)\right\} \in \mathbb{C}^2.$$

Як і в загальному випадку, для кожного фіксованого значення ε визначаються оператори

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_\varepsilon) = \left\{y \in \mathrm{Dom}\,(L^\varepsilon_{\max}) \,|\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0\right\}.$$

Очевидно, що $L^\varepsilon_{\min} \subset L_\varepsilon \subset L^\varepsilon_{\max}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Теорема 4.3. *Нехай резольвентна множина* $\rho(L_0)$ *непорожня і для* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

(1) $\|1/p_\varepsilon\|_1 = O(1)$, $\|Q_\varepsilon/p_\varepsilon\|_1 = O(1)$, $\|Q_\varepsilon^2/p_\varepsilon\|_1 = O(1)$;

(2) $\|\int\limits_a^t (1/p_\varepsilon - 1/p_0)ds\|_C \to 0$;

(3) $\|\int\limits_a^t (Q_\varepsilon/p_\varepsilon - Q_0/p_0)ds\|_C \to 0$;

(4) $\|\int\limits_a^t (Q_\varepsilon^2/p_\varepsilon - Q_0^2/p_0)ds\|_C \to 0$;

(5) $\alpha(\varepsilon) \to \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \to \beta(0)$.

Тоді оператори L_ε *збігаються до оператора* L_0 *в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Твердження теореми 4.3 є новим і для випадку $p(\cdot) \equiv 1$. Воно істотно покращує результат роботи [77].

В підрозділі 4.3 окремо розглядається випадок, коли функції p, Q і, відповідно, $q = Q'$ є дійсними. В цьому випадку вираз $l[y]$ є формально самоспряженим, а мінімальний оператор $L_{\min}$ є симетричним.

Тому можна застосувати до нього наші попередні результати для загальних симетричних квазідиференціальних операторів.

Зокрема, трійка $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де Γ_1, Γ_2 — лінійні відображення з $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ у $\mathbb{C}^2$ такі, що

$$\Gamma_1 y := \left(D^{[1]}y(a), -D^{[1]}y(b)\right), \; \Gamma_2 y := (y(a), y(b)), \qquad (8)$$

є простором граничних значень для оператора $L_{\min}$ Штурма–Ліувілля з узагальненими функціями в коефіцієнтах.

В роботі отримано бієктивні неперервні параметризації його самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень та бієктивну параметризацію узагальнених резольвент, аналогічні наведеним в теоремах 3.6–3.20 з Γ_1, Γ_2, що задані формулами (8). Вони є новими і для випадку $p(\cdot) \equiv 1$.

В *п'ятому* розділі дисертації досліджуються оператори, породжені на скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ формальним диференціальним виразом

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}, \quad m \geq 3, \tag{9}$$

де q — комплекснозначна функція, що задовольняє умову

$$q = Q', \quad Q \in L_1\left(\overline{\mathcal{J}}; \mathbb{C}\right). \tag{10}$$

Через сингулярність коефіцієнта такі вирази не можуть бути визначені традиційним чином. В роботі запропоновано регуляризацію виразу $l(y)$ за допомогою квазіпохідних. Вона наведена в підрозділі 5.1.

Введемо послідовно квазіпохідні:

$$\begin{aligned}
&D^{[k]}y(t) := y^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, m-2},\\
&D^{[m-1]}y(t) := y^{(m-1)}(t) + i^{-m}Q(t)y(t),\\
&D^{[m]}y(t) := (D^{[m-1]}y(t))' - i^{-m}Q(t)D^{[1]}y(t).
\end{aligned}$$

За умов (10) вони є квазіпохідними Шина–Цеттла. Відповідна матриця Шина–Цеттла має вигляд

$$A_\lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & i^{-m}Q(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1\left(\mathfrak{J}; \mathbb{C}^{m\times m}\right).$$

Тому вираз (9) можна визначити як квазідиференціальний вираз

$$l[y] := i^m D^{[m]} y.$$

Як і в загальному випадку, квазідиференціальний вираз $l[y]$ породжує *максимальний* квазідиференціальний оператор $L_{\max}$ та *мінімальний* квазідиференціальний оператор $L_{\min}$ в гільбертому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Якщо потенціал в (9) задовольняє умову

$$q \in L_1\left(\mathfrak{J}, \mathbb{C}\right),$$

то оператори $L_{\max}, L_{\min}$ співпадають зі звичайними диференціальними операторами.

Розглянемо вираз $l^+(y) = i^m y^{(m)}(t) + \overline{q}(t)y(t)$, де риска над символом позначає комплексне спряження. Легко перевірити, що він є формально спряженим до (9). Позначимо $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені $l^+(y)$ у просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Теорема 5.1. *Оператори* $L_{\min}$, $L^{+}_{\min}$, $L_{\max}$, $L^{+}_{\max}$ *замкнені і щільно задані в просторі* $L_2(\mathfrak{J},\mathbb{C})$,

$$L^{*}_{\min}=L^{+}_{\max},\quad L^{*}_{\max}=L^{+}_{\min}.$$

У випадку, коли q *є дійсною функцією, оператор* $L_{\min}=L^{+}_{\min}$ *є симетричним з індексом дефекта* (m,m), *і*

$$L^{*}_{\min}=L_{\max},\quad L^{*}_{\max}=L_{\min}.$$

Підрозділ 5.2 присвячено дослідженню резольвентної апроксимації введених нами операторів.

Розглянемо сім'ю виразів $l_\varepsilon(y)$ вигляду (9) з коефіцієнтами

$$q_\varepsilon=Q'_\varepsilon\in L_1\left(\mathfrak{J},\mathbb{C}\right),\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0].$$

За ними побудуємо матриці Шина–Цеттла

$$A(\cdot;\varepsilon):=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ -i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\in L_1(\mathfrak{J},\mathbb{C}^{m\times m}) \tag{11}$$

та відповідні їм квазіпохідні $D^{[0]}_\varepsilon y, D^{[1]}_\varepsilon y,\dots,D^{[m]}_\varepsilon y$. За допомогою вищенаведеної регуляризації визначимо вирази $l_\varepsilon(y)$ як квазідиференціальні $l_\varepsilon[y]:=i^m D^{[m]}_\varepsilon y$.

В гільбертовому просторі $L_2(\mathfrak{J},\mathbb{C})$ ці вирази породжують оператори $L^{\varepsilon}_{\min}$, $L^{\varepsilon}_{\max}$ для кожного ε. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a):=\{D^{[0]}_\varepsilon y(a),D^{[1]}_\varepsilon y(a),\dots,D^{[m-1]}_\varepsilon y(a)\}\in\mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b), \dots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Як і в загальному випадку, для кожного фіксованого значення ε визначаються оператори

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_\varepsilon) = \left\{y \in \mathrm{Dom}\,(L_{\max}^\varepsilon) |\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0\right\}.$$

Очевидно, що $L_{\min}^\varepsilon \subset L_\varepsilon \subset L_{\max}^\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Теорема 5.2. *Нехай резольвентна множина $\rho(L_0)$ непорожня і для $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:*

$$1)\ \| \int\limits_a^t (Q_\varepsilon(s) - Q_0(s))ds\|_C \to 0;$$

$$2)\ \alpha(\varepsilon) \to \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \to \beta(0),$$

Тоді оператори L_ε збігаються до оператора L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Умова $\|Q_\varepsilon - Q_0\|_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0+$, очевидно, достатня для виконання умови 1).

В підрозділі 5.3 розглядається випадок, коли функції Q і, відповідно, $q = Q'$ є дійсними. В цьому випадку вираз $l[y]$ є формально самоспряженим, і, відповідно, мінімальний оператор $L_{\min}$ є симетричним.

Нехай Γ_1, Γ_2 — лінійні відображення з $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ в $\mathbb{C}^m$ такі, що:

при $m = 2n,\ n \geq 2,$

$$\Gamma_1 y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ ..., \\ (-1)^{n-1} D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

а при $m = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N},$

$$\Gamma_1 y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ ...., \\ (-1)^{n-1} D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

де числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i.$

Тоді трійка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *є простором граничних значень для оператора* $L_{\min}$.

В роботі отримано бієктивні і неперервні параметризації самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень та бієктивну параметризацію узагальнених резольвент оператора $L_{\min}$, аналогічні наведеним в теоремах 3.6–3.20 з Γ_1, Γ_2, що задані формулами (12), (13).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Розширення симетричних операторів

Одна з основних задач теорії симетричних операторів полягає в описі всіх тих розширень даного щільно заданого симетричного оператора L в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, які самі є симетричними операторами. Окремим випадком цієї задачі є встановлення умов, за яких оператор має самоспряжені розширення і опис множини всіх самоспряжених розширень оператора L. Для абстрактних симетричних операторів ця задача вивчена досить повно. Її розв'язок належить фон Нейману. Детальний виклад цієї теорії можна знайти в багатьох монографіях, зокрема [38, 39, 75].

Нехай λ — довільне недійсне число. Позначимо через $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ і $\mathfrak{R}_\lambda$ області значень операторів $L-\overline{\lambda}I$ і $L-\lambda I$ відповідно. Очевидно, що $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ і $\mathfrak{R}_\lambda$ — лінійні підпростори в $\mathcal{H}$, необов'язково замкнені. Їх ортогональні доповнення $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ і $\mathfrak{N}_\lambda$ називаються дефектними підпросторами оператора L. Вони є власними підпросторами оператора L^*, що відповідають власним значенням λ і $\overline{\lambda}$ відповідно.

Позначимо $m = \dim(\mathfrak{N}_i)$ і $n = \dim(\mathfrak{N}_{-i})$. Ці числа називаються дефектними числами симетричного оператора L, а пара (m, n) — його індексом дефекту. Для довільного комплексного числа λ з верхньої півплощини

$$m = \dim(\mathfrak{N}_i) = \dim(\mathfrak{N}_\lambda), \quad n = \dim(\mathfrak{N}_{-i}) = \dim(\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}).$$

Зафіксуємо деяке комплексне число λ з верхньої півплощини. Якщо L — замкнений симетричний оператор, то підпростори

$\mathrm{Dom}(L)$, $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, $\mathfrak{N}_{\lambda}$ є лінійно незалежними і областю визначення його спряженого оператора є наступна пряма сума:

$$\mathrm{Dom}(L^{*}) = \mathrm{Dom}(L) \oplus \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \oplus \mathfrak{N}_{\lambda}.$$

Відповідно, кожен вектор u з $\mathrm{Dom}(L^{*})$ можна однозначно представити у вигляді $u = x + y + z$, де $x \in \mathrm{Dom}(L)$, $y \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, $z \in \mathfrak{N}_{\lambda}$. Тому

$$L^{*}y = Lx + \lambda y + \overline{\lambda} z.$$

Будь-яке замкнене симетричне розширення L' замкненого симетричного оператора L визначається деяким ізометричним оператором U, області визначення і значень якого є (замкнені) підпростори $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ і $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$ відповідно.

При цьому $\mathrm{Dom}(L')$ складається з векторів

$$x' = x + z - Uz, \quad x \in \mathrm{Dom}(L), z \in \mathfrak{B} \tag{1.1}$$

і

$$L'x' = Lx + \lambda z - \overline{\lambda} U z. \tag{1.2}$$

Навпаки, для будь-якого такого оператора U формули (1.1), (1.2) визначають деяке замкнене симетричне розширення L' оператора L. При цьому дефектними підпросторами оператора L' є

$$\mathfrak{N}'_{\overline{\lambda}} = \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \ominus \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{N}'_{\lambda} = \mathfrak{N}_{\lambda} \ominus \mathfrak{Q}.$$

Відповідно, якщо $\dim(\mathfrak{B}) = \dim(\mathfrak{Q}) = l$, то дефектні числа оператора L' дорівнюють

$$m_1 = m - l, \qquad n_1 = n - l.$$

Розширення L' є самоспряженим тоді і лише тоді, коли області визначення і значень відповідного оператора U співпадають з $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ і $\mathfrak{N}_{\lambda}$ відповідно.

Оператор L має самоспряжені розширення тоді і лише тоді, коли його дефектні підпростори $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ і $\mathfrak{N}_{\lambda}$ мають однакову (скінченну або нескінченну) розмірність, тобто коли його індекс дефекту має вигляд (n, n).

1.2 Диференціальні оператори

Важливим випадком абстрактних симетричних операторів є оператори, породжені формально самоспряженими диференціальними виразами.

Відомо (див. [75]), що будь-який формально самоспряжений одновимірний диференціальний вираз

$$l(y) = p_m(x)y^{(m)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x)$$

з гладкими коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$\sum_{j=0}^{[m/2]} (-1)^j (a_j y^{(j)})^{(j)} + \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} i\Big((b_j y^{(j)})^{(j-1)} + (b_j y^{(j+1)})^{(j)}\Big), \qquad (1.3)$$

де a_j, b_j є дійснозначними функціями. Якщо вони є досить гладкими, то вирази вигляду (1.3) є звичайними диференціальними виразами. Однак можна обійтися без такого припущення.

Розглянемо диференціальний вираз парного порядку з дійсними коефіцієнтами $l(y) = (-1)^n(p_0 y^{(n)})^{(n)} + \ldots + p_n y$, де функції $\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \ldots p_n(x) \in L_1(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{R})$. Такий вираз називається регулярним.

Максимальний оператор, породжений таким виразом, визначається як

$$L_M y = l(y),$$

$$y \in D_{\max} = \left\{ y | y^{[k]} \in AC(\mathfrak{I}, \mathbb{C}), k = 0, \ldots, 2n-1, l(y) \in L_2(\mathfrak{I}, \mathbb{C}) \right\},$$

де $y^{[k]}$ – квазіпохідні, що визначаються наступним чином: $y^{[0]} = y$,

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, & k &= 1, 2, \ldots, n-1, \\ y^{[n]} &= p_0 y^{(n)}, & & \\ y^{[k]} &= p_k y^{(n-k)} - \frac{d}{dx} y^{[n+k-1]}, & k &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Мінімальний диференціальний оператор L_m на скінченному інтервалі визначається як звуження максимального оператора на множину $D_{\min} = \left\{ y \in D_{\max} | \, y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, \ldots 2n-1 \right\}$.

Мінімальний оператор L_m є симетричним оператором з індексом дефекта $(2n, 2n)$.

Розглянутий вище підхід фон Неймана важко застосувати до опису самоспряжених розширень таких операторів, оскільки вказати в явному вигляді їх дефектні простори означає розв'язати відповідне диференціальне рівняння, що не завжди можливо. Тому задача опису самоспряжених розширень диференціальних операторів була окремо досліджена Крейном [38, 63]. Він дав наступний конструктивний опис самоспряжених розширень у термінах крайових умов.

Будь-яке самоспряжене розширення оператора L_m визначається лінійно незалежними крайовими умовами вигляду

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{j,k} y^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{j,k} y^{[k-1]}(b) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n, \qquad (1.4)$$

де

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{j,r}\overline{\alpha}_{k,2n-r+1} - \sum_{r=1}^{n} \alpha_{j,2n-r+1}\overline{\alpha}_{k,r} = \\ = \sum_{r=1}^{n} \beta_{j,r}\overline{\beta}_{k,2n-r+1} - \sum_{r=1}^{n} \beta_{j,2n-r+1}\overline{\beta}_{k,r}. \tag{1.5}$$

Навпаки, будь-які крайові умови вигляду (1.4), що задовольняють співвідношенням (1.5), визначають деяке самоспряжене розширення оператора L_m.

Цей підхід має деякі вади, бо параметризація самоспряжених розширень крайовими умовами не є бієктивною. Крім того, цей підхід не дає можливості описати максимальні дисипативні та максимальні акумулятивні розширення.

Зважаючи на це, ми будемо застосовувати інший підхід до опису розширень оператора. Він грунтується на концепції просторів граничних значень і має ряд переваг. На відміну від вищенаведеного, тут розширення бієктивно параметризуються в термінах абстрактних граничних умов, зручних для застосувань до крайових задач для диференціальних і квазідиференціальних операторів. Ця теорія викладена в монографії Горбачуків [43] (див. також роботи Кочубея [62], Михайлеця [72], та монографію Лянце і Сторожа [66]).

Означення 1.1. *Трійка* (H, Γ_1, Γ_2), *де* H *– допоміжний гільбертів простір, а* Γ_1, Γ_2 *– лінійні відображення* $\mathrm{Dom}(L^*)$ *в* H, *називається простором граничних значень (далі ПГЗ) замкненого симетричного оператора* L *з рівними (скінченними або нескінченними дефектними числами), якщо:*

1. *для будь-яких* $f, g \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$

$$(L^*f, g)_{\mathcal{H}} - (f, L^*g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H$$

2. *для будь-яких векторів* $f_1, f_2 \in H$ *існує вектор* $f \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$ *такий, що* $\Gamma_1 f = f_1$, $\Gamma_2 f = f_2$.

З означення ПГЗ випливає, що $f \in \mathrm{Dom}\,(L)$ тоді і тільки тоді, коли $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$.

Для довільного симетричного оператора з рівними дефектними числами, тобто з індексом дефекта (n, n) $(n \leq \infty)$ існує простір граничних значень (H, Γ_1, Γ_2) з $\dim H = n$. Він завжди не єдиний.

За допомогою просторів граничних значень дається бієктивна параметризація всіх самоспряжених розширень оператора L.

А саме, для будь-якого унітарного оператора K в просторі H звуження оператора L^* на множину векторів $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, що задовольняють однорідній крайовій умові канонічного вигляду

$$(K - I)\,\Gamma_1 y + i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{1.6}$$

є самоспряженим розширенням оператора L. Навпаки, будь-яке самоспряжене розширення оператора L є звуженням оператора L^* на множину векторів $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, що задовольняють умові (1.6), причому оператор K визначається розширенням однозначно.

1.3 Квазідиференціальні оператори

Можна визначити формально самоспряжені диференціальні вирази, значно загальніші за (1.3). Квазідиференціальні оператори найбільш загального вигляду були вперше введені в циклі робіт Д. Шина [81, 82, 83, 84, 85].

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і на інтервалі $\mathcal{J} := (a, b)$ задано сім'ю комплекснозначних функцій $P_{k,j}$, $0 \leq j \leq k$, $k = \overline{0, m}$ таких, що

$$P_{k,k}^{-1}, P_{k,j} \in L_2\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right), \quad j < k, \quad k = \overline{0, m}.$$

Тоді квазіпохідні визначаються наступним чином:

$$y^{[0]} = P_{0,0}y,$$

$$y^{[k]} = iP_{k,k}\frac{d}{dx}f^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} P_{k,j}f^{[j]} \quad k = 1, \dots, m.$$

Такі квазіпохідні визначені для всіх функцій y, для яких $f^{[0]}, \dots, f^{[m-1]} \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$ і $f^{[m]} \in L_2(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$.

За додаткових умов

$$\overline{P_{m-j,m-k}P^{-1}_{m-j,m-j}P_{m-k,m-k}} = P_{k,j}, \quad j \le k,$$

$$k = 0, 1, \dots, m - \left[\frac{m}{2}\right], j = 0, 1, \dots, \left[\frac{m}{2}\right]$$

вираз $f^{[m]}$ є формально самоспряженим і визначений ним мінімальний квазідиференціальний оператор є симетричним.

В роботах Шина досліджено квазідиференціальні рівняння вигляду $f(x)^{[m]} = g(x)$, для яких, зокрема, доводиться єдиність розв'язку задачі Коші. Описані самоспряжені розширення симетричних квазідиференціальних операторів.

Введені Шином квазідиференціальні вирази розглядались, зокрема, в роботах Граффа [44, 45]. Частинні їх випадки застосовувались в роботах Калафаті [59], Мікеладзе [67], Орлова [76] та інших.

Відзначимо важливу роботу Цеттла [37]. В ній квазідиференціальні вирази були введені в більш зручній формі і було отримано основні результати Шина. Також див. монографію Еверітта і Маркуса [7] і наведену там бібліографію. Наведемо виклад деяких необхідних нам положень теорії квазідиференціальних операторів на основі цих робіт.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і на скінченному інтервалі $\mathfrak{J} := (a, b)$ задано квадратну матрицю A спеціального вигляду комплекснозначних функцій $(a_{k,s})$ розміру $m \times m$

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m-2,1} & a_{m-2,2} & a_{m-2,3} & \ldots & a_{m-2,m-1} & 0 \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \ldots & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \ldots & a_{m,m-1} & a_{m,m} \end{pmatrix}, \qquad (1.7)$$

де

$a_{k,s} \in L_1\left(\mathfrak{J}, \mathbb{C}\right)$, $a_{k,k+1} \neq 0$ майже скрізь на $\mathfrak{J}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, k+1$.

Така матриця-функція називається матрицею Шина–Цеттла і визначає квазіпохідні функції $y(x) \in \mathrm{Dom}(A)$ порядків $k \leq m$ наступним рекурентним чином:

$$D^{[0]}y := y,$$

$$D^{[k]}y := a^{-1}_{k,k+1}(t)\left((D^{[k-1]}y)' - \sum_{s=1}^{k} a_{k,s}(t)D^{[s-1]}y\right), k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$D^{[m]}y := \left((D^{[m-1]}y)' - \sum_{s=1}^{m} a_{m,s}(t)D^{[s-1]}y\right)$$

Область визначення квазіпохідних $\mathrm{Dom}(A)$ складається з усіх функцій y, для яких праві частини рівностей мають зміст майже скрізь на інтервалі $\mathfrak{J}$ і є частиною множини $AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$, а саме:

$$\mathrm{Dom}(A) := \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\; k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Звідси випливає, що $D^{[m]}y \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Квазідиференціальний вираз $l(y)$ порядку m визначається як

$$l(y) := i^m D^{[m]} y. \tag{1.8}$$

Легко побачити, що квазіпохідні, введені в [37], є аналогом квазіпохідних Шина у випадку $P_{0,0} \equiv 1$.

В класичній теорії одновимірних диференціальних операторів, викладеній в монографіях Наймарка [75] та Ахієзера і Глазмана [38], якій присвячено попередній підрозділ, розглядались значно менш загальні квазідиференціальні оператори, породжені матрицею-функцією вигляду

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ p_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У випадку, коли матриця-функція (1.7) має вигляд

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,m} \end{pmatrix},$$

квазідиференціальний вираз $l(y)$ є звичайним диференціальним виразом. Справді, $D^{[k]}y = y^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ і

$$l(y) = i^m D^{[m]}y = i^m \left(y^{(m)} - \sum_{s=0}^{m} a_{m,s}(x) y^{(s-1)} \right).$$

Навпаки, кожен такий диференціальний вираз може бути записаний як квазідиференціальний. Крім того, якщо в матриці-функції (1.7) загального вигляду коефіцієнти $a_{k,s}$ є достатньо гладкими, то в квазіпохідних можна розкрити дужки, і вони вироджуються в звичайні диференціальні вирази (з іншими, ніж $a_{k,s}$, коефіцієнтами). Отже, відповідні квазідиференціальні оператори є диференціальними.

Зважаючи на це, квазідиференціальні вирази є природнім узагальненням диференціальних. Це узагальнення є досить змістовним, враховуючи, що диференціальний вираз порядку m залежить від $m+1$ функціональних коефіцієнтів, в той час, як квазідиференціальний – від $\frac{1}{2}(m^2+m)+m-1$ коефіцієнтів.

Введений квазідиференціальний вираз $l(y)$ породжує в гільбертовому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ з нормою $\|\cdot\|_2$ *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_{\max} : y \to l(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}(A) \,\middle|\, D^{[m]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\}.$$

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора $L_{\max}$ на множину

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0,\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Поряд з виразом (1.8) визначено формально спряжений до нього вираз $l^{+}(y)$.

Формально спряжена (спряжена за Лагранжем) до A матрицяфункція A^+ визначається за формулою

$$A^+ := -\Lambda_m^{-1}\overline{A^T}\Lambda_m,$$

де $\overline{A^T}$ — комплексно спряжена до транспонованої матриці A,

$$\Lambda_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Легко бачити, що $\Lambda_m^{-1} = (-1)^{m-1}\Lambda_m$.

Тому можна визначити відповідні квазіпохідні, що позначаються $D^{\{0\}}y, D^{\{1\}}y, ..., D^{\{m\}}y$, з областю визначення

$$\mathrm{Dom}(A^+) := \left\{ y \,\middle|\, D^{\{k\}}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\, k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Відповідно, сам спряжений вираз визначається як

$$l^+(y) := i^m D^{\{m\}}y.$$

Позначимо через $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ породжені ним максимальний и мінімальний оператори в просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

В роботі [37] доведено, що оператори $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ щільно задані і замкнені в просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$,

$$L^*_{\min} = L^+_{\max}, \quad L^*_{\max} = L^+_{\min}.$$

Крім того, там дано наступний опис в рамках підходу Глазмана–Крейна–Наймарка всіх самоспряжених розширень оператора $L_{\min}$.

Якщо L' – самоспряжене розширення оператора $L_{\min}$, то існують матриці розміру $m \times m$ A і B, що задовольняють умовам

$$1)\,\mathrm{rank}(A : B) = m; \tag{1.10}$$

$$2) A\Lambda A^* \Lambda = B\Lambda B^* \Lambda, \tag{1.11}$$

де $\mathrm{rank}(A : B)$ – ранг $(m \times 2m)$-матриці $(A : B)$, а матриця Λ задана формулою (1.9), і $\mathrm{Dom}(L')$ складається з функцій y, таких, що

$$A\mathcal{Y}(a) + B\mathcal{Y}(b) = 0, \tag{1.12}$$

де $\mathcal{Y}(x) = \{D^{[0]}y(x), D^{[1]}y(x), \dots, D^{[m-1]}y(x)\}$.

Навпаки, якщо матриці A, B задовольняють умовам (1.10), (1.11), то множина функцій y, що задовольняють умовам (1.12), є областю визначення деякого самоспряженого розширення $L_{\min}$.

Теорія квазідиференціальних операторів була розвинена в роботах Цеттла і Еверітта зі співавторами. Зокрема, відзначимо статті Маркуса [28], Еверітта, Малдовні, Танді [10], Еверітта і Маркуса [8], Рейса і Цеттла [30, 31], Еверітта і Рейса [11], Еверітта і Цеттла [12], Ашурова і Еверітта [3, 4]. В монографії Еверітта і Маркуса [7] (див. також бібліографію там) і подальших їх працях для опису самоспряжених розширень квазідиференціальних операторів було застосовано симплектичну геометрію.

Відзначимо також роботи Ібрагіма [21, 22, 23, 24] та інші роботи цього ж автора, роботи Мірзоєва [68, 69, 70], Долгіх і Мірзоєва [58], Філіппенка [80].

Квазідиференціальні вирази з матричними коефіцієнтами вивчались в роботах Френцена, зокрема, [13, 14, 15, 16, 17].

В роботах Еверітта і Зеттла [12], Еверітта і Маркуса [9], Ашурова і Еверітта [4], Соколова [32, 33, 34] вивчались багатоінтервальні оператори, породжені довільними формально самоспряженими квазідиференціальними виразами в гільбертових просторах.

1.4 Оператори Штурма–Ліувілля з узагальненими функціями в коефіцієнтах

Розглянемо на скінченному інтервалі $\mathfrak{J} := (a, b)$ формальний диференціальний вираз

$$l(y) = -(py')'(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathfrak{J}.$$

Такий вираз і пов'язані з ним крайові задачі, як відомо, було досліджено ще Штурмом і Ліувіллем. В класичній теорії Штурма–Ліувілля коефіцієнти $l(y)$ є дійсними функціями, що задовольняють умови

$$q \in C(\overline{\mathfrak{J}}), \quad 0 < p \in C^1(\overline{\mathfrak{J}}),$$

Сучасний виклад класичної теорії Штурма-Ліувіля наведено в багатьох монографіях. Основні її положення залишаються в силі і при більш загальних умовах

$$q, 1/p \in L_1 \left(\mathfrak{J}, \mathbb{C}\right),$$

див. [36] і наведені там посилання.

Проте ці умови не охоплюють деякі важливі математичні моделі, які з'явились у фізиці ще на початку минулого сторіччя. В першу чергу це сингулярні оператори Шрьодінгера.

Сингулярним оператором Шрьодінгера називають оператор, пов'язаний з (формальним) виразом

$$l(y) = -y''(t) + q(t)y(t),$$

де потенціал $q(t) \notin L_1(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$.

Найбільш відомі приклади таких операторів даються системами з δ-взаємодіями, тобто з потенціалами, зосередженими в точках.

Історично першою роботою, де було досліджено цю задачу, мабуть, була робота Кроніга і Пенні [26].

Математичне дослідження таких операторів і їх багатовимірних аналогів було проведено Березіним і Фаддєєвим [41], Мінлосом і Фаддєєвим [71], Березіним [40] і багатьма іншими. В роботах [41, 71] сингулярний оператор $-\Delta + \mu\delta(x)$ розуміється як розширення оператора $T_0 = -\Delta$ з областю $\mathrm{Dom}(T_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Ці результати викликали велику кількість робіт. Зокрема, роботи Гестезі і Саймона [19], Кисельова і Саймона [25], Фрагела [79], Шондіна [86].

Ці результати деякою мірою підсумовано в монографіях Альбереверіо, Гестезі, Хєег-Крон, Хольдена [1], Альбеверіо і Курасова [2] і відображені в їх бібліографії, що містить кількасот робіт.

Іншим відомим прикладом є вираз Шрьодінгера

$$l(y) = -y''(t) - \frac{1}{t} y(t)$$

з кулонівським потенціалом. Він вивчався в багатьох роботах, зокрема, Бойда [5], Гестезі [18], Гунсона [20], Курасова [27], та багатьох інших.

Узагальненням задачі з потенціалом, що є дельта-функцією, є вираз

$$l(y) = -y''(t) + \mu y(t)$$

з потенціалом, що є мірою Радона. Такі вирази досліджувались, зокрема, в роботі Браше [6].

В зв'язку з теорією марківських процесів, а також деякими питаннями теорії коливань представляють інтерес узагальнені диференціальні рівняння вигляду

$$l(y) = -\frac{d}{dM(x)}\left(y^{+}(x) - \int\limits_{c+0}^{x+0} y(s)dQ(s)\right),$$

де $M(x)$ – неспадаюча функція, $Q(x)$ – різниця двох неспадаючих функцій, а y^{+} – права похідна функції y. Спектральна теорія операторів, породжених такими виразами, розглядалась Крейном, Феллером і Кацем. Найбільш повний виклад і бібліографію містить робота [61].

Подальший суттєвий розвиток цього напрямку досліджень було отримано Савчуком і Шкаліковим [77, 78].

На відрізку $[0, 1]$ ними було розглянуто вираз Шрьодінгера

$$l(y) = -y''(t) + q(t)y(t), \quad t \in [0, 1].$$

за таких умов на коефіцієнти:

$$q = Q', \quad Q \in L_2\left([0, 1], \mathbb{C}\right),$$

де похідна функції Q розуміється в сенсі узагальнених функцій.

Такі умови включають в себе δ-взаємодії при Q, що є функцією Хевісайда, та потенціали вигляду $\frac{\operatorname{sign} t}{|t|^{\alpha}}$, $\alpha < 3/2$. Також вони включають довільні скінченні міри (оскільки кожну міру можна розглядати, як похідну функції обмеженої варіації).

Авторами [77] було запропоновано такий підхід. Використовуючи регуляризацію формального диференціального виразу $l(y)$ за допомогою квазіпохідних

$$\begin{aligned} &y^{[0]} = y, \\ &y^{[1]} = py' - Qy, \\ &l(y) = -(y^{[1]})' - Qy^{[1]} + Q^2 y, \end{aligned}$$

відповідні оператори можна означити як квазідиференціальні.

Максимальний оператор визначається як

$$L_M y = l(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_M) = \left\{ y \,\middle|\, y, y^{[1]} \in W_1^1([0,1], \mathbb{C}), l(y) \in L_2([0,1], \mathbb{C}) \right\},$$

де $W_1^1([0,1], \mathbb{C})$ – простір функцій, узагальнена похідна яких є сумовною на $[0,1]$. Цей простір співпадає з класом абсолютно неперервних фунцій $AC([0,1], \mathbb{C})$.

Мінімальний оператор визначається як звуження L_M на область

$$\mathrm{Dom}(L_m) = \left\{ y \,\middle|\, y \in \mathrm{Dom}(L_M), y(\pm 1) = y^{[1]}(\pm 1) = 0 \right\}.$$

Оператори L_M і L_m є взаємно спряженими фредгольмовими операторами, у випадку дійсного потенціалу q оператор L_m є симетричним замкненим оператором з індексом дефекта $(2,2)$.

За умови дійсності функції q було описано всі самоспряжені розширення мінімального оператора в термінах теорії Глазмана-Крейна-Наймарка,

Нехай q — дійсна функція. Тоді L_m — замкнений симетричний оператор з індексом дефекту $(2,2)$, а будь-яке його самоспряжене розширення L' є звуженням оператора L_M на область вигляду

$$\mathrm{Dom}(L') := \{ y \,| y \in \mathrm{Dom}(L_M), U_1(y) = U_2(y) = 0 \},$$

де лінійні форми U_1, U_2 мають представлення

$$U_j(y) = \alpha_{j1} y^{[0]}(0) + \alpha_{j1} y^{[1]}(0) + \beta_{j1} y^{[0]}(1) + \beta_{j1} y^{[1]}(1) = 0, \quad j = 1, 2.$$

для коефіцієнтів яких виконуються рівності

$$\alpha_{j1}\overline{\alpha}_{k2} - \alpha_{j2}\overline{\alpha}_{k1} = \beta_{j1}\overline{\beta}_{k2} - \beta_{j2}\overline{\beta}_{k1}, \quad j, k = 1, 2.$$

Також було отримано достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації побудованих операторів аналогічними операторами з гладкими потенціалами.

А саме, за умови збіжності гладких функцій Q_ε до функції $Q \in L_2([0,1], \mathbb{C})$ було досліджено збіжність операторів $L_\varepsilon = -d^2/dx^2 + q_\varepsilon(x)$ до $L_0 = -d^2/dx^2 + q_0(x)$, $q_\varepsilon = Q'_\varepsilon$. Тут мається на увазі, що області визначення операторів L_ε і L_0 даються деякими фіксованими крайовими умовами вигляду $U_1(y) = U_2(y) = 0$.

Нехай $\|Q_\varepsilon - Q_0\|_2 \to 0$ при $\varepsilon \to +0$ і резольвентна множина $\rho(L_0)$ не порожня. Тоді оператори L_ε збігаються до оператора L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі зроблено стислий огляд літератури за темою дисертації. З наведених тут відомостей можна зробити наступні висновки:

1. Важливим математичним об'єктом дослідження був і залишається оператор, породжений виразом Штурма–Ліувілля.
2. Цей об'єкт у випадку одновимірного вираза Шрьодінгера можна істотно узагальнити, використовуючи квазіпохідні.

3. Представляє інтерес подальший розвиток цього підходу і розповсюдження його на інші важливі класи диференціальних виразів.

РОЗДІЛ 2

РЕЗОЛЬВЕНТНА АПРОКСИМАЦІЯ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

2.1 Квазідиференціальні оператори

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і на скінченному інтервалі $\mathcal{J} := (a, b)$ задано квадратну матрицю A комплекснозначних функцій $(a_{k,s})$ розміру $m \times m$ таку, що

$$\begin{aligned} &1)\ a_{k,s} = 0 \text{ майже скрізь на } \mathcal{J},\ s > k+1; \\ &2)\ a_{k,s} \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}), \quad a_{k,k+1} \neq 0 \text{ майже скрізь на } \mathcal{J}, \\ &\quad k = 1, 2, \ldots, m,\ s = 1, 2, \ldots, k+1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Така матриця-функція називається матрицею Шина–Цеттла і визначає квазіпохідні функції $y(x) \in \operatorname{Dom}(A)$ порядків $k \leq m$ наступним рекурентним чином:

$$D^{[0]}y := y,$$

$$D^{[k]}y := a_{k,k+1}^{-1}(t)\left((D^{[k-1]}y)' - \sum_{s=1}^{k} a_{k,s}(t) D^{[s-1]}y\right), k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$D^{[m]}y := \left((D^{[m-1]}y)' - \sum_{s=1}^{m} a_{m,s}(t) D^{[s-1]}y\right).$$

Область визначення квазіпохідних $\operatorname{Dom}(A)$ є частиною множини $AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C})$, а саме:

$$\operatorname{Dom}(A) := \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Звідси випливає, що $D^{[m]}y \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C})$.

Такі вирази називаються квазіпохідними Шина–Цеттла. Вони були вперше введені в роботах [81, 82, 83, 84, 85] і потім доопрацьовані в роботі [37], див. також монографію [7].

Квазідиференціальний вираз $l(y)$ порядку m визначається як

$$l(y) := i^m D^{[m]} y. \tag{2.2}$$

Зауваження 2.1. *У випадку, коли матриця-функція A має вигляд*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,m} \end{pmatrix},$$

квазідиференціальний вираз $l(y)$ є диференціальним, бо $D^{[k]}y = y^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ і

$$l(y) = i^m D^{[m]} y = i^m \left(y^{(m)} - \sum_{s=0}^{m} a_{m,s}(t) y^{(s-1)} \right).$$

Навпаки, кожен такий диференціальний вираз може бути записаний як квазідиференціальний. Зважаючи на це, квазідиференціальні вирази є природнім узагальненням диференціальних.

Це узагальнення є досить змістовним, враховуючи, що диференціальний вираз залежить від $m+1$ функціональних коефіцієнтів, в той час, як квазідиференціальний – від $\frac{1}{2}(m^2+m)+m-1$ коефіцієнтів.

Розв'язок задачі Коші для резольвентного рівняння

$$l(y) - \lambda y = f \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), \qquad (D^{[k]}y)(c) = \alpha_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{2.3}$$

де $c \in \overline{\mathfrak{J}}$ і $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, m-1}$, визначається як перша компонента розв'язку задачі Коші для відповідної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$w'(t) = A_\lambda(t) w(t) + \varphi(t), \qquad w(c) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}) \tag{2.4}$$

де вектор-функція $w(t) := (D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), \ldots, D^{[m-1]}y(t))$, квадратна матриця-функція

$$A_\lambda(t) := A - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ i^{-m}\lambda & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{m\times m}), \qquad (2.5)$$

а вектор-функція $\varphi(t) := (0, 0, \ldots, 0, i^{-m}f(t)) \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^m)$.

Лема 2.1 ([37]). *Задача Коші* (2.3) *за умов* (2.1) *має розв'язок на* $\overline{\mathfrak{J}}$. *Він єдиний.*

Введений загальний квазідиференціальний вираз $l(y)$ породжує в гільбертовому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ з нормою $\|\cdot\|_2$ (див. [7, 37]) *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_{\max} : y \to l(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}(A) \;\middle|\; D^{[m]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\}.$$

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора $L_{\max}$ на множину

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \;\middle|\; D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0,\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Зауваження 2.2. *Якщо функціональні коефіцієнти* $a_{k,s}$ *є достатньо гладкими, то в квазіпохідних можна розкрити дужки, і вони вироджуються в звичайні диференціальні вирази. Отже, відповідні квазідиференціальні оператори є насправді диференціальними. Нижче буде доведено (теорема 2.4), що множина диференціальних операторів, заданих таким чином, є щільною в множині квазідиференціальних в топології рівномірної резольвентної збіжності.*

Визначимо поряд з виразом (2.2) формально спряжений до нього вираз $l^+(y)$.

Формально спряжена (спряжена за Лагранжем) до A матриця-функція A^+ визначається за формулою

$$A^+ := -\Lambda_m^{-1}\overline{A^T}\Lambda_m,$$

де $\overline{A^T}$ — комплексно спряжена до транспонованої матриці A,

$$\Lambda_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ (-1)^m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $\Lambda_m^{-1} = (-1)^{m-1}\Lambda_m$.

Тому можна визначити відповідні квазіпохідні Шина–Цеттла, що позначаються $D^{\{0\}}y, D^{\{1\}}y, ..., D^{\{m\}}y$, з областю визначення

$$\mathrm{Dom}(A^+) := \left\{ y \,\middle|\, D^{\{k\}}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Відповідно, сам спряжений вираз визначається як

$$l^+(y) := i^m D^{\{m\}}y.$$

Позначимо через $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ породжені ним максимальний и мінімальний оператори в просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. В [37] доведена (див. також монографію [7]) наступна

Теорема 2.1. *Оператори* $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ *щільно задані і замкнені в просторі* $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$,

$$L^*_{\min} = L^+_{\max}, \quad L^*_{\max} = L^+_{\min}.$$

2.2 Допоміжний результат

Наслідуючи [73, 74], введемо таке

Означення 2.1. *Позначимо через* $\mathcal{M}^n(\mathcal{J}) =: \mathcal{M}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *клас всіх параметризованих числом* ε *матриць-функцій*

$$R(\cdot;\varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \to L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{n\times n}),$$

для яких розв'язок задачі Коші

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \quad Z(a;\varepsilon) = I_n$$

(тобто матрицант) задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|Z(\cdot;\varepsilon) - I_n\|_C = 0,$$

де $\|\cdot\|_C$ *– sup-норма.*

Нехай $Y(t;\varepsilon)$ – єдиний розв'язок (матрицант) матричного диференціального рівняння

$$Y'(t;\varepsilon) = B(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b) \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

з початковою умовою

$$Y(a;\varepsilon) = I_m.$$

Важливість класу $\mathcal{M}^n$, пояснює *принцип редукції* А. Ю. Левіна [64], [65], який в наших позначеннях має наступний вигляд:

Лема 2.2 (принцип редукції)**.** *Граничне співвідношення*

$$\|Y(t;\varepsilon) - Y(t;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0$$

виконується в тому і лише в тому випадку, якщо

$$B(t;\varepsilon) - B(t;0) = R(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m.$$

Наведене означення класса $\mathcal{M}^n$ не є конструктивним. Існують різні достатні умови належності матричної функції $R(\cdot;\varepsilon)$ до класу $\mathcal{M}^n$. Перша найпростіша з них випливає з леми, наведеної в роботі [35].

Проте ми будемо використовувати значно сильніше твердження. З результатів роботи А. Ю. Левіна [64] випливає

Лема 2.3. *Нехай* $R(\cdot;\varepsilon) : [0,\varepsilon_0] \to L_1(\mathcal{J},\mathbb{C}^{n\times n})$. *Якщо при* $\varepsilon \to 0+$ *виконується одна з чотирьох (нееквівалентних між собою) умов:*

$$(\alpha) \quad \|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1),$$

$$(\beta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon)\|_1 \to 0,$$

$$(\gamma) \quad \|R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0,$$

$$(\Delta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0,$$

то умова

$$\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_C \to 0,\ \varepsilon \to 0+$$

рівносильна включенню

$$R(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{M}^n.$$

В роботі [74] встановлена наступна загальна

Теорема 2.2. *Нехай для крайової задачі*

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in \mathcal{J}, \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0] \tag{2.6}$$

$$U_\varepsilon y(\cdot;\varepsilon) = 0, \tag{2.7}$$

де матриці-функції $A(\cdot,\varepsilon) \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{n\times n})$, *вектор-функції* $f(\cdot,\varepsilon) \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^n)$, *а лінійні неперервні оператори*

$$U_\varepsilon : C(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N},$$

виконуються умови:

1) *однорідна гранична крайова задача* $(2.6), (2.7)$ *з* $\varepsilon = 0$ *і* $f(\cdot;0) \equiv 0$ *має тільки тривіальний розв'язок;*

2) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}^n$;

3) $\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+$.

Тоді для достатньо малих ε *існують матриці Гріна* $G(t,s;\varepsilon)$ *задач* (2.6), (2.7) *і на квадраті* $\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{2.8}$$

де $\|\cdot\|_\infty$ *– норма в просторі* $L_\infty(\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}, \mathbb{C}^{m\times m})$.

Умову 3) теореми 2.2, взагалі кажучи, не можна замінити більш слабкою умовою сильної збіжності операторів $U_\varepsilon \xrightarrow{s} U_0$ [74]. Однак для двоточкових крайових операторів справедлива така

Лема 2.4. *Для двоточкових крайових операторів*

$$U_\varepsilon y := B_1(\varepsilon)y(a) + B_2(\varepsilon)y(b), \quad B_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad k = 1, 2,$$

при $\varepsilon \to 0+$ *наступні умови еквівалентні:*

i) $U_\varepsilon \xrightarrow{s} U_0$ *в просторі* $\mathcal{L}[C(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}^n); \mathbb{C}^n]$;

ii) $\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0$ *в просторі* $\mathcal{L}[C(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}^n); \mathbb{C}^n]$;

iii) $B_k(\varepsilon) \to B_k(0), \quad k = 1, 2.$

Доведення. Імплікація ii) $\Rightarrow$ i) одразу ж випливає із нерівності

$$\|U_\varepsilon y(t) - U_0 y(t)\| \leqslant \|U_\epsilon - U_0\| \cdot \|y(t)\|_C.$$

Оскільки $\forall\, y(\cdot) \in (C)^m$ має місце нерівність

$$\|(U_\varepsilon - U_0)y(t)\| = \|\sum_{k=1}^{2}[B_k(\varepsilon) - B_k(0)]y(t_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{2}\|B_k(\varepsilon) - B_k(0)\| \cdot \|y(t_k)\| \leqslant \sum_{k=1}^{2}\|B_k(\varepsilon) - B_k(0)\| \cdot \|y(t)\|_C,$$

то з умови iii) леми 2.4, випливає, що при $\varepsilon \to 0+$ оператори U_ε рівномірно збігаються до U_0 по нормі простору $\mathcal{L}[C(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}^n); \mathbb{C}^n]$, тобто виконується імплікація iii) $\Rightarrow$ ii).

Залишилось показати, що i) $\Rightarrow$ iii). В банаховому просторі $C(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$ розглянемо кусково-лінійну функцію $\varphi_j(t)$ таку, що для послідовності точок $t_k \in [a, b]$

$$\varphi_j(t_k) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j, \quad k, j = 1, 2; \end{cases}$$

Для довільного вектора $h \in \mathbb{C}^m$ добуток $[\varphi_j(t) \cdot h] \in C^m$. Тоді має місце рівність

$$U_\varepsilon[\varphi_j(t)\cdot h] - U_0[\varphi_j(t)\cdot h] = \sum_{k=1}^{2} B_k(\varepsilon)[\varphi_j(t_k)\cdot h] - \sum_{k=1}^{2} B_k(0)[\varphi_j(t_k)\cdot h] =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}[B_k(\varepsilon) - B_k(0)][\varphi_j(t_k) \cdot h] = [B_j(\varepsilon) - B_j(0)]h$$

Із останньої рівності, згідно умови i) леми, випливає, що $B_j(\varepsilon) \overset{s}{\to} B_j(0)$ в просторі $\mathbb{C}^{m\times m}$, $j = 1, 2$. А це, в силу скінченновимірності простору $\mathbb{C}^{m\times m}$, рівносильне тому, що $B_k(\varepsilon) \to B_k(0)$, $k = 1, 2$. $\square$

2.3 Резольвентна аппроксимація

Розглянемо на скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ сім'ю матриць-функцій $A(\cdot;\varepsilon) := (a_{ij}(\cdot;\varepsilon))$, що задовольняють умовам (2.1). Відповідні їм квазіпохідні будемо позначати через $D_\varepsilon^{[0]}y, D_\varepsilon^{[1]}y, \ldots, D_\varepsilon^{[m]}y$. Вони породжують сім'ю квазідиференціальних виразів $l_\varepsilon(y)$ вигляду (2.2).

В гільбертовому просторі $L_2\left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right)$ такі вирази при кожному ε породжують оператори $L^\varepsilon_{\min}$, $L^\varepsilon_{\max}$. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Задамо для кожного фіксованого значення ε оператори

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon(y),$$

$$\mathrm{Dom}(L_\varepsilon) = \left\{y \in \mathrm{Dom}\left(L^\varepsilon_{\max}\right) \middle|\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0\right\}.$$

Очевидно, що

$$L^\varepsilon_{\min} \subset L_\varepsilon \subset L^\varepsilon_{\max}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Будемо позначати через $\rho(L)$ резольвентну множину абстрактного оператора L. Нагадаємо наступне

Означення 2.2. *Оператори L_ε збігаються при $\varepsilon \to 0+$ до оператора L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, $L_\varepsilon \overset{R}{\to} L_0$, якщо існує $\mu \in \mathbb{C}$, таке, що $\mu \in \rho(L_0)$, $\mu \in \rho(L_\varepsilon)$ для достатньо малих ε і*

$$\|(L_\varepsilon - \mu)^{-1} - (L_0 - \mu)^{-1}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Справедлива наступна лема [60]:

Лема 2.5. *Нехай оператор* L_0 *має непорожню резольвентну множину* $\rho(L_0)$. *Якщо* $L_\varepsilon \overset{R}{\to} L_0$, *то для будь-якого* $\lambda \in \rho(L_0)$: $\lambda \in \rho(L_\varepsilon)$ *для достатньо малих* ε *і*

$$\|(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (L_0 - \lambda)^{-1}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

тобто означення 2.2 не залежить від вибору $\mu \in \rho(L_0)$.

Головним результатом цього підрозділу є

Теорема 2.3. *Нехай резольвентна множина граничного квазідиференціального оператора* $\rho(L_0)$ *непорожня і виконані умови:*

1) $[A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)] \in \mathcal{M}^m$;

2) $\alpha(\varepsilon) \longrightarrow \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \longrightarrow \beta(0), \quad \varepsilon \to 0+.$

Тоді $L_\varepsilon \overset{R}{\to} L_0$.

Наступне твердження дозволяє звести теорему 2.3 до теореми 2.2.

Лема 2.6. *Функція* $y(t)$ *є розв'язком крайової задачі*

$$l_\varepsilon(y)(t) = f(t;\varepsilon) \in L_2, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{2.9}$$

$$\alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0 \tag{2.10}$$

тоді і тільки тоді, коли вектор-функція

$$w(t) = (D_\varepsilon^{[0]}y(t), D_\varepsilon^{[1]}y(t), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))$$

є розв'язком крайової задачі

$$w'(t) = A(t;\varepsilon)w(t) + \varphi(t;\varepsilon), \tag{2.11}$$

$$\alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0, \tag{2.12}$$

де $\varphi(\cdot;\varepsilon) := (0, 0, \ldots, 0, i^{-m}f(\cdot;\varepsilon)) \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^m)$.

Доведення. Якщо $y(\cdot)$ — розв'язок рівняння (2.9), то за означенням квазіпохідних $w(t)$ є розв'язком рівняння (2.11).

Враховуючи, що $\mathcal{Y}_\varepsilon(a) = w(a)$, $\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = w(b)$, легко бачити, що крайові умови (2.10) еквівалентні крайовим умовам (2.12). □

В силу леми 2.6 із припущення

($\mathcal{E}$) *Однорідна крайова задача*

$$D_0^{[m]}y(t) = 0, \quad \alpha(0)\mathcal{Y}_0(a) + \beta(0)\mathcal{Y}_0(b) = 0$$

має тільки тривіальний розв'язок

випливає, що однорідна крайова задача

$$w'(t) = A(t;\varepsilon)w(t), \quad \alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0$$

теж має тільки тривіальний розв'язок.

Означення 2.3. *Функцією Гріна задачі* (2.9), (2.10) *будемо називати функцію*

$$\Gamma(t, s; \varepsilon) \in L_\infty(\mathcal{J} \times \mathcal{J}, \mathbb{C}),$$

яка дозволяє представити розв'язок напіводнорідної крайової задачі (2.9), (2.10) *у вигляді*

$$y(t;\varepsilon) = \int_a^b \Gamma(t, s; \varepsilon)\varphi(s;\varepsilon)ds,\ t \in [a, b] \quad \forall\varphi(\cdot;\varepsilon) \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}). \quad (2.13)$$

Така функція визначається однозначно до значень на підмножині квадрата міри нуль.

Лема 2.7. *Нехай для задачі* (2.11), (2.12) *для достатньо малих* ε *існує матриця Гріна*

$$G(t, s, \varepsilon) = (g_{ij}(t, s))_{i,j=1}^m \in L_\infty\left(\mathcal{J} \times \mathcal{J}, \mathbb{C}^{m\times m}\right).$$

Тоді існує функція Гріна $\Gamma(t,s;\varepsilon)$ *напіводнорідної крайової задачі* (2.9), (2.10) *і*

$$\Gamma(t,s;\varepsilon)=i^{-m}g_{1m}(t,s;\varepsilon) \qquad \textit{м. с.}$$

Доведення. Згідно означення матриці Гріна, єдиний розв'язок задачі (2.11), (2.12) записується у вигляді

$$w_\varepsilon(t)=\int\limits_a^b G(t,s;\varepsilon)\varphi(s;\varepsilon)ds, \quad t\in[a,b].$$

В силу леми 2.6 останню рівність можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} D_\varepsilon^{[0]}y_\varepsilon(t)=\int\limits_a^b g_{1m}(t,s;\varepsilon)i^{-m}f(s;\varepsilon)ds \\ D_\varepsilon^{[1]}y_\varepsilon(t)=\int\limits_a^b g_{2m}(t,s;\varepsilon)i^{-m}f(s;\varepsilon)ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ D_\varepsilon^{[m]}y_\varepsilon(t)=\int\limits_a^b g_{mm}(t,s;\varepsilon)i^{-m}f(s;\varepsilon)ds, \end{cases}$$

де $y_\varepsilon(\cdot)$ - єдиний розв'язок задачі (2.9), (2.10). Звідси випливає твердження леми. □

Доведення теореми 2.3. Будемо спершу вважати, що $0\in\rho(L_0)$.

Покажемо, що $\sup\limits_{\|f\|_2=1}\|L_\varepsilon^{-1}f-L_0^{-1}f\|\to 0$, $\varepsilon\to 0+$.

Рівняння $L_\varepsilon^{-1}f=y_\varepsilon$ еквівалентно тому, що $L_\varepsilon y_\varepsilon=f$, тобто y_ε є розв'язком задачі (2.9), (2.10). При цьому з включення $0\in\rho(L_0)$ випливає, що виконується припущення $(\mathcal{E})$.

Тому з леми 2.6 випливає, з урахуванням леми 2.4, що виконуються умови теореми 2.2 для задачі (2.11), (2.12).

Це значить, що існують матриці Гріна $G(t,s;\varepsilon)$ задач (2.11), (2.12), і виконується граничне співвідношення (2.8). Враховуючи лему 2.7, звідси випливає гранична рівність

$$\|\Gamma(\cdot,\cdot;\varepsilon)-\Gamma(\cdot,\cdot;0)\|_\infty\to 0, \quad \varepsilon\to 0+.$$

Тоді

$$\|L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1}\| = \sup_{\|f\|_2=1} \| \int_a^b [\Gamma(t,s;\varepsilon) - \Gamma(t,s;0)] f(s) ds \|_2 \leq$$

$$\leq (b{-}a)^{1/2} \sup_{\|f\|_2=1} \| \int_a^b |\Gamma(t,s;\varepsilon) - \Gamma(t,s;0)| |f(s)| ds \|_C \leq$$

$$\leq (b-a) \|\Gamma(\cdot,\cdot;\varepsilon) - \Gamma(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

звідки випливає твердження теореми.

Тепер розглянемо загальний випадок. За умовою теореми, існує $\lambda \in \rho(L_0)$. Тоді очевидно $0 \in \rho(L_0 - \lambda)$.

Розглянемо детальніше оператор $L_0 - \lambda$. Він задається наступним чином:

$$(L_0 - \lambda) y = l_0(y) - \lambda y,$$

$$\mathrm{Dom}(L_0 - \lambda) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}\left(L^0_{\max}\right) \middle| \, \alpha(0) \mathcal{Y}_0(a) + \beta(0) \mathcal{Y}_0(b) = 0 \right\}.$$

Вираз $l_0(y) - \lambda y$ відповідає матриці $A_\lambda(\cdot;0)$, що визначається формулою (2.4), при цьому з умови

$$[A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)] \in \mathcal{M}^m$$

очевидно випливає, що

$$[A_\lambda(\cdot;\varepsilon) - A_\lambda(\cdot;0)] \in \mathcal{M}^m.$$

Тоді, застосувавши наведені вище міркування, отримуємо

$$L_\varepsilon - \lambda \overset{R}{\to} L_0 - \lambda.$$

Враховуючи лему 2.5, звідси випливає твердження теореми. □

Враховуючи лему 2.3, з теореми 2.3 випливають наступні достатні умови рівномірної резольвентної збіжності квазідиференціальних операторів.

Позначимо $R(\cdot;\varepsilon) := A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)$.

Теорема 2.4. *Нехай резольвентна множина граничного квазідиференціального оператора $\rho(L_0)$ непорожня і при $\varepsilon \to 0+$ виконані умови:*

1) *Виконуеться одна з чотирьох (нееквівалентних між собою) умов:*

$$(\alpha) \quad \|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1),$$

$$(\beta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon)\|_1 \to 0,$$

$$(\gamma) \quad \|R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0,$$

$$(\Delta) \quad \|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds \cdot R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon) \cdot \int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_1 \to 0;$$

2) $\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon)ds\|_C \to 0;$

3) $\alpha(\varepsilon) \longrightarrow \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \longrightarrow \beta(0).$

Тоді $L_\varepsilon \overset{R}{\to} L_0$.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі наведено ряд ключових для цього та наступного розділів означень та результатів.

На основі цих результатів в цьому розділі отримано достатні умови рівномірної резольвентної збіжності квазідиференціальних операторів в термінах збіжності матриць-функцій коефіцієнтів та крайових умов.

РОЗДІЛ 3

РОЗШИРЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

3.1 Симетричність мінімального оператора

В цьому розділі ми всюди припускаємо, що матриця Шина–Цеттла формально самоспряжена, тобто $A = A^{+}$. Тоді, очевидно, відповідний квазідиференціальний вираз є формально самоспряженим, тобто

$$l(y) = l^{+}(y).$$

Наведемо без доведення деякі властивості таких виразів, описані в [7] та [37].

Справедлива наступна теорема:

Теорема 3.1. *Оператор* $L_{\min} = L_{\min}^{+}$ *є симетричним в просторі* $L_2(\mathcal{J};\mathbb{C})$ *з індексом дефекта* (m, m) *і*

$$L_{\min}^{*} = L_{\max}, \quad L_{\max}^{*} = L_{\min}.$$

Також для нас будуть важливими дві наступні леми, наведені в [7]:

Лема 3.1. *Нехай* $y, z \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$. *Тоді*

$$\int\limits_a^b \left(D^{[m]}y \cdot \overline{z} - y \cdot \overline{D^{[m]}z} \right) dt = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D^{[m-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \,\Big|_{t=a}^{t=b}$$

Лема 3.2. *Для довільних наборів комплексних чисел* $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1}\}$, $\{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{m-1}\}$ *існує функція* $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$ *така, що*

$$D^{[k]}y(a) = \alpha_k, \quad D^{[k]}y(b) = \beta_k, \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

3.2 Простори граничних значень

Нехай L — абстрактний замкнений симетричний оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$.

Нагадаємо наступне означення [43]:

Означення 3.1. *Трійка* (H, Γ_1, Γ_2)*, де* H *– допоміжний гільбертів простір, а* Γ_1*,* Γ_2 *– лінійні відображення* $\mathrm{Dom}(L^*)$ *в* H*, називаеться простором граничних значень (далі ПГЗ) замкненого симетричного оператора* L *з рівними (скінченними або нескінченними дефектними числами), якщо:*

1. *для будь-яких* $f, g \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$

$$(L^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, L^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H$$

2. *для будь-яких векторів* $f_1, f_2 \in H$ *існує вектор* $f \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$ *такий, що* $\Gamma_1 f = f_1$*,* $\Gamma_2 f = f_2$*.*

З означення ПГЗ випливає, що $f \in \mathrm{Dom}\,(L)$ тоді і тільки тоді, коли $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$.

Справедлива наступна теорема [43]:

Теорема 3.2. *Для довільного симетричного оператора* L *з індексом дефекта* (n, n) $(n \leq \infty)$ *існує простір граничних значень* (H, Γ_1, Γ_2) *з* $dim H = n$*.*

Отже, ПГЗ існує для будь-якого симетричного оператора з рівними дефектними числами. Він завжди не єдиний. Зручний для застосувань явний вигляд ПГЗ симетричного в гільбертовому просторі $L_2\,(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ мінімального квазідиференціального оператора $L_{\min}$ дають наступні твердження:

Теорема 3.3. *Нехай* $m = 2n, n \geq 2$. *Позначимо через* $\Gamma_{[1]}$, $\Gamma_{[2]}$ *лінійні відображення з* $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ *в* $\mathbb{C}^{2n}$ *такі, що*

$$\Gamma_{[1]}y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ ..., \\ (-1)^{n-1}D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{[2]}y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix}$$

Тоді трійка $(\mathbb{C}^{2n}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ *є ПГЗ симетричного оператора* $L_{\min}$.

Доведення. Треба показати, що трійка $(\mathbb{C}^{2n}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ задовольняє умови 1) і 2) означення 3.1 з $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{J}; \mathbb{C})$. Згідно з теоремою 2.1, $L^*_{\min} = L_{\max}$.

Згідно з лемою 3.1

$$(L_{\max}y, z) - (y, L_{\max}z) = i^{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \,\Big|_{t=a}^{t=b}.$$

Введемо позначення:

$$\Gamma_{[1]} =: (\Gamma_{1a}, \Gamma_{1b}),$$

$$\Gamma_{[2]} =: (\Gamma_{2a}, \Gamma_{2b}),$$

де

$$\Gamma_{1a} = i^{2n}\left(-D^{[2n-1]}y(a), ..., (-1)^n D^{[n]}y(a)\right),$$
$$\Gamma_{1b} = i^{2n}\left(D^{[2n-1]}y(b), ..., (-1)^{n-1} D^{[n]}y(b)\right),$$
$$\Gamma_{2a} = \left(D^{[0]}y(a), ..., D^{[n-1]}y(a)\right),$$
$$\Gamma_{2b} = \left(D^{[0]}y(b), ..., D^{[n-1]}y(b)\right).$$

Тоді легко перевірити, що

$(\Gamma_{1a}y, \Gamma_{2a}z) = i^{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k D^{[2n-k]}y(a) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(a)},$

$(\Gamma_{2a}y, \Gamma_{1a}z) = i^{2n} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y(a) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(a)},$

$(\Gamma_{1b}y, \Gamma_{2b}z) = i^{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y(b) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(b)},$

$(\Gamma_{2b}y, \Gamma_{1b}z) = i^{2n} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} (-1)^k D^{[2n-k]}y(b) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(b)},$

Це показує, що

$$\left(\Gamma_{[1]}y, \Gamma_{[2]}z\right) = i^{2n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \,\Big|_{t=a}^{t=b} ,$$

і

$$\left(\Gamma_{[2]}y, \Gamma_{[1]}z\right) = i^{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^{k} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \,\Big|_{t=a}^{t=b} .$$

Отже, виконується умова 1) означення ПГЗ. Виконання умови 2) випливає з леми 3.2. □

Теорема 3.4. *Нехай* $m = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$. *Позначимо через* $\Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]}$ *лінійні відображення з* $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ *в* $\mathbb{C}^{2n+1}$ *такі, що*

$$\Gamma_{[1]}y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ ...., \\ (-1)^{n-1} D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{[2]}y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

де числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i.$

Тоді трійка $(\mathbb{C}^{2n+1}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ *є ПГЗ симетричного оператора* $L_{\min}$.

Зауваження 3.1. *Наведені значення коефіцієнтів можна замінити довільними наборами чисел, що задовольняють систему:*

$$\begin{cases} \alpha\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\gamma = (-1)^n, \\ \beta\overline{\delta} + \overline{\beta}\delta = (-1)^{n+1}, \\ \alpha\overline{\delta} + \overline{\beta}\gamma = 0, \\ \beta\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\delta = 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Доведення. Треба показати, що трійка $(\mathbb{C}^{2n+1}, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ задовольняє умови 1) і 2) означення 3.1 з $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{J}; \mathbb{C})$. Згідно з теоремою 2.1, $L^*_{\min} = L_{\max}$.

Згідно з лемою 3.1

$$(L_{\max}y, z) - (y, L_{\max}z) = i^{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z} \,\Big|_{t=a}^{t=b}.$$

Введемо позначення:

$$\Gamma_{[1]} =: (\Gamma_{1a}, \Gamma_{1b}, \Gamma_{1ab}),$$

$$\Gamma_{[2]} =: (\Gamma_{2a}, \Gamma_{2b}, \Gamma_{2ab}),$$

де

$$\Gamma_{1a} = i^{2n+1}\left(-D^{[2n]}y(a), ..., (-1)^n D^{[n+1]}y(a)\right),$$
$$\Gamma_{1b} = i^{2n+1}\left(D^{[2n]}y(b), ..., (-1)^{n+1} D^{[n+1]}y(b)\right),$$
$$\Gamma_{1ab} = i^{2n+1}\left(\alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a)\right),$$
$$\Gamma_{2a} = \left(D^{[0]}y(a), ..., D^{[n-1]}y(a)\right),$$
$$\Gamma_{2b} = \left(D^{[0]}y(b), ..., D^{[n-1]}y(b)\right),$$
$$\Gamma_{2ab} = \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a).$$

Тоді легко перевірити, що

$$(\Gamma_{1a}y, \Gamma_{2a}z) = i^{2n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}D^{[2n-k]}y(a)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(a)},$$
$$(\Gamma_{2a}y, \Gamma_{1a}z) = i^{2n+1}\sum_{k=n+2}^{2n+1}(-1)^{k}D^{[2n-k]}y(a)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(a)},$$
$$(\Gamma_{1b}y, \Gamma_{2b}z) = i^{2n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}D^{[2n-k]}y(b)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(b)},$$
$$(\Gamma_{2b}y, \Gamma_{1b}z) = i^{2n+1}\sum_{k=n+2}^{2n+1}(-1)^{k}D^{[2n-k]}y(b)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(b)},$$

$$(\Gamma_{1ab}y, \Gamma_{2ab}z) - (\Gamma_{2ab}y, \Gamma_{1ab}z) =$$
$$= i^{2n+1}(-1)^n\left(D^{[n]}y(b)\cdot\overline{D^{[n]}z(b)} - D^{[n]}y(a)\cdot\overline{D^{[n]}z(a)}\right).$$

З наведених співвідношень випливає, що виконується умова 1) означення 3.1.

Згідно з лемою 3.2, для будь-яких числових наборів $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1}\}$, $\{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{m-1}\}$ існує функція $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$ така, що

$$D^{[k]}y(a) = \alpha_k, \quad D^{[k]}y(b) = \beta_k, \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

Розглянемо довільні вектори $f_1 = (f_{1,k})_{k=0}^{2n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$, $f_2 = = (f_{2,k})_{k=0}^{2n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$.

З останнього співвідношення (3.1) випливає, що система

$$\begin{cases} \alpha\beta_n + \beta\alpha_n = f_{1,n} \\ \gamma\beta_n + \delta\alpha_n = f_{2,n} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Вибравши як α_n, β_n цей розв'язок, як $\alpha_k := f_{1,k}$, $\beta_k := f_{2,k}$, $k < n$, $\alpha_k := (-1)^{2n+1-k} f_{1,k}$, $\beta_k := (-1)^{2n-k} f_{2,k}$, $n + 1 < k < 2n$, отримуємо за лемою 3.2 функцію $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, для якої виконується умова 2) означення 3.1. □

3.3 Самоспряжені розширення мінімального оператора

За допомогою просторів граничних значень можна, зокрема, дати бієктивну параметризацію всіх самоспряжених розширень абстрактного симетричного оператора L.

Нехай (H, Γ_1, Γ_2) - його ПГЗ. Справедлива наступна теорема [43]:

Теорема 3.5. *Для будь-якого унітарного оператора K в просторі H звуження оператора L^* на множину векторів $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_1 y + i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{3.2}$$

є самоспряженим розширенням оператора L. Навпаки, будь-яке самоспряжене розширення оператора L є звуженням оператора L^* на множину векторів $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, що задовольняють умову (3.2)*, причому K визначається розширенням однозначно.*

Ця теорема разом з теоремами 3.3 та 3.4 дає наступний опис самоспряжених розширень мінімального квазідиференціального оператора $L_{\min}$.

Теорема 3.6. *Для будь-якого унітарного оператора K в просторі $\mathbb{C}^m$ звуження L_K оператора $L_{\max}$ на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_{[1]}y + i\,(K + I)\,\Gamma_{[2]}y = 0, \tag{3.3}$$

є самоспряженим розширенням оператора $L_{\min}$. Навпаки, для будь-якого самоспряженого розширення $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ існує унітарний оператор K в просторі $\mathbb{C}^m$ такий, що $\widetilde{L} = L_K$. Відповідність між унітарними операторами $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ є бієктивною.

З теореми 2.3 і теореми 3.6 випливає, що ця параметризація є не лише бієктивною, але також і неперервною в топології рівномірної резольвентної збіжності.

Теорема 3.7. *Самоспряжені розширення L_{K_j} оператора $L_{\min}$ збігаються до самоспряженого розширення L_K в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\|\left(L_K - \lambda\right)^{-1} - \left(L_{K_j} - \lambda\right)^{-1}\right\| \to 0,\ j \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні унітарні оператори K_j збігаються за нормою до оператора K. Тому відображення

$$K \to \left(L_K - \lambda\right)^{-1}, \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

є при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ гомеоморфізмом.

Доведення. Теорема 3.7 є частинним випадком наведеної нижче теореми 3.12 для максимальних дисипативних розширень. □

Наприкінці підрозділу ми окремо опишемо самоспряжені розширення оператора $L_{\min}$, задані розділеними крайовими умовами.

Позначимо через $\mathbf{f_c}$ росток неперервної функції f в точці c.

Означення 3.2. *Крайові умови, що визначають оператор* $L \subset L_{\max}$ *називаються розділеними, якщо для довільних функцій* $y \in \mathrm{Dom}(L)$ *і* $g, h \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$,

$$g, h \in \mathrm{Dom}(L) \quad \textit{якщо} \quad \mathbf{g_a} = \mathbf{y_a}, \quad \mathbf{g_b} = 0, \quad \mathbf{h_a} = 0, \quad \mathbf{h_b} = \mathbf{y_b}.$$

Теорема 3.8. *У випадку* $m = 2n$ *крайові умови* (3.3), *що визначають самоспряжені розширення* L_K *оператора* $L_{\min}$, *є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця* K *має блочно-діагональний вигляд*

$$K = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

де $K_a, K_b \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Доведення теореми 3.8 спирається на наступну лему:

Лема 3.3. *Нехай* $y, g \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$. *Тоді* $\mathbf{y_a} = \mathbf{g_a}$ *тоді і лише тоді, коли* $\mathbf{D^{[k]}y_a} = \mathbf{D^{[k]}g_a}$, $k = 0, 1, ..., m$. *Аналогічне твердження справедливе для точки* b.

Доведення. Нехай $\mathbf{D^{[k]}y_a} = \mathbf{D^{[k]}g_a}$, $k = 0, 1, ..., m$. Тоді очевидно

$$\mathbf{y_a} = \mathbf{D^{[0]}y_a} = \mathbf{D^{[0]}g_a} = \mathbf{g_a}.$$

Нехай тепер $\mathbf{y_a} = \mathbf{g_a}$. Тоді $\mathbf{D^{[0]}y_a} = \mathbf{D^{[0]}g_a}$, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in [a; a+\varepsilon) : D^{[0]}y(x) = D^{[0]}g(x).$$

Розглянемо першу квазіпохідну

$$D^{[1]}y = a_{1,2}^{-1}(x)\left((D^{[0]}y)' - a_{1,1}(x)D^{[0]}y\right).$$

Тоді для будь-яких $a_1 \in [a; a+\varepsilon/2]$ виконується

$$D^{[1]}y(a_1) = a_{1,2}^{-1}(a_1)\left(\lim_{x\to a_1}\frac{D^{[0]}y(x) - D^{[0]}y(a_1)}{x - a_1} - a_{1,1}(a_1)D^{[0]}y(a_1)\right) =$$

$$= a_{1,2}^{-1}(a_1)\left(\lim_{x\to a_1}\frac{D^{[0]}g(x)-D^{[0]}g(a_1)}{x-a_1} - a_{1,1}(a_1)D^{[0]}g(a_1)\right) = D^{[1]}g(a_1).$$

Оскільки з того, що $y, g \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$ випливає, що $y, g \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C})$, то $\mathbf{D^{[1]}y_a = D^{[1]}g_a}$.

Оскільки з останнього випливає, що $\exists\varepsilon > 0\,\forall x \in [a; a+\varepsilon)$: $D^{[0]}y(x) = D^{[0]}g(x), D^{[1]}y(x) = D^{[1]}g(x)$, то легко бачити, що, продовжуючи таким чином, отримуємо твердження леми для квазіпохідних порядку $k \le m$.

Для точки b доведення аналогічне. □

Доведення теореми 3.8. Доведемо, що крайові умови вигляду (3.3), де K — довільна матриця з $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$, є розділеними тоді і лише тоді, коли K має блочно-діагональний вигляд (3.4).

Враховуючи лему 3.3, очевидно, що з $\mathbf{y_a} = \mathbf{g_a}$ випливає, що $\Gamma_{1a}y = \Gamma_{1a}g$ і $\Gamma_{2a}y = \Gamma_{2a}g$.

Нехай матриця K в крайовій умові (3.3) має вигляд (3.4). Тоді умову (3.3) можна записати у вигляді наступної системи

$$\begin{cases} (K_a - I)\Gamma_{1a}y + i(K_a + I)\Gamma_{2a}y = 0, \\ -(K_b - I)\Gamma_{1b}y + i(K_b + I)\Gamma_{2b}y = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що такі крайові умови є розділеними.

Навпаки, припустимо, що умови (3.3) є розділеними. Матрицю $K \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ можна записати у вигляді

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

Треба показати, що $K_{12} = K_{21} = 0$.

Перепишемо умову (3.3) у вигляді системи

$$\begin{cases} (K_{11}-I)\Gamma_{1a}y + K_{12}\Gamma_{1b}y + i(K_{11}+I)\Gamma_{2a}y + iK_{12}\Gamma_{2b}y = 0, \\ K_{21}\Gamma_{1a}y + (K_{22}-I)\Gamma_{1b}y + iK_{21}\Gamma_{2a}y + i(K_{22}+I)\Gamma_{2b}y = 0. \end{cases}$$

З того, шо крайові умови є розділеними, випливає, що функція g така, що $\mathbf{g_a} = \mathbf{y_a}, \mathbf{g_b} = 0$ теж задовольняє цю систему. Згідно леми 3.3 це означає, що

$$\begin{cases} K_{11}\left[\Gamma_{1a}y + i\Gamma_{2a}y\right] = \Gamma_{1a}y - i\Gamma_{2a}y, \\ K_{21}\left[\Gamma_{1a}y + i\Gamma_{2a}y\right] = 0 \end{cases}$$

і, отже, $\Gamma_{1a}y + i\Gamma_{2a}y \in \operatorname{Ker}(K_{21})$ для довільної функції $y \in \operatorname{Dom}(L_K)$.

Повернемось до розгляду крайових умов (3.3) і запишемо їх у параметричній формі. Для будь-якого $F = (F_1, F_2) \in \mathbb{C}^{2n}$, розглянемо вектори $-i\,(K+I)\,F$ та $(K-I)\,F$.

В силу леми 3.2 існує функція $y_F \in \operatorname{Dom}(L_{\max})$ така що

$$\begin{cases} -i\,(K+I)\,F = \Gamma_{[1]}y_F, \\ (K-I)\,F = \Gamma_{[2]}y_F. \end{cases} \tag{3.5}$$

Легко бачити, що y_F задовольняє крайову умову (3.3) і тому $y_F \in \operatorname{Dom}(L_K)$.

Перепишемо (3.5) у вигляді системи

$$\begin{cases} -i(K_{11}+I)F_1 - iK_{12}F_2 = \Gamma_{1a}y_F, \\ -iK_{21}F_1 - i(K_{22}+I)F_2 = \Gamma_{1b}y_F, \\ (K_{11}-I)F_1 + K_{12}F_2 = \Gamma_{2a}y_F, \\ K_{21}F_1 + (K_{22}-I)F_2 = \Gamma_{2b}y_F. \end{cases}$$

Додавши перше і третє рівняння останньої системи отримуємо, що $\Gamma_{1a}y + i\Gamma_{2a}y = -2iF_1$ для довільного вектора $F_1 \in \mathbb{C}^n$. Таким чином, $\operatorname{Ker}(K_{21}) = \mathbb{C}^n$ і отже, $K_{21} = 0$.

Аналогічно доводиться, що $K_{12} = 0$.

$\square$

3.4 Дисипативні розширення мінімального оператора

Означення 3.3. *Щільно заданий лінійний оператор L в комплексному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ називають дисипативним, якщо*

$$Im(Lf, f)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad f \in Dom(L)$$

і максимальним дисипативним, якщо, крім того, у оператора L немає нетривіальних дисипативних розширень в просторі $\mathcal{H}$.

Зокрема, кожний симетричний оператор є дисипативним, а самоспряжений — максимальним дисипативним. Тому для симетричного квазідиференціального оператора $L_{\min}$ можна поставити питання про опис всіх його максимальних дисипативних розширень.

Наступна теорема належить Р. Філіпсу [29], див. також [43].

Теорема 3.9. *Нехай $\tilde{A}$ — дисипативне розширення симетричного оператора A. Тоді $\tilde{A} \subset A^*$.*

За допомогою просторів граничних значень можна описати всі максимальні дисипативні розширення абстрактного симетричного оператора L. Нехай, як і в попередньому підрозділі, (H, Γ_1, Γ_2) — його ПГЗ. Справедлива наступна теорема [43]:

Теорема 3.10. *Для будь-якого оператора стиску K в просторі H звуження оператора L^* на множину векторів $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду* (3.2), *є максимальним дисипативним розширенням оператора L. Навпаки, будь-яке максимальне дисипативне розширення оператора L*

є звуженням оператора L^* *на множину векторів* $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, *що задовольняють умову* (3.2), *причому* K *визначається розширенням однозначно.*

Ця теорема разом з теоремами 3.3 та 3.4 дає наступний опис максимальних дисипативних розширень мінімального симетричного квазідиференціального оператора $L_{\min}$.

Теорема 3.11. *Для будь-якого оператора стиску* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *звуження* L_K *оператора* $L_{\max}$ *на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду* (3.3), *є максимальним дисипативним розширенням оператора* $L_{\min}$. *Навпаки, для будь-якого максимального дисипативного розширення* $\widetilde{L}$ *оператора* $L_{\min}$ *існує оператор стиску* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *такий, що* $\widetilde{L} = L_K$. *Відповідність між операторами стиску* $\{K\}$ *і розширеннями* $\{\widetilde{L}\}$ *є бієктивною.*

З теореми 2.3 і теореми 3.11 випливає, що відображення $K \to L_K$ є не лише бієктивним, але також і неперервним в топології рівномірної резольвентної збіжності.

Теорема 3.12. *Максимальні дисипативні розширення* L_{K_j} *оператора* $L_{\min}$ *збігаються до максимального дисипативного розширення* L_K *в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, тобто*

$$\left\| (L_K - \lambda)^{-1} - \left(L_{K_j} - \lambda\right)^{-1} \right\| \to 0,\ j \to \infty,\ \mathrm{Im}\,\lambda < 0,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні оператори стиску K_j *збігаються за нормою до оператора* K. *Тому відображення*

$$K \to (L_K - \lambda)^{-1}, \mathrm{Im}\,\lambda < 0,$$

є при кожному фіксованому λ *гомеоморфізмом.*

Доведення. Розглянемо максимальні дисипативні розширення L_{K_i} мінімального квазідиференціального оператора $L_{\min}$, задані крайовими умовами вигляду (3.3):

$$(K_i - I)\,\Gamma_{[1]}y + i\,(K_i + I)\,\Gamma_{[2]}y = 0. \tag{3.6}$$

У випадку $m = 2n$ ці крайові умови можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} (K_{11,i} - I)\Gamma_{1a}y + K_{12,i}\Gamma_{1b}y + i(K_{11,i} + I)\Gamma_{2a}y + iK_{12,i}\Gamma_{2b}y = 0, \\ K_{21,i}\Gamma_{1a}y + (K_{22,i} - I)\Gamma_{1b}y + iK_{21,i}\Gamma_{2a}y + i(K_{22,i} + I)\Gamma_{2b}y = 0, \end{cases}$$

де $K_{11,i}, K_{12,i}, K_{21,i}, K_{22,i} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

У випадку ж $m = 2n + 1$ ці крайові умови можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} (K_{11,i} - I)\Gamma_{1a}y + K_{12,i}\Gamma_{1b}y + K_{13,i}\Gamma_{1ab}y + i(K_{11,i} + I)\Gamma_{2a}y + \\ \qquad + iK_{12,i}\Gamma_{2b}y + iK_{13,i}\Gamma_{2ab}y = 0, \\ K_{21,i}\Gamma_{1a}y + (K_{22,i} - I)\Gamma_{1b}y + K_{23,i}\Gamma_{1ab}y + iK_{21,i}\Gamma_{2a}y + \\ \qquad + i(K_{22,i} + I)\Gamma_{2b}y + iK_{23,i}\Gamma_{2ab}y = 0, \\ K_{31,i}\Gamma_{1a}y + K_{32,i}\Gamma_{1b}y + (K_{33,i} + 1)\Gamma_{1ab}y + iK_{31,i}\Gamma_{2a}y + \\ \qquad + iK_{32,i}\Gamma_{2b}y + i(K_{33,i} + 1)\Gamma_{2ab}y = 0, \end{cases}$$

де

$K_{11,i}, K_{12,i}, K_{21,i}, K_{22,i} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $K_{13,i}, K_{23,i}, K_{31,i}, K_{32,i} \in \mathbb{C}^n$, $K_{33,i} \in \mathbb{C}$.

Можна представити L_{K_i} у вигляді

$$L_{K_i}y = l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_{K_i}) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}\,(L_{\max}) \middle|\, \alpha(i)\mathcal{Y}(a) + \beta(i)\mathcal{Y}(b) = 0 \right\},$$

де

$$\mathcal{Y}(a) := \{D^{[0]}y(a), D^{[1]}y(a), \ldots, D^{[m-1]}y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}(b) := \{D^{[0]}y(b), D^{[1]}y(b), \ldots, D^{[m-1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

При цьому матриці $\alpha(i), \beta(i) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ будуть складатися з елементів матриці K_i, домножених на деякі константи. Тому із збіжності за нормою K_i до K випливає збіжність $\alpha(i) \to \alpha(0)$, $\beta(i) \to \beta(0)$. Тоді виконуються умови теореми 2.3 для розширень L_{K_i}.

Тепер нехай послідовність L_{K_i} збігається до L_K в сенсі резольвентної збіжності. Розглянемо послідовність відповідних операторів K_i. Оскільки множина стискаючих операторів в скінченновимірному просторі $\mathbb{C}^m$ є компактом в метриці норми оператора, то ця послідовність містить збіжну підпослідовність.

Нехай ця підпослідовність K_{i_p} збігається до деякого $\widetilde{K} \neq K$. Тоді

$$\left\| \left(L_{\widetilde{K}} - \lambda\right)^{-1} - \left(L_{K_{i_p}} - \lambda\right)^{-1} \right\| \to 0,\ i \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda < 0,$$

що суперечить теоремі 2.3. □

Перейдемо до опису максимальних дисипативних розширень оператора $L_{\min}$, заданих розділеними крайовими умовами.

Теорема 3.13. *У випадку* $m = 2n$ *крайові умови* (3.3)*, що визначають максимальні дисипативні розширення* L_K *оператора* $L_{\min}$ *є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця* K *має блочно-діагональний вигляд* (3.4)*, де* $K_a, K_b \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Доведення. Як було показано вище при доведенні теореми 3.8, розширення L_K, задані умовами виду (3.3), де K довільна матриця з $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$ є розділеними тоді і лише тоді, коли K має вигляд (3.4). □

3.5 Акумулятивні розширення мінімального оператора

Означення 3.4. *Щільно заданий лінійний оператор* L *в комплексному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *називають акумулятивним,* *якщо*

$$Im(Lf, f)_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad f \in \mathrm{Dom}(L)$$

і максимальним акумулятивним, якщо, крім того, у оператора L немає нетривіальних акумулятивних розширень в просторі $\mathcal{H}$.

Оскільки акумулятивні оператори можна отримати з дисипативних множенням на -1, то наведені вище результати для максимальних дисипативних операторів переносяться на максимальні акумулятивні.

Кожний симетричний оператор є акумулятивним, а самоспряжений – максимальним акумулятивним. Тому для симетричного квазідиференціального оператора $L_{\min}$ можна поставити питання про опис всіх його максимальних акумулятивних розширень.

Для акумулятивних операторів також справедлива теорема Філіпса [29], див. також [43].

Теорема 3.14. *Нехай $\tilde{A}$ – акумулятивне розширення симетричного оператора A. Тоді $\tilde{A} \subset A^*$.*

За допомогою просторів граничних значень можна описати всі максимальні акумулятивні розширення абстрактного симетричного оператора L з ПГЗ (H, Γ_1, Γ_2). Справедлива наступна теорема [43]:

Теорема 3.15. *Для будь-якого оператора стиску K в просторі H звуження оператора L^* на множину векторів $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_1 y - i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{3.7}$$

є максимальним акумулятивним розширенням оператора L. Навпаки, будь-яке максимальне акумулятивне розширення оператора L є звуженням оператора L^* на множину векторів $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, *що задовольняють умову* (3.2)*, причому K визначається розширенням однозначно.*

Ця теорема разом з теоремами 3.3 та 3.4 дає наступний опис максимальних акумулятивних розширень мінімального квазідиференціального оператора $L_{\min}$.

Теорема 3.16. *Для будь-якого оператора стиску K в просторі $\mathbb{C}^m$ звуження L_K оператора $L_{\max}$ на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K-I)\,\Gamma_{[1]}y - i\,(K+I)\,\Gamma_{[2]}y = 0, \tag{3.8}$$

є максимальним акумулятивним розширенням оператора $L_{\min}$. Навпаки, для будь-якого максимального акумулятивного розширення $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ існує оператор стиску K в просторі $\mathbb{C}^m$ такий, що $\widetilde{L} = L_K$. Відповідність між операторами стиску $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ є бієктивною.

Як і для максимальних дисипативних розширень, ця параметризація є також неперервною в топології рівномірної резольвентної збіжності.

Теорема 3.17. *Максимальні акумулятивні розширення L_{K_j} оператора $L_{\min}$ збігаються до максимального акумулятивного розширення L_K в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\|(L_K-\lambda)^{-1} - \left(L_{K_j}-\lambda\right)^{-1}\right\| \to 0,\ j\to\infty,\ \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні стискаючі оператори K_j збігаються за нормою до оператора K. Тому відображення

$$K \to (L_K-\lambda)^{-1}, \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

є при кожному фіксованому λ гомеоморфізмом.

Доведення. Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 3.12. □

Теорема 3.18. *У випадку $m = 2n$ крайові умови (3.8), що визначають максимальні акумулятивні розширення L_K оператора $L_{\min}$ є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця K має блочно-діагональний вигляд (3.4), де $K_a, K_b \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 3.8, можна показати, що розширення L_K, задані умовами виду (3.8), де K довільна матриця з $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$ є розділеними тоді і лише тоді, коли K має вигляд (3.4). □

3.6 Узагальнені резольвенти

Нехай знову L — абстрактний замкнений симетричний оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з щільною областю визначення.

Нагадаємо відоме

Означення 3.5. *Узагальненою резольвентою замкненого симетричного оператора L називаєтьcя операторна функція R_λ комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, яка допускає представлення вигляду*

$$R_\lambda f = P^+ \left(L^+ - \lambda I^+\right)^{-1} f, \quad f \in \mathcal{H},$$

де L^+ – деяке самоспряжене розширення оператора L з виходом, взагалі кажучи, в більш широкий, ніж $\mathcal{H}$, простір $\mathcal{H}^+$, I^+ — одиничний оператор в $\mathcal{H}^+$, P^+ — оператор ортогонального проектування $\mathcal{H}^+$ на $\mathcal{H}$.

Операторна функція R_λ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ є узагальненою резольвентою симетричного оператора L тоді і тільки тоді, коли

$$(R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \quad f, g \in \mathcal{H},$$

де F_μ — узагальнена спектральна функція оператора L. Це означає, що операторна функція F_μ, $\mu \in \mathbb{R}$, має наступні властивості [38]:

1^0. При $\mu_2 > \mu_1$ різниця $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ є обмеженим невід'ємним оператором;

2^0. $F_{\mu+} = F_\mu$ при всіх дійсних μ;

3^0. При будь-якому $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\mu \to -\infty} ||F_\mu x||_{\mathcal{H}} = 0, \quad \lim_{\mu \to +\infty} ||F_\mu x - x||_{\mathcal{H}} = 0.$$

Наступний результат належить В. М. Бруку [42] (див. Т. 1 і Заув. 1).

Нехай H — допоміжний сепарабельний гільбертів простір. Символом $\{X, X'\}$ будемо позначати впорядковану пару з $X, X' \in H$. Пари $\{X, X'\}$ розглядаються як елементи простору $H \oplus H$. Нехай існує лінійний оператор γ, що відображає область визначення $\mathrm{Dom}(L^*)$ спряженого до L оператора L^* на $H \oplus H$, такий, що має місце рівність

$$(L^* x, y) - (x, L^* y) = (X', Y)_H - (X, Y')_H,$$

де $x, y \in \mathrm{Dom}(L)$, $\{X, X'\} = \gamma x$, $\{Y, Y'\} = \gamma y$.

Теорема 3.19. *Існує взаємно однозначна відповідність між узагальненими резольвентами оператора* L *і крайовими задачами*

$$L^* y = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\, Y' \mp i\, (K(\lambda) + I)\, Y = 0$$

де $\{Y, Y'\} = \gamma y$, $h \in \mathcal{H}$, λ *— комплексне число і знак „+“ в крайовій умові береться для значень* λ *з верхньої півплощини, а „−“ для* λ *з нижньої півплощини.* $K(\lambda)$ *— задана регулярна в верхній півплощині операторна функція в* H*, така, що* $\|K(\lambda)\|_H \leq 1$*; для значень* λ *з нижньої півплощини* $K(\lambda)$ *визначається як* $K^*(\overline{\lambda})$.

Кожний розв'язок задачі визначає узагальнену резольвенту оператора L *і навпаки, кожна узагальнена резольвента оператора* L *визначається розв'язком даної задачі.*

З допомогою цієї теореми можна описати всі узагальнені резольвенти мінімального симетричного квазідиференціального оператора $L_{\min}$ на всій комплексній площині.

Параметричний опис всіх узагальнених резольвент оператора $L_{\min}$ дає

Теорема 3.20. 1) *Кожна узагальнена резольвента* R_λ *оператора* $L_{\min}$ *в півплощині* $\operatorname{Im}\lambda < 0$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$*, де* y *— розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]}f + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]}f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *— регулярна в нижній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^m$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

2) *У півплощині* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *кожна узагальнена резольвента оператора* $L_{\min}$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$*, де* y *— розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]}f - i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]}f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *— регулярна в верхній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^m$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

Ця параметризація узагальнених резольвент операторними функціями K *є бієктивною.*

Доведення. Очевидно, що допоміжний сепарабельний гільбертів простір $\mathbb{C}^m$ і оператор $\gamma y = \{\Gamma_{[1]}y, \Gamma_{[2]}y\}$, який відображає $\mathrm{Dom}(L_{\min})$ на $\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m$, задовольняють умови теореми 3.19. $\square$

Зауваження 3.2. *Розглянемо абстрактний симетричний оператор* L *з ПГЗ* $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$. *Тоді легко бачити, що трійка* $(\mathbb{C}^m, -\Gamma_1, \Gamma_2)$ *буде ПГЗ оператора* $-L$.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі дисертаційної роботи одержано наступні основні результати:

1. Побудовано в явному вигляді простори граничних значень для симетричних квазідиференціальних операторів довільного порядку.
2. Дано бієктивну параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень таких операторів.
3. Доведено, що ця параметризація є неперервною в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.
4. Дано параметричний бієктивний опис узагальнених резольвент симетричних квазідиференціальних операторів.

РОЗДІЛ 4

ОПЕРАТОРИ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

4.1 Вирази Штурма–Ліувілля

В цьому розділі ми розглядаємо оператори, породжені диференціальними виразами

$$l(y) = -(py')'(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J} \tag{4.1}$$

на скінченному інтервалі $\mathcal{J} := (a, b)$.

Якщо коефіцієнти в (4.1) є дійсними функціями, які задовольняють умовам

$$q \in C(\overline{\mathcal{J}}), \quad 0 < p \in C^1(\overline{\mathcal{J}}), \tag{4.2}$$

то рівняння $l(y) = f$ є класичним диференціальним рівнянням Штурма–Ліувілля. Воно вивчене дуже повно. Сучасний виклад класичної теорії Штурма–Ліувілля наведено в багатьох монографіях. Основні положення цієї теорії залишаються в силі і при більш загальних умовах

$$q, 1/p \in L_1 \left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right), \tag{4.3}$$

див. [36] і наведені там посилання. При цьому використовується регуляризація виразу (4.1) за допомогою квазіпохідних.

Розвиваючи цей підхід, авторам [77] вдалося довести, що якщо $p(t) \equiv 1$, то умову на коефіцієнт q можна істотно послабити. Досить припускати, що

$$p(t) \equiv 1, \quad q = Q', \quad Q \in L_2 \left(\mathcal{J}, \mathbb{C}\right), \tag{4.4}$$

де похідна функції Q розуміється в сенсі узагальнених функцій.

Слід відмітити, що одновимірні оператори Шрьодінгера з потенціалом, що є мірою Радона, було задовго до того введено і досліджено фізиками з використанням методів теорії операторів (див. [1] і наведені там посилання).

Ми визначимо і дослідимо оператори Штурма–Ліувілля на інтервалі $\mathcal{J}$ з коефіцієнтами, що задовольняють більш загальні, ніж (4.3) і (4.4), умови

$$q = Q', \quad 1/p, Q/p, Q^2/p \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}), \tag{4.5}$$

де похідна розуміється в сенсі узагальнених функцій.

При цьому ми будемо орієнтуватись на виклад роботи [77] і порівнювати отримані нами результати з її результатами.

4.2 Регуляризація за допомогою квазіпохідних

Розглянемо формальний диференціальний вираз (4.1) в припущенні, що виконуються умови (4.5). Введемо квазіпоходні:

$$\begin{aligned} &D^{[0]}y = y, \\ &D^{[1]}y = py' - Qy, \\ &D^{[2]}y = (D^{[1]}y)' + \frac{Q}{p}D^{[1]}y + \frac{Q^2}{p}y. \end{aligned}$$

За умов (4.5) вони є квазіпохідними Шина–Цеттла. Відповідна їм матриця Шина–Цеттла має вигляд

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{Q}{p} & \frac{1}{p} \\ -\frac{Q^2}{p} & -\frac{Q}{p} \end{pmatrix} \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}^{2\times 2}).$$

Слід відмітити, що для випадку $p \equiv 1$ такі квазіпохідні було введено в роботі [77].

Оскільки коефіцієнти квазіпохідних задовольняють умови (2.1), вираз (4.1) можна визначити як квазідиференціальний вираз

$$l[y] := -D^{[2]}y.$$

Нагадаємо, що розв'язок задачі Коші для резольвентного рівняння

$$l[y] - \lambda y = f \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), \quad y(c) = \alpha_1, \quad (D^{[1]}y)(c) = \alpha_2, \tag{4.6}$$

де $c \in \overline{\mathfrak{J}}$ і α_1, α_2 довільні комплексні числа, визначається як перша компонента розв'язку задачі Коші для відповідної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$w'(t) = A_\lambda(t)w(t) + \varphi(t), \quad w(c) = (\alpha_1, \alpha_2), \tag{4.7}$$

де вектор-функція $w(t) = (y(t), D^{[1]}y(t))$, квадратна матриця-функція

$$A_\lambda(t) := A - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{2\times 2}),$$

і $\varphi(t) := (0, -f(t))$.

З леми 2.1 випливає, що задача Коші (4.6) за умов (4.5) має єдиний розв'язок на $\overline{\mathfrak{J}}$.

Як і в загальному випадку, квазідиференціальний вираз $l[y]$ породжує *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_{\max} : y \to l[y],$$

$$\operatorname{Dom}(L_{\max}) := \left\{ y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \,\middle|\, y, D^{[1]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}), D^{[2]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\}$$

в гільбертому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора $L_{\max}$ на множину

$$\operatorname{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \operatorname{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0, k = 0, 1 \right\}.$$

Наступне твердження показує, що ці оператори не залежать від вибору первісної функції Q.

Твердження 4.1. *Позначимо* $\widetilde{Q} := Q + c$, $c \in \mathbb{C}$. *Тоді оператор* $L_{\max} = L_{\max}(Q)$ *співпадає з оператором* $\widetilde{L}_{\max} = L_{\max}(\widetilde{Q})$ *і* $L_{\min} = \widetilde{L}_{\min}$.

Доведення. Покажемо, що оператор $\widetilde{L}_{\max}$ співпадає з оператором $L_{\max}$. Позначимо $\widetilde{D}^{[0]}y, \widetilde{D}^{[1]}y, \widetilde{D}^{[2]}y$ квазіпохідні, що відповідають парі $p, \widetilde{Q}$.

Нехай $y \in \operatorname{Dom}(L_{\max})$. Прямим підрахунком отримуємо, що

$$\begin{aligned} \widetilde{D}^{[0]}y &= D^{[0]}y \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), \\ \widetilde{D}^{[1]}y &= D^{[1]}y - c\widetilde{D}^{[0]}y \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), \\ \widetilde{D}^{[2]}y &= D^{[2]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} &\operatorname{Dom}(L_{\max}) = \\ &\quad = \left\{ y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \,\middle|\, y, D^{[1]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}), D^{[2]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\} \subset \\ &\quad \subset \left\{ y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \,\middle|\, y, \widetilde{D}^{[1]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}), \widetilde{D}^{[2]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\} = \\ &\quad = \operatorname{Dom}(\widetilde{L}_{\max}). \end{aligned}$$

Аналогічно показується, що $\operatorname{Dom}(L_{\max}) \supset \operatorname{Dom}(\widetilde{L}_{\max})$.

Нарешті,

$$\widetilde{L}_{\max}y = i^2\widetilde{D}^{[2]}y = i^2D^{[2]}y = L_{\max}y, \quad y \in \operatorname{Dom}(L_{\max}).$$

Покажемо тепер, що $\widetilde{L}_{\min} = L_{\min}$.

Нехай $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}^{[0]}y(a) = D^{[0]}y(a) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[0]}y(b) = D^{[0]}y(b) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[1]}y(a) = D^{[1]}y(a) - c\widetilde{D}^{[0]}y(a) = 0 - 0 = 0,\\
&\widetilde{D}^{[1]}y(b) = D^{[1]}y(b) - c\widetilde{D}^{[0]}y(b) = 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Це означає, що

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dom}(L_{\min}) =\\
&\quad = \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0, k = 0,1 \right\} \subset\\
&\quad\quad \subset \left\{ y \in \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\max}) \,\middle|\, \widetilde{D}^{[k]}y(a) = \widetilde{D}^{[k]}y(b) = 0, k = 0,1 \right\} =\\
&\quad\quad\quad = \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\min}).
\end{aligned}$$

Аналогічно встановлюється, що $\mathrm{Dom}(L_{\min}) \supset \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\min})$.

Оскільки $\widetilde{L}_{\min}y = \widetilde{L}_{\max}y = L_{\max}y = L_{\min}y$ на функціях $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$, то твердження доведене. □

Наступне твердження показує, що введене нами означення диференціального оператора узгоджено з класичним.

Твердження 4.2. *Якщо коефіцієнти в* (4.1) *задовольняють умови* (4.3)*, тобто*

$$q, 1/p \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}),$$

то оператори $L_{\max}, L_{\min}$ *співпадають з класичними операторами Штурма–Ліувілля [36, 75].*

Доведення. З того, що $q \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ випливає, що $Q \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Це означає, що для $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$: $-D^{[2]}y = l(y)$.

Згідно [36] областю визначення максимального оператора Штурма–Ліувілля є $D_{\max} = \{y | y, py' \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), l(y) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})\}$.

Доведемо, що $D_{\max} \subset \mathrm{Dom}(L_{\max})$. Очевидно, що якщо $y, py', Q \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$, то $D^{[0]}y, D^{[1]}y \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$, а отже, існує $D^{[2]}y \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Крім того, в такому випадку $-D^{[2]}y = l(y) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Отже, $D_{\max} \subset \mathrm{Dom}(L_{\max})$.

Навпаки, з того, що $D^{[0]}y, D^{[1]}y \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ випливає, що $y, py' \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Крім того, $l(y) = -D^{[2]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Отже, $D_{\max} = \mathrm{Dom}(L_{\max})$.

Мінімальний оператор Штурма–Ліувілля на відрізку визначається як звуження максимального оператора на множину $\{y \in D_{\max} | \, y(a) = y(b) = 0\}$. Очевидно, що цій умові задовольняють функції $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$. Навпаки, з того, що $y(a) = y(b) = 0$ випливає, що $D^{[0]}y(a) = D^{[0]}y(b) = D^{[1]}y(a) = D^{[1]}y(b) = 0$, що завершує доведення. □

Зауваження 4.1. *Добре відомо, що якщо коефіцієнти в* (4.1) *задовольняють умови* $p \equiv 1$, $q \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$, *то*

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = W_2^2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \subset C^1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}).$$

Наступний приклад показує, що в загальному випадку $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ може складатися лише з негладких функцій.

Приклад 4.1. *Розглянемо на скінченному інтервалі* $\mathfrak{J}$ *вираз*

$$l(y) = -y'' + \sum_{x_k \in \mathbb{Q} \cap \mathfrak{J}} \alpha_k \delta(x - x_k) y.$$

Тоді $Q = \sum\limits_{x_k \in \mathbb{Q} \cap \mathfrak{J}} \alpha_k \theta(x - x_k)$, *де* $\theta(x)$ *– функція Хевісайда. За умов* $\alpha_k \neq 0, k \in \mathbb{N}$ *і* $\sum\limits_{k\ in\mathbb{N}} |\alpha_k| < \infty$ *маємо, що* Q *є функцією обмеженої* *варіації, але*

$$\mathrm{Dom}(L_{\max})\bigcap C^1([\alpha,\beta]) = \{y\,|y(x)=0, x\in[\alpha,\beta]\} \quad \forall\ [\alpha,\beta]\subset\mathfrak{J}.$$

Дійсно, $Q \in BV(\mathfrak{J},\mathbb{C}) \subset L_2(\mathfrak{J},\mathbb{C})$ і, отже, вираз $l(y)$ задовольняє умови (4.5). Таким чином, визначений оператор $L_{\max}$. Згідно з означенням цього оператора для $y\in\mathrm{Dom}(L_{\max})$ виконується умова $y, D^{[1]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}},\mathbb{C})$. При цьому з того, що $D^{[1]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}},\mathbb{C})$ випливає, що $D^{[1]}y(x_k-) \;=\; D^{[1]}y(x_k+), \quad x_k\in\mathbb{Q}\cap\mathfrak{J}$.

Отже,

$$y'(x_k+)-y'(x_k-)=\alpha_k y(x_k).$$

Звідси випливає, що y є неперервно диференційовною в точці x_k для деякого k тоді і тільки тоді, коли $y(x_k)=0$. Оскільки множина раціональних чисел є щільною в будь-якому інтервалі $[\alpha,\beta]$ і $y\in AC(\overline{\mathfrak{J}},\mathbb{C})$, то це означає, що $y\equiv 0$ на $[\alpha,\beta]$.

Зауваження 4.2. *Очевидно, що якщо коефіцієнти в* (4.1) *задовольняють умови* (4.4)*, то оператори* $L_{\max}, L_{\min}$ *тотожні операторам, введеним раніше в роботі [77].*

Розглянемо диференціальний вираз

$$l^+(y) = -(\overline{p}y')'(t)+\overline{q}(t)y(t),$$

де риска над символом позначає комплексне спряження. Легко перевірити, що він є формально спряженим до (4.1). Позначимо $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені $l^+(y)$ у просторі $L_2(\mathfrak{J},\mathbb{C})$. Тоді з теорем 2.1 та 3.1 випливає наступна

Теорема 4.1. *Оператори* $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ *замкнені і щільно задані в просторі* $L_2(\mathfrak{J},\mathbb{C})$,

$$L^*_{\min}=L^+_{\max},\quad L^*_{\max}=L^+_{\min}.$$

У випадку, коли p і Q є дійсними функціями, оператор $L_{\min} = L^{+}_{\min}$ є симетричним з індексом дефекта $(2,2)$, і

$$L^{*}_{\min} = L_{\max}, \quad L^{*}_{\max} = L_{\min}.$$

4.3 Резольвентна апроксимація операторів Штурма–Ліувілля

Розглянемо сім'ю виразів $l_{\varepsilon}(y)$ вигляду (4.1) з коефіцієнтами

$$p_{\varepsilon}, q_{\varepsilon} = Q'_{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

що задовольняють умовам (4.5).

За ними побудуємо матриці Шина–Цеттла

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} Q_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} & 1/p_{\varepsilon} \\ -Q^2_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} & -Q_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} \end{pmatrix} \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{2\times 2}) \tag{4.8}$$

та квазіпохідні $D^{[0]}_{\varepsilon}y, D^{[1]}_{\varepsilon}y, D^{[2]}_{\varepsilon}y$. За допомогою регуляризації, наведеної в підрозділі 4.2, визначимо квазідиференціальні вирази

$$l_{\varepsilon}[y] \ := \ -D^{[2]}_{\varepsilon}y.$$

В гільбертовому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ ці вирази породжують оператори $L^{\varepsilon}_{\min}$, $L^{\varepsilon}_{\max}$ для кожного ε. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ а вектори

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) := \left\{y(a), D^{[1]}_{\varepsilon}y(a)\right\}, \quad \mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) := \left\{y(b), D^{[1]}_{\varepsilon}y(b)\right\} \in \mathbb{C}^2.$$

Як і в загальному випадку, для кожного фіксованого значення ε задаються оператори

$$L_{\varepsilon}y = l_{\varepsilon}[y], \quad \mathrm{Dom}(L_{\varepsilon}) = \left\{y \in \mathrm{Dom}\,(L^{\varepsilon}_{\max}) \middle| \, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) = 0\right\}.$$

Очевидно, що $L^{\varepsilon}_{\min} \subset L_{\varepsilon} \subset L^{\varepsilon}_{\max}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

В роботі [77] для випадку, коли матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)$ не залежать від ε і $p_{\varepsilon}(t) \equiv 1$, встановлено наступну теорему.

Теорема 4.2. *Нехай* $\|Q_{\varepsilon} - Q_0\|_2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to +0$ *і резольвентна множина* $\rho(L_0)$ *не порожня. Тоді* $L_{\varepsilon} \overset{R}{\to} L_0$.

Наступна теорема істотно узагальнює цей результат.

Теорема 4.3. *Нехай резольвентна множина граничного оператора* $\rho(L_0)$ *непорожня і для* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

$$(1)\ \|1/p_{\varepsilon}\|_1 = O(1),\ \|Q_{\varepsilon}/p_{\varepsilon}\|_1 = O(1),\ \|Q^2_{\varepsilon}/p_{\varepsilon}\|_1 = O(1);$$

$$(2)\ \|\int\limits_a^t (1/p_{\varepsilon} - 1/p_0) ds\|_C \to 0;$$

$$(3)\ \|\int\limits_a^t (Q_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} - Q_0/p_0) ds\|_C \to 0;$$

$$(4)\ \|\int\limits_a^t (Q^2_{\varepsilon}/p_{\varepsilon} - Q^2_0/p_0) ds\|_C \to 0;$$

$$(5)\ \alpha(\varepsilon) \to \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \to \beta(0).$$

Тоді $L_{\varepsilon} \overset{R}{\to} L_0$.

Доведення. Оскільки оператори L_{ε} є частковим випадком розглянутих в розділі 2.3 загальних квазідиференціальних операторів, досить показати, що виконуються умови теореми 2.4. Але з умови (1) випливає, що виконується умова (α) для матриці $R(\cdot;\varepsilon) := A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)$, де матриці $A(\cdot;\varepsilon)$ задані рівністю (4.8).

Аналогічно, з умов (2) – (4) випливає, що

$$\|\int\limits_a^t R(s;\varepsilon) ds\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Тому твердження теореми випливає з теореми 2.4. □

Зауваження 4.3. *Замість умови (1) в теоремі 4.3 можна вимагати, щоби матриця $R(\cdot;\varepsilon)$ задовольняла будь-яку з умов (β), (γ), (Δ) леми 2.3.*

Порівняємо теорему 4.3 з теоремою 4.2 роботи [77].

У випадку $p_\varepsilon(t) \equiv 1$, умови (1), (2) теореми 4.3 виконується автоматично. Покажемо, що умови (3) і (4) слабші за умову

$$\|Q_\varepsilon - Q_0\|_2 \to 0.$$

Для цього розглянемо оператори L_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, породжені сім'єю виразів Шрьодінгера

$$l_\varepsilon(y) = -y''(t) + q_\varepsilon(t)y(t), \quad t \in \mathfrak{J}.$$

за умов (4.4), тобто

$$q_\varepsilon = Q'_\varepsilon, \quad Q_\varepsilon \in L_2\left(\mathfrak{J}, \mathbb{C}\right),.$$

Відповідна матриця Шина–Цеттла має вигляд

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} Q_\varepsilon & 1 \\ -Q_\varepsilon^2 & -Q_\varepsilon \end{pmatrix} \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{2\times 2})$$

Тоді теорема 4.3 має вигляд

Твердження 4.3. *Нехай резольвентна множина оператора $\rho(L_0)$ непорожня і при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:*

$$1) \quad \|Q_\varepsilon\|_2 = O(1);$$

$$2) \quad \|\int_a^t (Q_\varepsilon - Q_0)ds\|_C \to 0;$$

$$3) \quad \|\int_a^t (Q_\varepsilon^2 - Q_0^2)ds\|_C \to 0;$$

$$4) \quad \alpha(\varepsilon) \to \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \to \beta(0).$$

Тоді $L_\varepsilon \overset{R}{\to} L_0$.

Спершу покажемо, що якщо $\|Q_\varepsilon - Q_0\|_2 \to 0$, $\varepsilon \to +0$, то виконується умови 1)–3) твердження 4.3.

Дійсно, $\|Q_\varepsilon\|_2 \le \|Q_\varepsilon - Q_0\|_2 + \|Q_0\|_2 = O(1)$. Крім того,

$$|\int_a^t (Q_\varepsilon - Q_0)ds| \le \int_a^b |Q_\varepsilon - Q_0|ds \le$$
$$\le (\int_a^b |Q_\varepsilon - Q_0|^2 ds)^{1/2}(b-a)^{1/2} \to 0,\ \varepsilon \to +0.$$
$$|\int_a^t (Q_\varepsilon^2 - Q_0^2)ds| \le \int_a^b |Q_\varepsilon^2 - Q_0^2|ds \le \int_a^b |Q_\varepsilon - Q_0||Q_\varepsilon + Q_0|ds \le$$
$$\le (\int_a^b |Q_\varepsilon - Q_0|^2 ds)^{1/2}(\int_a^b |Q_\varepsilon + Q_0|^2 ds)^{1/2} \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Отже, твердження 4.3 виконується за умов теореми 4.2. Наведений нижче приклад показує, що твердження 4.3, а отже і теорема 4.3 сильніша за теорему 4.2.

Приклад 4.2. *Розглянемо на інтервалі* $\mathcal{J} = (0,1)$ *сім'ю виразів вигляду* (4.1) *з коефіцієнтами* $p_\varepsilon \equiv 1$, $q_\varepsilon = Q'_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *де* $Q_0(t) \equiv 0$, $Q_\varepsilon(t) = e^{it/\varepsilon}$.

Сім'я операторів L_ε, що визначаються такими виразами, не задовольняє умови теореми 4.2, оскільки

$$\|Q_\varepsilon - Q_0\|_2^2 = \|Q_\varepsilon\|_2^2 = \int_0^1 |Q_\varepsilon|^2 ds \equiv 1.$$

Легко бачити, що функції $Q_\varepsilon(\cdot)$ не збігаються до 0 навіть по мірі Лебега. Однак, вони задовольняють умовам 1), 2), 3) твердження 4.3. Дійсно,

$$\|Q_\varepsilon\|_2 \le 1,$$
$$\|\int_0^t Q_\varepsilon ds\|_C = \|\int_0^t e^{is/\varepsilon} ds\|_C \le 2\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to +0,$$
$$\|\int_0^t Q_\varepsilon^2 ds\|_C = \|\int_0^t (e^{is/\varepsilon})^2 ds\|_C \le \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

4.4 Самоспряжені розширення

В цьому підрозділі ми будемо вважати, що функції p, Q і, відповідно, $q = Q'$ є дійсними. В цьому випадку вираз $l[y]$ є формально самоспряженим, і, згідно з теоремою 4.1, мінімальний оператор $L_{\min}$ є симетричним. Таким чином, можливо застосувати до нього результати розділу 3 для загальних симетричних квазідиференціальних операторів і описати всі його самоспряжені, максимальні дисипативні та максимальні акумулятивні розширення, а також узагальнені резольвенти.

В роботі [77] за умов (4.4), тобто $p(t) \equiv 1, \quad q = Q'$, $Q \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$, а також дійсності функції q було описано всі самоспряжені розширення відповідного оператора $L_{\min}$ в термінах теорії Глазмана–Крейна–Наймарка. А саме, було доведено наступну теорему.

Теорема 4.4. *Нехай q — дійсна функція. Тоді $L_{\min}$ — замкнений симетричний оператор з індексом дефекту $(2, 2)$, а будь-яке його самоспряжене розширення L є звуженням оператора $L_{\max}$ на множину вигляду*

$$\mathrm{Dom}(L) := \{y \,|y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}), U_1(y) = U_2(y) = 0\},$$

де лінійні форми U_1, U_2 мають представлення

$$U_j(y) = \alpha_{j1}D^{[0]}y(0) + \alpha_{j1}D^{[1]}y(0) + \beta_{j1}D^{[0]}y(1) + \beta_{j1}D^{[1]}y(1) = 0,$$

$j = 1, 2,$

для коефіцієнтів яких виконуються рівності

$$\alpha_{j1}\overline{\alpha}_{k2} - \alpha_{j2}\overline{\alpha}_{k1} = \beta_{j1}\overline{\beta}_{k2} - \beta_{j2}\overline{\beta}_{k1}, \quad j, k = 1, 2.$$

Ми даємо параметризацію самоспряжених розширень в термінах просторів граничних значень, що дозволяє отримати важливе покращення результатів [77].

З теореми 3.3 випливає, що трійка $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де Γ_1, Γ_2 — лінійні відображення з $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ у $\mathbb{C}^2$ такі, що

$$\Gamma_1 y := \left(D^{[1]}y(a), -D^{[1]}y(b)\right), \ \Gamma_2 y := (y(a), y(b)), \qquad (4.9)$$

є простором граничних значень для оператора $L_{\min}$.

Тому всі теореми даного параграфа є наслідками цього факту і відповідних теорем розділу 3.

Самоспряжені розширення мінімального оператора Штурма–Ліувілля з узагальненими функціями в коефіцієнтах описуються наступним чином.

Теорема 4.5. *Для будь-якого унітарного оператора K в просторі $\mathbb{C}^2$ звуження L_K оператора $L_{\max}$ на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_1 y + i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \qquad (4.10)$$

є самоспряженим розширенням оператора $L_{\min}$. Навпаки, для будь-якого самоспряженого розширення $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ існує унітарний оператор K в просторі $\mathbb{C}^2$ такий, що $\widetilde{L} = L_K$. Відповідність між унітарними операторами $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ є бієктивною.

Порівняно з теоремою 4.4 теорема 4.5 дає бієктивну параметризацію самоспряжених розширень. Наступна теорема показує, що вона також неперервна в топології рівномірної резольвентної збіжності.

Теорема 4.6. *Самоспряжені розширення* L_{K_j} *оператора* $L_{\min}$ *збігаються до самоспряженого розширення* L_K *в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\| \left(L_K - \lambda\right)^{-1} - \left(L_{K_j} - \lambda\right)^{-1} \right\| \to 0,\ j \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні унітарні оператори K_j *збігаються за нормою до оператора* K. *Тому відображення*

$$K \to \left(L_K - \lambda\right)^{-1}, \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

є при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *гомеоморфізмом.*

Крім того, можна дати наступний природній опис розділених крайових умов.

Теорема 4.7. *Крайові умови* (4.10)*, що визначають самоспряжені розширення* L_K *оператора* $L_{\min}$ *є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця* K *має діагональний вигляд*

$$K = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

де $K_a, K_b \in \mathbb{C}$ *і* $|K_a| = |K_b| = 1$.

4.5 Дисипативні та акумулятивні розширення і узагальнені резольвенти

Використання просторів граничних значень дозволяє задати неперервну параметризацію максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень мінімального симетричного оператора Штурма–Ліувілля $L_{\min}$.

Опис максимальних дисипативних розширень дає

Теорема 4.8. *Для будь-якого оператора стиску K в просторі $\mathbb{C}^2$ звуження L_K оператора $L_{\max}$ на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду* (4.10), *є максимальним дисипативним розширенням оператора $L_{\min}$. Навпаки, для будь-якого максимального дисипативного розширення $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ існує оператор стиску K в просторі $\mathbb{C}^2$ такий, що $\widetilde{L} = L_K$. Відповідність між операторами стиску $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ є бієктивною.*

Опис максимальних акумулятивних розширень дає

Теорема 4.9. *Для будь-якого оператора стиску K в просторі $\mathbb{C}^2$ звуження L_K оператора $L_{\max}$ на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_1 y - i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{4.12}$$

є максимальним акумулятивним розширенням оператора $L_{\min}$. Навпаки, для будь-якого максимального акумулятивного розширення $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ існує оператор стиску K в просторі $\mathbb{C}^2$ такий, що $\widetilde{L} = L_K$. Відповідність між операторами стиску $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ є бієктивною.

Наступна теорема показує, що ці параметризації є також неперервними в топології рівномірної резольвентної збіжності.

Теорема 4.10. *Максимальні дисипативні (максимальні акумулятивні) розширення L_{K_j} оператора $L_{\min}$ збігаються до максимального дисипативного (максимального акумулятивного) розширення L_K в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\| (L_K - \lambda)^{-1} - \left(L_{K_j} - \lambda \right)^{-1} \right\| \to 0,\ j \to \infty,\ \operatorname{Im} \lambda < 0\ (> 0),$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні оператори стиску K_j *збігаються за нормою до оператора* K.

Це означає, що відображення

$$K \to (L_K - \lambda)^{-1}, \operatorname{Im}\lambda < 0 \ (> 0),$$

є при кожному фіксованому λ *гомеоморфізмами.*

Можна дати наступний опис розділених крайових умов.

Теорема 4.11. *Крайові умови* (4.10) *та* (4.12), *що визначають відповідно максимальні дисипативні та максимальні акумулятивні розширення* L_K *оператора* $L_{\min}$ *є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця* K *має діагональний вигляд* (4.11), *де* $|K_a| \leq 1$, $|K_b| \leq 1$.

Параметричний *внутрішній* опис всіх узагальнених резольвент мінімального оператора Штурма–Ліувілля з узагальненими функціями в коефіцієнтах дає

Теорема 4.12. 1) *Кожна узагальнена резольвента* R_λ *оператора* $L_{\min}$ *в півплощині* $\operatorname{Im}\lambda < 0$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y — *розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]}f + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]}f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ — *регулярна в нижній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^2$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

2) *У півплощині* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *кожна узагальнена резольвента оператора* $L_{\min}$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y — *розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda)-I)\,\Gamma_1 f - i\,(K(\lambda)+I)\,\Gamma_2 f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *— регулярна в верхній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^2$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

Ця параметризація узагальнених резольвент операторними функціями K *є бієктивною.*

Висновки до розділу 4

У цьому розділі отримано такі основні результати:

1. Введено регуляризацію формального диференціального виразу Штурма–Ліувілля з сингулярними коефіцієнтами за допомогою квазіпохідних і коректно означені відповідні оператори як квазідиференціальні.
2. Отримано достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації таких операторів, зокрема, операторами з гладкими коефіцієнтами. Показано, що ці умови є кращими за відомі раніше.
3. Знайдено простори граничних значень для операторів Штурма–Ліувілля з дійсними сингулярними коефіцієнтами.
4. Дано неперервну бієктивну параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень, а також бієктивну параметризацію всіх узагальнених резольвент.

РОЗДІЛ 5

ДВОЧЛЕННІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

5.1 Регуляризація диференціального виразу

У цьому розділі досліджуються оператори, породжені на скінченному інтервалі $\mathcal{J}$ формальним диференціальним виразом

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}, \quad m \geq 3, \tag{5.1}$$

де q – комплекснозначна функція, що задовольняє умові

$$q = Q', \quad Q \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{C}). \tag{5.2}$$

Через сингулярність коефіцієнта такі вирази не можуть бути визначені традиційним чином. Ми пропонуємо регуляризацію виразу $l(y)$ за допомогою квазіпохідних.

Введемо послідовно квазіпохідні:

$$\begin{aligned}
&D^{[k]}y(t) := y^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, m-2},\\
&D^{[m-1]}y(t) := y^{(m-1)}(t) + i^{-m}Q(t)y(t),\\
&D^{[m]}y(t) := (D^{[m-1]}y(t))' - i^{-m}Q(t)D^{[1]}y(t).
\end{aligned}$$

За умов (5.2) вони є квазіпохідними Шина–Цеттла. Відповідна матриця Шина–Цеттла має вигляд

$$A_\lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & i^{-m}Q(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1\left(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{m\times m}\right).$$

Оскільки коефіцієнти квазіпохідних задовольняють умови (2.1), вираз (5.1) можна визначити як квазідиференціальний вираз

$$l[y] := i^m D^{[m]} y.$$

Нагадаємо, що розв'язок задачі Коші для резольвентного рівняння

$$l[y] - \lambda y = f \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), \quad (D^{[k]}y)(c) = \alpha_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{5.3}$$

де $c \in \overline{\mathfrak{J}}$ і $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, m-1}$, визначається як перша компонента розв'язку задачі Коші для відповідної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$w'(t) = A_\lambda(t)w(t) + \varphi(t), \quad w(c) = (\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_{m-1}), \tag{5.4}$$

де вектор-функція $w(t) := (D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), ..., D^{[m-1]}y(t))$, квадратна матриця-функція

$$A_\lambda(t) := A - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ i^{-m}\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1\left(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^{m\times m}\right),$$

і вектор-функція $\varphi(t) := (0, 0, ..., 0, i^{-m} f(t)) \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C}^m)$.

З леми 2.1 випливає, що задача Коші (5.3) за умов (5.2) має єдиний розв'язок на $\overline{\mathfrak{J}}$.

Як і в загальному випадку, квазідиференціальний вираз $l[y]$ породжує *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_{\max} : y \to l[y],$$

$\mathrm{Dom}(L_{\max}) :=$

$$:= \left\{ y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \,\middle|\, D^{[k]} y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1},\ D^{[m]} y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\}$$

в гільбертовому просторі $L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$.

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора $L_{\max}$ на множину

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]} y(a) = D^{[k]} y(b) = 0, k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Наступне твердження показує, що ці оператори не залежать від вибору первісної функції Q.

Твердження 5.1. *Нехай* $\widetilde{Q} := Q + c$, $c \in \mathbb{C}$. *Тоді оператор* $L_{\max} = L_{\max}(Q)$ *співпадає з оператором* $\widetilde{L}_{\max} = L_{\max}(\widetilde{Q})$ *і* $L_{\min} = \widetilde{L}_{\min}$.

Доведення. Покажемо, що оператор $\widetilde{L}_{\max}$ співпадає з оператором $L_{\max}$. Позначимо через $\widetilde{D}^{[0]} y, \widetilde{D}^{[1]} y, ..., \widetilde{D}^{[m]} y$ квазіпохідні, що відповідають відмінній від Q первісній $\widetilde{Q}$.

Нехай $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$. Прямим підрахунком отримуємо, що

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}^{[0]}y = D^{[0]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\widetilde{D}^{[m-2]}y = D^{[m-2]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\\
&\widetilde{D}^{[m-1]}y = D^{[m-1]}y + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}),\\
&\widetilde{D}^{[m]}y = D^{[m]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Це означає, що

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dom}(L_{\max}) =\\
&= \left\{ y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1},\ D^{[m]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \right\} \subset\\
&\quad \subset \left\{ y \,\middle|\, \widetilde{D}^{[k]}y \in AC(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1}, \widetilde{D}^{[m]}y \in L_2(\overline{\mathfrak{J}}, \mathbb{C}) \right\} =\\
&\quad = \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\max}).
\end{aligned}$$

Аналогічно показується, що $\mathrm{Dom}(L_{\max}) \supset \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\max})$.

Нарешті,

$$\widetilde{L}_{\max}y = i^m\widetilde{D}^{[m]}y = i^m D^{[m]}y = L_{\max}y, \quad y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}).$$

Покажемо тепер, що $\widetilde{L}_{\min} = L_{\min}$.

Нехай $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}^{[0]}y(a) = D^{[0]}y(a) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[0]}y(b) = D^{[0]}y(b) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\widetilde{D}^{[m-2]}y(a) = D^{[m-2]}y(a) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[m-2]}y(b) = D^{[m-2]}y(b) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[m-1]}y(a) = D^{[m-1]}y(a) + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y(a) = 0 + 0 = 0,\\
&\widetilde{D}^{[m-1]}y(b) = D^{[m-1]}y(b) + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y(b) = 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Це означає, що

$$\begin{aligned}&\mathrm{Dom}(L_{\min}) = \\ &\quad = \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0, k = \overline{0, m-1} \right\} \subset \\ &\quad\quad \subset \left\{ y \in \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\max}) \,\middle|\, \widetilde{D}^{[k]}y(a) = \widetilde{D}^{[k]}y(b) = 0, k = \overline{0, m-1} \right\} = \\ &\quad\quad\quad = \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\min}).\end{aligned}$$

Аналогічно встановлюється, що $\mathrm{Dom}(L_{\min}) \supset \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\min})$.

Оскільки $\widetilde{L}_{\min}y = \widetilde{L}_{\max}y = L_{\max}y = L_{\min}y$ на функціях $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$, то твердження доведене. □

Наступне твердження показує, що введене нами означення диференціального оператора узгоджено з класичним.

Твердження 5.2. *Якщо* $m = 2n$ *і коефіцієнт* q *в* (5.1) *задовольняє умову*

$$q \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{R}), \tag{5.5}$$

то оператори $L_{\max}, L_{\min}$ *співпадають з класичними диференціальними операторами [38, 75].*

Доведення. З того, що $q \in L_1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ випливає, що $Q \in AC(\mathcal{J}, \mathbb{R})$. Це означає, що для $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$: $i^m D^{[m]}y = l(y)$.

В монографіях [38, 75] максимальний диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом парного порядку з дійсними сумовними коефіцієнтами $l(y) = (-1)^n (p_0 y^{(n)})^{(n)} + \ldots + p_n y$ визначається як

$$Ly = l(y),$$

$$y \in D_{\max} = \left\{ y | y^{[k]} \in AC(\mathcal{J}, \mathbb{C}), k = 0, \ldots, 2n-1, l(y) \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C}) \right\},$$

де $y^{[k]}$ – квазіпохідні, що визначаються наступним чином: $y^{[0]} = y$,

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, & k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ y^{[n]} &= p_0 y^{(n)}, & \\ y^{[k]} &= p_k y^{((n-k)} - \frac{d}{dx} y^{[n+k-1]}, & k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Легко бачити, що областю визначення максимального диференціального оператора, породженого виразом (5.1) за умов (5.5) є

$$D_{\max} = \Big\{ y | y^{(k)} \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), k = 0, \ldots 2n-1, l(y) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C}) \Big\}.$$

Доведемо, що $D_{\max} \subset \mathrm{Dom}(L_{\max})$. Очевидно, що якщо $y \in D_{\max}$, то $D^{[k]}y = y^{(k)} \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$, $k = 0, 1, \ldots 2n-2$. Враховуючи $Q \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{R})$, з того, що $y^{(2n-1)} \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ випливає, що $D^{[2n-1]}y \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Отже, існує $D^{[2n]}y \in L_1(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Крім того, в такому випадку $(-1)^n D^{[2n]}y = l(y) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Отже, $D_{\max} \subset \mathrm{Dom}(L_{\max})$.

Навпаки, з того, що $D^{[k]}y \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), k = 0, 1, \ldots 2n-1$ випливає, що $y^{(k)} \in AC(\mathfrak{J}, \mathbb{C}), k = 0, 1, \ldots 2n-1$. Крім того, $l(y) = (-1)^n D^{[2n]}y \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Отже, $D_{\max} = \mathrm{Dom}(L_{\max})$.

Мінімальний диференціальний оператор на скінченному інтервалі визначається як звуження максимального оператора на множину $\big\{ y \in D_{\max} | \, y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, \ldots 2n-1 \big\}$. Очевидно, що цю умову задовольняють функції $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$. Навпаки, з того, що $y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, \ldots 2n-1$ випливає, що $D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0, k = 0, 1, \ldots 2n-1$, що завершує доведення. □

Розглянемо поряд з (5.1) диференціальний вираз

$$l^{+}(y) = i^m y^{(m)}(t) + \overline{q}(t) y(t),$$

де риска над символом позначає комплексне спряження. Легко перевірити, що він є формально спряженим до (5.1). Позначимо $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені $l^+(y)$ у просторі $L_2(\mathfrak{J},\mathbb{C})$. Тоді з теорем 2.1 та 3.1 випливає наступна

Теорема 5.1. *Оператори* $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ *замкнені і щільно задані в просторі* $L_2(\mathfrak{J},\mathbb{C})$,

$$L^*_{\min} = L^+_{\max}, \quad L^*_{\max} = L^+_{\min}.$$

У випадку, коли q *є дійсною функцією, оператор* $L_{\min} = L^+_{\min}$ *є симетричним з індексом дефекта* (m,m), *і*

$$L^*_{\min} = L_{\max}, \quad L^*_{\max} = L_{\min}.$$

5.2 Резольвентна апроксимація

Розглянемо сім'ю виразів $l_\varepsilon(y)$ вигляду (5.1) з коефіцієнтами

$$q_\varepsilon = Q'_\varepsilon \in L_1(\mathfrak{J},\mathbb{C}), \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0].$$

За ними побудуємо матриці Шина–Цеттла

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1(\mathfrak{J},\mathbb{C}^{m\times m}) \tag{5.6}$$

та відповідні їм квазіпохідні $D^{[0]}_\varepsilon y, D^{[1]}_\varepsilon y, ..., D^{[m]}_\varepsilon y$. За допомогою регуляризації, наведеної в підрозділі 5.2, визначимо вирази $l_\varepsilon(y)$ як квазідиференціальні $l_\varepsilon[y] := i^m D^{[m]}_\varepsilon y$.

В гільбертовому просторі $L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ ці вирази породжують оператори $L^{\varepsilon}_{\min}$, $L^{\varepsilon}_{\max}$ для кожного ε. Нехай матриці $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) := \{D^{[0]}_{\varepsilon} y(a), D^{[1]}_{\varepsilon} y(a), \ldots, D^{[m-1]}_{\varepsilon} y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) := \{D^{[0]}_{\varepsilon} y(b), D^{[1]}_{\varepsilon} y(b), \ldots, D^{[m-1]}_{\varepsilon} y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Як і в загальному випадку, для кожного фіксованого значення ε визначаються оператори

$$L_{\varepsilon} y = l_{\varepsilon}[y], \quad \mathrm{Dom}(L_{\varepsilon}) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}\,(L^{\varepsilon}_{\max}) |\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_{\varepsilon}(b) = 0 \right\}.$$

Очевидно, що $L^{\varepsilon}_{\min} \subset L_{\varepsilon} \subset L^{\varepsilon}_{\max}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Основним результатом цього підрозділу є

Теорема 5.2. *Нехай резольвентна множина $\rho(L_0)$ непорожня і для $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:*

$$1)\ \| \int\limits_a^t (Q_{\varepsilon}(s) - Q_0(s)) ds \|_C \to 0;$$

$$2)\ \alpha(\varepsilon) \to \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \to \beta(0).$$

Тоді $L_{\varepsilon} \overset{R}{\to} L_0$.

Зауваження 5.1. *Умова* $\|Q_{\varepsilon} - Q_0\|_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0+$, *очевидно, достатня для виконання умови* 1).

Доведення. Оскільки оператори L_{ε} є частковим випадком розглянутих в розділі 2.3 квазідиференціальних операторів, досить показати, що виконуються умови теореми 2.4.

Позначимо $r(\cdot;\varepsilon) := i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) - i^{-m}Q(\cdot;0)$. Тоді

$$A(t;\varepsilon) - A(t;0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r(t;\varepsilon) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r(t;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\int\limits_a^t (A(s;\varepsilon) - A(s;0))\,ds = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\int\limits_a^t r(s;\varepsilon)ds & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \int\limits_a^t r(s;\varepsilon)ds & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де матриця-функція $A(t;\varepsilon)$ задана формулою (5.6).

Легко бачити, що

$$(A(t;\varepsilon) - A(t;0)) \cdot \int\limits_a^t (A(s;\varepsilon) - A(s;0))\,ds =$$

$$= \int\limits_a^t (A(s;\varepsilon) - A(s;0))\,ds \cdot (A(t;\varepsilon) - A(t;0))\,.$$

Тому матрична функція $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)$ при $m \geq 3$ задовольняє умові (Δ) теореми 2.4.

Очевидно, що умова $\|\int\limits_a^t (A(s;\varepsilon) - A(s;0))\,ds\|_C \to 0$, $\varepsilon \to 0+$ еквівалентна умові 1) теореми 5.2. Разом з умовою 2) теореми 5.2 цей факт означає, що для операторів L_ε виконуються умови теореми 2.4. $\square$

5.3 Розширення симетричного мінімального оператора і його узагальнені резольвенти

В цьому підрозділі ми будемо вважати, що функції Q і, відповідно, $q = Q'$ є дійсними. В цьому випадку вираз $l[y]$ є формально самоспряженим, і, згідно теореми 5.1, мінімальний оператор $L_{\min}$ є симетричним. Таким чином, можливо застосувати до нього результати розділу 3 і описати всі його самоспряжені, максимальні дисипативні та максимальні акумулятивні розширення, а також узагальнені резольвенти.

Наступне твердження є ключовим для цього підрозділу.

Лема 5.1. *Нехай* Γ_1, Γ_2 *— лінійні відображення з* $\operatorname{Dom}(L_{\max})$ *в* $\mathbb{C}^m$ *такі, що:*

при $m = 2n,\ n \geq 2$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ ..., \\ (-1)^{n-1} D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix},$$

а при $m = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ ...., \\ (-1)^{n-1} D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

де числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i.$

Тоді трійка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *є ПГЗ симетричного оператора* $L_{\min}$.

Зауваження 5.2. *Наведені значення коефіцієнтів можна замінити довільними наборами чисел, що задовольняють систему:*

$$\begin{cases} \alpha\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\gamma = (-1)^n, \\ \beta\overline{\delta} + \overline{\beta}\delta = (-1)^{n+1}, \\ \alpha\overline{\delta} + \overline{\beta}\gamma = 0, \\ \beta\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\delta = 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \end{cases}$$

Доведення. Оскільки оператори $L_{\min}$ є частковим випадком розглянутих в розділі 3 симетричних квазідиференціальних операторів, твердження леми випливає з теорем 3.3 та 3.4. □

Враховуючи лему 5.1, всі теореми даного підрозділу є наслідками відповідних теорем розділу 3.

Як і в розділі 4, опишемо спершу всі самоспряжені розширення мінімального оператора $L_{\min}$.

Теорема 5.3. *Для будь-якого унітарного оператора K в просторі $\mathbb{C}^m$ звуження L_K оператора $L_{\max}$ на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K-I)\,\Gamma_1 y + i\,(K+I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{5.7}$$

є самоспряженим розширенням оператора $L_{\min}$. Навпаки, для будь-якого самоспряженого розширення $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ існує унітарний оператор K в просторі $\mathbb{C}^m$ такий, що $\widetilde{L} = L_K$. Відповідність між унітарними операторами $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ є бієктивною.

Отже, теорема 5.3 дає бієктивну параметризацію самоспряжених розширень. Наступна теорема показує, що вона також неперервна.

Теорема 5.4. *Самоспряжені розширення L_{K_j} оператора $L_{\min}$ збігаються до самоспряженого розширення L_K в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\|\left(L_K-\lambda\right)^{-1}-\left(L_{K_j}-\lambda\right)^{-1}\right\| \to 0,\ j\to\infty,\ \operatorname{Im}\lambda\neq 0,$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні унітарні оператори K_j збігаються за нормою до оператора K. Тому відображення

$$K \to \left(L_K-\lambda\right)^{-1}, \operatorname{Im}\lambda\neq 0,$$

є при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *гомеоморфізмом.*

Крім того, для операторів парного порядку можна дати наступний природній опис розділених крайових умов.

Теорема 5.5. *У випадку* $m = 2n$ *крайові умови* (5.7)*, що визначають самоспряжені розширення* L_K *оператора* $L_{\min}$ *є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця* K *має блочно-діагональний вигляд*

$$K = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

де $K_a, K_b \in \mathbb{C}^{n \times n}$*.*

Використання просторів граничних значень дозволяє задати неперервну параметризацію дисипативних і акумулятивних розширень мінімального оператора $L_{\min}$.

Теорема 5.6. *Для будь-якого оператора стиску* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *звуження* L_K *оператора* $L_{\max}$ *на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду* (5.7)*, є максимальним дисипативним розширенням оператора* $L_{\min}$*. Навпаки, для будь-якого максимального дисипативного розширення* $\widetilde{L}$ *оператора* $L_{\min}$ *існує оператор стиску* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *такий, що* $\widetilde{L} = L_K$*. Відповідність між операторами стиску* $\{K\}$ *і розширеннями* $\{\widetilde{L}\}$ *є бієктивною.*

Теорема 5.7. *Для будь-якого оператора стиску* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *звуження* L_K *оператора* $L_{\max}$ *на множину функцій, що задовольняють однорідну крайову умову канонічного вигляду*

$$(K - I)\,\Gamma_1 y - i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{5.9}$$

є максимальним акумулятивним розширенням оператора $L_{\min}$*. Навпаки, для будь-якого максимального акумулятивного розшире-*

ння $\widetilde{L}$ *оператора* $L_{\min}$ *існує оператор стиску* K *в просторі* $\mathbb{C}^m$ *такий, що* $\widetilde{L} = L_K$. *Відповідність між операторами стиску* $\{K\}$ *і розширеннями* $\{\widetilde{L}\}$ *є бієктивною.*

Отже, теореми 5.6 та 5.7 дають бієктивну параметризацію відповідно максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень. Наступна теорема показує, що вона також неперервна.

Теорема 5.8. *Максимальні дисипативні (максимальні акумулятивні) розширення* L_{K_j} *оператора* $L_{\min}$ *збігаються до максимального дисипативного (максимального акумулятивного) розширення* L_K *в сенсі рівномірної резольвентної збіжності,*

$$\left\|(L_K - \lambda)^{-1} - \left(L_{K_j} - \lambda\right)^{-1}\right\| \to 0,\ j \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda < 0\ (> 0),$$

тоді і тільки тоді, коли відповідні оператори стиску K_j *збігаються за нормою до оператора* K. *Тому відображення*

$$K \to (L_K - \lambda)^{-1}, \operatorname{Im}\lambda < 0\ (> 0),$$

є при кожному фіксованому λ *гомеоморфізмами.*

Теорема 5.9. *У випадку* $m = 2n$ *крайові умови* (5.7) *та* (5.9), *що визначають відповідно дисипативні та акумулятивні розширення* L_K *оператора* $L_{\min}$ *є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця* K *має блочно-діагональний вигляд* (5.8), *де* $K_a, K_b \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Параметричний опис всіх узагальнених резольвент мінімального оператора $L_{\min}$ дає

Теорема 5.10. 1) *Кожна узагальнена резольвента* R_λ *оператора* $L_{\min}$ *в півплощині* $\operatorname{Im}\lambda < 0$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y *— розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]}f + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]}f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *— регулярна в нижній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^2$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

2) *У півплощині* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *кожна узагальнена резольвента оператора* $L_{\min}$ *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y *— розв'язок крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]}f - i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]}f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2(\mathfrak{J}, \mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *— регулярна в верхній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^2$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

Ця параметризація узагальнених резольвент операторними функціями K *є бієктивною.*

Висновки до розділу 5

У цьому розділі дисертаційної роботи отримані наступні основні результати:

1. Знайдено регуляризацію формального диференціального двочленного виразу порядку $m \geq 3$ з сингулярним потенціалом за допомогою квазіпохідних і коректно означені відповідні оператори як квазідиференціальні.
2. Отримано достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації таких операторів, зокрема, операторами з гладкими потенціалами.
3. Знайдено простори граничних значень для двочленних диференціальних операторів порядку $m \geq 3$ з дійсними сингулярними потенціалами.

4. Дано неперервну бієктивну параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних і максимальних акумулятивних розширень, а також бієктивну параметризацію всіх узагальнених резольвент.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

1. Отримано достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації квазідиференціальних операторів довільного порядку. У симетричному випадку дано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального квазідиференціального оператора та його узагальнених резольвент.
2. Знайдено регуляризацію повного виразу Штурма–Ліувілля з сингулярними комплексними коефіцієнтами за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла і достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації породжених ним операторів.
3. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального оператора Штурма–Ліувілля та його узагальнених резольвент.
4. Знайдено регуляризацію двочленного диференціального виразу високого порядку з сингулярним комплексним потенціалом за допомогою квазіпохідних Шина–Цеттла і достатні умови рівномірної резольвентної апроксимації породжених ним операторів.
5. Отримано параметризацію всіх самоспряжених, максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального двочленного диференціального оператора та його узагальнених резольвент.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Solvable models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Höegh-Krohn, H. Holden. – Providence, RI : AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p.
2. Albeverio S. Singular perturbations of differential operators / S. Albeverio, P. Kurasov. – Cambridge : Cambridge University Press, 2000. – 429 p. – (London Mathematical Society Lecture Note Series; 271.)
3. Ashurov R. R. Linear quasi-differential operators in locally integrable spaces on the real line / R. R. Ashurov, W. N. Everitt // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 2000. – V. 130, № 4. – P. 671–698.
4. Ashurov R. R. Linear operators generated by a countable number of quasi-differential expressions / R. R. Ashurov, W. N. Everitt // Appl. Anal. – 2002. – V. 81, № 6. – P. 1405—1425.
5. Boyd J. P. Sturm–Liouville eigenvalue problems with an interior pole / J. P. Boyd// J. Math. Phys. — 1981. — V. 22. — P. 1575–1590.
6. Brasche J. Perturbation of SchrOdinger Hamiltonians by measures-Self-adjointness and lower semiboundedness / J. Brasche// J. Math. Phys. — 1985. — V. 26, № 4 . — P. 621–626.
7. Everitt W. N. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi–differential Operators / W. N. Everitt, L. Markus. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. – 187 p.

8. Everitt W. N. Controllability of $[r]$-matrix quasi-differential equations / W. N. Everitt, L. Markus // J. Differential Equations. – 1991. – V. 89, № 1. – P. 95—109.
9. Everitt W. N. Multi-interval linear ordinary boundary value problems and complex symplectic algebra / W. N. Everitt, L. Markus // Mem. Amer. Math. Soc. – 2001. – V. 151, № 715. – 64 pp.
10. Everitt W. N. Factorization of quasi-differential operators / W. N. Everitt, J. S. Muldowney, N. Thandi // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 113, № 1. – P. 93—98.
11. Everitt, W. N. The regular representation of singular second-order differential expressions using quasi-derivatives. / W. N. Everitt, D. Race // Proc. London Math. Soc.– 1992. – V. (3)65 , № 2. – P. 383—404.
12. Everitt, W. N. Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the real line / W. N. Everitt, A. Zettl // Proc. London Math. Soc. – 1992. – V. (3) 64 , № 3. – P. 524—544.
13. Frentzen H. Equivalence, adjoints and symmetry of quasidifferential expressions with matrix-valued coefficients and polynomials in them / H. Frentzen // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 1982. – V. 92, № 1–2. – C. 123–146.
14. Frentzen H. A limit-point criterion for second-order differential expressions with matrix-valued coefficients / H. Frentzen // Proc. London Math. Soc. – 1984. – V. (3) 49, № 2. – P. 238–254.

15. Frentzen H. Limit-point criteria for symmetric, JJ-symmetric, and arbitrary quasidifferential expressions / H. Frentzen // Proc. London Math. Soc. – 1985. – V. (3) 51, № 3. – P. 543–562.
16. Frentzen H. Factorization of quasi-differential expressions with operator-valued coefficients / H. Frentzen // J. London Math. Soc. – 1994. – V. (2) 50, № 1. – P. 139–156.
17. Frentzen H. Quasi-differential operators in L^p spaces / H. Frentzen // Bull. London Math. Soc. – 1999. – V. 31, № 3. – P. 279–290.
18. Gesztesy F. On the one-dimensional Coulomb Hamiltonian / F. Gesztesy// J. Phys. A: Math. Gen. — 1980. — V. 13. — P. 867–875.
19. Gesztesy F. Rank-one perturbations at infinite coupling / F. Gesztesy, B. Simon// J. Funct. Anal. — 1995. — V. 128. — P. 245—252.
20. Gunson J. Perturbation Theory for a Sturm-Liouville Problem with an Interior Singularity / J. Gunson// Proc. Roy. Soc.(London) A. — 1987. — V. 414. — P. 255–269.
21. Ibrahim S. E. Non-self-adjoint quasi-differential operators with discrete spectra / S. E. Ibrahim // Rocky Mountain J. Math. — 1995. — V. 25, no. 3. — P. 1053—1078.
22. Ibrahim S. E. The point spectra and regularity fields of products of quasi-differential operators / S. E. Ibrahim // Int. J. Appl. Math. – 1999. –V. 1, № 7. – P. 781—799.
23. Ibrahim S. E. The products of general quasi-differential operators and their essential spectra / S. E. Ibrahim // Int. J. Appl. Math. – 1999. –V. 1, № 7. – P. 725–756.

24. Ibrahim S. E. On the boundary conditions for products of general quasi-differential operators in direct sum spaces / S. E. Ibrahim // Int. J. Appl. Math. – 2009. –V. 22, № 1. – P. 55—87.
25. Kiselev A. Rank one perturbations with infinitesimal coupling / A. Kiselev, B. Simon// J. Funct. Anal. — 1995. — V. 130. — P. 345—356.
26. Kronig R. de L. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices / R. de L. Kronig, W. G. Penney// Proc. Roy. Soc.(London) A. — 1931. — V. 130. — P. 499–513.
27. Kurasov P. On the Coulomb potential in one dimension / P. Kurasov// Journal of Physics A. — 1996. — V. 29. — P. 1767–1771.
28. Markus L. Control of quasi-differential equations / L. Markus // Ann. Polon. Math. – 1990. – V. 51. – P. 229—239.
29. Phillips R. S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations / R. S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 90. — P. 193–254.
30. Race D. Characterisation of the factors of quasi-differential expressions / D. Race, A. Zettl // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 1992. – V. 120, № 3-4. – P. 297–312.
31. Race D. Nullspaces, representations and factorizations of quasi-differential expressions / D. Race, A. Zettl // Differential Integral Equations. – 1993. – V. 6, № 4. – P. 949–960.
32. Sokolov M. S. An abstract approach to some spectral problems of direct sum differential operators / M. S. Sokolov // Electron. J. Differential Equations. – 2003. – № 75. – 6 pp.

33. Sokolov M. S. On some spectral properties of operators generated by quasi-differential multi-interval systems / M. S. Sokolov // Methods Appl. Anal. – 2003. – V. 10, № 4. – P. 513–531.

34. Sokolov M. S. Self-adjoint differential vector-operators and matrix Hilbert spaces I / M. S. Sokolov // Cent. Eur. J. Math. – 2005. – V. 3, № 4. – P. 627–643.

35. Tamarkin J. D. A lemma of the theory of linear differential systems / J. D. Tamarkin // Bull. Amer. Math. Soc. — 1930. — V. 36, № 2. — P. 99–102.

36. Zettl A. Sturm-Liouville Theory / A. Zettl. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. – 328 p.

37. Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators / A. Zettl // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – V. 5, № 3. – C. 453–474.

38. Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – М: Наука, 1966. – 544 с.

39. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – К: Вища школа, 1990. – 600 с.

40. Березин Ф. А. О модели Ли / Ф. А. Березин // Матем. сб. – 1963. – Т. 60, № 4. – С. 425–446.

41. Березин Ф. А. Замечания об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 7. – С. 1011–1014.

42. Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии / В.М. Брук // Матем. сборник. – 1976. – Т. 100 (142), № 2(6). – С. 210–216.

43. Горбачук В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. – К: Наукова думка, 1984. – 284 С.
44. Графф А. А. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения / А. А. Графф // Матем. сборник. – 1946. – т. 18(60), № 2. – С. 305—328.
45. Графф А. А. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения II / А. А. Графф // Матем. сборник. – 1947. – т. 21(63), № 1 – С. 143—159.
46. Горюнов А. С. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Доповіді НАН України. – 2009. – № 4. – С. 19–24.
47. Горюнов А. С. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Доповіді НАН України. – 2009. – № 9. – С. 27–31.
48. Горюнов А. С. Резольвентная сходимость операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Математические заметки. – 2010. – Т.87, № 2. – С. 311–315.
49. Горюнов А. С. Regularization of singular Sturm-Liouville equations / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2010. — V. 16, № 2. — P. 120—130.
50. Горюнов А. С. Регуляризация двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом / А. С. Горюнов, В.

А. Михайлец // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Т.7, № 1. – С. 49–67.

51. Горюнов А. С. Крайові задачі для двочленного диференціального рівняння з сингулярним коефіцієнтом / А. С. Горюнов // Дванадцята міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука, 15-17 травня, 2008 р., Київ: Матеріали конф. – К.: Національний технічний університет України „КПІ”, 2008. – С. 104.
52. Горюнов А. С. Диссипативные краевые задачи для квазидифференциальных уравнений / А. С. Горюнов // „Современные проблемы математики, механики и их приложений”: тезисы докл. – Москва, 2009. – С. 22–23.
53. Горюнов А. С. On resolvent convergence of the Sturm-Liouville operators with singular potentials / А. С. Горюнов // Міжнародна конференція „Аналітичні методи механіки та комплексного аналізу”: тези доповідей. – Київ, 2009. – С. 19-20.
54. Горюнов А. С. Про збіжність операторів Штурма–Ліувілля з сингулярними потенціалами / А. С. Горюнов // „Український Математичний Конгрес – 2009” – Київ, 2009. – Режим доступу до тез доповідей: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Goriunov.pdf
55. Горюнов А. С. Formally self-adjoint quasi-differential operators / А. С. Горюнов // „Український Математичний Конгрес – 2009” – Київ, 2009. – Режим доступу до тез доповідей: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Goriunov1.pdf
56. Горюнов А. С. On regularization of singular Sturm-Liouville equations / А. С. Горюнов // Тринадцята міжнародна конфе-

ренція імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня, 2010 р., Київ: Матеріали конф. – К.: Національний технічний університет України „КПІ”, 2010. – С. 17.

57. Горюнов А. С. On One-dimensional Differential Operators with Distribution Coefficients / А. С. Горюнов // Humboldt Kolleg "Mathematics and life sciences : Possi-bilities, interlacements and limits": Book of Abstracts. – Kiev, 2010. – С. 34–35.
58. Долгих И. Н. Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов / И. Н. Долгих, К. А. Мирзоев // Матем. сб. – 2006. – Т. 197, № 4. – С. 53-–74.
59. Калафати, П. О функциях Грина обычных квазидиференциальных уравнений / П. Калафати // Докл. АН СССР. – 1948. – Т. 59. – С. 427—430.
60. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М: Мир, 1972. – 740 с.
61. Кац И. С. Критерий дискретности спектра сингулярной струны // И. С. Кац, М. Г. Крейн // Изв. вузов СССР, Математика. – 1958. – № 2(3). – С. 136–153.
62. Кочубей А. Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / А. Н. Кочубей // Математические заметки. — 1975. — Т. 17, № 1. — С. 41—-48.
63. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. II / М. Г. Крейн // Матем. сб. — 1947. – Т. 21(63), № 3. – С. 365—404.

64. Левин А. Ю. Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 774–777.
65. А.Ю. Левин Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. – 1973. – Т.176, № 5. – С. 774–777.
66. Лянце В. Э. Методы теории неограниченных операторов / В. Э. Лянце, О. Г. Сторож. — К.: Наукова думка, 1983. — 212 с.
67. Микеладзе С. Е. О разрывных решениях обычных квазидифференциальных уравнений / С. Е. Микеладзе // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 105. – С. 641-–644.
68. Мирзоев К. А. Функция Коши и $\mathscr{L}_w^p$-свойства решений квазидифференциальных уравнений / К. А. Мирзоев // Успехи мат. наук. – 1991. – Т. 46, № 4(280). – С. 161-–162.
69. Мирзоев К. А. L^p-свойства решений квазидифференциальных уравнений и возмущение их коэффициентов на множествах положительной меры / К. А. Мирзоев // Функц. анализ и его прил. – 1997. – Т. 31, № 1. – С. 80–83.
70. Мирзоев К. А.Об одном классе операторов, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка / К. А. Мирзоев // Успехи мат. наук. – 2000. – Т. 55, № 6(336). – С. 147–148.
71. Минлос Р. А. О точечном взаимодействии для систем из трех частиц / Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 141, № 6. – С. 1335–1338.

72. Михайлец В. А. Спектры операторов и граничные задачи / В. А. Михайлец // Спектральный анализ дифференциальных операторов. — К.: Ин-т математики, 1980. – С. 106–131.

73. Михайлец В. А. Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.

74. Михайлец В. А. Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 227–239.

75. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк – М: Наука, 1969. – 528 с.

76. Орлов С. А. О индексе дефекта линейных дифференциальных операторов / С. А. Орлов // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 92. – С. 483–486.

77. Савчук А. М. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами/ А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Матем. Заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 897–912.

78. Савчук А. М. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями/ А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Труды ММО. – 2003. – Т. 64. – С. 159–212.

79. Фрагела А. К. О возмущении полигармонического оператора потенциалами с малыми носителями/ А. К. Фрагела // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 245, № 1. – С. 34–36.

80. Филиппенко В. И. Линейные квазидифференциальные операторы в гильбертовом пространстве / В. И. Филиппенко // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. – М.: Наука, 2006. – С. 293—344.

81. Шин Д. Теорема существования квазидифференциального уравнения n-го порядка/ Д. Шин // Докл. АН СССР. – 1938. – Т. 18, № 8. – С. 515–518.
82. Шин Д. О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]} = lu$, $I(l) \neq 0$, принадлежащих к $L_2(0, \infty)$/ Д. Шин // Докл. АН СССР. – 1938. – Т. 18, № 8. – С. 519–522.
83. Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве/ Д. Шин // Д. Шин // Докл. АН СССР. – 1938. – Т. 18, № 8. – С. 523–526.
84. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка/ Д. Шин // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7(49), № 3. – С. 479–532.
85. Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве/ Д. Шин // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13(55), № 1. – С. 39–70.
86. Шондин Ю. Г. Возмущения на тонких множествах высокой коразмерности эллиптических операторов и теория расширений в пространстве с индефинитной метрикой/ Ю. Г. Шондин // Зап. науч. семинаров ПОМИ. – 1995. – Т. 222. – С. 246—292.