УДК 517.53

А.П. Голуб, Л.О.Чернецька (Інститут математики НАН України, Київ)
A.P. Golub, L.O.Chernetska

Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних

Two-dimensional generalized moment representations and rational approximants of two-variable functions

V.K. Dzyadyk's method of generalized moment representations is widened to the case of two-dimensional sequences and used to construct Padé approximants of two-variable functions.

Метод узагальнених моментних зображень В.К. Дзядика поширено на випадок двовимірних послідовностей і застосовано до побудови апроксимацій Паде функцій двох змінних.

Метод обобщенных моментных представлений В.К. Дзядыка распостранен на случай двумерных последовательностей и применен к построению аппроксимаций Паде функций двух переменных.

Узагальнені моментні зображення були запроваджені В.К. Дзядиком у 1981 році [1] і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень (див. [2]).

Означення 1. Будемо говорити, що для послідовності комплексних чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо в просторі $\mathscr{X}$ вказано послідовність елементів $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а в просторі $\mathscr{Y}$ — послідовність елементів $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

По аналогії з (1) можна визначити узагальнені моментні зображення двовимірних числових послідовностей.

Означення 2. Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо в просторі $\mathscr{X}$ вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а в просторі $\mathscr{Y}$ — двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

По аналогії з тим, як у відповідність числовій послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можна поставити формальний степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд від двох змінних

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{3}$$

Для рядів вигляду (3) можна визначати раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде, за різними схемами (див. [3, с. 323]). При цьому потрібно зафіксувати певні обмежені області $\mathscr{N}$ і $\mathscr{D}$ з $\mathbb{Z}_+^2$ та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_{\mathscr{N}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathscr{N}} p_{k,m} z^k w^m, \tag{4}$$

$$Q_{\mathscr{D}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathscr{D}} q_{k,m} z^k w^m, \tag{5}$$

таким чином, щоб якомога більше коефіцієнтів $e_{k,m}$ в розкладі

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{\mathscr{D}}(z,w)} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2} e_{k,m} z^k w^m \tag{6}$$

оберталися на нуль. Як і у випадку одновимірних апроксимацій Паде, побудова таких многочленів зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Тому якщо вимагати, щоб $e_{k,m} = 0$ при $(k,m) \in \mathscr{E} \subset \mathbb{Z}_+^2$, то в загальному випадку має справджуватися рівність

$$\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{N} + \dim \mathscr{D} - 1. \tag{7}$$

Принаймні, в кожному невиродженому випадку ми можемо добитися, щоб виконувалася нерівність

$$\dim \mathscr{E} \geq \dim \mathscr{N} + \dim \mathscr{D} - 1. \tag{8}$$

Різноманітні модифікації багатовимірних і, зокрема, двовимірних апроксимацій Паде вивчалися в роботах [4 – 12].

Має місце наступний результат, що є аналогом теореми В.К. Дзядика [1] для випадку функцій двох змінних.

Теорема 1. Нехай формальний степеневий ряд від двох змінних має вигляд (3) і нехай для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення вигляду (2). Тоді, якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n}, \tag{9}$$

такий що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \rangle = 0 \tag{10}$$

при $(k,m) \in ([0,N_1] \times [0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$ і $c^{(N_1,N_2)}_{N_1,N_2} \neq 0$, то тоді раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n} + \right.$$

$$+ z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{j,N_2-n} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,n} s_{k-j,m+n} \right\}, \tag{11}$$

де

$$Q_{N_1,N_2}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n, \tag{12}$$

матиме розклад в степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3) для всіх $(j,n) \in ([0,2N_1] \times [0,2N_2]) \setminus \{(2N_1,2N_2)\}$.

Доведення. Помножимо рівність (2) на $z^k w^m$ і просумуємо по k та m від 0 до досить великих чисел $\tilde{k}$ та $\tilde{m}$ відповідно. Справа отримаємо

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m x_{k,m}, y_{j,n} \right\rangle,$$

зліва будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{\tilde{m}} s_{k+j,m+n} z^k w^m = \sum_{k=j}^{\tilde{k}+j} \sum_{m=n}^{\tilde{m}+n} s_{k,m} z^{k-j} w^{m-n} =$$

$$= \frac{1}{z^j w^n} \left\{ f(z,w) - \sum_{k=j}^{\tilde{k}+j} \sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{m=n}^{\tilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m - \right.$$

$$- \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\tilde{m}+n} s_{k,m} z^k w^m -$$

$$-\sum_{k=0}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty} s_{k,m}z^k w^m - \sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty} s_{k,m}z^k w^m \Bigg\}.$$

Домножимо тепер отримані рівності на коефіцієнти $c_{j,n}^{(N_1,N_2)}$, $j \in [0, N_1]$, $n \in [0, N_2]$ і просумуємо по j від 0 до N_1 і по n від 0 до N_2. Справа отримаємо

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \right\rangle.$$

Враховуючи, що мають місце співвідношення біортогональності (10), розклад отриманої справа величини в ряд за степенями z та w матиме нульові коефіцієнти при степенях $(k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$.

Зліва отримаємо

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} \frac{1}{z^j w^n} \Bigg\{ f(z,w) - \sum_{k=j}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m}z^k w^m - \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n} s_{k,m}z^k w^m -$$

$$-\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m}z^k w^m - \sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\tilde{m}+n} s_{k,m}z^k w^m -$$

$$-\sum_{k=0}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty} s_{k,m}z^k w^m - \sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty} s_{k,m}z^k w^m \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{z^{N_1} w^{N_2}} \Bigg\{ f(z,w) Q_{N_1,N_2}(z,w) - \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{(k,m)\in D^*} s_{k,m}z^k w^m \Bigg\},$$

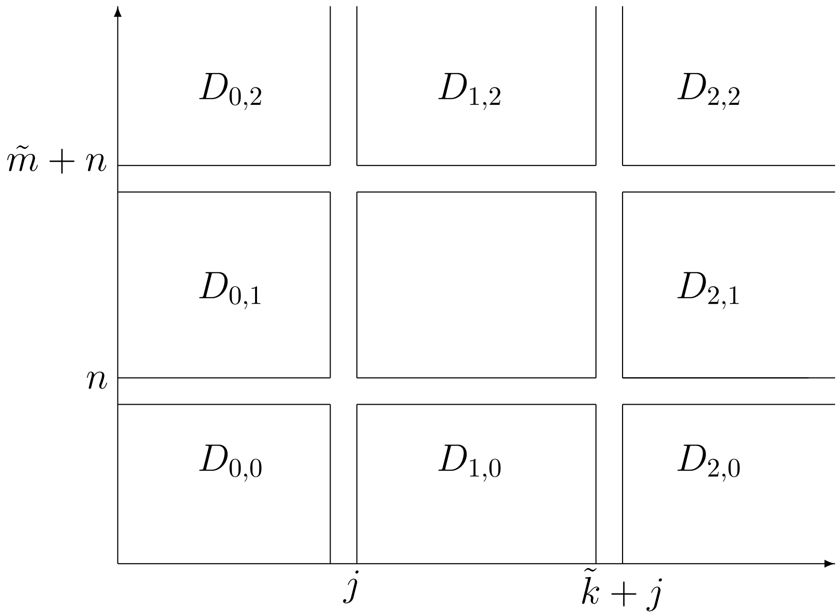
де $D^* = D_{0,0} \cup D_{0,1} \cup D_{1,0} \cup D_{0,2} \cup D_{2,0} \cup D_{1,2} \cup D_{2,1} \cup D_{2,2}$, а

$$D_{0,0} = [0, j-1] \times [0, n-1], D_{0,1} = [0, j-1] \times [n, \tilde{m}+n],$$

$$D_{1,0} = [j, \tilde{k}+j] \times [0, n-1], D_{0,2} = [0, j-1] \times [\tilde{m}+n+1, \infty],$$

$$D_{2,0} = [\tilde{k}+j+1, \infty] \times [0, n-1], D_{1,2} = [j, \tilde{k}+j] \times [\tilde{m}+n+1, \infty],$$

$$D_{2,1} = [\tilde{k}+j+1, \infty] \times [n, \tilde{m}+n], D_{2,2} = [\tilde{k}+j+1, \infty] \times [\tilde{m}+n+1, \infty].$$



Будемо мати

$$f(z,w)Q_{N_1,N_2}(z,w)-\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}z^{N_1-j}w^{N_2-n}\sum_{k=j}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1}s_{k,m}z^kw^m-$$

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}z^{N_1-j}w^{N_2-n}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n}s_{k,m}z^kw^m-$$

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}z^{N_1-j}w^{N_2-n}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1}s_{k,m}z^kw^m=$$

$$=O\left(w^{\tilde{m}}\right)+O\left(z^{\tilde{k}}\right)+z^{N_1}w^{N_2}\left\langle\sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{\tilde{m}}z^kw^mx_{k,m},Y_{N_1,N_2}\right\rangle.$$

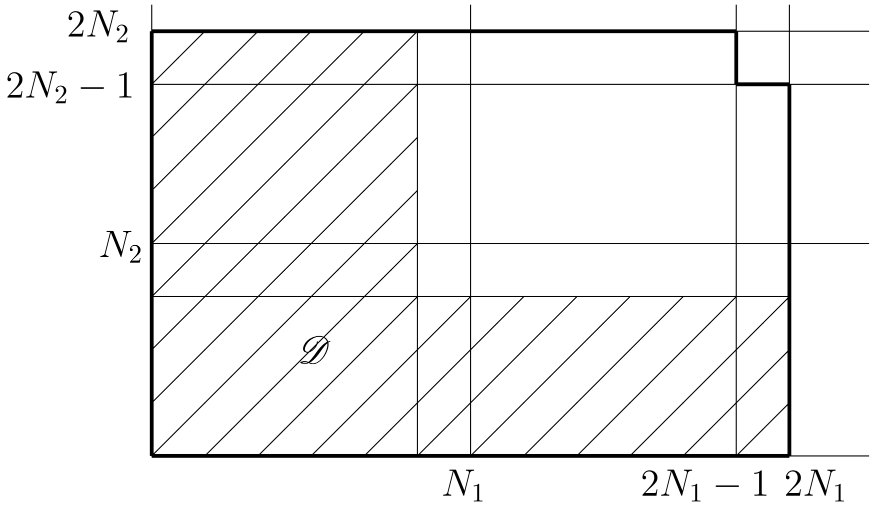
Звідси за рахунок довільності вибору досить великих $\tilde{k}$ та $\tilde{m}$ і отримаємо твердження теореми.$\square$

Зауваження. Таким чином, для побудованої в теоремі 1 апроксиманти Паде будемо мати

$$\mathscr{D}=[0,N_1]\times[0,N_2],$$

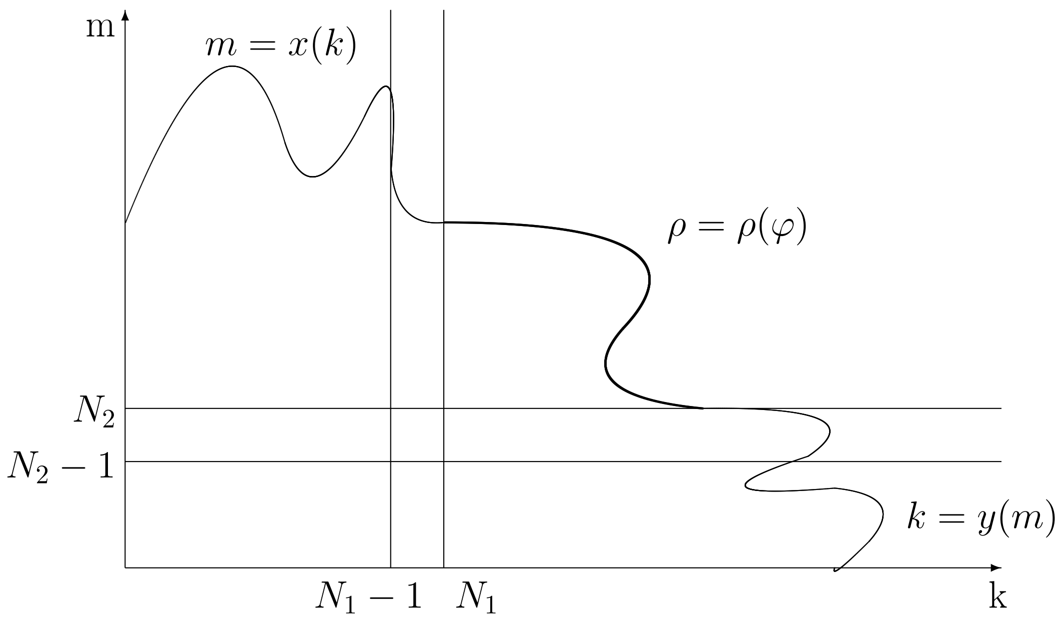
$$\mathscr{N}=([0,2N_1]\times[0,2N_2])\setminus([N_1,2N_1]\times[N_2,2N_2]),$$

$$\mathscr{E}=([0,2N_1]\times[0,2N_2])\setminus\{(2N_1,2N_2)\}.$$



(заштрихована частина - це область $\mathscr{N}$, а обмежена жирним контуром - $\mathscr{E}$).

Насправді, в теоремі 1 можна вибирати узагальнений поліном Y_{N_1,N_2} з умов біортогональності до елементів $x_{k,m}$ не для $(k,m) \in ([0,N_1] \times [0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$, а для $(k,m) \in \mathscr{H}$, де $\mathscr{H}-$ певна множина з $\mathbb{Z}_+^2$, обмежена деякою кривою $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0,\pi/2]$, що містить $(N_1+1)\,(N_2+1)-1$ точок. При цьому в якості $\mathscr{N}$ ми можемо обирати будь-яку множину з $\mathbb{Z}_+^2 \setminus ([N_1,\infty)\times[N_2,\infty))$, що є об'єднанням квадрата $[0,N_1-1]\times[0,N_2-1]$ з множинами вигляду $\{(k,m) : k \in [0,N_1-1],\ m \in [N_2,x(k)]\}$ та $\{(k,m) : m \in [0,N_2-1],\ k \in [N_1,y(m)]\}$, де $x(k),y(m)$ - деякі функції з $\mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{Z}_+$, такі що $x(k) \geq N_2$, $y(m) \geq N_1$ для всіх k та m. Тоді множина $\mathscr{E}$ буде мати вигляд $\mathscr{N} \cup \{\mathscr{H} + (N_1,N_2)\}$, де $\mathscr{H}+(N_1,N_2)-$ це множина, отримана паралельним переміщенням множини $\mathscr{H}$, при якому точка $(0,0)$ переходить в точку (N_1,N_2).



А саме, має місце наступне узагальнення теореми 1.

Теорема $1'$. Нехай за умов теореми 1 при деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n},$$

такий що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \rangle = 0$$

при $(k,m) \in \mathscr{H}$, де область $\mathscr{H} \subset \mathbb{Z}_+^2$ обмежена функцією $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, і містить $(N_1+1)(N_2+1)-1$ точок, і при цьому $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$, то тоді раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \right.$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \right\},$$

де

$$Q_{N_1,N_2}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j w^n,$$

матиме розклад в степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3) для всіх $(j,n) \in \mathscr{E}$.

Доведення. В процесі доведення теореми 1 нами була встановлена рівність

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{z^{N_1} w^{N_2}} \left\{ f(z,w) Q_{N_1,N_2}(z,w) - \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{(k,m)\in D^*} s_{k,m} z^k w^m \right\}.$$

Суми, що відповідають областям $D_{0,2}, D_{1,2}, D_{2,2}, D_{2,1}$ та $D_{2,0}$ при досить великих $\tilde{k}, \tilde{m}$ будуть містити лише $z^k w^m$ при $(k,m) \notin \mathscr{E}$.

Розглянемо

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{(k,m)\in D_{0,0}} s_{k,m} z^k w^m =$$

$$= z^{N_1} w^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^{k-j} w^{m-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n}.$$

Далі розглянемо:

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{(k,m)\in D_{0,1}} s_{k,m} z^k w^m =$$

$$= z^{N_1} w^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n} s_{k,m} z^{k-j} w^{m-n} =$$

$$= w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n}.$$

Аналогічно по області $D_{1,0}$:

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{(k,m)\in D_{1,0}} s_{k,m} z^k w^m =$$

$$= z^{N_1} \sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}.$$

Формуючи чисельник двовимірної апроксиманти Паде, ми включаємо до нього першу суму повністю. З другої суми візьмемо

$$w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n},$$

а решта

$$w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=x(k)-N_2+1}^{\tilde{m}} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n}$$

потрапляє до залишку.

З третьої суми беремо

$$z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}.$$

Решта

$$z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=y(m)-N_1+1}^{\tilde{k}} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}$$

також потрапляє до залишку.

Враховуючи умови біортогональності, накладені на узагальнений поліном Y_{N_1,N_2}, приходимо до висновку про справедливість твердження теореми.$\square$

Відзначимо, що, як і у випадку одновимірних узагальнених моментних зображень, задача про двовимірні узагальнені моментні зображення може бути сформульована в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, і в просторі $\mathscr{X}$ існують комутуючі між собою обмежені оператори $A, B : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, такі що

$$Ax_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$Bx_{k,m} = x_{k,m+1}$$

при всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Нехай в просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені оператори $A^\star, B^\star : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$, спряжені до операторів A та B відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ в тому розумінні, що $\forall x \in \mathscr{X}, y \in \mathscr{Y}$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle,$$

$$\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^\star y\rangle.$$

Тоді зображення (2) може бути записаним у вигляді

$$s_{k,m} = \left\langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle, \ k, m \in \mathbb{Z}_+,$$

і ряд (3) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(z,w) = \left\langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle,$$

де резольвентна функція $\widehat{R_z}(A)$ визначається рівністю $\widehat{R_z}(A) = (I - zA)^{-1}$.

В такому випадку за умов теореми 1 матиме місце наступна формула для похибки апроксимації

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} = \frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ z^{N_1} w^{N_2} \langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, Y_{N_1,N_2} \rangle + \right.$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \right\}.$$

За умов теореми $1'$ ця формула набуває вигляду:

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} = \frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ z^{N_1} w^{N_2} \langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, Y_{N_1,N_2} \rangle + \right.$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=y(m)-N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=x(k)-N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \right\}.$$

Розглянемо окремі приклади зображень вигляду (2) та застосуємо їх до побудови раціональних апроксимацій.

Нехай $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = L_2([0,1], d\mu)$ для деякої міри, що визначається неспадною функцією $\mu(t)$, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$. Визначимо в просторі $\mathscr{X}$ два оператори

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Їх резольвентні функції мають вигляд

$$\left(\widehat{R}_z(A)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-zt},$$

$$\left(\widehat{R}_w(B)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-wt}.$$

Таким чином,

$$f(z,w) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-zt)(1-wt)} = \frac{wg(w)-zg(z)}{w-z}, \tag{13}$$

де

$$g(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-zt}.$$

Наприклад, для $\mu(t) = t$, будемо мати $g(z) = -\dfrac{\ln(1-z)}{z}$, і, отже,

$$f(z,w) = \frac{\ln\dfrac{1-z}{1-w}}{w-z}.$$

Функції $x_{k,m}(t)$ будуть при цьому мати вигляд

$$x_{k,m}(t) = t^{k+m},$$

і отже,

$$s_{k,m} = \int_0^1 t^{k+m} d\mu(t). \tag{14}$$

При

$$d\mu(t) = t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt, \nu, \sigma > -1 \tag{15}$$

будемо мати

$$s_{k,m} = \int_0^1 t^{k+m+\nu}(1-t)^{\sigma}dt = \frac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}, \tag{16}$$

і отже, отримана функція

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)} z^k w^m \tag{17}$$

з точністю до постійного множника співпадатиме з гіпергеометричним рядом Аппеля

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+m}(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!} z^k w^m$$

(див. [14, с.219, формула (6)]) при $\alpha = \nu + 1$, $\beta = 1$, $\beta' = 1$, $\gamma = \nu + \sigma + 2$.

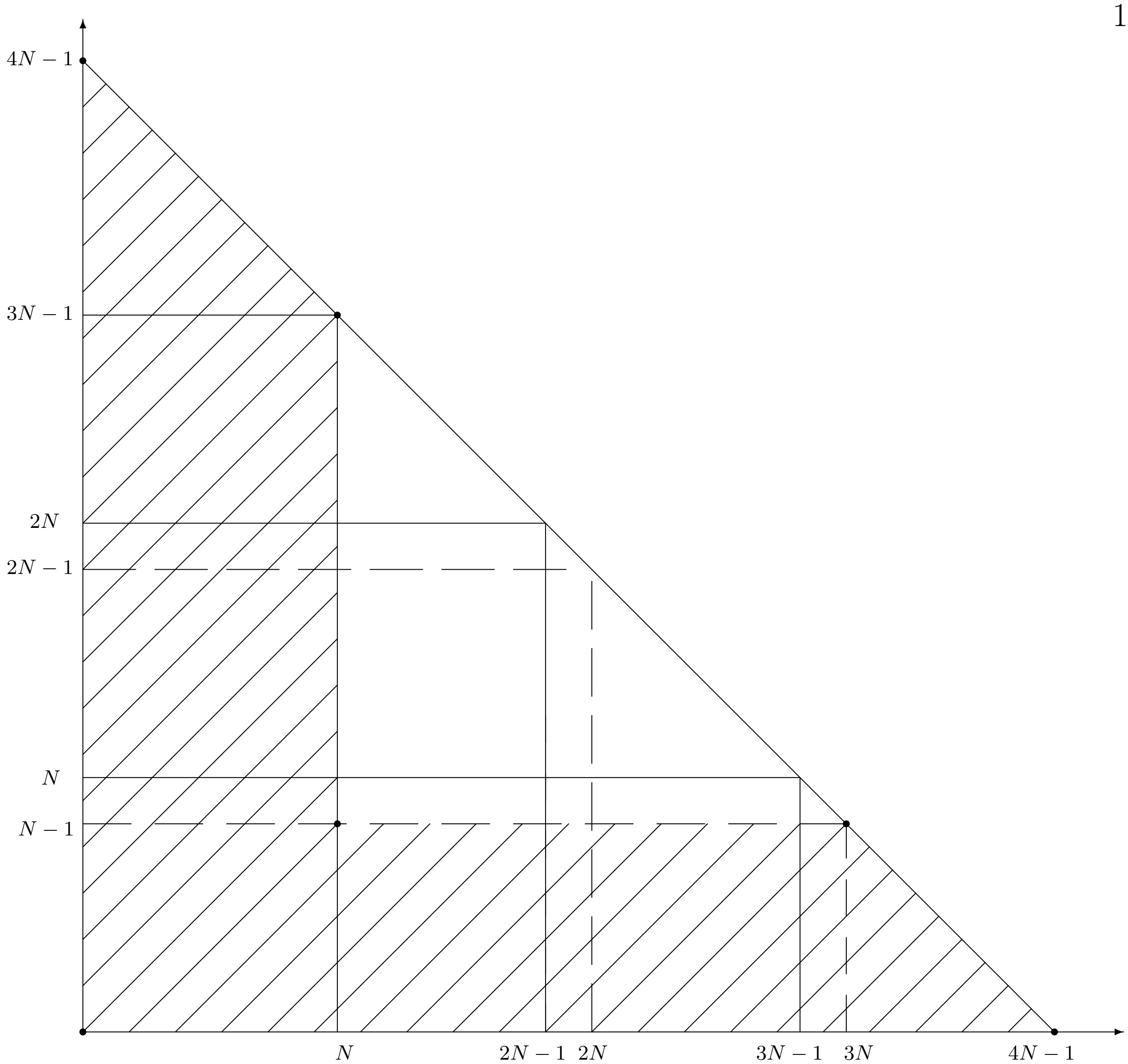
Оскільки функція $f(z, w)$ вигляду (13) є симетричною відносно своїх змінних, то має сенс наближати її симетричними агрегатами. Отже, обмежимось випадком $N_1{=}N_2{=}N$. Для знаходження апроксиманти Паде для $f(z, w)$ вигляду (13) за теоремами $1{-}1'$ нам потрібно побудувати узагальнений поліном вигляду (9), для якого виконуються умови біортогональності (10). Оскільки $Y_{N,N}(t)$ в даному випадку буде алгебраїчним многочленом степеня $2N$, який ортогональний до многочленів степеня $\leqslant 2N-1$, то він співпадатиме з точністю до постійного множника з многочленом, ортонормованим на $[0, 1]$ за мірою $d\mu(t)$, а у випадку міри (15) — з ортонормованим зсунутим на $[0, 1]$ многочленом Якобі (див. [15, с. 116]).

Зауважимо, що поліном $Y_{N,N}(t) = P_{2N}(t)$ при цьому буде ортогональним не лише до $x_{k,m}(t), (k, m) \in ([0, N] \times [0, N]) \setminus \{(N, N)\}$, але і до $x_{k,m}(t)$ при $(k, m) \in \{(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2, k + m \leqslant 2N - 1\}$. Тому при побудові апроксиманти Паде функцій вигляду (13) має сенс брати коефіцієнти чисельника не з множини

$$\mathscr{N} = ([0, 2N] \times [0, 2N]) \setminus ([N, 2N] \times [N, 2N]),$$

як пропонується в теоремі 1, а з множини

$$\mathscr{N}_1 = \{(k, m) : k + m \leqslant 4N - 1\} \setminus \{(k, m) : k, m \geq N\}.$$



Нехай функція $f(z,w)$ має вигляд (13). Тоді

$$Y_{N,N}(t) = P_{2N}(t),$$

де $P_{2N}(t)$ – многочлен степеня $2N$, ортогональний на $[0,1]$ за мірою $d\mu(t)$.

Запишемо його у вигляді:

$$P_{2N}(t) = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j.$$

Отже, маємо

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j.$$

З цієї рівності коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}, k, m = \overline{0, N}$ можна визначити безліччю способів. Оскільки функція $f(z, w)$ симетрична, нас будуть цікавити тільки симетричні розв'язки. Виокремимо з них наступні три:

Спосіб (a). Будемо обирати коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$ таким чином, щоб при $k + m = k_1 + m_1$ виконувались рівності

$$c_{k,m}^{(N,N)} = c_{k_1,m_1}^{(N,N)}.$$

В такому разі ортогональний многочлен $P_{2N}(t)$ можна розкласти наступним чином

$$P_{2N}(t) = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-k} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=N-k+1}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} t^m \sum_{k=0}^{m} c_{k,m-k}^{(N,N)} + t^{N+1} \sum_{m=0}^{N-1} t^m \sum_{k=0}^{N-m-1} c_{N-k,m+k+1}^{(N,N)}.$$

Таким чином, отримаємо співвідношення

$$c_{k,m}^{(N,N)} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+m+1} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } k+m \leqslant N, \\ \dfrac{1}{2N-k-m+1} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } k+m > N. \end{cases}$$

Спосіб (b). Будемо вибирати коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$ таким чином, щоб коефіцієнти з номерами, що знаходяться строго всередині квадрата $[0, N] \times [0, N]$ були нульовими, тобто

$$\sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j = \sum_{k=0}^{N-1} c_{k,0}^{(N,N)} t^k + t^N \sum_{m=0}^{N} c_{N,m}^{(N,N)} t^m + \sum_{m=1}^{N-1} c_{0,m}^{(N,N)} t^m + t^N \sum_{k=0}^{N-1} c_{k,N}^{(N,N)} t^k,$$

так що

$$c_{0,0}^{(N,N)} = p_0^{(2N)}, c_{N,N}^{(N,N)} = p_{2N}^{(2N)},$$

а для решти коефіцієнтів:

$$c_{k,0}^{(N,N)} = \frac{1}{2}p_k^{(2N)}, k = \overline{1, N-1},$$

$$c_{N,m}^{(N,N)} = \frac{1}{2}p_{N+m}^{(2N)}, m = \overline{0, N-1},$$

$$c_{0,m}^{(N,N)} = \frac{1}{2}p_m^{(2N)}, m = \overline{1, N-1},$$

$$c_{k,N}^{(N,N)} = \frac{1}{2}p_{k+N}^{(2N)}, k = \overline{0, N-1}.$$

Спосіб (c). Цей спосіб відрізняється від способу (a) тим, що по відрізках $k+m = p$, що лежать в квадраті $[0, N]\times[0, N]$, ми покладатимемо коефіцієнти не рівними між собою, а пропорціональними біноміальним коефіцієнтам.

Так що

$$c_{k,m}^{(N,N)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+m}}\begin{pmatrix} k+m \\ k \end{pmatrix} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } k+m \leqslant N, \\ \dfrac{1}{2^{2N-k-m}}\begin{pmatrix} 2N-k-m \\ N-k \end{pmatrix} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } k+m > N. \end{cases}$$

Побудуємо апроксиманти вказаних типів для функцій вигляду (13). Зазначимо, що для обраної нами конфігурації області $\mathscr{N}_1$ в теоремі $1'$ ми повинні покласти $x(k) = 4N-1-k$, $y(m) = 4N-1-m$.

Для випадку (a) отримаємо:

$$Q_{N,N}(z,w) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N} \frac{1}{2N-j-n+1} p_{2N-j-n}^{(2N)} z^j w^n + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1} \frac{1}{j+n+1} p_{2N-j-n}^{(2N)} z^j w^n.$$

Підрахуємо чисельник :

$$P_{\mathscr{N}_1}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N}\sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{j+n+1} s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{2N-j-n+1} s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{j+n+1} s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{2N-j-n+1} s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{j+n+1} s_{k+j-N,m+n}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{2N-j-n+1} s_{k+j-N,m+n}.$$

Для випадку (b) отримаємо:

$$Q_{N,N}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{j,n}^{(N,N)} z^{N-j} w^{N-n}=$$

$$=c_{0,0}^{(N,N)} z^N w^N + c_{N,N}^{(N,N)} + z^N\sum_{n=1}^{N} c_{0,n}^{(N,N)} w^{N-n} + w^N\sum_{j=1}^{N} c_{j,0}^{(N,N)} z^{N-j}+$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1} c_{N,n}^{(N,N)} w^{N-n}+\sum_{j=0}^{N-1} c_{j,N}^{(N,N)} z^{N-j}=p_0^{(2N)} z^N w^N + p_{2N}^{(2N)}+$$

$$+\frac{1}{2}z^N\sum_{n=1}^{N} p_n^{(2N)} w^{N-n}+\frac{1}{2}w^N\sum_{j=1}^{N} p_j^{(2N)} z^{N-j}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} p_{N+n}^{(2N)} w^{N-n}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1} p_{N+j}^{(2N)} z^{N-j}.$$

Обчислимо чисельник:

$$P_{\mathcal{N}_1}(z,w)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}c_{N-j,N-n}^{(N,N)}s_{k-j,m-n}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N}c_{N-j,n}^{(N,N)}s_{k-j,m+n}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{m}c_{j,N-n}^{(N,N)}s_{k+j,m-n}=$$

$$=p_{2N}^{(2N)}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^ms_{k,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^ms_{k,m+N}+\right.$$

$$\left.+\,z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^ms_{k+N,m}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{n=1}^{m}p_{2N-n}^{(2N)}s_{k,m-n}+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{n=1}^{m}p_{2N-n}^{(2N)}s_{k+N,m-n}+\right.$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{n=1}^{N-1}p_{N+n}^{(2N)}s_{k,m+n}+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=1}^{k}p_{2N-j}^{(2N)}s_{k-j,m}+$$

$$\left.+\,z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=1}^{N}p_{j+N}^{(2N)}s_{k+j,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{j=1}^{k}p_{2N-j}^{(2N)}s_{k-j,m+N}\right\}$$

Для випадку (c) аналогічно з випадком (a) отримаємо:

$$Q_{N,N}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p_{2N-j-n}^{(2N)}z^jw^n+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{2N-j-n}^{(2N)}z^jw^n.$$

$$P_{\mathcal{N}_1}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}}\begin{pmatrix} 2N-j-n \\ N-n \end{pmatrix} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{1}{2^{j+n}}\begin{pmatrix} j+n \\ n \end{pmatrix} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}}\begin{pmatrix} 2N-j-n \\ N-n \end{pmatrix} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{1}{2^{j+n}}\begin{pmatrix} j+n \\ n \end{pmatrix} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j-N,m+n}+$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}}\begin{pmatrix} 2N-j-n \\ N-n \end{pmatrix} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j-N,m+n}.$$

Таким чином встановлено наступний результат.

Теорема 2. Для аналітичної функції $f(z,w)$, що має інтегральне зображення (14) при довільному $N \in \mathbb{N}$ раціональні функції

$$\pi_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q_{N,N}(z,w)},$$

такі що

$$Q_{N,N}(z,w) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n,$$

$$P_{\mathscr{N}_1}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n}+$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n},$$

а коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}, k,m=\overline{0,N}$ задовольняють рівностям

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j,$$

де $p_j^{(2N)}$– коефіцієнти алгебраїчного многочлена $P_{2N}(t)$, ортогонального на $[0,1]$ з вагою $d\mu(t)$, матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (3) для функції (13) для всіх $(j,n) \in \mathscr{E} = \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2 : j+n \leqslant 4N-1\}$. Зокрема, це справедливо для наступних раціональних функцій:

$$\pi^{(a)}_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w) = \frac{P^{(a)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q^{(a)}_{N,N}(z,w)},$$

де

$$Q^{(a)}_{N,N}(z,w) =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1} \frac{1}{j+n+1} p^{(2N)}_{2N-j-n} z^j w^n + \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N} \frac{1}{2N-j-n+1} p^{(2N)}_{2N-j-n} z^j w^n.$$

$$P^{(a)}_{\mathscr{N}_1}(z,w) = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{p^{(2N)}_{j+n}}{j+n+1} s_{k+j-N,m+n-N}+$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{p^{(2N)}_{j+n}}{2N-j-n+1} s_{k+j-N,m+n-N}+$$
$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-m-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{p^{(2N)}_{j+n}}{j+n+1} s_{k+j,m+n-N}+$$
$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-m-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{p^{(2N)}_{j+n}}{2N-j-n+1} s_{k+j,m+n-N}+$$
$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-k-1} z^k w^m \sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{p^{(2N)}_{j+n}}{j+n+1} s_{k+j-N,m+n}+$$
$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-k-1} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N} \frac{p^{(2N)}_{j+n}}{2N-j-n+1} s_{k+j-N,m+n}.$$

$$\pi^{(b)}_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w) = \frac{P^{(b)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q^{(b)}_{N,N}(z,w)},$$

де

$$Q^{(b)}_{N,N}(z,w)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(z^n+w^n)\left(p^{(2N)}_{n}z^{N-n}w^{N-n}+p^{(2N)}_{2N-n}\right).$$

$$P^{(b)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)=p^{(2N)}_{2N}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^ms_{k,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^ms_{k,m+N}+\right.$$
$$\left.+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^ms_{k+N,m}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{n=1}^{m}p^{(2N)}_{2N-n}s_{k,m-n}+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{n=1}^{m}p^{(2N)}_{2N-n}s_{k+N,m-n}+\right.$$
$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{n=1}^{N-1}p^{(2N)}_{N+n}s_{k,m+n}+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=1}^{k}p^{(2N)}_{2N-j}s_{k-j,m}+$$
$$\left.+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=1}^{N}p^{(2N)}_{j+N}s_{k+j,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{j=1}^{k}p^{(2N)}_{2N-j}s_{k-j,m+N}\right\}$$

$$\pi^{(c)}_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w)=\frac{P^{(c)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q^{(c)}_{N,N}(z,w)},$$

де

$$Q^{(c)}_{N,N}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p^{(2N)}_{2N-j-n}z^jw^n+$$
$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p^{(2N)}_{2N-j-n}z^jw^n,$$

$$P^{(c)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p^{(2N)}_{j+n}s_{k+j-N,m+n-N}+$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p^{(2N)}_{j+n}s_{k+j-N,m+n-N}+$$
$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p^{(2N)}_{j+n}s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \binom{2N-j-n}{N-n} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j,m+n-N} +$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{k} \sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{1}{2^{j+n}} \binom{j+n}{n} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j-N,m+n} +$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=N-n+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \binom{2N-j-n}{N-n} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j-N,m+n}.$$

Зауваження. Для отриманих апроксимацій будемо мати:

$\dim \mathscr{D}^{(a)} = \dim \mathscr{D}^{(c)} = (N+1)^2$.

$\dim \mathscr{D}^{(b)} = 4N$.

$\dim \mathscr{N}_1 = \dfrac{2N(6N+1)}{2}$.

$\dim \mathscr{E} = \dfrac{4N(4N+1)}{2}$.

Очевидно,

$\dim \mathscr{E} - (\dim \mathscr{N}_1 + \dim \mathscr{D}^{(a)} - 1) = N(N-1)$

$\dim \mathscr{E} - (\dim \mathscr{N}_1 + \dim \mathscr{D}^{(b)} - 1) = 2(N-1)(N - \dfrac{1}{2})$.

Ці величини при $N > 1$ будуть строго більші за 0, що, вочевидь, викликано тією обставиною, що функції вигляду (13) зображаються у вигляді лінійних комбінацій функцій однієї змінної (див., наприклад, [15]).

Перейдемо тепер до розгляду наближення функції $f(z,w)$ вигляду (13) для випадку класичної ваги

$$d\mu(t) = (1-t)^{\sigma} t^{\nu} dt,\ \ \delta, \nu > -1.$$

В цьому випадку ортогональний многочлен, що фігурує в формулюванні теореми 2, як вже зазначалося, буде співпадати з точністю до постійного множника з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі степеня $2N$. Коефіцієнти цього многочлена можна обчислити за допомогою формули Родріга (див. [14], с. 268).

Будемо мати:

$$P_N(t;\sigma,\nu)=\sum_{m=0}^{2N}(-1)^m t^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(\sigma+1+m)}.$$

Отже, отримаємо:

$$p_k^{(2N)}=(-1)^k\binom{2N}{k}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+k)}{\Gamma(\sigma+1+k)}.$$

Це дає нам можливість на основі теореми 2 ефективно будувати раціональні апроксиманти описаного раніше вигляду для рядів Аппеля (17), а саме має місце наступний результат (наведемо його лише стосовно апроксимант, що отримуються за варіантом (c)).

Теорема 3. Для гіпергеометричного ряду Аппеля (17) при будь-якому $N\in\ \mathbb{N}$ раціональна функція

$$\pi^{(c)}_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w)=\frac{P^{(c)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q^{(c)}_{N,N}(z,w)},$$

де

$$Q^{(c)}_{N,N}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\begin{pmatrix}2N-j-n\\N-n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2N\\2N-j-n\end{pmatrix}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-j-n)}{\Gamma(2N+\sigma+1-j-n)}z^jw^n+$$
$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{j+n}}\begin{pmatrix}j+n\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2N\\2N-j-n\end{pmatrix}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-j-n)}{\Gamma(2N+\sigma+1-j-n)}z^jw^n.$$

$$P^{(c)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{1}{2^{j+n}}\begin{pmatrix}j+n\\n\end{pmatrix}\times$$
$$\times(-1)^{j+n}\binom{j+n}{n}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \begin{pmatrix} 2N-j-n \\ N-n \end{pmatrix} \times$$

$$\times(-1)^{j+n}\binom{j+n}{n}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{1}{2^{j+n}} \begin{pmatrix} j+n \\ n \end{pmatrix} \times$$

$$\times(-1)^{j+n}\binom{j+n}{n}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \begin{pmatrix} 2N-j-n \\ N-n \end{pmatrix} \times$$

$$\times(-1)^{j+n}\binom{j+n}{n}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{1}{2^{j+n}} \begin{pmatrix} j+n \\ n \end{pmatrix} \times$$

$$\times(-1)^{j+n}\binom{j+n}{n}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \begin{pmatrix} 2N-j-n \\ N-n \end{pmatrix} \times$$

$$\times(-1)^{j+n}\binom{j+n}{n}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)}$$

матиме розклад в степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (17) для всіх $(j,n) \in \mathscr{E} = \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2 j + n \leqslant 4N - 1\}$.

Щоб проілюструвати цей результат, розглянемо частинний випадок $\nu = \sigma = 0$ і варіант апроксимації (c). Тоді, як було відзначено раніше, функція $f(z,w)$ матиме вигляд

$$f(z,w) = \frac{\ln \dfrac{1-z}{1-w}}{w-z}.$$

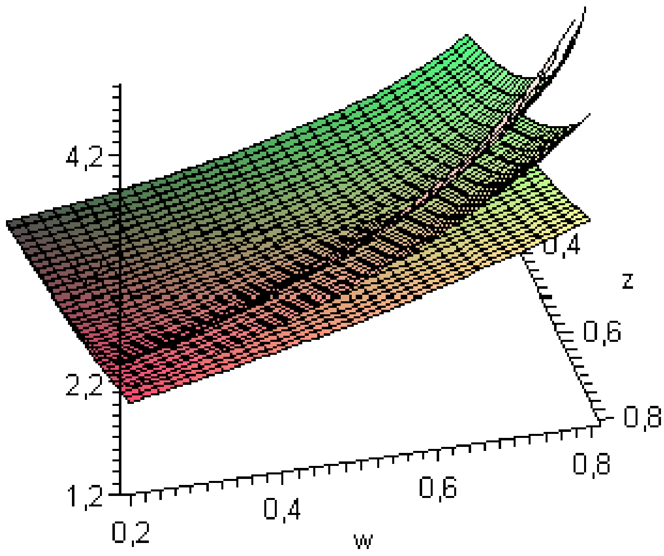
Покладемо спочатку $N = 1$. Отримаємо раціональну апроксимацію

$$\frac{P_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q_{1,1}(z,w)} = \frac{w^3 + z^3 + w^2 + z^2 + 12}{2zw - 6z - 6w + 12}.$$

Порівняємо значення наближуваної функції $f(z,w) = \dfrac{\ln \dfrac{1-z}{1-w}}{w-z}$, частинної суми степеневого ряду $P_3(z,w) = 1 + \frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{3}(z^2 + zw + w^2) + \frac{1}{4}(z^3 + z^2 w + {}$ ${}+ zw^2 + w^3)$ та побудованої нами апроксимації в точках квадрата $[0.8] \times [0.8]$. Отримаємо наступну таблицю

w\z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	1	1.115717756	1.277064060	1.527151220	2.011797390
	1	1.115333333	1.269333333	1.474000000	1.741333333
	1.000000000	1.115555556	1.273333333	1.497142857	1.826666667
0.2	1.115717756	1.25	1.438410362	1.732867952	2.310490602
	1.115333333	1.247999999	1.423333333	1.653333333	1.949999999
	1.115555556	1.249586777	1.433644860	1.696774194	2.088607595
0.4	1.277064060	1.438410362	1.666666667	2.027325540	2.746530722
	1.269333333	1.423333333	1.623999999	1.883333333	2.213333333
	1.273333333	1.433644860	1.655319149	1.975308642	2.458823529
0.6	1.527151220	1.732867952	2.027325540	2.5	3.465735903
	1.474000000	1.653333333	1.883333333	2.176000000	2.543333333
	1.497142857	1.696774194	1.975308642	2.382608696	3.010526316
0.8	2.011797390	2.310490602	2.746530722	3.465735903	5
	1.741333333	1.949999999	2.213333333	2.543333333	2.951999999
	1.826666667	2.088607595	2.458823529	3.010526316	3.886956522

та графік



Візьмемо тепер $N=2$. Отримаємо раціональну функцію

$$\frac{P_{\mathcal{N}_1}(z,w)}{Q_{2,2}(z,w)} = (60z^7+60w^7-48z^6w-48zw^6+68z^6+68w^6-56z^5w-56zw^5+$$
$$+79z^5+79w^5-67z^4w-67zw^4+96z^4+96w^4-84z^3w-84zw^3+130z^3+130w^3-$$
$$-130z^2w-130zw^2+260z^2+260w^2-40zw-840z-840w+1680)\cdot$$
$$\cdot(24z^2w^2-240zw^2-240z^2w+540z^2+540w^2+1080zw-1680z-1680w+1680)^{-1}.$$

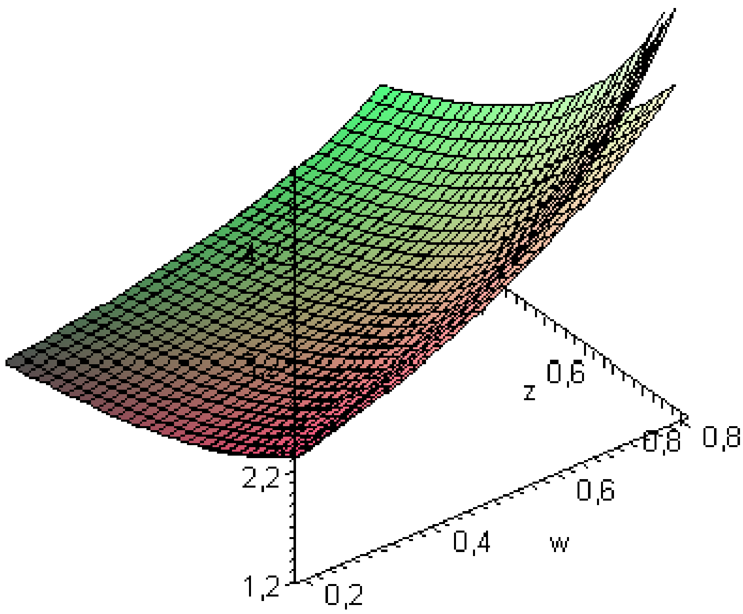
Наведемо таблицю значень наближуваної функції, частинної суми степеневого ряду

$$P_7(z,w) = 1+\frac{1}{2}(z+w)+\frac{1}{3}(z^2+zw+w^2)+$$
$$+\frac{1}{4}(z^3+z^2w+zw^2+w^3)+\frac{1}{5}(z^4+z^3w+z^2w^2+zw^3+w^4)+$$
$$+\frac{1}{6}(z^5+z^4w+z^3w^2+z^2w^3+zw^4+w^5)+\frac{1}{7}(z^6+z^5w+z^4w^2+z^3w^3+z^2w^4+zw^5+w^6)+$$
$$+\frac{1}{8}(z^7+z^6w+z^5w^2+z^4w^3+z^3w^4+z^2w^5+zw^6+w^7)=$$
$$=\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} z^m w^{k-m}$$

та побудованої апроксимації

w\z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	1	1.115717756	1.277064060	1.527151220	2.011797390
	1	1.115717409	1.276949943	1.523044343	1.941530209
	1.000000000	1.115717633	1.277013333	1.524834792	1.960940469
0.2	1.115717756	1.25	1.438410362	1.732867952	2.310490602
	1.115717409	1.249996798	1.438182476	1.726707809	2.216801140
	1.115717633	1.249999930	1.438370451	1.730591604	2.254184731
0.4	1.277064060	1.438410362	1.666666667	2.027325540	2.746530722
	1.276949943	1.438182476	1.665574402	2.015233143	2.606110476
	1.277013333	1.438370451	1.666626430	2.025280391	2.684240361
0.6	1.527151220	1.732867952	2.027325540	2.5	3.465735903
	1.523044343	1.726707809	2.015233143	2.458009601	3.196987809
	1.524834792	1.730591604	2.025280391	2.497044927	3.397215406
0.8	2.011797390	2.310490602	2.746530722	3.465735903	5
	1.941530209	2.216801140	2.606110476	3.196987809	4.161139198
	1.960940469	2.254184731	2.684240361	3.397215406	4.854606766

та відповідний графік



Література

1. *Дзядык В.К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. — 1981. — **6**. — С. 8 – 12.
2. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — 222 с.
3. *Бейкер Дж.,Грейвс-Моррис П.Р.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
4. *Alabiso C., Butera P.* N-variable rational approximants and method of moments. // Journal of Mathematical Physics. — 1975. — **16**, N4. — P. 840 – 845.
5. *Chisholm J.S.* Rational approximants defined from double power series. // Math. Comp. — 1973. — **27**. — P. 841 – 848.
6. *Graves-Morris P.R., Hughes Jones R.* An analysis of two variable rational approximants. // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1976. — **2**, N1. — P. 41 – 48.
7. *Cuyt A.* How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case? // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1999. — **105**, N1-2. — P. 25 – 50.
8. *Cuyt A., Driver K., Tan J., Verdonk B.* Exploring multivariate Padé approximants for multiple hypergeometric series. // Advances in Computational Mathematics. — 1999. — **10**, N1. — P. 29 – 49.
9. *Hughes Jones R.* General rational approximants in N variables. // J.Approx.Theory. — 1976. — **16**. — P. 201 – 233.
10. *Lutterodt C.* A two-dimensional analogue of Padé approximant theory. // J.Phys. A. : Math. — 1974. — **7**. — P. 1027 – 1037.
11. *Zhou P.* Explicit construction for multivariate Padé approximants. // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1997. — **79**. — P. 1 – 17.

12. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби .— Л.: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010.— 217 с.

13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.— М.: Наука, 1973.— 296 с.

14. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1979.— 416 с.

15. *Cuyt A., Tan J., Zhou P.* General order multivariate Padé approximants for pseudo-multivariate functions. // Math. Comput. — 2006. — **75**, N254. — P. 727-741.