

УДК 517.53

А. П. Голуб, Л. О. Чернецька (Інститут математики НАН України,
Київ)

A. P. Golub, L. O. Chernetska

**Багатовимірні узагальнені моментні зображення
та апроксимації типу Паде для функцій багатьох змінних**

**Multidimensional generalized moment representations
and Padé type approximants of multivariate functions**

The approach is proposed to construction of multidimensional Padé type approximants for analytic functions based on extension of V. K. Dzyadyk's method of generalized moment representations.

Предложен подход к построению многомерных аппроксимаций типа Паде аналитических функций, основанный на распространении метода обобщенных моментных представлений В. К. Дзядыка.

В 1981 році В. К. Дзядиком [1] було запропоновано метод узагальнених моментних зображень, що дозволив з єдиних позицій будувати та досліджувати апроксиманти Паде багатьох важливих класів спеціальних функцій. Подальший розвиток цього методу дав можливість застосувати його також для вивчення різноманітних узагальнень апроксимант Паде, таких як багаточкові апроксиманти Паде, апроксиманти Паде–Чебишева, сумісні апроксиманти Паде та ін. (див. [2]). В [3 - 5] були запропоновані означення двох- та тривимірних узагальнених моментних зображень і визначені шляхи їх застосування до побудови раціональних апроксимант типу Паде функцій двох та трьох змінних.

В даній статті цей підхід поширено на випадок довільної розмірності $d \geq 2$. Наведемо відповідне означення.

Означення 1. Говоритимемо, що для d -вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$ справджується узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, якщо у просторі $\mathcal{X}$ вказано d -вимірну послідовність елементів $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ — d -вимірну послідовність елементів $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d}$ такі, що

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d. \quad (1)$$

Розглянемо формальний степеневий ряд за d змінними

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad (2)$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_d^{k_d}$.

Введемо для зручності ряд позначень. При $p = 0, 1, \dots, d$ позначимо через Ω_p множину

$$\Omega_p = \{\omega \subseteq \{1, 2, \dots, d\} : |\omega| = p\}.$$

Впорядкуємо елементи кожної з множин $\omega \in \Omega_p$

$$\omega = \{l_1(\omega), l_2(\omega), \dots, l_p(\omega)\}$$

так, що

$$1 \leq l_1(\omega) < l_2(\omega) < \dots < l_p(\omega) \leq d.$$

Те ж саме зробимо з елементами доповнення $\bar{\omega} = \{1, 2, \dots, d\} \setminus \omega$

$$\bar{\omega} = \{m_1(\omega), m_2(\omega), \dots, m_{d-p}(\omega)\} \in \Omega_{d-p},$$

так що

$$1 \leq m_1(\omega) < m_2(\omega) < \dots < m_{d-p}(\omega) \leq d.$$

Для кожної множини $\omega \in \Omega_p, p = 0, 1, \dots, d$, введемо позначення

$$\delta(\omega) = (\delta_1(\omega), \delta_2(\omega), \dots, \delta_d(\omega)),$$

де

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \in \omega, \\ 1, & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \dots, \varepsilon_d(\omega)),$$

де

$$\varepsilon_i(\omega) = \begin{cases} -1, & \text{при } i \in \omega, \\ 1, & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

так що

$$\delta_i(\omega) = \frac{\varepsilon_i(\omega) + 1}{2}, i = 1, 2, \dots, d.$$

Позначимо також

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d, \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_+^d,$$

так що

$$\mathbf{1} = \delta(\emptyset), \mathbf{0} = \delta(\{1, 2, \dots, d\}).$$

Для кожних векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ через $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ позначимо покоординатний добуток векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_d b_d).$$

Позначимо також для кожного вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^d$:

$$\Delta(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d : j_i \in \{0, 1, \dots, a_i\}, i = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

З врахуванням цих позначень встановлено наступний результат, що дозволяє для рядів вигляду (2) з коефіцієнтами, для яких справедливі зображення вигляду (1), будувати їх d -вимірні апроксиманти типу Паде. Для розмірностей $d = 2$ та $d = 3$ відповідні результати були встановлені в [3 – 5]. Огляд результатів, що стосуються різноманітних багатовимірних аналогів апроксимацій Паде, наведено в [6, с. 323 – 332].

Теорема 1. Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду вигляду (2) справджується узагальнене моментне зображення вигляду (1). Тоді, якщо для деякого $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_d) \in \mathbb{N}^d$ існує узагальнений многочлен

$$Y_{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} y_{\mathbf{j}} \quad (3)$$

такий, що $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N})} \neq 0$, і виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{N}} \rangle = 0 \quad (4)$$

при $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, то раціональна функція

$$[\mathcal{M}/\mathcal{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})}, \quad (5)$$

де

$$Q(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}}, \quad (6)$$

а

$$\begin{aligned} P(\mathbf{z}) = & \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^p z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}-\delta(\omega) \circ \mathbf{1})} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times \\ & \times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\delta(\bar{\omega}) \circ \mathbf{N} + \delta(\omega) \circ \mathbf{k})} c_{\delta(\omega) \circ \mathbf{N} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}} S_{\mathbf{k} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}} \end{aligned} \quad (7)$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) для всіх $\mathbf{k} \in \Delta(2\mathbf{N}) \setminus \{(2N_1, 2N_2, \dots, 2N_d)\}$, а отже,

ця раціональна функція є d -вимірною апроксимантою типу Паде ряду (2) порядку $[\mathcal{M}/\mathcal{N}]$, де $\mathcal{M} = \Delta(2\mathbf{N}) \setminus \prod_{i=1}^d \{N_i, N_i + 1, \dots, 2N_i\}$, $\mathcal{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

Доведення. Зафіксуємо деякий вектор $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}_+^d$ з досить великими координатами $K_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, 2, \dots, d$. Домножимо кожну з рівностей (1) на $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ і підсумуємо ці рівності за всіма $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{K})$. Зліва отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{K})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} &= \mathbf{z}^{-\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{k}-\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{K})} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \\ &= \mathbf{z}^{-\mathbf{j}} \left\{ f(\mathbf{z}) - \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \sum_{\mathbf{k} \in \prod_{i=1}^d [\delta_i(\bar{\omega})j_i, j_i + \delta_i(\bar{\omega})K_i - \delta_i(\omega)]} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\} - \mathbb{E}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\mathbb{E}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta(\mathbf{K})} e_{\mathbf{k},\mathbf{j}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Домножимо тепер отримані рівності на $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$ і підсумуємо за $\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})$. На основі (8) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \left\{ \mathbf{z}^{-\mathbf{j}} \left\{ f(\mathbf{z}) - \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \sum_{\mathbf{k} \in \prod_{i=1}^d [\delta_i(\bar{\omega})j_i, j_i + \delta_i(\bar{\omega})K_i - \delta_i(\omega)]} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\} - \mathbb{E}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}(\mathbf{z}) \right\} &= \\ &= \mathbf{z}^{-\mathbf{N}} \left\{ f(\mathbf{z}) \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}} - \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}} \times \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\mathbf{k} \in \prod_{i=1}^d [\delta_i(\bar{\omega})j_i, j_i + \delta_i(\bar{\omega})K_i - \delta_i(\omega)]} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\} - \tilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{K},\mathbf{N}}(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

де

$$\tilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{K},\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta(\mathbf{K})} \tilde{e}_{\mathbf{K},\mathbf{N}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Для того, щоб отримати остаточний вигляд чисельника (7), використаємо наступну лему.

Лема 1. Для довільних $N, K \in \mathbb{N}$ довільної послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ довільного набору чисел $\{c_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ та довільного $z \in \mathbb{C}$ мають місце наступні тотожності:

а)

$$\sum_{j=1}^N c_j z^{N-j} \sum_{k=0}^{j-1} s_k z^k = \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{j=0}^k c_{N-j} s_{k-j};$$

б)

$$\sum_{j=0}^N c_j z^{N-j} \sum_{k=j}^{j+K} s_k z^k = z^N \sum_{k=0}^K z^k \sum_{j=0}^N c_j s_{k+j}.$$

Для доведення леми досить використати елементарні заміни змінних підсумовування та зміну порядку підсумовування.

Враховуючи лему 1 і обираючи координати вектора $\mathbf{K}$ досить великими, переконуємося в справедливості формули (7).

Аналогічно тому, як це робилося у випадках $d = 2, 3$ ($[3 - 5]$), теорему 1 можна дещо узагальнити, якщо вибирати узагальнений многочлен $Y_{\mathbf{N}}$ з умов біортогональності вигляду (4) до елементів $x_{\mathbf{k}}$ не для $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, а для $\mathbf{k} \in \mathcal{H}_{\mathbf{N}}$, де $\mathcal{H}_{\mathbf{N}}$ — деяка підмножина з $\mathbb{Z}_+^d$, що містить рівно $\prod_{i=1}^d (N_i + 1) - 1$ елементів. Щоб сформулювати відповідне твердження, розглянемо деяку неперервно диференційовну функцію

$$\Phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R},$$

що має наступні властивості:

- 1) множина $\mathcal{D}_{\Phi} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d \mid \Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \leq 0\}$ є обмеженою в $\mathbb{R}_+^d$;
- 2) потужність множини $\mathcal{D}_{\Phi} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^d \mid x_i \geq N_i, i = 1, 2, \dots, d\}$ дорівнює $\prod_{i=1}^d (N_i + 1) - 1$;
- 3) $\forall i = 1, 2, \dots, d$ існують однозначно визначені функції

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$$

для $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in D_i := \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^{d-1} \mid \exists x_i \in \mathbb{R}_+ \text{ такі, що } \Phi(x_1, x_2, \dots, x_d) \leq 0\}$;

4) при кожному $i = 1, 2, \dots, d$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \geq N_i$$

для всіх значень $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in D_i$.

За схемою доведення теореми 1 в такому разі можна встановити такий результат.

Теорема 1'. Нехай за умов теореми 1 для деякого $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d$ існує узагальнений многочлен вигляду (3) такий, що $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N})} \neq 0$, і виконуються умови біортogonalності (4) при $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : \mathbf{k} + \mathbf{N} \in \mathcal{D}_{\Phi}\}$. Тоді раціональна функція вигляду (5), де $Q(\mathbf{z})$ має вигляд (6), а

$$\begin{aligned} P(\mathbf{z}) = & \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^p z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\substack{0 \leq k_{m_i(\omega)} \leq N_{m_i(\omega)} - 1, i=1,2,\dots,d-p \\ \Phi(\mathbf{k}) \leq 0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times \\ & \times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\delta(\bar{\omega}) \circ \mathbf{N} + \delta(\omega) \circ \mathbf{k})} c_{\delta(\omega) \circ \mathbf{N} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}} s_{\mathbf{k} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}}, \end{aligned}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) для всіх $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_{\Phi} \cap \mathbb{Z}_+^d$, а отже, ця раціональна функція є d -вимірною апроксимантою типу Паде ряду (2) порядку $[\mathcal{M}/\mathcal{N}]$, де $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\Phi} \cap \mathbb{Z}_+^d \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^d : x_i \geq N_i, i = 1, 2, \dots, d\}$, а $\mathcal{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

У випадку, коли лінійні простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ є нормованими, білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ є роздільно неперервною (див., наприклад, [7, с. 63]) і в просторі $\mathcal{X}$ задано попарно комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, i = 1, 2, \dots, d$ такі, що

$$A_i x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k} + \mathbf{e}_i}, i = 1, 2, \dots, d,$$

для кожного $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, де

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \mathbf{1} - \delta(\{i\}), i = 1, 2, \dots, d,$$

а в просторі $\mathcal{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A_i^* : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}, i = 1, 2, \dots, d$, спряжені відповідно до операторів

$A_i, i = 1, 2, \dots, d$, відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (див. [2, с. 18]), за умов теореми 1 матиме місце така формула для похибки апроксимації

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) - [\mathcal{M}/\mathcal{N}]_f(\mathbf{z}) &= \frac{1}{Q(\mathbf{z})} \times \\ &\times \left\{ \prod_{i=1}^d z_i^{N_i} \left\langle \prod_{r=1}^d \widehat{R}_{z_r}(A_r) x_0, Y_{\mathbf{N}} \right\rangle + \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^p z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\mathbf{k} \in \pi^{(\mathbf{N})}(\omega)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\delta(\bar{\omega}) \circ \mathbf{N} + \delta(\omega) \circ \mathbf{k})} C_{\delta(\omega) \circ \mathbf{N} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}} S_{\mathbf{k} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}} \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\pi^{(\mathbf{N})}(\omega) = \left(\pi_1^{(\mathbf{N})}(\omega), \pi_2^{(\mathbf{N})}(\omega), \dots, \pi_d^{(\mathbf{N})}(\omega) \right),$$

а

$$\pi_i^{(\mathbf{N})}(\omega) = \begin{cases} [0, N_i - 1] & \text{при } i \notin \omega, \\ [N_i + 1, \infty] & \text{при } i \in \omega. \end{cases}$$

За умов теореми 1' ця формула набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) - [\mathcal{M}/\mathcal{N}]_f(\mathbf{z}) &= \frac{1}{Q(\mathbf{z})} \times \\ &\times \left\{ \prod_{i=1}^d z_i^{N_i} \left\langle \prod_{r=1}^d \widehat{R}_{z_r}(A_r) x_0, Y_{\mathbf{N}} \right\rangle + \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^p z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\substack{0 \leq k_{m_i(\omega)} \leq N_{m_i(\omega)} - 1, i=1,2,\dots,d-p, \\ \Phi(\mathbf{k}) > 0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\delta(\bar{\omega}) \circ \mathbf{N} + \delta(\omega) \circ \mathbf{k})} C_{\delta(\omega) \circ \mathbf{N} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}} S_{\mathbf{k} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}} \right\}. \end{aligned}$$

Зауваження. Через $\widehat{R}_z(A)$ позначено резольвентну функцію оператора A : $\widehat{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}$, де $I : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — тотожний оператор.

Розглянемо тепер випадок, коли всі оператори $A_i, i = 1, 2, \dots, d$, співпадають

$$A_1 = A_2 = \dots = A_d = A.$$

В такому разі наближувана функція матиме вигляд

$$f(\mathbf{z}) = \left\langle \prod_{i=1}^d \widehat{R}_{z_i}(A) x_0, y_0 \right\rangle. \quad (9)$$

Встановлено такий результат.

Лема 2. Для функцій вигляду (9) є справедливим зображення

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{\prod_{s < t} (z_s - z_t)} \sum_{i=1}^d z_i^{d-1} (-1)^{i+1} \prod_{\substack{s < t \\ s, t \neq i}} (z_s - z_t) g(z_i), \quad (10)$$

де

$$g(z) = \left\langle \widehat{R}_z(A) x_0, y_0 \right\rangle.$$

Лему неважко встановити методом індукції.

Припустимо тепер, що при цьому оператор A є оператором множення на незалежну змінну в просторі $L_2([0, 1], d\mu)$, де μ — неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0, 1]$

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Нехай також $\mathbf{N} = (N, N, \dots, N) \in \mathbb{N}^d$. Тоді для того, щоб побудувати за теоремами 1 – 1' d -вимірні апроксиманти типу Паде функції $f(\mathbf{z})$ вигляду (10) з

$$g(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt},$$

необхідно побудувати многочлени

$$Y_{\mathbf{N}}(t) = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} t^{|\mathbf{j}|}, \text{ де } |\mathbf{j}| = j_1 + j_2 + \dots + j_d, \quad (11)$$

для яких виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 t^{|\mathbf{j}|} Y_{\mathbf{N}}(t) d\mu(t) = 0 \quad (12)$$

при $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, що рівнозначно тому, що

$$\int_0^1 t^j Y_{\mathbf{N}}(t) d\mu(t) = 0 \quad (13)$$

при $j = 0, 1, \dots, dN - 1$.

З (13) випливає, що поліном $Y_{\mathbf{N}}(t)$ повинен співпадати з точністю до постійного множника з ортонормованим на $[0, 1]$ з мірою $d\mu(t)$ алгебраїчним многочленом

$$P_{dN}(t) = \sum_{j=0}^{dN} p_j^{(dN)} t^j. \quad (14)$$

При цьому умова (12) буде виконуватися не лише для $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, але і для $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}| \leq 2dN - 1\}$, а тому в якості функції $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_d)$, що фігурує в формулюванні теореми 1', потрібно взяти функцію

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_d) = |\mathbf{x}| - 2dN + 1.$$

При цьому функції $\varphi_i : \mathbb{R}_+^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ матимуть вигляд

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) = 2dN - 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{i-1} - x_{i+1} - \dots - x_d.$$

Рівність (11) дозволяє за коефіцієнтами $p_j^{(dN)}, j = 0, 1, \dots, dN$, визначати коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}, \mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})$, але зробити це можна безліччю способами. Для визначеності будемо вважати, що

$$c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} = c_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{N})},$$

якщо $|\mathbf{j}| = |\mathbf{k}|$.

Встановлено такий допоміжний результат.

Лема 3. Нехай $N \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq dN$. Тоді кількість векторів $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ таких, що $k_i \leq N, i = 1, 2, \dots, d$, і $|\mathbf{k}| = j$, дорівнює

$$\gamma_j^{(N)} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{j}{N+1} \rfloor} \binom{d}{r} (-1)^r \frac{(d+j-r(N+1)-1)!}{(d-1)!(j-r(N+1))!}.$$

Доведення. Розглянемо многочлен

$$V_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Очевидно, що

$$V_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^d \left(\sum_{k=0}^N z_i^k \right) = \prod_{i=1}^d \frac{1 - z_i^{N+1}}{1 - z_i}.$$

Якщо покласти $z_1 = z_2 = \dots = z_d = z$, то отримаємо

$$\frac{(1 - z^{N+1})^d}{(1 - z)^d} = \sum_{j=0}^{dN} \gamma_j^{(N)} z^j.$$

Враховуючи розклади

$$(1 - z^{N+1})^d = \sum_{m=0}^d \binom{d}{m} (-1)^m z^{m(N+1)}$$

та

$$\frac{1}{(1 - z)^d} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d + k - 1)!}{(d - 1)! k!} z^k,$$

отримаємо твердження леми.

З леми 3 випливає, що коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$, $\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})$, многочленів $Y_{\mathbf{N}}$ повинні вибиратися таким чином, щоб

$$c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} = \frac{p_{|\mathbf{j}|}^{(dN)}}{\gamma_{|\mathbf{j}|}^{(N)}} = \frac{p_{|\mathbf{j}|}^{(dN)}}{\sum_{r=0}^{[\frac{|\mathbf{j}|}{N+1}]} \binom{d}{r} (-1)^r \frac{(d + |\mathbf{j}| - r(N+1) - 1)!}{(d-1)! (|\mathbf{j}| - r(N+1))!}}. \quad (15)$$

На основі наведених міркувань з використанням теореми 1' отримаємо такий результат.

Теорема 2. При кожному $N \in \mathbb{N}$ раціональна функція

$$[\mathcal{M} / \mathcal{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})},$$

де

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{z}) &= \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}}, \\ P(\mathbf{z}) &= \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^p z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\substack{0 \leq k_{m_i(\omega)} \leq N-1, i=1,2,\dots,d-p, \\ |\mathbf{k}| \leq 2dN-1}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times \\ &\times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\delta(\overline{\omega}) \circ \mathbf{N} + \delta(\omega) \circ \mathbf{k})} c_{\delta(\omega) \circ \mathbf{N} + \varepsilon(\omega) \circ \mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} s_{\sum_{i=1}^{d-p} j_{m_i} + |\mathbf{k}| - \sum_{i=1}^p j_{l_i}}, \end{aligned}$$

де $\mathbf{N} = (N, N, \dots, N)$, коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$ обчислюються за формулами (15), а $s_k = \int_0^1 t^k d\mu(t)$, матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду Тейлора-Маклорена для функції $f(\mathbf{z})$ вигляду

(10) для всіх $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}| \leq 2dN - 1\}$, а отже, ця раціональна функція є d -вимірною апроксимантою типу Паде функції (10) порядку $[\mathcal{M}/\mathcal{N}]$, де $\mathcal{M} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}| \leq 2dN - 1\}$, а $\mathcal{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

Зазначимо, що, якщо $d\mu(t) = t^\nu(1-t)^\sigma dt$, $\nu, \sigma > -1$, то функція (10) буде частинним випадком d -вимірної функції Лаурічелли

$$F_D(a, b_1, \dots, b_d; c; z_1, \dots, z_d) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|} (b_1)_{k_1} \dots (b_d)_{k_d}}{c_{|\mathbf{k}|} k_1! \dots k_d!} z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}$$

при $a = \nu + 1$, $b_1 = b_2 = \dots = b_d = 1$, $c = \rho + \nu + 2$ (див. [8], [9, с. 33]).

При цьому многочлени (14) будуть зсунутими многочленами Якобі, ортонормованими на $[0, 1]$ з вагою $t^\nu(1-t)^\sigma$, і їх коефіцієнти можуть бути записані в явному вигляді (див. [10], с. 581) а отже, за теоремою 2 ми отримаємо явний вигляд d -вимірних апроксимацій типу Паде відповідних функцій.

Література

1. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8 – 12.
2. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — 222 с.
3. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №8. — С. 1035 – 1058.
4. *Чернецька Л. О.* Тривимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій трьох змінних // Доп. НАНУ. — 2014. — №7. — С. ? – ?.
5. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Побудова апроксимацій Паде для деяких гіпергеометричних рядів Лаурічелли за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2014. — ?, №?. — С. ? – ? - Прийнято до друку.
6. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Апроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
7. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 444 с.
8. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1983. — №7. — P. 111 – 158.
9. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. — New York: John Wiley and Sons, 1985. — 425 p.
10. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.