

А.П. Голуб, Л.О.Чернецька (Інститут математики НАН України, Київ)
A.P. Golub, L.O.Chernetska

**Двовимірні узагальнені моментні зображення
та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта**

**Two-dimensional generalized moment representations
and Padé approximants of some Humbert series**

By means of extension of V.K. Dzyadyk's method of generalized moment representations to the case of two-dimensional number sequences Padé approximants for some Humbert confluent hypergeometric series are constructed and investigated.

За допомогою поширення методу узагальнених моментних зображень В.К. Дзядика на випадок двовимірних числових послідовностей побудовано та досліджено апроксиманти Паде для деяких вироджених гіпергеометричних рядів Гумберта.

При помощи распространения метода обобщенных моментных представлений В.К. Дзядыка на случай двумерных числовых последовательностей построены и исследованы аппроксиманты Паде для некоторых вырожденных гипергеометрических рядов Гумберта.

Метод узагальнених моментних зображень, запропонований В.К. Дзяди-ком [1], може бути поширений на випадок двовимірних числових послідовно-стей [2].

Означення 1. Говоритимемо, що для двовимірної числової послідовно-сті $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ справджується узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною фор-мою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, якщо в просторі $\mathcal{X}$ вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а в просторі $\mathcal{Y}$ — двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

Такі зображення можуть бути використані для побудови двовимірних апроксимацій Паде формальних степеневих рядів від двох змінних.

Теорема 1 [2]. *Нехай формальний степеневий ряд від двох змінних має вигляд*

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \quad (2)$$

і нехай для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ справджується узагаль-нене моментне зображення вигляду (1). Тоді, якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує нетривіальний узагальнений многочлен

$$Y_{N_1, N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1, N_2)} y_{j,n},$$

такий що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1, N_2} \rangle = 0$$

при $(k, m) \in \mathcal{H}$, де область $\mathcal{H} \subset \mathbb{Z}_+^2$ обмежена графіком деякої функції $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, і містить рівно $(N_1 + 1)(N_2 + 1) - 1$ точок, і при цьому $c_{N_1, N_2}^{(N_1, N_2)} \neq 0$, то раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w) = \frac{1}{Q_{N_1, N_2}(z, w)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m-n} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^m c_{j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k+j, m-n} + \\
& + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m+n} \Bigg\}, \quad (3)
\end{aligned}$$

де

$$Q_{N_1, N_2}(z, w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} z^j w^n,$$

а $x(k), y(m)$ — деякі функції з $\mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{Z}_+$, такі що $x(k) \geq N_2, y(m) \geq N_1$ для всіх значень k та m , матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть із коефіцієнтами ряду (2) для всіх

$$\begin{aligned}
(k, m) \in \mathcal{E} = & ([0, N_1-1] \times [0, N_2-1]) \cup \{(k, m) : k \in [0, N_1-1], m \in [N_2, x(k)]\} \cup \\
& \cup \{(k, m) : m \in [0, N_2-1], k \in [N_1, y(m)]\} \cup \\
& \cup \{(k, m) : k \geq N_1, m \geq N_2, (k - N_1, m - N_2) \in \mathcal{H}\}.
\end{aligned}$$

Тобто раціональна функція (3) буде апроксимантою Паде ряду (2) зі знаменником, коефіцієнти якого мають індекси з області

$$\mathcal{D} = [0, N_1] \times [0, N_2],$$

а коефіцієнти чисельника — з області

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} = & ([0, N_1-1] \times [0, N_2-1]) \cup \{(k, m) : k \in [0, N_1-1], m \in [N_2, x(k)]\} \cup \\
& \cup \{(k, m) : m \in [0, N_2-1], k \in [N_1, y(m)]\}.
\end{aligned}$$

Для побудови зображень вигляду (1) зручно використати той факт, що задачу про двовимірні узагальнені моментні зображення, як і задачу про одновимірні узагальнені моментні зображення, можна сформулювати в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ є нормованими, і в просторі $\mathcal{X}$ існують комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A, B : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, такі що

$$Ax_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$Bx_{k,m} = x_{k,m+1}$$

при всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Нехай також в просторі $\mathcal{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A^*, B^* : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, спряжені до операторів A та B відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в тому розумінні, що $\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle,$$

$$\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^*y \rangle.$$

Тоді зображення (1) може бути записаним у вигляді

$$s_{k,m} = \langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+,$$

і ряд (2) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(z, w) = \left\langle \widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(B) x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle, \quad (4)$$

де резольвентна функція $\widehat{R}_z(A)$ визначається рівністю $\widehat{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}$.

За умов теореми 1 справджуватиметься така формула для похибки апроксимації

$$\begin{aligned} f(z, w) - [\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w) = & \frac{1}{Q_{N_1, N_2}(z, w)} \left\{ z^{N_1} w^{N_2} \left\langle \widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(B) x_{0,0}, Y_{N_1, N_2} \right\rangle + \right. \\ & + z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=y(m)-N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^m c_{j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k+j, m-n} + \\ & \left. + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=x(k)-N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m+n} \right\}. \end{aligned}$$

Нехай $\mathcal{X} = L[0, \frac{1}{2}] \cap C[\frac{1}{2}, 1]$ — простір функцій, заданих на $[0, 1]$, інтегровних на $[0, \frac{1}{2}]$ та неперервних на $[\frac{1}{2}, 1]$ з нормою

$$\|\cdot\|_{\mathcal{X}} = \|\cdot\|_{L[0, \frac{1}{2}]} + \|\cdot\|_{C[\frac{1}{2}, 1]}.$$

І нехай $\mathcal{Y} = C[0, \frac{1}{2}] \cap L[\frac{1}{2}, 1]$ — простір функцій, заданих на $[0, 1]$, неперервних на $[0, \frac{1}{2}]$ та інтегровних на $[\frac{1}{2}, 1]$ з нормою

$$\|\cdot\|_{\mathcal{Y}} = \|\cdot\|_{C[0, \frac{1}{2}]} + \|\cdot\|_{L[\frac{1}{2}, 1]}.$$

Очевидно, на добутку цих просторів можна задати білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(\tau)y(\tau)d\tau,$$

що буде роздільно неперервною (див. [3, с. 63]).

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}$ лінійні обмежені оператори

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Нескладно встановити (див. [4, с. 36]), що резольвентні функції цих операторів можуть бути зображені у вигляді

$$\begin{aligned} \left(\widehat{R}_z(A)\varphi\right)(t) &= \varphi(t) + z \int_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau, \\ \left(\widehat{R}_w(B)\varphi\right)(t) &= \varphi(t) + w \int_0^t \varphi(\tau)e^{w(t-\tau)}d\tau. \end{aligned}$$

Якщо покласти $x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1$, то

$$\begin{aligned} \left(\widehat{R}_z(A)x_{0,0}\right)(t) &= e^{zt}, \\ \left(\widehat{R}_w(B)\widehat{R}_z(A)x_{0,0}\right)(t) &= \frac{ze^{zt} - we^{wt}}{z - w}, \\ f(z, w) &= \int_0^1 \frac{ze^{zt} - we^{wt}}{z - w}dt = \frac{e^z - e^w}{z - w}. \end{aligned}$$

При цьому

$$x_{k,m}(t) = (A^k B^m x_{0,0})(t) = \frac{t^{k+m}}{(k+m)!},$$

і отже,

$$s_{k,m} = \int_0^1 x_{k,m}(t) y_{0,0}(t) dt = \frac{1}{(k+m+1)!}.$$

Якщо ж

$$x_{0,0}(t) = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu > -1, \quad y_{0,0}(t) = \frac{(1-t)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)}, \quad \sigma > -1, \quad (6)$$

то

$$x_{k,m}(t) = (A^k B^m x_{0,0})(t) = \frac{t^{k+m+\nu}}{\Gamma(k+m+\nu+1)},$$

$$s_{k,m} = \int_0^1 \frac{t^{k+m+\nu}}{\Gamma(k+m+\nu+1)} \cdot \frac{(1-t)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} dt = \frac{1}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)},$$

і отже, функція

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}$$

з точністю до сталого множника співпадатиме з частинним випадком виродженого гіпергеометричного ряду Гумберта [5]

$$\Phi_2(\alpha, \beta, \gamma, z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_m}{(\gamma)_{k+m} k! m!} z^k w^m$$

при $\alpha = \beta = 1$ і $\gamma = \nu + \sigma + 2$.

Неважко побачити, що кожного разу, коли оператори A та B співпадають між собою, зображення (4) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} f(z, w) &= \left\langle \widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(A) x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{z}{z-w} \widehat{R}_z(A) + \frac{w}{w-z} \widehat{R}_w(A) \right) x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle = \\ &= \frac{z}{z-w} \left\langle \widehat{R}_z(A) x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle + \frac{w}{w-z} \left\langle \widehat{R}_w(A) x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle. \end{aligned}$$

У випадку оператора (5) і початкових функцій (6) це дасть

$$f(z, w) = \frac{z {}_1F_1(1; \nu + \sigma + 2; z) - w {}_1F_1(1; \nu + \sigma + 2; w)}{z - w}, \quad (7)$$

де ${}_1F_1(a; b; z)$ — вироджена гіпергеометрична функція Куммера [6, с. 237].

Використаємо вищенаведені міркування для побудови раціональних апроксимацій функції (7). Оскільки функція (7) є симетричною відносно своїх змінних, наближувати її має сенс лише симетричними раціональними функціями. Тому відразу покладемо $N_1 = N_2 = N$. Щоб застосувати теорему 1, нам потрібно побудувати нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_{N,N} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^N c_{j,n}^{(N,N)} y_{j,n},$$

такий що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N,N} \rangle = 0$$

при $(k, m) \in ([0, N] \times [0, N]) \setminus \{(N, N)\}$.

У нашому випадку

$$x_{k,m}(t) = \frac{t^{k+m+\nu}}{\Gamma(k+m+\nu+1)}, y_{j,n}(t) = \frac{(1-t)^{j+n+\sigma}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)}.$$

Тому $Y_{N,N}(t) = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^N c_{j,n}^{(N,N)} \frac{(1-t)^{j+n+\sigma}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)} = \gamma_N P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(t) (1-t)^\sigma$, де $P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(t)$ — зсунутий ортонормований на $[0, 1]$ з вагою $t^\nu(1-t)^\sigma$ многочлен Якобі степеня $2N$ (див. [7, с. 580]), а γ_N — деяка константа, яку ми можемо, не обмежуючи загальності, покласти рівною 1.

Тоді

$$\sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^N c_{j,n}^{(N,N)} \frac{t^{j+n}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)} = P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(1-t).$$

Враховуючи явний вираз для коефіцієнтів ортогональних многочленів Якобі (див. [7, с. 581]), матимемо (константу для зручності знову покладемо рівною 1)

$$P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(1-t) = P_{2N}^{(\sigma,\nu)*}(t) = \sum_{m=0}^{2N} (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + m)}{\Gamma(\sigma + 1 + m)} t^m.$$

Отже, нам потрібно вибрати коефіцієнти $\{c_{j,n}^{(N,N)}\}_{j,n=0}^N$ так, щоб виконувалися

лись рівності

$$\sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^N c_{j,n}^{(N,N)} \frac{t^{j+n}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)} = \sum_{m=0}^{2N} (-1)^m t^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(\sigma+1+m)},$$

або ж

$$\sum_{\substack{0 \leq j,n \leq N \\ j+n=m}} c_{j,n}^{(N,N)} = (-1)^m \binom{2N}{m} \Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m).$$

Оберемо вказані коефіцієнти наступним чином

$$c_{j,n}^{(N,N)} = \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{j+n}} \binom{j+n}{j} \binom{2N}{j+n} \quad \text{при } 0 \leq j+n \leq N,$$

$$c_{j,n}^{(N,N)} = \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{2N-j-n}} \binom{2N-j-n}{N-j} \binom{2N}{j+n} \quad \text{при } N+1 \leq j+n \leq 2N.$$

Це дає нам можливість застосувати теорему 1 до побудови апроксимант Паде функції (7) зі знаменником $Q_{N,N}(z, w)$, індекси коефіцієнтів якого належать множині $[0, N]^2 \subset \mathbb{Z}_+^2$. Оскільки поліном $Y_{N,N}$, як легко бачити, буде ортогональним до $x_{k,m}$ не лише при $(k, m) \in [0, N]^2 \setminus \{(N, N)\}$, але і при $(k, m) \in \{k, m \in \mathbb{Z}_+, k+m \leq 2N-1\}$, то в теоремі 1 покладемо $x(k) = 4N-1-k$, $y(m) = 4N-1-m$. Отримаємо наступний результат.

Теорема 2. *Для виродженого гіпергеометричного ряду Гумберта*

$$f(z, w) = \Phi_2(1, 1, \gamma, z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{(\gamma)_{k+m}} = \frac{z {}_1F_1(1; \gamma; z) - w {}_1F_1(1; \gamma; w)}{z - w}$$

при $\gamma = \nu + \sigma + 2, \nu, \sigma > -1$, для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z, w)}{Q_{N,N}(z, w)},$$

де

$$Q_{N,N}(z, w) = \sum_{m=0}^N (-1)^m \binom{2N}{m} \Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m) z^{N-m} w^{N-m} \left(\frac{z+w}{2} \right)^m +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=N+1}^{2N} (-1)^m \binom{2N}{m} \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + m) \left(\frac{z+w}{2} \right)^{2N-m}, \\
P_{\mathcal{N}}(z, w) = & \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=N-m}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^N \sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + j + n)}{2^{j+n}} \times \\
& \times \binom{j+n}{j} \binom{2N}{j+n} \frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-2N+\nu+\sigma+2)} + \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N-1} \sum_{n=N-j+1}^N \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + j + n)}{2^{2N-j-n}} \times \\
& \times \binom{2N-j-n}{N-j} \binom{2N}{j+n} \frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-2N+\nu+\sigma+2)} + \\
& + z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^N \sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + j + n)}{2^{j+n}} \times \\
& \times \binom{j+n}{j} \binom{2N}{j+n} \frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)} + \\
& + z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=N-j+1}^N \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + j + n)}{2^{2N-j-n}} \times \\
& \times \binom{2N-j-n}{N-j} \binom{2N}{j+n} \frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)} + \\
& + w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^k \sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + j + n)}{2^{j+n}} \times \\
& \times \binom{j+n}{j} \binom{2N}{j+n} \frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)} + \\
& + w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=N-n+1}^N \frac{(-1)^{j+n} \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + j + n)}{2^{2N-j-n}} \times \\
& \times \binom{2N-j-n}{N-j} \binom{2N}{j+n} \frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)},
\end{aligned}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть із коефіцієнтами ряду (2) для функції (7) для всіх $(j, n) \in \mathcal{E} = \{(j, n) \in \mathbb{Z}_+^2 : j + n \leq 4N - 1\}$.

На основі теореми 2 можна встановити наступний результат про збіжність апроксимант Паде для вироджених гіпергеометричних рядів Гумберта.

Теорема 3. Побудовані в теоремі 2 раціональні апроксиманти функції

$$f(z, w) = \Phi_2(1, 1, \gamma, z, w) = \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{(\gamma)_{k+m}} = \frac{z {}_1F_1(1; \gamma; z) - w {}_1F_1(1; \gamma; w)}{z - w}$$

при $\gamma = \nu + \sigma + 2, \nu, \sigma > -1$, на кожному компактi з $\mathbb{C}^2$ рівномірно збігатимуться до функції f при $N \rightarrow \infty$. При цьому для знаменників апроксимант справджуватиметься асимптотична формула

$$Q_{N,N}(z, w) = \Gamma(4N + \sigma + \nu + 1) \left(\exp\left(-\frac{z+w}{4}\right) + o(1) \right),$$

а для чисельника — формула

$$P_{\mathcal{N}}(z, w) = \Gamma(4N + \sigma + \nu + 1) \left(\exp\left(\frac{z+w}{4}\right) f(z, w) + o(1) \right),$$

де величина $o(1) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ на кожному компактi з $\mathbb{C}^2$.

Доведення. Спочатку розглянемо знаменник

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} Q_{N,N}(z, w) = \\ &= \sum_{m=0}^N (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} z^{N-m} w^{N-m} \left(\frac{z+w}{2}\right)^m + \\ &+ \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1 - m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} \left(\frac{z+w}{2}\right)^m. \end{aligned}$$

Для першого доданка справедлива оцінка

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=0}^N (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} z^{N-m} w^{N-m} \left(\frac{z+w}{2}\right)^m \right| \leq \\ & \leq \sum_{m=0}^N \binom{2N}{m} \frac{|z|^{N-m} |w|^{N-m} \left|\frac{z+w}{2}\right|^m}{(3N + \sigma + \nu + 1)(3N + \sigma + \nu + 2) \cdot \dots \cdot (4N + \sigma + \nu)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{(3N-1)^N} \sum_{m=0}^{2N} \binom{2N}{m} |z|^{N-m} |w|^{N-m} \left| \frac{z+w}{2} \right|^m \leq \frac{(|z| \cdot |w| + \left| \frac{z+w}{2} \right|)^{2N}}{(3N-1)^N}.$$

При $|z| \leq R$ і $|w| \leq R$ це не перевищуватиме величину

$$\frac{(R^2 + R)^{2N}}{(3N-1)^N},$$

що при фіксованому $R > 0$ і $N \rightarrow \infty$ буде прямувати до нуля.

Другий доданок при деякому $0 < M < N-1$ розіб'ємо на два

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1 - m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^m = \\ & = \sum_{m=0}^M (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1 - m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^m + \\ & + \sum_{m=M+1}^{N-1} (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1 - m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^m. \end{aligned}$$

Оцінимо другу з отриманих сум:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=M+1}^{N-1} (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1 - m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^m \right| \leq \\ & \leq \sum_{m=M+1}^{N-1} \frac{(2N-m+1) \cdot \dots \cdot (2N)}{m!} \frac{1}{(4N + \sigma + \nu + 1 - m) \cdot \dots \cdot (4N + \sigma + \nu)} \times \\ & \times \left| \frac{z+w}{2} \right|^m = \sum_{m=M+1}^{N-1} \frac{\left| \frac{z+w}{2} \right|^m}{m!} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{2N-p}{4N + \sigma + \nu - p} = \\ & = \sum_{m=M+1}^{N-1} \frac{\left| \frac{z+w}{2} \right|^m}{m!} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{2 + \frac{\sigma + \nu + p}{2N-p}} = \sum_{m=M+1}^{N-1} \frac{\left| \frac{z+w}{2} \right|^m}{m!} \frac{1}{2^m} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{1 + \frac{\sigma + \nu + p}{2(2N-p)}} \leq \\ & \leq C \sum_{m=M+1}^{N-1} \frac{\left| \frac{z+w}{4} \right|^m}{m!} \leq C \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{\left| \frac{z+w}{4} \right|^m}{m!} \leq C \frac{\left(\frac{R}{2} \right)^{M+1}}{(M+1)!}, \end{aligned}$$

де C — деяка константа.

Тепер віднімемо від першої суми розвинення у степеневий ряд функції $e^{-\frac{z+w}{4}}$.

Оцінімо отриману різницю

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{m=0}^M (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1 - m)}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^m - \exp \left(-\frac{z+w}{4} \right) \right| \leq \\
& \leq \left| \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z+w}{2} \right)^m \left[\frac{(2N - m + 1) \cdot \dots \cdot (2N)}{(4N + \sigma + \nu + 1 - m) \cdot \dots \cdot (4N + \sigma + \nu)} - \frac{1}{2^m} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z+w}{4} \right)^m \right| \leq \\
& \leq \sum_{m=0}^M \frac{\left| \frac{z+w}{2} \right|^m}{m!} \left| \frac{1}{(2 + \frac{\sigma+\nu+m-1}{2N-m+1}) \cdot \dots \cdot (2 + \frac{\sigma+\nu}{2N})} - \frac{1}{2^m} \right| + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left| \frac{z+w}{4} \right|^m \leq \\
& \leq \varepsilon_N \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} \left| \frac{z+w}{4} \right|^m + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left| \frac{z+w}{4} \right|^m \leq \varepsilon_N \exp \left(\frac{R}{2} \right) + \frac{1}{(M+1)!} \left(\frac{R}{2} \right)^{M+1},
\end{aligned}$$

де $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Отже, в результаті отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} Q_{N,N}(z, w) - \exp \left(-\frac{z+w}{4} \right) \right| \leq \\
& \leq \frac{(R^2 + R)^{2N}}{(3N - 1)^N} + C \frac{\left(\frac{R}{2} \right)^{M+1}}{(M+1)!} + \varepsilon_N e^{\frac{R}{2}} + \frac{\left(\frac{R}{2} \right)^{M+1}}{(M+1)!}.
\end{aligned}$$

Очевидно, при $N \rightarrow \infty$ ця величина буде прямувати до величини

$$(C + 1) \frac{\left(\frac{R}{2} \right)^{M+1}}{(M+1)!},$$

що при $M \rightarrow \infty$ прямує до нуля. Таким чином, на кожному полікузі $\{(z, w) : |z| \leq R, |w| \leq R\}$ будемо мати

$$\frac{1}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} Q_{N,N}(z, w) \Rightarrow \exp \left(-\frac{z+w}{4} \right).$$

Згідно з теоремою Руше (див. [8, с. 425]) на кожному компактї з $\mathbb{C}^2$, починаючи з деякого $N \in \mathbb{Z}_+$, знаменники $Q_{N,N}(z, w)$ не матимуть нулів.

І крім цього, це дозволяє записати знаменники у вигляді

$$Q_{N,N}(z, w) = \Gamma(4N + \sigma + \nu + 1) \left(\exp \left(-\frac{z+w}{4} \right) + o(1) \right),$$

де величина $o(1) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ на кожному компактї з $\mathbb{C}^2$.

Оцінимо похибку наближення

$$\begin{aligned}
& |f(z, w) - [\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w)| = \\
& = \frac{1}{|Q_{N,N}(z, w)|} \left| z^N w^N \int_0^1 \left(\widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(B) x_{0,0} \right) (t) Y_{N,N}(t) dt + \right. \\
& \quad + z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=3N-m}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^m c_{j, N-n}^{(N,N)} s_{k+j, m-n} + \\
& \quad \left. + w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=3N-k}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^N c_{N-j, n}^{(N,N)} s_{k-j, m+n} \right|.
\end{aligned}$$

Розглянемо перший доданок

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(B) x_{0,0} \right) (t) Y_{N,N}(t) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{k+m+\nu} z^k w^m}{\Gamma(k+m+\nu+1)} Y_{N,N}(t) dt = \\
& = \int_0^1 \sum_{k+m \geq 2N} \frac{t^{k+m+\nu} z^k w^m}{\Gamma(k+m+\nu+1)} Y_{N,N}(t) dt = \\
& = \int_0^1 \sum_{p=2N}^{\infty} \frac{t^p}{\Gamma(p+\nu+1)} \sum_{k=0}^p z^k w^{p-k} Y_{N,N}(t) t^{\nu} dt = \\
& = \sum_{p=2N}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p+\nu+1)} \sum_{k=0}^p z^k w^{p-k} \int_0^1 t^p P_{2N}^{(\nu, \sigma)*}(t) t^{\nu} (1-t)^{\sigma} dt. \tag{8}
\end{aligned}$$

Функцію t^p можна розкласти в лінійну комбінацію ортогональних зсунутих многочленів Якобі $P_m^{(\nu, \sigma)*}(t)$:

$$t^p = \sum_{m=0}^p \alpha_m^{(p)} P_m^{(\nu, \sigma)*}(t). \tag{9}$$

Нехай $\vec{P}_p$ — вектор вигляду

$$\vec{P}_p = \left(P_0^{(\nu, \sigma)*}(t), P_1^{(\nu, \sigma)*}(t), \dots, P_p^{(\nu, \sigma)*}(t) \right)^T,$$

а $\vec{d}_p$ — вектор вигляду

$$\vec{d}_p = (1, t, \dots, t^p)^T.$$

Тоді зображення (9) можна переписати у вигляді

$$\vec{d}_p = A_p \vec{P}_p, \quad (10)$$

де нижня трикутна матриця A_p має вигляд

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_0^{(2)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \alpha_0^{(p)} & \alpha_1^{(p)} & \alpha_2^{(p)} & \dots & \alpha_p^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Раніше ми відзначали, що вірне зображення

$$P_k^{(\nu, \sigma)*}(t) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \frac{\Gamma(k + \sigma + \nu + 1 + m)}{\Gamma(\nu + 1 + m)} t^m.$$

У векторному записі це зображення матиме вигляд

$$\vec{P}_p = B_p \vec{d}_p, \quad (11)$$

де нижня трикутна матриця B_p має вигляд

$$B_p = \begin{pmatrix} \beta_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_0^{(1)} & \beta_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_0^{(2)} & \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \beta_0^{(p)} & \beta_1^{(p)} & \beta_2^{(p)} & \dots & \beta_p^{(p)} \end{pmatrix},$$

а її елементи дорівнюють

$$\beta_m^{(k)} = (-1)^m \binom{k}{m} \frac{\Gamma(k + \sigma + \nu + 1 + m)}{\Gamma(\nu + 1 + m)}, \quad m = 0, 1, \dots, k.$$

З (10) та (11) випливає, що

$$A_p = B_p^{-1} \text{ або } A_p B_p = I, \quad (12)$$

де I — одинична матриця розмірності $(p+1) \times (p+1)$. З (12) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $\alpha_m^{(p)}$, $m = 0, 1, \dots, p$.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \beta_0^{(0)} \alpha_0^{(p)} + \beta_0^{(1)} \alpha_1^{(p)} + \dots + \beta_0^{(p)} \alpha_p^{(p)} & = & 0 \\ \beta_1^{(1)} \alpha_1^{(p)} + \dots + \beta_1^{(p)} \alpha_p^{(p)} & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ & & & & \beta_p^{(p)} \alpha_p^{(p)} & = & 1 \end{array} \right.$$

Визначник цієї системи

$$H_p = \beta_0^{(0)} \beta_1^{(1)} \dots \beta_p^{(p)} \neq 0.$$

За формулами Крамера розв'язок системи має вигляд

$$\alpha_j^{(p)} = \frac{1}{H_p} \begin{vmatrix} \beta_0^{(0)} & \beta_0^{(1)} & \dots & \beta_0^{(j-1)} & 0 & \beta_0^{(j+1)} & \dots & \beta_0^{(p)} \\ 0 & \beta_1^{(1)} & \dots & \beta_1^{(j-1)} & 0 & \beta_1^{(j+1)} & \dots & \beta_1^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{j-1}^{(j-1)} & 0 & \beta_{j-1}^{(j+1)} & \dots & \beta_{j-1}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \beta_p^{(p)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{p-j}}{\beta_j^{(j)} \dots \beta_p^{(p)}} \begin{vmatrix} \beta_j^{(j+1)} & \beta_j^{(j+2)} & \dots & \beta_j^{(p-1)} & \beta_j^{(p)} \\ \beta_{j+1}^{(j+1)} & \beta_{j+1}^{(j+2)} & \dots & \beta_{j+1}^{(p-1)} & \beta_{j+1}^{(p)} \\ 0 & \beta_{j+2}^{(j+2)} & \dots & \beta_{j+2}^{(p-1)} & \beta_{j+2}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{p-1}^{(p-1)} & \beta_{p-1}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Звідси можемо отримати формулу

$$\alpha_{p-k}^{(p)} = (-1)^{p-k} \binom{p}{p-k} \frac{\Gamma(p+\nu+1)(2p+\sigma+\nu-2k+1)}{\Gamma(2p+\sigma+\nu+2-k)}. \quad (13)$$

Зауваження. Формулу (13) можна також вивести з відповідних формул для незсунутих ортогональних многочленів Якобі (див. [9, с. 471]).

З урахуванням (9) вираз (8) можна переписати у вигляді

$$\sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^p z^k w^{p-k} \right) \frac{\alpha_{2N}^{(p)}}{\Gamma(p + \nu + 1)} \int_0^1 \left[P_{2N}^{(\nu, \sigma)*}(t) \right]^2 t^{\nu} (1-t)^{\sigma} dt.$$

Оскільки старший коефіцієнт многочлена $P_{2N}^{(\nu, \sigma)*}$ дорівнює $\frac{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)}{\Gamma(2N + \sigma + 1)}$, а квадрат норми зсунутого ортогонального многочлена Якобі з одиничним старшим коефіцієнтом дорівнює (див. [7, с. 580])

$$h_{2N} = \frac{(2N)! \Gamma(2N + \nu + 1) \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1) \Gamma(2N + \sigma + 1)}{(4N + \sigma + \nu + 1) \Gamma^2(4N + \sigma + \nu + 1)},$$

то

$$\begin{aligned} \left\| P_{2N}^{(\nu, \sigma)*} \right\|_{L_2([0,1], t^{\nu}(1-t)^{\sigma})}^2 &= \int_0^1 \left[P_{2N}^{(\nu, \sigma)*}(t) \right]^2 t^{\nu} (1-t)^{\sigma} dt = \\ &= \frac{(2N)! \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1) \Gamma(2N + \nu + 1)}{(4N + \sigma + \nu + 1) \Gamma(2N + \sigma + 1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отже, з урахуванням (13) і (14) для першого доданку при $|z|, |w| \leq R$ отримаємо

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 \left(\widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(B) x_{0,0} \right) (t) Y_{N,N}(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left\| P_{2N}^{(\nu, \sigma)*} \right\|^2 \sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^p |z|^k |w|^{p-k} \right) \frac{|\alpha_{2N}^{(p)}|}{\Gamma(p + \nu + 1)} = \\ &= \frac{(2N)! \Gamma(2N + \sigma + \nu + 1) \Gamma(2N + \nu + 1)}{\Gamma(2N + \sigma + 1) (4N + \sigma + \nu + 1)} \times \\ &\times \sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^p |z|^k |w|^{p-k} \right) \binom{p}{2N} \frac{\Gamma(p + \nu + 1) (4N + \sigma + \nu + 1)}{\Gamma(p + \nu + 1) \Gamma(p + 2N + \sigma + \nu + 2)} = \\ &= \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1) \Gamma(2N + \nu + 1)}{\Gamma(2N + \sigma + 1)} \times \\ &\times \sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^p |z|^k |w|^{p-k} \right) \frac{p(p-1) \cdots (p-2N+1)}{\Gamma(p + 2N + \sigma + \nu + 2)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1)\Gamma(2N + \nu + 1)}{\Gamma(2N + \sigma + 1)} \sum_{p=2N}^{\infty} \frac{(p+1)p(p-1)\cdots(p-2N+1)R^p}{\Gamma(p+2N+\sigma+\nu+2)} = \\
&= \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1)\Gamma(2N + \nu + 1)}{\Gamma(2N + \sigma + 1)} R^{2N} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+2N+1)!R^p}{p!\Gamma(p+4N+\sigma+\nu+2)}.
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
I_N &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+2N+1)!R^p}{p!\Gamma(p+4N+\sigma+\nu+2)} = \frac{(2N+1)!}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+2)} \times \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2N+2)(2N+3)\cdots(2N+p+1)}{(4N+\sigma+\nu+2)(4N+\sigma+\nu+3)\cdots(4N+\sigma+\nu+p+1)} \frac{R^p}{p!} \leq \\
&\leq C \frac{(2N+1)!}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+2)},
\end{aligned}$$

де C — деяка константа, що залежить від R .

Отже, для першого доданку виконуватиметься

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 \left(\widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(B) x_{0,0} \right) (t) Y_{N,N}(t) dt \right| \leq \\
&\leq C \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1)\Gamma(2N + \nu + 1)R^{2N}(2N+1)!}{\Gamma(2N + \sigma + 1)\Gamma(4N + \sigma + \nu + 2)}.
\end{aligned}$$

Використовуючи формулу Стірлінга (див. [7, с. 83]), оцінимо цю величину виразом

$$C \frac{(2N+2)^{1/2+\sigma-\nu}}{2^{4N}} R^{2N}.$$

Оцінимо другий доданок

$$\begin{aligned}
&\left| w^N \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^N c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n} \right| \leq \\
&\leq R^N \sum_{k=0}^{N-1} |z|^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} |w|^m s_{0,m} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^N |c_{j,n}^{(N,N)}|.
\end{aligned}$$

Враховуючи формули для коефіцієнтів зсунутих ортонормованих многочленів Якобі, отримаємо

$$\sum_{n=0}^N |c_{j,n}^{(N,N)}| = \sum_{k=0}^{2N} |p_k^{(2N)}| = \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + k)}{\Gamma(\sigma + 1 + k)} \leq$$

$$\leq C\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)2^{4N}.$$

Отже, для другого доданку буде справедлива оцінка

$$\begin{aligned} & \left| w^N \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^N c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n} \right| \leq \\ & \leq CR^N 2^{4N} \Gamma(4N + \sigma + \nu + 1) \sum_{k=0}^{N-1} R^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} \frac{R^m}{\Gamma(m + \nu + \sigma + 2)} \leq \\ & \leq C \frac{R^{2N-1} 2^{4N} N \Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)}{\Gamma(2N + \nu + \sigma + 2)}. \end{aligned}$$

Ідентична оцінка матиме місце і для третього доданку.

Враховуючи встановлені оцінки, для похибки апроксимації в решті отримаємо

$$\begin{aligned} & |f(z, w) - [\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w)| \leq \frac{C}{\Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)} \times \\ & \times \left(\frac{(2N + 2)^{1/2+\sigma-\nu}}{2^{4N}} R^{2N} + \frac{R^{2N-1} 2^{4N} N \Gamma(4N + \sigma + \nu + 1)}{\Gamma(2N + \nu + \sigma + 2)} \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, звідки і випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Щоб проілюструвати результат теореми 2, на прикладі розглянемо частинний випадок $\nu = \sigma = 0$. Тоді, як було відзначено раніше, функція $f(z, w)$ матиме вигляд

$$f(z, w) = \frac{e^w - e^z}{w - z}. \quad (15)$$

Покладемо спочатку $N = 1$. За теоремою 2 отримаємо раціональну апроксимацію

$$\frac{P_{\mathcal{N}}(z, w)}{Q_{1,1}(z, w)} = \frac{24 + w^2 + z^2 + 6z + 6w}{2zw - 6z - 6w + 24}.$$

Порівняємо значення функції, що наближується $f(z, w) = \frac{e^w - e^z}{w - z}$, частинної суми степеневого ряду $P_3(z, w) = 1 + \frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{6}(z^2 + zw + w^2) + \frac{1}{24}(z^3 + z^2w + zw^2 + w^3)$ та побудованої нами апроксимації в точках квадрата $[1.0] \times [1.0]$.

Отримаємо наступну таблицю

w\z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.0	1	1.107013790	1.229561745	1.370198000	1.531926160	1.718281828
	1	1.107000000	1.229333334	1.369000000	1.528000000	1.708333333
	1	1.107017544	1.229629630	1.370588235	1.533333333	1.722222222
0.2	1.107013790	1.221402758	1.352109700	1.501790105	1.673563617	1.871098837
	1.107000000	1.221333333	1.351666667	1.500000000	1.668333333	1.858666667
	1.107017544	1.221402214	1.352140078	1.502057613	1.674672489	1.874418605
0.4	1.229561745	1.352109700	1.491824698	1.651470510	1.834290575	2.044095217
	1.229333334	1.351666667	1.490666669	1.648333334	1.826666667	2.027666669
	1.229629630	1.352140078	1.491803279	1.651515152	1.834862385	2.046341463
0.6	1.370198000	1.501790105	1.651470510	1.822118800	2.017110640	2.240407570
	1.369000000	1.500000000	1.648333334	1.816000000	2.005000000	2.217333334
	1.370588235	1.502057613	1.651515152	1.821917808	2.016908213	2.241025641
0.8	1.531926160	1.673563617	1.834290575	2.017110640	2.225540928	2.46370450
	1.528000000	1.668333333	1.826666667	2.005000000	2.205333333	2.429666667
	1.533333333	1.674672489	1.834862385	2.016908213	2.224489796	2.462162162
1	1.718281828	1.871098837	2.044095217	2.240407570	2.46370450	2.718281828
	1.708333333	1.858666667	2.027666669	2.217333334	2.429666667	2.666666667
	1.722222222	1.874418605	2.046341463	2.241025641	2.462162162	2.714285714

Візьмемо тепер $N = 2$. Отримаємо раціональну функцію

$$\frac{P_{\mathcal{N}}(z, w)}{Q_{2,2}(z, w)} = (40320 + 10080z + 10080w + 2760z^2 + 2760w^2 - 1200zw +$$

$$+ 540z^3 + 540w^3 - 300z^2w - 300zw^2 + 96z^4 + 96w^4 - 84z^3w - 84zw^3 -$$

$$- 17zw^4 - 17zw^4 + 17w^5 + 17z^5 - 3zw^5 - 3z^5w + 3w^6 + 3z^6 + \frac{1}{2}z^7 + \frac{1}{2}w^7 - \frac{1}{2}z^6w - \frac{1}{2}zw^6) \cdot$$

$$\cdot (24z^2w^2 - 240zw^2 - 240z^2w + 1080z^2 + 1080w^2 + 2160zw - 10080z - 10080w + 40320)^{-1}.$$

Наведемо таблицю значень функції, що наближується, частинної суми степеневого ряду $P_7(z, w) = 1 + \frac{1}{2!}(z + w) + \frac{1}{3!}(z^2 + zw + w^2) + \frac{1}{4!}(z^3 + z^2w + zw^2 + w^3) + \frac{1}{5!}(z^4 + z^3w + z^2w^2 + zw^3 + w^4) + \frac{1}{6!}(z^5 + z^4w + z^3w^2 + z^2w^3 + zw^4 + w^5) + \frac{1}{7!}(z^6 + z^5w + z^4w^2 + z^3w^3 + z^2w^4 + zw^5 + w^6) + \frac{1}{8!}(z^7 + z^6w + z^5w^2 + z^4w^3 + z^3w^4 + z^2w^5 + zw^6 + w^7)$ та побудованої апроксимації

w\z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.0	1	1.107013790	1.229561745	1.370198000	1.531926160	1.718281828
	1	1.107013790	1.229561743	1.370197951	1.531925658	1.718278770
	1	1.107013791	1.229561743	1.370197961	1.531925731	1.718279055
0.2	1.107013790	1.221402758	1.352109700	1.501790105	1.673563617	1.871098837
	1.107013790	1.221402753	1.352109694	1.501790031	1.673562944	1.871095015
	1.107013791	1.221402758	1.352109708	1.501790219	1.673564121	1.871099899
0.4	1.229561745	1.352109700	1.491824698	1.651470510	1.834290575	2.044095217
	1.229561743	1.352109694	1.491824685	1.651470370	1.834289575	2.044090124
	1.229561743	1.352109708	1.491824698	1.651470760	1.834292060	2.044100453
0.6	1.370198000	1.501790105	1.651470510	1.822118800	2.017110640	2.240407570
	1.370197951	1.501790031	1.651470370	1.822118351	2.017108779	2.240399999
	1.370197961	1.501790219	1.651470760	1.822118800	2.017108406	2.240416710
0.8	1.531926160	1.673563617	1.834290575	2.017110640	2.225540928	2.46370450
	1.531925658	1.673562944	1.834289575	2.017108779	2.225536363	2.463691216
	1.531925731	1.673564121	1.834292060	2.017108406	2.225540917	2.463714564
1	1.718281828	1.871098837	2.044095217	2.240407570	2.46370450	2.718281828
	1.718278770	1.871095015	2.044090124	2.240399999	2.463691216	2.718253968
	1.718279055	1.871099899	2.044100453	2.240416710	2.463714564	2.718281718

Наведені приклади показують, що побудовані на основі теореми 2 раціональні апроксиманти наближають функцію (15) краще за частинну суму степеневого ряду з такою ж кількістю вільних коефіцієнтів.

Відзначимо, що в книзі А.Кейт [10] наведено чисельні приклади, пов'язані з обчисленням раціональних апроксимацій, що є певними двовимірними узагальненнями апроксимацій Паде для функції

$$f(z, w) = \frac{we^w - ze^z}{w - z}.$$

Ця функція також є частинним випадком функції (7) при $\nu + \sigma = -1$.

Література

1. *Дзядик В.К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8 – 12.
2. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. (в друці).
3. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 444 с.
4. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — 222 с.
5. *Humbert P.* Sur les fonctions hypercylindriques // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. — 1920. — **171**. — S. 490 – 492.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
8. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. — М.: Наука, 1967. — Т. 1. — 488 с.
9. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
10. *Cuyt A.* Padé approximants for operators: theory and applications. — Berlin: LNM 1065, Springer – Verlag, 1984. — 138 p.