УДК 517.53

*А. П. Голуб*

# Об аппроксимации Паде функции arcsin $z$

В данной статье получено представление функции arcsin $z$ в виде интеграла Маркова — Стилтьеса, которое позволяет, опираясь на классические результаты, решить вопрос о сходимости ее аппроксимаций Паде. Следует отметить, что arcsin $z$ оставался единственной из основных элементарных функций, для которой этот вопрос не был решен. Получены также оценки для определителей Ганкеля.

1. Интегральное представление функции arcsin $z$. Как известно, при $|z| \leqslant 1$ имеет место разложение

$$\arcsin z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k+1}, \tag{1}$$

где $a_k = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)}$. Установим, что $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$—последовательность моментов некоторой меры $\mu(t)\,dt$ на $[0, 1]$. Действительно, $\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$ можно легко выразить через бэта-функцию Эйлера:

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^k}{k!\cdot 2^k} = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi\Gamma(k+1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^{k-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^0 x^k \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Далее, имеем

$$a_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^k}{2k+1}\,\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\int_0^x t^{k-\frac{1}{2}}\,dt\,dx.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\int_0^\varepsilon t^{k-\frac{1}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 t^{k-\frac{1}{2}}\int_t^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx\,dt.$$

Поскольку первое слагаемое допускает оценку

$$\left|\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx\int\limits_{0}^{\varepsilon}t^{k-\frac{1}{2}}\,dt\right|\leqslant\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\varepsilon^{r}}\mathrm{B}\left(r,\frac{1}{2}\right)\to 0$$

при $0<r<k+\dfrac{1}{2}$ и $\varepsilon\to 0$, то

$$a_k=\int\limits_{0}^{1}t^{k}\mu(t)\,dt, \tag{2}$$

где

$$\mu(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\int\limits_{t}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx=\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}\right).$$

Учитывая (1) и (2), получаем представление функции $\arcsin z$ в виде интеграла Маркова — Стилтьеса:

$$\arcsin z=z\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{1-z^{2}t}\,\mu(t)\,dt. \tag{3}$$

Так как в обеих частях (3) находятся функции, аналитические в области $D=\mathbf{C}\diagdown((-\infty,-1]\cup[+1,+\infty))$, то это равенство будет справедливо не только при $|z|\leqslant 1$, но и при всех $z\in D$.

2. Аппроксимация Паде функции $\arcsin z$. Рассмотрим функцию:

$$\varphi(z)=\frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{1-zt}\,\mu(t)\,dt$$
$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\qquad\text{при } |z|\leqslant 1. \tag{4}$$

Аппроксимацией Паде функции $\varphi(z)$ порядка $[M, N]$ в точке $z=0$ называется рациональный полином $\pi_{M,N}(z)=\dfrac{P_M(z)}{Q_N(z)}$, где $P_M(z)$ и $Q_N(z)$ — многочлены степеней не выше $M$ и $N$ соответственно, для которого справедливо соотношение $\varphi(z)-\pi_{M,N}(z)=O(z^{M+N+1})$ при $z\to 0$ (см., например, [1, с. 5]).

Известно, что аппроксимация Паде $\pi_{N+J,N}(z)$, $J\geqslant -1$, функции $\varphi(z)$, представимой в виде (4), где $\mu(t)$ — неотрицательная, интегрируемая на $[0, 1]$ функция, отличная от нуля на множестве положительной меры, выражается в виде

$$\pi_{N+J,N}(\varphi;z)=\sum_{k=0}^{J}a_k z^k+\frac{1}{Q_{J,N}\left(\frac{1}{z}\right)}\int\limits_{0}^{1}\frac{Q_{J,N}\left(\frac{1}{z}\right)-Q_{J,N}(t)}{1-zt}\,t^{J+1}\mu(t)\,dt,$$

где $\{Q_{J,N}\}_{N=0}^{\infty}$ — последовательность многочленов, ортонормированных на $[0, 1]$ по мере $t^{J+1}\mu(t)\,dt$ (см., например, [2, с. 267]). Доказано [2, с.268], что последовательность $\pi_{N+J,N}(\varphi;z)$ будет сходиться равномерно при $N\to\infty$ к $\varphi(z)$ на каждом компактном подмножестве из $\mathbf{C}\diagdown[+1,+\infty)$. В силу этого аппроксимации Паде порядка $[2(N+J)+1, 2N]$, $J\geqslant -1$, функции $\arcsin z$ будет сходиться к ней равномерно при $N\to\infty$ на каждом компакте, принадлежащем области $D$.

3. Оценки для определителей Ганкеля функции и $\arcsin z$. В вопросах аппроксимации Паде функций большое значение имеет изучение поведения определителей Ганкеля, соответствующих этим функциям. Определителями Ганкеля функции $\varphi(z)$ называются определители

$$H_{k,n} = \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & \dots & a_n \\ a_{k+1} & a_{k+2} & \dots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-k} \end{vmatrix}, \quad k \leqslant n.$$

В случае, когда $\mu(t)$ неотрицательна, интегрируема на $[0, 1]$ и отлична от нуля на множестве положительной меры, определители Ганкеля функций вида (4) всегда положительны (см. [1, с. 210]). Рассмотрим последовательность $\{Q_{k,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$-многочленов, ортонормированных на $[0, 1]$ по мере $t^{k+1}\mu(t)\,dt$, $k = 1, 0, 1, \dots$. Очевидно, что

$$Q_{k,n}(t) = \alpha_{k,n} \begin{vmatrix} a_{k+1} & a_{k+2} & \dots & a_{n+k+1} \\ a_{k+2} & a_{k+3} & \dots & a_{n+k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-k-1} \\ 1 & t & \dots & t^n \end{vmatrix}.$$

Поэтому $\int\limits_0^1 [Q_{k,n}(t)]^2 \mu(t)\, t^{k+1} dt = \alpha_{k,n}^2 H_{k+1,n+k+1} H_{k+1,n+k}$. И, стало быть, коэффициент при старшем члене в $Q_{k,n}(t)$ равен $\sqrt{\dfrac{H_{k+1,n+k}}{H_{k+1,n+k+1}}}$.

Известно (см., например, [3, с. 39]), что минимум интеграла $\int\limits_0^1 [A_n(t)]^2 \sigma(t)\,dt$ среди многочленов $A_n(t)$ степени не выше $n$ со старшим коэффициентом, равным 1, достигается тогда и только тогда, когда $A_n(t) = \dfrac{1}{\mu_n} P_n(t)$, где $P_n(t)$ — многочлен, ортонормированный на $[0, 1]$ по мере $\sigma(t)\,dt$, а $\mu_n$ — его старший коэффициент, причем искомый минимум равен $\dfrac{1}{\mu_n^2}$. Итак,

$$\frac{H_{k+1,n+k+1}}{H_{k+1,n+k}} = \min_{A_n = t^n + \dots} \int\limits_0^1 [A_n(t)]^2 t^{k+1} \mu(t)\,dt.$$

Для функции $\mu(t) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{t}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}\right)$ имеют место неравенства $\mu(t) \geqslant \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}$, $\mu(t) \leqslant C_\varepsilon \dfrac{\sqrt{1-t}}{t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\frac{H_{k+1,n+k+1}}{H_{k+1,n+k}} \geqslant \frac{1}{\pi} \min_{A_n = t^n + \dots} \int\limits_0^1 [A_n(t)]^2 t^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{1-t}\,dt.$$

Последний минимум, как известно, достигается на смещенных многочленах Якоби, и его можно подсчитать (см. [3, с. 273]). В итоге получим

$$\frac{H_{k+1,n+k+1}}{H_{k+1,n+k}} \geqslant \frac{1}{\pi} 2^{2k+4}(k+2n+2)\, \mathrm{B}\left(n+\frac{3}{2},\, n+k+\frac{3}{2}\right) \mathrm{B}\,(n+1,\ n+k+2).$$

При $k = -1, 0$ правую часть можно упростить: $\dfrac{H_{0,n}}{H_{0,n-1}} \geqslant \dfrac{1}{\pi 2^{4n-3}}$, $\dfrac{H_{1,n+1}}{H_{1,n}} \geqslant \dfrac{1}{\pi 2^{4n-1}}$. Аналогично можно получить оценки сверху:

$$\frac{H_{k+1,n+k+1}}{H_{k+1,n+k}} \leqslant C_\varepsilon 2^{2k+4-2\varepsilon}(k+2n+2-\varepsilon)\, \mathrm{B}\left(n+\frac{3}{2}, n+k+\frac{3}{2}-\varepsilon\right) \mathrm{B}\,(n+1,\ n+k+2-\varepsilon).$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Baker G. A. Essentials of Padé Approximants.— New York: Academic Press, 1975.— 306 p.
2. Allen G. D., Chui C. K., Madych W. R., Narcowich F. J. and Smith P. W. Padé approximation and orthogonal polynomials.— Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1974, **10**, № 2, p. 263—270.
3. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1979.— 416 с.



Институт математики
АН УССР



Поступила в редакцию
4.VI 1980 г.