Нелиевские анзацы и условная симметрия нелинейного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

Предложен новый подход к построению анзацев, редуцирующих многомерное нелинейное уравнение Шредингера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При этом, кроме известных решений, получаемых с помощью лиевской симметрии, найдены решения, порождаемые операторами условной инвариантности уравнения Шредингера.

Введение и постановка задачи. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$L = 2iu_t + \Delta u - uF(|u|) = 0. \tag{1}$$

Здесь u — комплекснозначная функция, $u = u(t, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $|u| = \sqrt{uu^*}$, звездочка обозначает комплексное сопряжение, F — произвольная функция;

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_a \equiv \frac{\partial u}{\partial x_a}, \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_a}.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование,

$$x_a x_a \equiv x_a x^a = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Галилея с базисными операторами

$$\begin{gathered}\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \\ G_a = t\partial_a + ix_a(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \quad a, b = 1, \ldots, n, \quad M = i(u\partial_u - u\partial_{u^*})\end{gathered} \tag{2}$$

для произвольной функции F.

В [1–3] построены точные решения уравнения (1) методом редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При этом использована лиевская симметрия уравнения (1), т.е. инвариантность (1) относительно алгебры (2).

Далее будет предложен способ редукции уравнения (1), не использующий в явном виде его симметрию, к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Этот способ позволяет построить такие решения уравнения (1), которые не могут быть получены, если использовать только лиевскую симметрию. В дальнейшем, для краткости изложения, будем подробно рассматривать построение тех решений, которые могут быть получены с использованием лиевской симметрии.

Для редукции уравнения (1) используем следующую подстановку:

$$u = \exp\{if(t, \vec{x})\}\varphi(\omega), \tag{3}$$

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 12, 1620–1628.

где f, ω — некоторые неизвестные действительные функции от t и $\vec{x}$. Выражение (3) будет анзацем для (1), если эта подстановка сведет уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции, зависящей только от новой переменной ω.

Из этого следуют условия на функции f и ω:

$$\begin{aligned} &2f_t + f_a f_a = R(\omega), \quad \Delta f = Q(\omega), \\ &f_a\omega_a + \omega_t = S(\omega), \quad \Delta\omega = V(\omega), \quad \omega_a\omega_a = T(\omega), \end{aligned} \tag{4}$$

где R, Q, S, V, T — произвольные достаточно гладкие функции, зависящие только от переменной ω.

Таким образом, задача о редукции уравнения (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям сводится к построению в явном виде функций f и ω, удовлетворяющих системе нелинейных уравнений (4). Если f и ω являются решениями системы (4), то уравнение (1) посредством анзаца (3) редуцируется к уравнению

$$2iS(\omega)\varphi' - R(\omega)\varphi + iQ(\omega)\varphi + \varphi' V(\omega) + \varphi'' T(\omega) = \varphi F(|\varphi|). \tag{5}$$

Сначала кратко изложим основные результаты, полученные в работе.

1. Новые анзацы для уравнения Шредингера. Для $n = 2$, $n = 3$ найдены общие решения системы (4) с точностью до эквивалентности относительно подстановок вида (3).

При $n = 2$ найден следующий анзац вида (3), который не может быть получен из операторов симметрии уравнения (1):

$$\omega = t, \quad f = \frac{1}{2}\frac{x_1^2(t+B_1) + 2B_3x_1x_2 + x_2^2(t+B_2)}{(t+B_1)(t+B_2) - B_3^2}, \tag{6}$$

где B_1, B_2, B_3 — произвольные постоянные.

При $B_3 = 0$ анзац (3), (6) сводится к известному, для которого

$$f = \frac{x_1^2}{t+B_2} + \frac{x_2^2}{t+B_1}.$$

При $n = 3$ получены следующие анзацы, порождаемые операторами условной инвариантности: 1) $\omega = t$, f имеет вид (6); 2) $\omega = t$,

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{2}\{&-(x_a b_a)^2 + x_1^2\tau_2\tau_3 + x_2^2\tau_1\tau_2 + x_3^2\tau_1\tau_3 + 2x_1x_2\tau_3b_3 + 2x_1x_3\tau_2b_2 + \\ &+ 2x_2x_3\tau_1b_1\}\{\tau_1\tau_2\tau_3 - b_1^2\tau_1 - b_2^2\tau_2 - b_3^2\tau_3 + 2b_1b_2b_3\}^{-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

$\tau_k \equiv t + a_k$, a_k, b_k — постоянные.

2. Условная симметрия и решения уравнения (1). Понятие “Условная симметрия (инвариантность) дифференциального уравнения” введено в [4, 5]. Дальнейшее развитие и применение этого понятия привело к существенному расширению возможностей теоретико-алгебраического метода исследования уравнений. С использованием этого подхода в работах [4–9] построены широкие классы точных решений многих нелинейных уравнений математической физики.

В настоящей работе мы искали в явном виде решения системы (4) и соответствующие им анзацы (3). Среди найденных таким образом анзацев есть и нелиевские, для которых соответствующие им операторы не входят в алгебру (2).

Операторы условной инвариантности, соответствующие анзацу (3), $\omega = t$ для произвольного n, описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение Шредингера (1), к которому дописаны дополнительные условия*

$$L_a = u_a - i f_a u = 0, \tag{8}$$

ивариантно относительно операторов

$$Q_a = r(t, \vec{x})(\partial_a + i f_a(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \quad a = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $r(t, \vec{x})$ — произвольная ненулевая функция, $f(t, \vec{x})$ удовлетворяет уравнениям

$$2f_t + f_a f_a = 0, \quad \Delta f = Q(t), \tag{10}$$

$Q(t)$ — некоторая функция.

Замечание 1. Анзац (3) представляет собой общее решение системы (8).

Доказательство теоремы 1. Необходимое и достаточное условие инвариантности системы (1), (8) относительно операторов (9) имеет вид

$$\begin{aligned} &k_a Q_a^2 (2iu_t + \Delta u - uF(|u|)\Big|_{\substack{L=0\\ L_a=0}} = 0, \\ &k_a Q_a^1 (u_a - i f_a u)\Big|_{L_a=0} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где k_a — произвольные постоянные, Q_a^1, Q_a^2 — первое и второе лиевские продолжения операторов Q_a.

Первое из определяющих уравнений (11) приводится к виду

$$2i(\eta_t - \xi_t^a u_a) + \eta_{aa} + 2\eta_{ua} u_a - 2\xi_a^b u_{ab} - \xi_{aa}^b u_b = 0, \quad \eta = irk_a f_a u, \quad \xi^a = k_a r.$$

С учетом дополнительных условий (8) получаем

$$-2uk_a r(f_{at} + f_b f_{ab}) + irf_{abb} k_a = 0$$

вследствие уравнений (10).

Из второго уравнения (11)

$$\eta_a + \eta_u u_a - \xi_a^b u_b - i f_{ab} \xi^b u - i f_a \eta = 0$$

— тождественное равенство с учетом (8). Теорема доказана.

Запишем операторы условной инвариантности, соответствующие анзацу (3), $\omega = t$, f имеет вид (6), (7).

1) $n = 2$, f имеет вид (6):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left[(t + B_1)(t + B_2) - B_3^2\right] \partial x_1 + [x_2 B_3 + x_1(t + B_1)]M, \\ Q_2 &= \left[(t + B_1)(t + B_2) - B_3^2\right] \partial x_2 + [x_1 B_3 + x_2(t + B_2)]M, \end{aligned} \tag{12}$$

где $M \equiv i[u\partial_u - u^*\partial_{u^*}]$;

2) $n = 3$, f имеет вид (6): Q_1, Q_2 определяются соотношениями (12), ∂_{x^3};

3) $n=3$, f имеет вид (7):

$$
\begin{aligned}
&Q_k = T\partial_k + N_k M, \quad k=1,2,3,\\
&T = (t+a_1)(t+a_2)(t+a_3) - b_1^2(t+a_1)^2 - b_2^2(t+a_2)^2 - b_3^2(t+a_3) + 2b_1b_2b_3,\\
&N_k = -x_k(b_c x_c) + x_a\tau_l\tau_m + x_l\tau_m b_m + x_m\tau_l b_l, \quad \tau = t+a_l,
\end{aligned}
$$

по k нет суммирования, $\{1,2,3\} = \{k,l,m\}$.

Анзац (3), $\omega = t$, f имеет вид (6) или (7), редуцирует (1) к уравнению

$$
i(Q(t)\varphi + 2\varphi') = \varphi F(|\varphi|), \tag{13}
$$

где $Q(t) = \Delta t$. Если представить $Q(t)$ в виде $Q(t) = \theta(t)/\theta(t)$, то

$$
\varphi = \frac{c}{\sqrt{\theta}} \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int F\left(\frac{c}{\sqrt{\theta}}\right) dt \right\}, \tag{14}
$$

c — произвольная постоянная; $Q(f) = \frac{2t+B_1+B_2}{(t+B_1)(t+B_2)-B_3^2}$, f имеет вид (6);

$$
Q(t) = \frac{3t^2 + 2t(a_1+a_2+a_3) + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2}{(t+a_1)(t+a_2) - b_1^2(t+a_1) - b_2^2(t+a_2) - b_3^2(t+a_3) - 2b_1b_2b_3},
$$

f имеет вид (7).

Решения уравнения (1) записываются в виде

$$
u = \exp i\left\{ f(t,\vec{x}) - \frac{1}{2}\int F\left(\frac{c}{\sqrt{\theta}}\right) dt \right\} \frac{c}{\sqrt{\theta}},
$$

где f имеют вид (6), (7), $\theta = \frac{d}{dt}\ln \Delta f$.

3. Совместность и симметрия системы (4). Так как мы рассматриваем только действительные функции f и ω, то $T(\omega)$ в (4) должна быть неотрицательной. Следовательно, уравнение $\omega_a\omega_a = T(\omega)$ локальными преобразованиями можно привести к виду $T(\omega) \equiv 0$ или $T(\omega) = 1$.

1. В случае $\omega_a\omega_a = 0$, $\omega_a = 0$, можно положить $\omega = \omega(t)$. При подстановке $\omega = t$ система (4) приобретает вид

$$
2f_t + f_a f_a = R(t), \quad \Delta f = Q(t). \tag{15}
$$

Нашей целью является описание всех анзацев вида (3), редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Поэтому без ограничения общности можно привести (4) к более простому виду таким образом, что получаемые при решении этой системы анзацы будут эквивалентными, т.е. приведут к одинаковым решениям уравнения (1).

Очевидно, анзацы вида (3) эквивалентны с точностью до преобразований $f \to f + \rho(\omega)$, поэтому можно считать, что $R(t) \equiv 0$.

Далее докажем, что условие совместимости системы (15) $R(t) = 0$ необходимо для произвольного n и достаточно для $n = 2, 3$.

Теорема 2. *Система*

$$
2f_t + f_a f_a = 0, \quad \Delta f = Q(t) \tag{16}
$$

совместна только в случае, если

$$Q(t) = \frac{\theta'}{\theta}, \quad \theta^{(n+1)} \equiv 0. \tag{17}$$

Доказательство. $\{f_{ab}\}$ — матрица вторых производных функции f размерности $(n \times n)$. Через S_k обозначим $\mathrm{tr}(\{f_{ab}\}^k)$ и докажем, что

$$S_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} Q(t). \tag{18}$$

Дифференцируя по x_b и x_c первое уравнение (16), получаем

$$f_{bct} + f_{abc} f_a + f_{ab} f_{ac} = 0. \tag{19}$$

Доказательство проводится методом математической индукции; $S_1 = Q(t)$ — утверждение для $k = 1$ верно.

Умножив равенство (19) на $f_{ba_1} \cdots f_{a_{n-1}c}$, получаем

$$\frac{1}{n}(S_n)_t + \frac{1}{n-1}(S_{n-1})_a f_a + S_{n+1} = 0,$$

так как S_{n-1}, по предположению, функция от t, то $(S_{n_1})_a = 0$ и $S_{n+1} = -\frac{1}{n}(S_n)_t$, т.е. из справедливости утверждения для $k = n$ следует его справедливость для $k = n + 1$.

По теореме Гамильтона–Кэли для матрицы W размерности $(n \times n)$ справедливо соотношение

$$W^n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} M_k W^{n-k} + (-1)^{n+1} E \det W, \tag{20}$$

M_k — сумма главных миноров порядка k матрицы W, E — единичная матрица размерности $(n \times n)$.

Если взять следы от равенства (20) и от этого же равенства, умноженного на W, $W = \{f_{ab}\}$, то получим следующие уравнения для S_k:

$$S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k M_k S_{n-k} + (-1)^n \cdot n \det W = 0,$$

$$S_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k M_k S_{n+1-k} + (-1)^n \cdot S_1 \det W = 0,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k M_k (S_1 S_{n-k} - n S_{n+1-k}) = 0 \quad (M_0 = 1). \tag{21}$$

Методом математической индукции легко показать, что

$$M_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l-1} M_l S_{k-1},$$

откуда, положив $Q(t) = \theta(t)/\theta(t)$ и используя (18), получаем $M_k = \frac{1}{k}\frac{\theta^{(k)}}{\theta}$.

Подставим в (21) выражения M_k и S_k через $\theta(t)$:

$$\sum_{k=0}^{k-1}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{\theta^{(k)}}{\theta}\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\left(\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\right)^{(n-k-1)}\right)-\frac{n(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\right)^{(n-k)}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\theta}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\right)^{(n-k)}\theta^{(k)}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\theta^{(n+1)}}{\theta}=0,$$

$\theta^{(n+1)} = 0$, что и требовалось доказать.

2. $\omega_a\omega_a = 1$. В [10] установлено, что при $n = 3$ $\Delta\omega = N/\omega$, $N = 0, 1, 2$ (при $n = 2$ $N = 0, 1$).

Покажем, что с точностью до эквивалентности анзацев можно положить $S(\omega) = 0$. Уравнение $f_a\omega_a + \omega_t = S(\omega)$ имеет общее решение для f:

$$f = \varphi(\Omega_i) - \int\frac{\omega_t}{\omega_t}dx_1 + \int S(\omega)d\omega, \tag{22}$$

$\frac{\omega_t}{\omega_1} = R(x_1, \Omega_i)$, Ω_i — интегралы уравнения $f_a\omega_a = 0$. Так как анзацы (3) эквивалентны с точностью до преобразования $\tilde f \to f + \rho(\omega)$, то из (22) следует, что можно положить $S = 0$.

Теорема 3. *Система уравнений*

$$\begin{aligned}&2f_t + f_af_a = R(\omega), \quad \Delta f = Q(\omega),\\ &f_a\omega_a + \omega_t = 0, \quad \omega_a\omega_a = 1, \quad \Delta\omega = N/\omega,\end{aligned} \tag{23}$$

$N = 0, 1$ *при* $n = 2$, $N = 0, 1, 2$ *при* $n = 3$ *совместна только в случае, когда* $Q(\omega) = 0$, $R(\omega) = c_1\omega + c_2$, $N = 0$; $R(\omega) = c_1/\omega^2 + c^2$, $N = 1$; $R(\omega) = c_1$, $N = 2$; c_1, c_2 — *постоянные*.

Замечание 2. Доказательство теоремы 3 проводится аналогична доказательству теоремы 2. При этом нужно использовать дифференциальные следствия уравнений (23) и теорему Гамильтона–Кэли.

Замечание 3. Для дальнейших рассуждении достаточно использовать тот факт, что система (4) инвариантна относительно операторов

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad \partial_a, \quad \hat G_a = t\partial_a + x_a\partial_t. \tag{24}$$

Будем искать общее решение этой системы с точностью до преобразований, порождаемых этими операторами:

$$x_a \to \alpha_a x_b + \beta_a, \quad x_a \to g_a t + x_a, \tag{25}$$

α_{ab}, g_a, β_a — постоянные, $\alpha_{ab}\alpha_{cb} = \delta_{ac}$ (символ Кронекера).

4. Решения системы (4). Нахождение решений системы (4) требует большого числа громоздких вычислений. Поэтому остановимся более подробно на случае $\omega_a\omega_a = 0$, когда получаются нелиевские анзацы; опишем кратко способ построения решений, а для $\omega_a\omega_a = 1$ приведем список анзацев.

1. $\omega_a\omega_a = 0$. Пусть n произвольное. Рассмотрим общее решение уравнения Гамильтона–Якоби $2f_t + f_af_a = 0$ ранга n ($\det\{f_{ab}\} \neq 0$) [11]. Рангом решения называется ранг матрицы $\{f_{ab}\}$,

$$f = x_ay_a - \frac{t}{2}y_a^2 + \Phi(\vec{y}), \quad 0 = x_a - ty_a + \Phi_a, \tag{26}$$

$y = (y_1, \ldots, y_n)$ — параметры, Φ — произвольная функция.

Из (26) следует

$$\Delta f = \operatorname{tr}\left(\{t\delta_{ab} - \Phi_{y_ay_b}\}^{-1}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\det T}{\det T}, \quad T = \{t\delta_{ab} - \Phi_{y_ay_b}\}.$$

По теореме 2 $Q(t) = \dot{\theta}(t)/\theta(t)$, $\theta^{(n+1)} \equiv 0$. Следовательно, $\det T$ — полином по t с постоянными коэффициентами. Коэффициенты $\det T$ — главные миноры матрицы

$$\{\Phi_{y_ay_b}\} = \Phi, \quad \det T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(-1)^k t^{n-k} + (-1)^n \det\Phi,$$

M_k — главные миноры матрицы Φ, $M_0 \equiv 1$.

Таким образом, решение системы (16) ранга n имеет вид (26), где $\Phi(\vec{y})$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\Delta\Phi = A_1, \\ \begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix}\Phi_{n-1,n-1} & \Phi_{n-1,n} \\ \Phi_{n,n-1} & \Phi_{nn}\end{vmatrix} = A_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \det\Phi = A_n.\end{gathered} \tag{27}$$

При $n = 2$, $n = 3$ посредством преобразований Эйлера [11] из (27) можно получить, что

$$\Phi_{y_ay_b} = \text{const}, \quad \Phi = l_{ab}y_ay_b + k_ay_a + m_a,$$

$L = \{l_{ab}\}$ — постоянная матрица, k_a, m_a — произвольные постоянные. Преобразования (25) позволяют привести выражение для f (26) к виду, когда $k_a = m_a = 0$.

Из (26)

$$f = \frac{1}{2}\vec{y}\{Et - 2L\}\vec{y}, \quad \vec{x} = \{Et - 2L\}\vec{y},$$

откуда $f = \frac{1}{2}\vec{x}\{Et - 2L\}^{-1}\vec{x}$; $n = 2$, $-2L = \begin{pmatrix}B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2\end{pmatrix}$ — для f получается выражение (7); $n = 3$, $-2L = \begin{pmatrix}a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3\end{pmatrix}$ — для f получается выражение (7).

Общее решение для уравнения Гамильтона–Якоби в (16) ранга 2 при $n = 3$ имеет вид

$$f = y_1x_1 + y_2x_2 + \Psi(y_1, y_2)x_3 - \frac{t}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \Psi^2(y_1, y_2)) + \Phi(\vec{y}),$$

$$
\begin{aligned}
&0 = x_1 + \Psi_{y_1} x_3 - t(y_1 + \Psi\Psi_{y_1}) + \Phi_{y_1},\\
&0 = x_2 + \Psi_{y_1} x_3 - t(y_2 + \Psi\Psi_{y_1}) + \Phi_{y_2},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Подставив выражение для Δf из (28) во второе уравнение (16), можно показать, что ψ_{y_1}, ψ_{y_2} — постоянные и преобразованиями (25) уравнения (28) приводятся к виду (26) для $n = 2$, следовательно, и в этом случае f имеет вид (6).

Решение рассматриваемого уравнения Гамильтона–Якоби ранга 1 имеет вид

$$
\begin{aligned}
&f = \Psi_a(y)x_a - \frac{t}{2}\Psi_a(y)\Psi_a(y) + \Phi(y),\\
&0 = \dot\Psi_a x_a - t\dot\Psi_a\Psi_a + \dot\Phi(y).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Подставив выражение для Δf из (29) во второе уравнение (16), можно показать, что $\dot\Psi_a(y)$ — постоянные, $\Psi_a = b_a y + c_a$.

С учетом (25) можно положить $b_2 = b_3 = c_a = 0$, $b_1 = 1$. Тогда $f = x_1^2(2t + c_0)$.

Решение ранга 0 для произвольного n линейно по x, $f = c_1x_1 + c_2$.

2. $\omega_a\omega_a = 1$. Пара уравнений

$$
\Delta\omega = N/\omega, \quad \omega_a\omega_a = 1 \tag{30}
$$

инвариантна относительно группы вращений, параметры которой зависят от t

$$
y_a = \alpha_{ab}(t)x_a + \beta_a(t), \quad \alpha_{ab}\alpha_{cb} = \delta_{ac}. \tag{31}
$$

Действительные решения системы (30) с точностью до преобразований (31) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&x_1, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (n = 2);\\
&x_1, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (n = 3).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Однако вся система (4) не инвариантна относительно преобразований (31), поэтому подстановка в (4) решений (32) не даст общего решения системы (4).

Чтобы получить общее решение (4), вместо ω нужно подставлять размноженные посредством преобразований (31) следующие решения (4):

$$
y_1, \quad \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}. \tag{33}
$$

Однако значительно проще сначала применить преобразования (31) к уравнениям (4) и в полученную систему для $\vec y$ и t подставлять выражения (33):

$$
\begin{aligned}
&2(f_\tau + f_{y_a}(\dot\alpha_{ab}\alpha_{cb}(y_c - \beta_c) + \dot\beta_a)) + f_{y_a y_a} = R(\omega), \quad f_{y_a y_a} = 0,\\
&f_{y_a}\omega_{y_a} + \omega_\tau + \omega_{y_a}(\dot\alpha_{ab}\alpha_{cb}(y_c - \beta_c) + \dot\beta_a) = 0,\\
&\Delta\omega = \frac{N}{\omega}, \quad \omega_{y_a y_a} = 1 \quad (x_a = \alpha_{ba}(y_b - \beta_b),\ t = \tau).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Решив систему (34), получим следующие выражения для f (с точностью до преобразований (25)):

1) $n = 2,\ n = 3,\ N = 0,$

$$
\omega = x_1 + at^2, \quad f = -2atx_1 + at^3\frac{1}{6} + bt;
$$

2) $n = 2,\ n = 3,\ N = 1,$

$$\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad f = A \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} + Bt;$$

3) $n = 3,\ N = 2,$

$$\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad f = ct.$$

Здесь a, b, c, A, B — произвольные постоянные. Приведенным решениям системы (4) соответствуют известные лиевские анзацы для уравнения Шредингера [1–3, 6].

5. Заключение. Мы описали все анзацы вида (3), редуцирующие уравнение Шредингера (1) к нелинейным дифференциальным уравнениям, где функция u зависит от двух или трех пространственных переменных.

Очевидно, анзацы, для которых соответствующие им инфинитезимальные операторы не входят в алгебру инвариантности уравнения, и аналогичные (3) $(\omega = t)$, можно получить и для произвольного n:

$$f = \frac{1}{2}\vec{x}(Et + A)^{-1}\vec{x}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m),$$

A — постоянная матрица $(m \times m)$, $m \leq n$, однако для $n > 3$ могут существовать и другие решения.

1. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A*, 1987, **20**, L929–L933.
2. Tajiri M., Similarity reductions of the one and two dimensional nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. Soc. Japan*, 1983, **52**, № 6, 1908–1917.
3. Gagnon L., Winternitz P., Lie symmetries of a generalized non-linear Schrödinger equation. I. The symmetry group and its subgroups, *J. Phys. A*, 1988, **21**, № 7, 1493–1511.
4. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики, 1987, 4–16.
5. Fushchych W., Nikitin A., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1987, 217 p.
6. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
7. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint, Minneapolis, Inst. for Mathematics and Applications, Univ. of Minnesota, 1988, 5 p.
8. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения уравнений Буссинеска, в сб. Симметрия и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989, 96–103.
9. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990, 400 с.
10. Collins C.B., Complex potential equations. I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–184.
11. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона, Препринт 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.