

Про редукцію багатовимірного нелінійного хвильового рівняння до двовимірних рівнянь

В.І. ФУЩИЧ, І.А. ЄГОРЧЕНКО

The condition of reduction of multidimensional wave equations to the two-dimensional equation is studied and the necessary conditions of compatibility and exact solutions of the resulting d'Alembert–Hamilton system are obtained.

1. Розв'язки нелінійного хвильового рівняння

$$\begin{aligned} \square u &= F(u), \\ \square &\equiv \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \dots - \partial_{x_n}^2, \quad u = u(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

будемо шукати за допомогою анзаца [1–4]

$$u = \varphi(y, z), \quad (2)$$

де y, z – нові змінні. Підстановка (2) в (1) приводить до рівняння

$$\begin{aligned} \varphi_{yy} y_\mu y_\mu + 2\varphi_{yz} z_\mu y_\mu + \varphi_{zz} z_\mu z_\mu + \varphi_y \square y + \varphi_z \square z &= F(\varphi) \\ \left(y_\mu = \frac{\partial y}{\partial x_\mu}, \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

звідки одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} y_\mu y_\mu &= r(y, z), \quad y_\mu z_\mu = q(y, z), \quad z_\mu z_\mu = s(y, z), \\ \square y &= R(y, z), \quad \square z = S(y, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) є умовою редукції багатовимірного хвильового рівняння (1) до двовимірного рівняння (3) за допомогою анзаца (2).

Така редукція становить інтерес, тому що розв'язки двовимірних рівнянь в частинних похідних, в тому числі і нелінійних, можуть бути досліджені більш повно, ніж розв'язки багатовимірних рівнянь.

Наприклад, нехай $y_\mu y_\mu = -z_\mu z_\mu = -1$, $z_\mu y_\mu = \square y = \square z = 0$. Тоді (3) має вигляд

$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi).$$

Якщо $F(\varphi) = \sin \varphi$, то редуковане рівняння має солітонні розв'язки. Якщо $F(\varphi) = \exp \varphi$, воно має загальний розв'язок.

2. Сформулюємо необхідні умови сумісності системи рівнянь Даламбера–Гамільтона для двох функцій.

Систему рівнянь (4), в залежності від знаку виразу $rs - q^2$, локальними перетвореннями можна звести до одного з чотирьох типів:

1) еліптичний випадок: $rs - q^2 > 0$, $v = v(y, z)$ — комплекснозначна функція,

$$\begin{aligned} \square v &= V(v, v^*), & \square v^* &= V^*(v, v^*), \\ v_\mu^* v_\mu &= h(v, v^*), & v_\mu v_\mu &= 0, & v_\mu^* v_\mu^* &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(редуковане рівняння еліптичного типу);

2) гіперболічний випадок: $rs - q^2 < 0$, $v = v(y, z)$, $\omega = \omega(y, z)$ — дійсні функції,

$$\begin{aligned} \square v &= V(v, \omega), & \square \omega &= W(v, \omega), \\ \omega_\mu \omega_\mu &= h(v, \omega), & v_\mu v_\mu &= 0, & \omega_\mu \omega_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(редуковане рівняння гіперболічного типу);

3) параболічний випадок: $rs - q^2 = 0$, $r^2 + s^2 + q^2 \neq 0$, $v(y, z)$, $\omega(y, z)$ — дійсні функції,

$$\begin{aligned} \square v &= V(v, \omega), & \square \omega &= W(v, \omega), \\ v_\mu \omega_\mu &= 0, & v_\mu v_\mu &= \lambda \ (\lambda = \pm 1), & \omega_\mu \omega_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(якщо $W \neq 0$, то редуковане рівняння параболічного типу);

4) рівняння першого порядку $r = s = q = 0$: $y \rightarrow v$, $z \rightarrow \omega$

$$\begin{aligned} v_\mu v_\mu &= \omega_\mu \omega_\mu = v_\mu \omega_\mu = 0, \\ \square v &= V(v, \omega), & \square \omega &= W(v, \omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналіз сумісності системи Даламбера–Гамільтона

$$\square u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = f(u) \quad (9)$$

в тривимірному просторі був проведений Коллінзом в [5]. Необхідні умови сумісності системи (9) для чотирьох незалежних змінних вивчались в роботі [6].

Сформулюємо необхідні умови сумісності систем (5)–(8).

Теорема 1. Система (5) сумісна тільки в тому випадку, коли

$$V = \frac{h(v, v^*) \partial_{v^*} \Phi}{\Phi}, \quad \partial_{v^*} \equiv \frac{\partial}{\partial v^*},$$

де Φ довільна функція, для якої виконується умова

$$(h \partial_{v^*})^{n+1} \Phi = 0.$$

Теорема 2. Система (6) може бути сумісною тільки в тому випадку, коли

$$V = \frac{h(v, \omega) \partial_\omega \Phi}{\Phi}, \quad W = \frac{h(v, \omega) \partial_\omega \Psi}{\Psi},$$

де функції Φ , Ψ задовольняють умови

$$(h \partial_v)^{n+1} \Psi = 0, \quad (h \partial_\omega)^{n+1} \Phi = 0.$$

Теорема 3. Система (7) сумісна тільки в тому випадку, коли

$$V = \frac{\lambda \partial_v \Phi}{\Phi}, \quad \partial_v^{n+1} \Phi = 0, \quad W \equiv 0.$$

Система (8) сумісна у випадку $V = W \equiv 0$.

Доведення цих теорем проводиться із застосуванням лем, наведених в [6], та відомої теореми Гамільтона–Келі, згідно з якою матриця є коренем свого характеристичного полінома.

Зауваження 1. Рівняння (5) можна переписати для пари дійсних функцій $\omega = \operatorname{Re} v$, $\sigma = \operatorname{Im} v$. Проте в цьому випадку необхідні умови сумісності мають дуже громіздкий вигляд.

Зауваження 2. Перехід від (4) до (5)–(8) зручний тільки з точки зору дослідження сумісності. Знак виразу $rs - q^2$ може змінюватись для різних y , z і перехід розглядається тільки в області, де цей знак постійний.

3. Наведемо явні розв'язки систем типу (4) і редуковані рівняння. Параметри a_μ , b_μ , c_μ , d_μ ($\mu = \overline{0, 3}$) задовольняють умови

$$\begin{aligned} -a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = -1 \quad (a^2 \equiv a_0^2 - a_1^2 - \dots - a_3^2), \\ ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0; \end{aligned}$$

y , z — функції від x_0 , x_1 , x_2 , x_3 .

- 1) $y = ax$, $z = dx$,
 $\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi)$;
- 2) $y = ax$, $z = ((bx)^2 + (cx)^2 + (dx)^2)^{1/2}$,
 $\varphi_{yy} - \varphi_{zz} - \frac{2}{z}\varphi_z = F(\varphi)$;
- 3) $y = bx + \Phi(ax + dx)$, $z = cx$,
 $-\varphi_{zz} - \varphi_{yy} = F(\varphi)$;
- 4) $y = ((bx)^2 + (cx)^2)^{1/2}$, $z = ax + dx$,
 $-\varphi_{yy} - \frac{1}{y}\varphi_y = F(\varphi)$.

1. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Grundland A., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–807.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3656.
4. Фушич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Collins S.B., Complex potential equations. I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–187.
6. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.