

Диференціальні інваріанти алгебри Пуанкаре та конформної алгебри

В.І. ФУЩИЧ, І.А. ЄГОРЧЕНКО

The bases of the second-order differential invariants of the Poincaré and conformal algebras for a set of scalar functions in the n -dimensional Minkowsky space are constructed. New classes of the nonlinear conformal-invariant equations are found.

Наведені функціональні базиси абсолютних диференціальних інваріантів другого порядку для набору з m скалярних функцій $u^r = u^r(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 3$.

Алгебра Пуанкаре $AP(1, n)$ задається базисними операторами

$$p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad (1)$$

де $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$, під повторюваними індексами мається на увазі підсумовування ($x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$), $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$.

Квазілінійні інваріанти другого порядку алгебри Пуанкаре та конформної алгебри описані в [1].

Теорема 1. Функціональний базис диференціальних інваріантів другого порядку алгебри Пуанкаре (1) для скалярної функції u складається з $2n + 3$ інваріантів

$$u, \quad S_k(u_{\mu\nu}) = u_{\mu_0\mu_1} \cdots u_{\mu_k\mu_0}, \quad (2)$$

$$R_k(u_\mu, u_{\mu\nu}) = u_{\mu_0} u_{\mu_k} u_{\mu_0\mu_1} \cdots u_{\mu_{k-1}\mu_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Тут $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$.

В тому, що вирази (2) є абсолютними інваріантами алгебри $AP(1, n)$ можна переконатися, перевіривши, що має місце рівність [2]

$$\overset{2}{X} F(x_\mu, u, u_\mu, u_{\mu\nu}) = 0,$$

де $\overset{2}{X}$ — другі продовження базисних операторів цієї алгебри.

Доведення повноти та функціональної незалежності набору інваріантів (2) досить громіздке, тому тут його наводити не будемо.

Теорема 2. Для набору з m скалярних функцій u^r базис інваріантів другого порядку алгебри $AP(1, n)$ складається з $m(2n + 3) + (m - 1) \frac{n(n-1)}{2}$ інваріантів

$$u^r, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1) = u_{\mu_1}^r u_{\mu_k}^r u_{\mu_1\mu_2}^1 \cdots u_{\mu_{k-1}\mu_k}^1, \quad (3)$$

$$S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1) = u_{\mu_1\mu_2}^1 \cdots u_{\mu_{j-1}\mu_j}^1 u_{\mu_j\mu_{j+1}}^r \cdots u_{\mu_k\mu_1}^r,$$

$j = 0, \dots, k$, $k = 1, \dots, n + 1$, $r = 1, \dots, m$, по r підсумовування немає.

Для розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n) = \{p_\mu, J_{\mu\nu}, D\}$,

$$D = x_\mu p_\mu + \lambda u^r p_{u^r}, \quad (4)$$

($p_{u^r} = i\partial/\partial u^r$, по r підсумовування від 1 до m) відповідний базис має вигляд коли $\lambda \neq 0$

$$\frac{u^r}{u^1}, \quad S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1)(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)}, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1)(u^1)^{\frac{2k}{\lambda}-k-1};$$

коли $\lambda = 0$

$$u^r, \quad S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1)(u_{\alpha\alpha}^1)^{-k}, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1)(u_{\alpha\alpha}^1)^{-k},$$

де S_{jk} , R_k визначаються співвідношеннями (3), $j = 0, 1, \dots, k$, $k = 1, \dots, n+1$, $r = 1, \dots, m$, по r підсумовування немає.

Наведемо аналогічні результати для конформної алгебри

$$AC(1, n) = \{p_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x_\nu p_\mu$$

(D — оператор дилатації (4)).

Базис інваріантів другого порядку алгебри $AC(1, n)$, коли $\lambda \neq 0$

$$S_{jk}(\theta_{\mu\nu}^r, \theta_{\mu\nu}^1)(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)}, \quad \frac{u^r}{u^1}, \quad R_k(\theta_\mu^r, \theta_{\mu\nu}^1)(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)-1},$$

$j = 0, \dots, k$, $k = 1, \dots, n+1$, $r = 2, \dots, m$, по r підсумовування немає.

Конформно-коваріантні тензори мають вигляд

$$\theta_\mu^r = \frac{u_\mu^r}{u^r} - \frac{u_\mu^1}{u^1}, \quad \theta_{\mu\nu}^r = \lambda u_{\mu\nu}^r + (1 - \lambda) \frac{u_\mu^r u_\nu^r}{u^r} + \frac{\lambda g_{\mu\nu}}{1 - n} \left(u_{\beta\beta}^r - \frac{u_\beta^r u_\beta^r}{u^r} \right),$$

S_{jk} , R_k будуються аналогічно (3).

$AC(1, n)$, $\lambda = 0$:

$$u^r, \quad (u_\alpha^1 u_\alpha^1)^{-2k} S_{jk}(w_{\mu\nu}^1, w_{\mu\nu}^r), \quad R_k(u_\mu^r, w_{\mu\nu}^1)(u_\alpha^1 u_\alpha^1)^{-2k+1},$$

$$r = 2, \dots, m, \quad j = 0, \dots, k, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Конформно-коваріантні тензори $w_{\mu\nu}^r$ мають вигляд

$$w_{\mu\nu}^r = u_\alpha u_\alpha^r \left(u_{\mu\nu}^r + \frac{g_{\mu\nu}}{1 - n} u_{\beta\beta}^r \right) - u_\beta^r (u_\mu^r u_{\beta\nu}^r + u_\nu^r u_{\beta\mu}^r) \quad (5)$$

(по r підсумовування немає).

Одержані результати дозволяють побудувати нові нелінійні багатовимірні конформно-інваріантні рівняння. Наприклад, рівняння

$$u_\alpha u_\alpha \frac{1}{n-1} \square u - u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} = (u_\nu u_\nu)^2 F(u),$$

ліва частина якого є згортою тензора $w_{\mu\nu}$ (5), F — довільна функція, інваріантне відносно алгебри $AC(1, n)$, $\lambda = 0$.

1. Фушич В.І., Єгорченко І.А., О симметричных свойствах комплекснозначных нелинейных волновых уравнений, *Докл. АН СССР*, 1988, **298**, № 2, 347–351.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.