

Аналитические свойства амплитуды рассеяния, соответствующей одному классу диаграмм Фейнмана

В.И. КОЛОМЫЦЕВ, В.И. ФУЩИЧ

На протяжении последних лет изучению аналитических свойств амплитуды рассеяния в теории возмущений посвящалось большое количество работ, основной целью которых было получение обычных дисперсионных соотношений и спектральных представлений. Основным методом в ряде работ является метод мажорирования диаграмм Фейнмана, позволяющий сравнивать области аналитичности для различных диаграмм. С помощью этого метода изучение аналитических свойств вкладов от всех диаграмм рассматриваемого процесса в амплитуду рассеяния сводится к изучению аналитических свойств вкладов от сравнительно небольшого числа диаграмм. На этом пути получено доказательство аналитичности амплитуды рассеяния в достаточно широкой комплексной области изменения инвариантных переменных, позволившей установить справедливость обычных дисперсионных соотношений, но, к сожалению, недостаточной для доказательства двойных спектральных представлений Мандельштама [1] (см. работу [2], в которой имеется подробный обзор работ этого и других направлений).

Темой настоящей работы является изучение аналитических свойств амплитуд Фейнмана, соответствующих одному классу диаграмм, описанному в работе [3]. Исходным является α -представление амплитуды рассеяния, в котором уже выполнено интегрирование по одному параметру с помощью δ -функции.

Возвращение к рассмотренному ранее классу диаграмм вызвано тем, что мы надеемся на примере этих диаграмм исследовать влияние свойств спектральных кривых на аналитические свойства самих амплитуд. Так, в конце настоящей работы показано отсутствие комплексных особенностей у диаграммы шестого порядка при определенных (не являющихся необходимыми) ограничениях на массы частиц. Однако в этом случае приходится исключать более чем один параметр из уравнений Ландау. На наш взгляд, используемый в статье метод является дальнейшим развитием метода Тарского [4], интенсивно использующего уравнения Ландау.

Ниже в п.1 будет доказана теорема об отсутствии комплексных особенностей у фейнмановских амплитуд рассеяния определенного вида, а в п.2 — описан класс диаграмм, вклады от которых в амплитуду рассеяния удовлетворяют условиям теоремы п.1 (см. рис. 2).

1. Рассмотрим фейнмановскую амплитуду

$$F(s, t) = \int \frac{\prod_{i=1}^n d\alpha_i \delta \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\} \{C(\alpha)\}^p}{\{D(\alpha; s, t)\}^r}, \quad (1.1)$$

у которой знаменатель

$$D(\alpha; s, t) = f(\alpha)s + g(\alpha)t - K(\alpha; m_i^2, M_j^2) \quad (1.2)$$

$$f(\alpha) = \alpha_n f_1(\alpha_{n-2}) \geq 0, \quad (1.3)$$

$$g(\alpha) = \alpha_{n-1} g_1(\alpha_{n-3}) \geq 0, \quad (1.4)$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} -K(\alpha; m_i^2, M_j^2) &= \alpha_n \alpha_{n-1} k_1(\alpha_{n-3}) M_j^2 + \alpha_n k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + \\ &+ \alpha_{n-1} k_3(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) + k_4(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

и при m_i^2 и M_j^2 , удовлетворяющих некоторым условиям, массовый коэффициент $K(\alpha)$ неотрицателен при всех $\alpha_i > 0$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Кроме того, будем предполагать, что $k_1(\alpha_{n-3}) \geq 0$ при всех α .

Покажем, что при $M_j^2 \leq 0$ функция $F(s, t)$ не имеет комплексных особенностей по обоим переменным s и t . С этой целью выполним интегрирование по α_n с помощью δ -функции и в получившемся выражении

$$F(s, t) = \int \frac{\prod_{i=1}^{n-1} d\alpha_i \{C(\alpha)\}^p}{\{c_{n-1} \alpha_{n-1}^2 + 2b_{n-1} \alpha_{n-1} + a_{n-1}\}^r}, \quad (1.6)$$

здесь

$$c_{n-1} = -k_1(\alpha_{n-3}) M_j^2, \quad (1.6a)$$

$$\begin{aligned} 2b_{n-1} &= -f_1(\alpha_{n-2})s + g_1(\alpha_{n-3})t + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) k_1(\alpha_{n-3}) M_j^2 - \\ &- k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + k_3(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) = -f_1 s + g_1 t + b, \end{aligned} \quad (1.6b)$$

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) f_1(\alpha_{n-2})s + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + \\ &+ k_4(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) \equiv \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) f_1 s + a, \end{aligned} \quad (1.6в)$$

будем менять контур интегрирования по параметру α_{n-1} при аналитическом продолжении функции $F(s, t)$ с вещественной области $s_1 = \text{Re } s \leq s_0$, $t_1 = \text{Re } t \leq t_0$ на комплексные значения этих переменных.

Более точно исследуем аналитические свойства подынтегральной функции

$$\Phi(\alpha; s, t) = \int_0^{1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i} d\alpha_{n-1} \frac{1}{\{c_{n-1} \alpha_{n-1}^2 + 2b_{n-1} \alpha_{n-1} + a_{n-1}\}^r} \quad (1.7)$$

при фиксированных значениях остальных параметров из области интегрирования. Все возможные особые точки функции $\Phi(\alpha; s, t)$ в пространстве переменных $s = s_1 + is_2$ и $t = t_1 + it_2$ лежат на поверхности типа Ландау, получаемой путем исключения параметра α_{n-1} из системы уравнений

$$\begin{aligned} D(\alpha; s, t) &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha_{n-1}} &= 2c_{n-1}\alpha_{n-1} + 2b_{n-1} = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

т.е. на поверхности

$$\Delta_{n-1} = (2b_{n-1})^2 - 4c_{n-1}a_{n-1} = 0. \quad (1.9)$$

Значения s и t , удовлетворяющие уравнению (1.9), соответствуют совпадающим особым точкам в плоскости α_{n-1} . К ним необходимо добавить еще особые точки функции $\Phi(\alpha; s, t)$, соответствующие концам промежутков интегрирования по α_{n-1} . Эти особые точки определяются из уравнений

$$a_{n-1}(s) = 0, \quad (1.10a)$$

$$a'_{n-1}(t) = a_{n-1}(s) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) \left[c_{n-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) + 2b_{n-1} \right], \quad (1.10б)$$

каждое из которых в силу условий (1.3) и (1.4) зависит только от одной переменной. В силу условия отрицательности массового коэффициента $K(\alpha)$ эти особые точки лежат на вещественных осях и поэтому ими в дальнейшем интересоваться не будем.

Исследуем следующий вопрос: какие точки поверхности (1.9) являются действительно особыми точками функции, т. е. соответствующие им сингулярности “зажимают” контур интегрирования в плоскости α_{n-1} с разных сторон, и какие точки не являются особыми, т.е. соответствующие им сингулярности “подходят” к контуру с одной стороны. Обсуждение этого вопроса свяжем с тем замечанием, что поскольку функции $f_1(\alpha_{n-2})$ и $g_1(\alpha_{n-2})$ положительны, то точки поверхности (1.9) с s_2 и t_2 имеющие одинаковый знак, не являются в действительности особыми, так как мнимая часть знаменателя

$$\text{Im } D(\alpha; s, t) = fs_2 + gt_2$$

не обращается в нуль при таких значениях s_2 и t_2 .

С этой целью рассмотрим различные области G_k в плоскости вещественных значений s_1 и t_1 , показанные на рис. 1. Предварительно разделим вещественную и мнимую части функции Δ_{n-1} в уравнении (1.9), которое теперь будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \text{Re } \Delta_{n-1} &= (-f_1s_1 + g_1t_1 + b)^2 - (-f_1s_2 + g_1t_2)^2 - \\ &- 4c_{n-1} \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) s_1 + a \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.11a)$$

$$\text{Im } \Delta_{n-1} = (g_1t_2 - f_1s_2)(b - f_1s_1 + g_1t_1) - 2f_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) c_{n-1}s_2 = 0. \quad (1.11б)$$

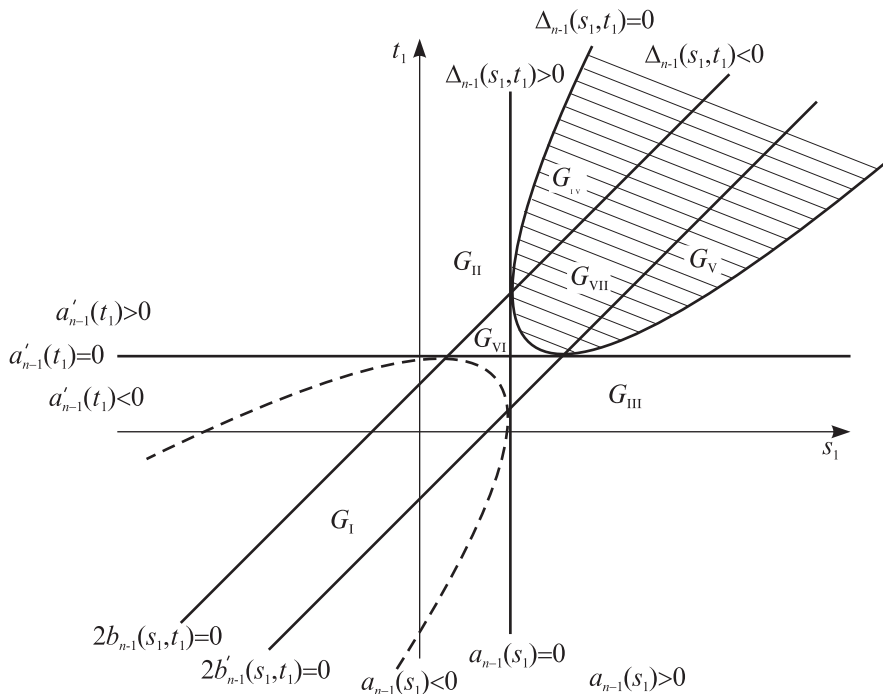


Рис. 1.

1. Рассмотрим теперь область $G_1 : [a_{n-1}(s_1) \leq 0 \cap a'_{n-1}(t) \leq 0]$. В этой области в силу неравенства $c_{n-1} \geq 0$ вещественная часть знаменателя

$$\operatorname{Re} D(\alpha; s_1, t_1) = f(\alpha)s_1 + g(\alpha)t_1 - K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$$

не обращается в нуль ни при каких α из области интегрирования. Следовательно, функция $\Phi(\alpha; s, t)$ является аналитической при комплексных значениях s и t с вещественными частями, принадлежащими области G_1 и произвольными мнимыми частями.

2. В области $G_2 : [a'_{n-1}(t_1) > 0 \cap 2b_{n-1} \geq 0 \cap a_{n-1}(s_1) < 0]$ особые точки, лежащие на поверхности $\Delta_{n-1}(s, t) = 0$, имеют мнимые части одинакового знака, что легко увидеть, используя уравнение (1.11б) для определения отношения

$$\frac{t_2}{s_2} = \frac{f_1 \left\{ -f_1 s_1 + g_1 t_1 + b + 2 \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) c_{n-1} \right\}}{g_1 \{ -f_1 s_1 + g_1 t_1 + b \}} = \frac{f_1 \cdot 2b'_{n-1}}{g_1 \cdot 2b_{n-1}}. \quad (1.11в)$$

Следовательно, комплексные точки s и t с вещественными частями, принадлежащими области G_2 , являются регулярными точками функции $\Phi(\alpha; s, t)$.

3. Область $G_3 : [a'_{n-1}(t_1) < 0 \cap 2b'_{n-1}(s_1, t_1) > 0 \cap a_{n-1}(s_1) > 0]$ рассматривается аналогично области G_2 , а значит, комплексные точки с вещественными частями, принадлежащими области G_3 , являются регулярными точками функции $\Phi(\alpha; s, t)$.

Прежде чем переходить к дальнейшему обсуждению, остановимся на некоторых важных свойствах пересечения поверхности $\Delta_{n-1}(s, t)$ с плоскостью (s_1, t_1) ,

т.е. на свойствах вещественной спектральной кривой:

$$\Delta_{n-1}(s, t) \Big|_{\substack{s_2=0 \\ t_2=0}} = (-f_1 s_1 + g_1 t_1 + b)^2 - 4c_{n-1} \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) s_1 + a \right] = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) представляет параболу в плоскости (s_1, t_1) , заключенную между прямыми $a_{n-1}(s_1) = 0$ и $a'_{n-1}(t_1) = 0$, расположенную в области $G : [a_{n-1}(s_1) \geq 0 \cap a_{n-1}(t_1) \geq 0]$ и касающуюся этих прямых в точках их пересечения с прямыми

$$2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0 \quad (1.13a)$$

и

$$2b'_{n-1}(s_1, t_1) = 2b_{n-1}(s_1, t_1) + 2 \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) c_{n-1} = 0. \quad (1.13б)$$

В справедливости этих утверждений можно легко убедиться, рассматривая эквивалентные записи уравнения кривой

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(s_1, t_1) &= [2b_{n-1}(s_1, t_1)]^2 - 4c_{n-1}a_{n-1}(s_1) \equiv \\ &\equiv [2b'_{n-1}(s_1, t_1)]^2 - 4c_{n-1}a'_{n-1}(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.12a)$$

и учитывая неравенство $c_{n-1} \geq 0$.

Легко видеть, что левая часть (1.11a), т.е. $\text{Re } \Delta_{n-1}(s, t)$ отрицательна в области, в которой $\Delta_{n-1}(s_1, t_1) \leq 0$, т.е. в заштрихованной на рис. 1 области, ограниченной параболой. Следовательно, поверхность особых точек функции $\Phi(\alpha; s, t)$ “расположена” над областью вещественных значений s_1 и t_1 , не принадлежащих заштрихованной области.

Кроме того, в областях левее и выше прямой $2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0$ и правее и ниже прямой $2b'_{n-1}(s_1, t_1) = 0$ мнимые части s и t , как это следует из уравнения (1.11в), имеют один и тот же знак.

Следовательно, мы приходим к выводу:

4–5. В областях $G_{IV} : [a_{n-1}(s_1) \geq 0 \cap 2b_{n-1}(s_1, t_1) \geq 0]$ и $G_V : [a'_{n-1}(t_1) \geq 0 \cap 2b'_{n-1}(s_1, t_1) \leq 0]$ функция $\Phi(\alpha : s, t)$ является регулярной, так как мнимая часть знаменателя $D(\alpha; s, t)$ при значениях s_2 и t_2 , имеющих одинаковый знак, не обращается в нуль.

6. Итак, осталось рассмотреть область значений G_{VI} и G_{VII} . Область G_{VI} ограничена (см. рис. 1) линиями

$$\begin{aligned} a'_{n-1}(t) = 0, \quad 2b'_{n-1}(s_1, t_1) = 0, \quad \Delta_{n-1}(s_1, t_1) = 0, \\ 2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0, \quad a_{n-1}(s_1) = 0. \end{aligned}$$

Прежде всего следует отметить, что над той частью области G_I , которая заключена между прямыми $2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0$ и $2b'_{n-1}(s_1, t_1) = 0$ точки особой поверхности имеются, так как уравнения (1.11) совместны и мнимые части s и t имеют противоположные знаки. Соответствующие им сингулярные точки подынтегральной функции в правой части (1.7) в плоскости переменной совпадают и находятся вне линии интегрирования $\left(0, 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right)$. Так как при вещественных значениях

s_1 и t_1 , принадлежащих области G_1 , функция $\Phi(\alpha; s, t)$ аналитична, то ее можно продолжить на комплексные значения s и t с вещественными частями этих переменных, принадлежащими, по-прежнему, G_1 в силу того, что совпадающие сингулярности в плоскости “подойдут” к непрерывно изменяемой линии интегрирования с одной стороны. Поэтому точки s и t удовлетворяющие системы (1.11) с s_1 и $t_1 \in G_1$, в действительности являются регулярными точками $\Phi(\alpha; s, t)$.

При аналитическом продолжении $\Phi(\alpha; s, t)$ на комплексные значения s и t с вещественными частями, принадлежащими области G_{VI} , совпадающие сингулярности подынтегральной функции в выражении (1.7) для $\Phi(\alpha; s, t)$ в плоскости переменной α_{n-1} будут оставаться совпадающими при s и t принадлежащими поверхности (1.2). Кроме того, они, по-прежнему, будут “подходить” к контуру интегрирования с одной стороны до тех пор, пока не совпадут с одним из концов линии интегрирования (см. лемму 2А работы Тарского [4]). Последнее же может случиться только в том случае, когда значения s_1 и t_1 совпадают с координатами точек пересечения A_1 или A_2 , в которых точки поверхности имеют равные нулю мнимые части. Эти особые вещественные точки функции $\Phi(\alpha; s, t)$ совпадают с точками, удовлетворяющими уравнениям (1.10).

Таким образом, точки поверхности (1.9), “расположенные” над областью являются регулярными точками функции $\Phi(\alpha; s, t)$.

7. Как уже отмечалось, над областью G_{VII} поверхность (1.9) “не находится”. Следовательно, комплексные точки s и t с вещественными частями из области G_{VII} также являются регулярными точками функции $\Phi(\alpha; s, t)$.

Резюмируя вышесказанное, приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Функция $\Phi(\alpha; s, t)$ имеет только лишь вещественные особые точки при любых α из области интегрирования (1.6).*

На основании этой леммы можно сформулировать такое предложение.

Теорема 1. *Амплитуда Фейнмана $F(s, t)$ заданная интегралом (1.1) со знаменателем $D(\alpha; s, t)$, удовлетворяющим условиям (1.2)–(1.5), при $M_j^2 \leq 0$ суть аналитическая функция переменных s и t в области, являющейся произведением двух плоскостей с выключенными разрезами вдоль вещественных осей*

$$s_2 = \text{Im } s = 0, \quad s_0 \leq \text{Re } s < \infty, \quad t_2 = \text{Im } t = 0, \quad t_0 \leq \text{Re } t < \infty.$$

В случае, когда $M_j^2 > 0$, парабола $\Delta_{n-1}(s_1, t_1) = 0$ расположена в области G_I и является границей вещественной области аналитичности функции $\Phi(\alpha; s, t)$. При значениях s_1 и t_1 , удовлетворяющих уравнению $\Delta_{n-1}(s_1, t_1) = 0$, сингулярности в плоскости α_{n-1} “зажимают” контур интегрирования с разных сторон и поэтому аналитическое продолжение $\Phi(\alpha; s, t)$ на комплексные значения s и t с вещественными частями, не принадлежащими области $G_I \cap (\Delta_{n-1} \geq 0)$, осуществить невозможно при изменении только лишь контура интегрирования по α_{n-1} . Из сказанного следует, что для аналитического продолжения по переменной $\xi = M_j^2$ со значений $\xi \leq 0$ на положительные значения необходимо осуществить изменения контуров по другим параметрам α .

2. Как известно каждой фейнмановской диаграмме с четырьмя внешними линиями сопоставляется вклад в амплитуду рассеяния, который с точностью до по-

стоянных множителей может быть представлен в виде следующего интеграла [5]:

$$F(s, t) = \int d\alpha_1 \dots \int d\alpha_n \frac{\{C(\alpha)\}^p \delta \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\}}{\{D(\alpha; s, t)\}^r}. \quad (2.1)$$

Здесь введены следующие обозначения: $D(\alpha; s, t)$ — дискриминант квадратичной формы $\Psi(q; \alpha, s, t)$, которая определяется соотношением

$$\Psi(q; \alpha, s, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (k_i^2 - m_i^2), \quad (2.2)$$

где четырех-импульсы k_i являются линейными комбинациями внешних импульсов p_j ($j = 1, \dots, 4$) и импульсов интегрирования q_l , сопоставляемых каждому независимому контуру диаграммы; α_i и m_i — параметры Фейнмана и массы, соответствующие i -й внутренней линии диаграммы, $C(\alpha)$ — дискриминант квадратичной формы

$$\Psi_0(q; \alpha) = \Psi(q; \alpha, s = t = 0, m_i^2 = 0, M_j^2 = 0). \quad (2.3)$$

Числа p и r положительные и определяются числом вершин диаграммы и числом l независимых ее контуров. Дискриминант $D(\alpha; s, t)$ является линейной функцией переменных s, t, m_i^2, M_j^2 и может быть представлен в виде

$$D(\alpha; s, t) = f(\alpha)s + g(\alpha)t - K(\alpha; m_i^2, M_j^2), \quad (2.4)$$

где

$$K(\alpha; m_i^2, M_j^2) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 m_i^2 K_i(\alpha) - \sum_{i=1}^m \alpha_i m_i K'_i(\alpha) - \sum_{j=1}^4 K''_j(\alpha) M_j^2. \quad (2.4')$$

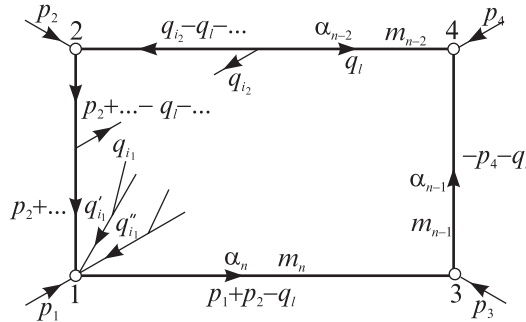


Рис. 2.

Одно из важных свойств $D(\alpha; s, t)$ заключается в следующем.

Значение $D(\alpha; s, t)$ при $s = 0$ и $t = 0$, т.е. массовый коэффициент — $-K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$ отрицателен при положительных α_i , если массы частиц, участвующих в реакции, удовлетворяют некоторым условиям (включающим условия стабильности) [2, 5].

Основной способ для изучения свойств дискриминанта $D(\alpha; s, t)$, как функции α основан на инвариантности $D(\alpha; s, t)$ относительно различных выборов линий,

по которым “протекают” импульсы внешних частиц через данную диаграмму и относительно различного выбора независимых замкнутых контуров для внутренних импульсов интегрирования.

Правая сторона (2.2) имеет вид

$$\sum a_{kr} q_k q_r + 2 \sum b_k q_k + c. \quad (2.5)$$

Коэффициенты a , b , c все зависят от α линейно, причем a_{kr} не зависит ни от каких других переменных, b_k зависит также от внешних импульсов, а c зависит линейно от квадратов и скалярных произведений внешних импульсов и от квадратов масс внутренних частиц. Дискриминант уравнения (2.5), следовательно, имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_l & c \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Разлагая D по последней строке и затем по последнему столбцу, получаем

$$D = - \sum A_{kr}(\alpha) b_k b_r + C(\alpha) \cdot c, \quad (2.7)$$

где

$$C(\alpha) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix}, \quad (2.8)$$

а $A_{kr}(\alpha)$ являются алгебраическими дополнениями элементов a_{kr} в $C(\alpha)$.

Произведения $b_k b_r$ зависят от произведений и квадратов внешних импульсов, которые, будучи выражены через s , t и M_j^2 по формулам

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2, & t &= (p_1 + p_3)^2, & u &= (p_1 + p_4)^2, \\ s + t + u &= \sum_{i=1}^4 M_j^2, & p_j^2 &= M_j^2, & 2p_1 p_2 &= s - M_1^2 - M_2^2, \\ 2p_1 p_3 &= t - M_1^2 - M_3^2, & 2p_1 p_4 &= M_2^2 + M_3^2 - s - t, \\ 2p_2 p_3 &= M_1^2 + M_4^2 - s - t, & 2p_2 p_4 &= t - M_2^2 - M_4^2, \\ 2p_2 p_3 &= s - M_3^2 - M_4^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

приведут к (2.4).

Каждый член в (2.4) является однородной функцией по α степени l .

Для более детального изучения свойств коэффициентов $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ используем инвариантность $D(\alpha; s, t)$ относительно различного выбора путей, по которым протекают импульсы внешних частиц p_1 , p_2 , p_3 и p_4 .

Предварительно введем понятие s -пути и t -пути, несколько отличающиеся от соответствующих понятий в работе Идена.

s -Путь. Назовем s -путем в данной диаграмме любую непрерывную линию, состоящую из внутренних линий диаграммы и соединяющую вершины 1 и 3 или 2 и 4 соответственно.

t -Путь определяется как линия, состоящая из внутренних линий диаграммы и соединяющая вершины 1 и 2 или 3 и 4.

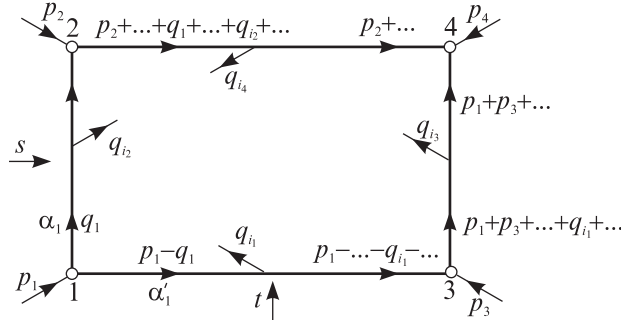


Рис. 3, а.

Выберем внутренние независимые импульсы интегрирования q_l так, как показано на рис. 3, а. При таком выборе импульс p_1 внешней частицы 1 протекает только лишь вдоль s -пути, соединяющего вершины 1 и 3 (в дальнейшем s_{13}), импульс p_2 протекает вдоль s -пути s_{24} , сумма импульсов $p_1 + p_3$ протекает только лишь вдоль t -пути t_{34} , вдоль t -пути t_{12} и всех остальных линий диаграммы протекает только лишь импульсы q_l . В этом случае коэффициент c в (2.5) не зависит от s , и зависимость $D(\alpha; s, t)$ от s содержится только лишь в произведениях b_k , которые принимают один из следующих видов:

- 1) либо $-b_k = \sum_{k_1} \alpha_{k_1} p_1 + \sum_{k_{13}} \alpha_{k_{13}} (p_1 + p_3) + \sum_{k_2} \alpha_{k_2} p_2$, если α_{k_1} принадлежит s_{13} , $\alpha_{k_{13}}$ принадлежит t_{34} , α_{k_2} принадлежит s_{24} , а импульс q_k протекает вдоль s_{13} по линии с индексом k_1 , вдоль t_{34} — по линии k_{13} и вдоль s_{24} — по линии k_2 ;
- 2) либо $-b_k = \sum_{k_1} \alpha_{k_1} p_1 + \sum_{k_{13}} \alpha_{k_{13}} (p_1 + p_3)$, если α_{k_1} принадлежит s_{13} и $\alpha_{k_{13}}$ принадлежит t_{34} , а q_k протекает вдоль s_{13} и t_{34} по линиям k_1 и k_{13} ;
- 3) либо $-b_k = \sum_{k_2} \alpha_{k_2} p_2$, если α_{k_2} принадлежит s_{24} , а q_k протекает вдоль s_{24} , но не протекает вдоль выделенного на рис. 3, а t -пути t_{34} ;
- 4) либо $-b_k = \sum_{k_{13}} \alpha_{k_{13}} (p_1 + p_3)$, если $\alpha_{k_{13}}$ принадлежит t_{34} , а импульс q_k не протекает вдоль s -путей s_{13} и s_{24} .

Следовательно, в силу (2.9) произведение $b_k b_r$ содержит переменную s только лишь в том случае, если α_k принадлежит s_{13} , а α_r принадлежит s_{24} (или наоборот).

Таким образом, мы приходим к следующей лемме.

Лемма 2(f). Коэффициент $f(\alpha)$ при s в $D(\alpha; s, t)$ является суммой вида

$$f(\alpha) = \sum_{k,r} \alpha_k \alpha_r f'_{kr}(\alpha), \quad (2.10)$$

где суммирование происходит по таким индексам k и r , что если α_k принадлежит s_{13} , то α_r принадлежит s_{24} , а $f'_{kr}(\alpha)$ — некоторая функция, которая в силу свойства дискриминанта $D(\alpha; s, t)$ не зависит от α_k и α_r .

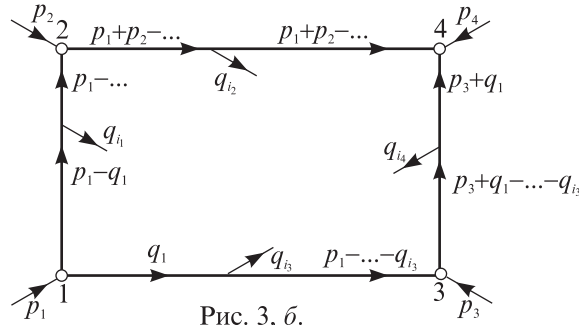


Рис. 3, б.

Выбирая импульсы интегрирования и пути, по которым протекают внешние импульсы, как показано на рис. 3, б, и повторяя выкладки, проведенные выше относительно структуры $f(\alpha)$, можно получить следующее предложение, являющееся аналогом леммы 2(f).

Лемма 2(g). Коэффициент $g(\alpha)$ при t в $D(\alpha; s, t)$ является суммой вида

$$g(\alpha) = \sum_{k,r} \alpha_k \alpha_r g'_{kr}(\alpha), \quad (2.11)$$

где суммирование происходит по таким индексам k и r , что если α_k принадлежит t_{12} , то α_r принадлежит t_{34} , а $g'_{kr}(\alpha)$ — некоторая функция, которая в силу свойств $D(\alpha; s, t)$ не зависит от α_k и α_r .

В силу леммы 2(f) и 2(g) можно добиться выполнения условий (1.3) и (1.4), налагаемых на коэффициенты $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$, редуцируя все линии на s - и t -путях, подходящих к какой-нибудь из вершин диаграммы на рис. 3, а, оставляя нередуцированными по одной линии на каждом из этих путей. Существует, очевидно, много способов редуцирования. Важно выяснить, существует ли хотя бы один из способов, при котором $f_1(\alpha)$ и $g_1(\alpha)$ в (1.3) и (1.4) оказались бы не зависящими от α_n и α_{n-1} . На один из них указать легко. Именно, ни в одно из слагаемых в правой части (2.10), которое содержит в виде множителя параметр α'_1 на линии, несущей импульс $p_1 - q_1$ (см. рис. 3, а), параметр α_1 не входит. Действительно, параметр α_1 содержится в виде слагаемого в элементах a_{11} и s в правой части (2.6), не входящих в алгебраическое дополнение ни одного элемента a_{1r} , которое дает вклад в функцию $f'_{kr}(\alpha)$, встречающуюся в виде произведения с параметром α'_1 в правой части (2.10). Утверждение об отсутствии слагаемого в правой части (2.11), содержащего в виде множителя произведение $\alpha_1 \alpha'_1$, можно также легко получить, проведя аналогичные рассуждения. Таким образом, редуцируя на s -пути s_{13} все линии, за исключением несущей параметр α'_1 , а на t -пути t_{12} — все линии, за исключением несущей параметр α_1 , тем самым добьемся независимости $f_1(\alpha)$ и $g_1(\alpha)$ от α'_1 и α_1 (или, переобозначив их через α_n и α_{n-1} , — от α_n и α_{n-1}). Ответ на вопрос существует ли другой способ редуцирования, приводящий к независимости $f_1(\alpha)$ и $g_1(\alpha)$ от соответствующих переменных, дать трудно, так как в общем случае это может произойти только при сложных взаимных уничтожениях

в выражениях типа (2.10) и (2.11). Положительности $f_1(\alpha)$ и $g_1(\alpha)$ можно затем добиться редуцированием тех линий, параметры которых входят в произведения с отрицательными знаками.

Остановимся теперь на свойствах коэффициентов $K_j''(\alpha)$ при M_j^2 в правой части (2.4'). Из рис. 3, а видно, что зависимость $D(\alpha; s, t)$ от M_4^2 заключена в произведениях $b_k b_r$, которые сами содержат в виде множителя массу M_4^2 только лишь в том случае, когда в них содержится произведение $\alpha_{k_2} p_2 \alpha_{k_3} p_3$, где α_{k_2} принадлежит s -пути s_{24} , а α_{k_3} принадлежит t -пути t_{34} . Таким образом, мы приходим к выводу: коэффициент $K_4''(\alpha)$ может быть представлен в виде суммы

$$K_4'' = \sum_{k_2, k_3} \alpha_{k_2} \alpha_{k_3} k_4^{k_2 k_3}(\alpha), \quad (2.12)$$

где суммирование происходит по таким индексам k_2 и k_3 , что если α_{k_2} принадлежит s_{24} , то α_{k_3} принадлежит t_{34} , и $k_4^{k_2 k_3}$ в силу свойства дискриминанта $D(\alpha; s, t)$ не зависит от α_{k_2} и α_{k_3} . На основании (2.12) легко получить следующую лемму.

Лемма 2(K_j''). Коэффициент $K_j''(\alpha)$ при M_j^2 может быть представлен в виде

$$K_j''(\alpha) = \sum_{k, r} \alpha_k \alpha_r k_{jk_r}''(\alpha), \quad (2.13)$$

где суммирование происходит по таким индексам k и r , что если α_k принадлежит s -пути, подходящем к вершине j , то α_r принадлежит t -пути, подходящем к той же вершине диаграммы, и $k_{jk_r}''(\alpha)$ в силу свойства $D(\alpha; s, t)$ не зависит от α_k и α_r .

Рассмотрим класс диаграмм Фейнмана, представленный на рис. 2. Используя леммы 2(f) и 2(g), можно записать коэффициенты $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ в виде

$$f(\alpha) = \alpha_n f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}), \quad (2.14)$$

$$g(\alpha) = \alpha_{n-1} g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}), \quad (2.15)$$

удовлетворяющем условиям (1.3) и (1.4).

Изучим теперь структуру массового коэффициента $-K(\alpha; m_j^2, M_j^2)$. Применяя лемму 2(K_j'') к этой диаграмме, можно заключить, что коэффициент $K_3''(\alpha)$ имеет вид

$$K_3''(\alpha) = \alpha_n \alpha_{n-1} k_3''(\alpha). \quad (2.16)$$

Покажем теперь, что коэффициенты $K_1''(\alpha)$, $K_2''(\alpha)$ и $K_4''(\alpha)$, стоящие соответственно при M_1^2 , M_2^2 и M_4^2 в $D(\alpha; s, t)$, не зависят от произведения $\alpha_n \alpha_{n-1}$. Действительно, в правой части (2.7) произведение $\alpha_n \alpha_{n-1}$, как легко показать при выборе q_k , представленном на рис. 2, входит лишь в слагаемое $-b_l b_l A_{ll}$ первой суммы и в слагаемое $a_{ll} A_{ll}$, что нетрудно увидеть, разложив $C(\alpha)$ по элементам последнего столбца (или строки):

$$C(\alpha) = a_{ll} A_{ll} - a_{l-1} A_{l-1} + \dots + (-1)^{l+1} a_{l1} A_{l1}. \quad (2.17)$$

Произведение $b_l b_l$ содержит $\alpha_n \alpha_{n-1}$ в следующем виде

$$\begin{aligned} b_l b_l = & -2\alpha_n \alpha_{n-1} (p_1 + p_2) p_4 - 2\alpha_n \sum \alpha'_i (p_1 + p_2) p_2 + \\ & + 2\alpha_{n-1} \sum \alpha'_i p_2 p_4 + \alpha_n^2 s + \alpha_{n-1}^2 M_4^2 + \left(\sum \alpha'_i \right)^2 M_2^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Используя (2.9), замечаем, что

$$\begin{aligned} 2(p_1 + p_2)p_4 &= M_3^2 - M_4^2 - s, & 2(p_1 + p_2)p_2 &= s - M_1^2 + M_2^2, \\ 2p_2p_4 &= t - M_2^2 - M_4^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

и, следовательно, правая часть (2.18) переписывается в виде

$$\begin{aligned} b_l b_l &= -\alpha_n \alpha_{n-1} (M_3^2 - M_4^2 - s) - \alpha_n \sum \alpha'_i (s - M_1^2 + M_2^2) + \\ &+ \alpha_{n-1} \sum \alpha'_i (t - M_2^2 - M_4^2) + \alpha_n^2 s + \alpha_{n-1}^2 M_4^2 + \left(\sum \alpha'_i \right)^2 M_2^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим теперь слагаемое $ca_{ll}A_{ll}$. В коэффициент c переменные α_n , α_{n-1} и α_{n-2} входят следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= \alpha_n (s + m_n^2) + \alpha_{n-1} (M_4^2 + m_{n-1}^2) + \alpha_{n-2} m_{n-2}^2 + \\ &+ \text{остальные члены, зависящие от } \alpha_{n-3}, \dots, \alpha_1, m_i^2, \text{ и } M_2^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

а элемент a_{ll} можно представить в виде

$$a_{ll} = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \text{остальные члены.} \quad (2.22)$$

Таким образом, в слагаемом $ca_{ll}A_{ll}$, дающем вклад в коэффициент $K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$, произведение $\alpha_n \alpha_{n-1}$ встречается в виде $\alpha_n \alpha_{n-1} A_{ll} M_4^2$ и в сумме со вторым слагаемым в первой скобке правой части (2.20), умноженной на $-A_{ll}$ дает нуль. Следовательно, та часть суммы слагаемых $-b_l b_l A_{ll} + ca_{ll} A_{ll}$, которая дает вклад в $K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$, содержит произведение $\alpha_n \alpha_{n-1}$ только лишь в виде $\alpha_n \alpha_{n-1} A_{ll} M_3^2$, т.е. только при массовой переменной M_3^2 . Доказательство независимости $K_1''(\alpha)$, $K_2''(\alpha)$ и $K_4''(\alpha)$ от произведения $\alpha_n \alpha_{n-1}$, таким образом, закончено.

Кроме того, используя (2.20), (2.21) и (2.22) и замечая, что зависимость $D(\alpha; s, t)$ от α_n , α_{n-1} и α_{n-2} заключена только в элементах a_{ll} , b и c можно получить следующую лемму.

Лемма 3. Сумма слагаемых $K_1''(\alpha)M_1^2 + K_2''(\alpha)M_2^2 + K_4''(\alpha)M_4^2$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} K_1''(\alpha)M_1^2 + K_2''(\alpha)M_2^2 + K_4''(\alpha)M_4^2 &= \\ &= \alpha_n k_1''(\alpha_{n-3}, M_j^2) + \alpha_{n-1} k_2''(\alpha_{n-2}, M_j^2) + k_4''(\alpha_{n-2}, M_j^2), \quad j \neq 3. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Перепишем два первых слагаемых правой части (2.4') в виде

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 m_i^2 K_i(\alpha) - \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i^2 K_i'(\alpha) = C(\alpha) \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i^2. \quad (2.24)$$

Легко показать, что правая сторона (2.24) представима в виде

$$\begin{aligned} C(\alpha) \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i^2 &= \alpha_n m_n^2 C(\alpha_{n-3}) + \\ &+ \alpha_{n-1} m_{n-1}^2 C(\alpha_{n-3}) + \alpha_{n-2} m_{n-2}^2 C(\alpha_{n-3}) + \sum_{i=1}^{n-3} \alpha_i m_i^2 C(\alpha). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Действительно, учитывая, что $C(\alpha)$ зависит от переменных α_n , α_{n-1} и α_{n-2} следующим образом

$$C(\alpha) = c(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \dots),$$

можно считать, что, так как при изучении аналитических свойств $F(s, t)$ используется формула (1.6), в которой значение $D(\alpha; s, t)$ берется на гиперплоскости $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, коэффициент $C(\alpha)$ не зависит от α_{n-1} и α_{n-2} , т.е. имеет место представление (2.25).

Суммируя результаты этого параграфа, можно сформулировать следующий основной вывод.

Теорема 2. В силу выражений (2.10), (2.11), (2.23), (2.25) дискриминант $D(\alpha; s, t)$ может быть представлен в виде

$$D(\alpha; s, t) = \alpha_n f_1(\alpha_{n-2})s + \alpha_{n-1} g_1(\alpha_{n-2})t + \alpha_n \alpha_{n-1} k_1(\alpha_{n-3})M_3^2 + \alpha_n k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + \alpha_{n-1} k_3(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) + k_4(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2), \quad (2.26)$$

из которого следует, что вклад в амплитуду рассеяния от диаграммы, представленной на рис. 2, удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

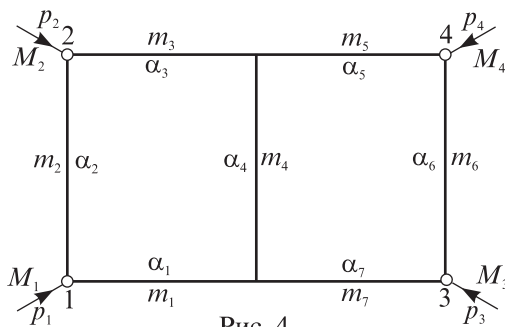


Рис. 4.

Рассмотрим, наконец, вклад в амплитуду рассеяния от диаграммы шестого порядка (рис. 4), который может быть записан в виде следующего интеграла

$$F^{(6)}(s, t) = \int \frac{\prod_{i=1}^7 d\alpha_i \delta\{1 - \sum \alpha_i\} C^2(\alpha)}{\{D(\alpha; s, t)\}^3}, \quad (2.27)$$

где

$$D(\alpha; s, t) = f(\alpha)s + g(\alpha)t - K(\alpha; m_i^2, M_j^2), \quad (2.28)$$

$$f(\alpha) = \alpha_1[\alpha_3(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_4\alpha_5] + \alpha_7[\alpha_5(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4], \quad (2.29)$$

$$g(\alpha) = \alpha_2\alpha_4\alpha_6, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} -K(\alpha; m_i^2, M_j^2) = & -C(\alpha) \sum_{i=1}^7 \alpha_i m_i^2 + \alpha_2 \{[\alpha_1(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_4\alpha_7]M_1^2 + \\ & + [\alpha_3(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_4\alpha_5]M_2^2\} + \\ & + \alpha_6 \{[\alpha_7(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_4]M_3^2 + \\ & + [\alpha_5(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4]M_4^2\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$C(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) - \alpha_4^2. \quad (2.32)$$

Исключая с помощью δ -функции параметр α_7 , запишем соответствующую систему уравнений типа Ландау

$$D(\alpha; s, t) = c_6\alpha_6^2 + 2b_6\alpha_6 + \alpha_6 = 0, \quad \alpha_7 = 1 - \sum_{i=1}^6 \alpha_i, \quad (I)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_6} = 2c_6\alpha_6 + 2b_6 = 0,$$

$$D(\alpha; s, t) = c_6\alpha_6^2 + 2b_6\alpha_6 + \alpha_6 = 0, \quad \alpha_6 = 1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i, \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha_5} = 0, \quad (II)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, s, t) = 0, \quad \alpha_6 = 1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i, \quad \alpha_5 = 0, \quad (III)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_4} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Значения s и t , удовлетворяющие подсистеме I, приводят к совпадающим сингулярностям по α_6 ; удовлетворяющие подсистеме II, — к совпадающим сингулярностям по α_5 и концевым по α_6 и, наконец, удовлетворяющие подсистеме III, приводят к совпадающим по α_4 и α_3 и концевым по α_6 и α_5 .

Исследование подсистем I и II может быть проведено тем же способом, что и исследование системы (1.8) п.1, и при $M_3^2 \leq 0$ и $M_4^2 \leq 0$ соответствующие этим подсистемам особые точки s и t — вещественны.

Особые точки, соответствующие подсистеме III, лежат на поверхности, уравнение которой можно записать в виде равенства нулю следующего определителя

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = As^2 + 2Bst + Ct^2 + 2Ds + 2Et + F = 0,$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= -\alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2, \\ d_{12} &= \frac{-\alpha_1 s - \alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2}{2} - \\ &\quad - \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\{-\alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2\} - \alpha_1 s - \alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2}{2} - \alpha_1 s + m^2 - \\ &\quad - \alpha_2 M_2^2 \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2) - (1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2)m^2 - \alpha_1 \alpha_2 M_1^2 + \alpha_2(1 - \alpha_1 - \alpha_2)M_2^2}{2}, \\ d_{21} &= -\frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\{-\alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2\}}{2}, \\ d_{22} &= \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2)s - (1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2)m^2 - \alpha_1 \alpha_2 M_1^2 + \alpha_2(1 - \alpha_1 - \alpha_2)M_2^2}{2} \times \\ &\quad \times (1 - \alpha_1 - \alpha_2)[\alpha_1 \alpha_2 M_1^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)m^2]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что это уравнение получено при следующих ограничениях на массы частиц: $m_6 = m_3$, $M_4 = 0$. В плоскости вещественных значений переменных s и t оно представляет гиперболу.

Исследование этого уравнения, которое проводится так же, как и исследование системы (1.11) в п.1, показывает, что особые точки функции $F^6(s, t)$ являются вещественными.

Следовательно, анализ системы уравнений показывает, что комплексные значения переменных s и t являются регулярными точками вклада в амплитуду рассеяния от диаграммы шестого порядка при $m_6 = m_3$, $M_3^2 \leq 0$ и $M_4^2 = 0$. По-видимому, исключение оставшихся параметров α_1 , α_2 и α_4 позволило снять эти ограничения на массы частиц. Однако этот вопрос в статье не рассмотрен, так как исследование спектральных кривых (являющихся в этом случае кривыми порядка выше 4) осуществить затруднительно.

Отметим в заключение, что полученные для диаграммы шестого порядка результаты без труда переносятся на произвольную диаграмму лестничного типа с тем только лишь отличием, что необходимо исключать из уравнений большее число параметров α для доказательства соответствующих аналитических свойств фейнмановских амплитуд. Возникающие при этом ограничения на массы частиц (равенство внутренних масс и $M_3^2 \leq 0$, $M_4^2 = 0$), по-видимому, могут быть сняты путем исключения оставшихся неисключенными параметров α , что приведет к спектральным кривым высокого порядка. Мы надеемся осуществить исследование этого случая в следующей работе.

1. Mandelstam S., *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 1344.
2. Тодоров И.Т., Дисперсионные соотношения и спектральные представления в теории возмущений, препринт ОИЯИ, Р-1205, 1963.
3. Коломыцев В.И., Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Изд-во АН УССР, Киев, 1963.
4. Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 154.
5. Chisholm R., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1952, **48**, 300.
6. Wu T., *Phys. Rev.*, 1961, **123**, 1567.