А.И.Степанец

**ПРИБЛИЖЕНИЕ $\bar{\psi}$ – ИНТЕГРАЛОВ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
СУММАМИ ФУРЬЕ (НЕБОЛЬШАЯ ГЛАДКОСТЬ)**

В роботі продовжується вивчення швидкості збіжності рядів Фур'є на класах $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$, що введені в [1], в рівномірній та інтегральній метриках. Результати роботи доповнюють відповідні результати із [1] на випадок, коли класи $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ є класами згорток функцій із $\mathfrak{N}$ з ядрами, коефіцієнти яких є повільно спадними. В цьому напрямі, зокрема, одержані асимптотичні рівності для відхилень сум Фур'є на множинах $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$, котрі дають розв'язки задачі Колмогорова– Нікольського, а також знайдено аналог відомої нерівності Лебега.

In the paper the investigation is prolonged of the rate of convergence of Fourier series on the classes $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ introduced in [1] in uniform and integral metrics. The results of the paper complete corresponding results from [1] to the case when classes $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ are the classes of convolutions of functions from $\mathfrak{N}$ with the kernels coefficients of which are slowly decreasing. In this direction, in particular, asymptotic equalities are obtained for deviations of Fourier sums on the sets $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ giving solutions of Kolmogoroff– Nikolsky problem as well as analog is found of well-known Lebesgue inequality.

§1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть L – пространство 2π -периодических интегрируемых по Лебегу функций,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \quad (1)$$

– ряд Фурье функции $f \in L$, $S_n(f; x)$ – частная сумма порядка n этого ряда и $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$.

В работе исследуется поведение величин $\rho_n(f; \cdot)$ при $n \rightarrow \infty$ на множествах $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ функций из L , которые определяются следующим образом (см. [1, §1]).

Определение 1. Пусть $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ – пара произвольных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \dots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$. Отправляясь от ряда Фурье, функции $\varphi \in L$, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k) A_k(\varphi; x) + \psi_2(k) \tilde{A}_k(\varphi; x), \quad (2)$$

$$\tilde{A}_k(\varphi; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Если ряд (2) для данной функции $\varphi(\cdot)$ и пары $\bar{\psi}$ является рядом Фурье некоторой функции $f \in L$, то f назовем интегралом функции φ , порожденным парой $\bar{\psi}$, или просто $\bar{\psi}$ – интегралом функции φ и условимся писать $f(\cdot) = \mathcal{I}^{\bar{\psi}}(\varphi; \cdot)$.

Множество $\bar{\psi}$ – интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^{\bar{\psi}}$. Если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из L , то $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ будет обозначать множество $\bar{\psi}$ – интегралов функций из $\mathfrak{N}$.

В дальнейшем используются следующие обозначения.

C – подмножество непрерывных функций из L с равномерной нормой $\|\cdot\|_C = \max |\cdot|$; $C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N} = L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N} \cap C$;

M – подмножество функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_M$, где $\|\varphi\|_M = \text{esssup}|\varphi|$;

H_ω – класс функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|), \quad (3)$$

где $\omega(t)$ – некоторый модуль непрерывности, т.е. непрерывная неубывающая на $[0, \infty)$ функция такая, что $\omega(0) = 0$ и $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2) \forall t_1, t_2 \in (0, \infty)$.

$\mathfrak{N}^o$ – подмножество функций $f \in \mathfrak{N}$, ортогональных константе:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0, \quad (4)$$

N – множество натуральных чисел.

$\mathfrak{M}$ – множество выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности последовательностей:

$$\mathfrak{M} = \{\lambda_k = \lambda(k) : \Delta^2 \lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \geq 0, k = 0, 1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0\}. \quad (5)$$

$\mathfrak{M}'$ – подмножество последовательностей λ_k из $\mathfrak{M}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k / k < \infty. \quad (6)$$

Последовательности $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, входящие в определение множеств $L^{\bar{\psi}}$, в этой работе выбираются так, что $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'$.

В этом случае, как хорошо известно, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k) \cos kx \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \sin kx \quad (7)$$

являются рядами Фурье и, как легко проверить, $\forall \varphi \in L$ ее $\bar{\psi}$ – интеграл существует и почти всюду

$$\mathcal{I}^{\bar{\psi}}(\varphi; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \Psi(t) dt = \frac{a_0}{2} + (\varphi * \Psi)(x), \quad (8)$$

где

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k) \cos kt + \psi_2(k) \sin kt). \quad (9)$$

Таким образом, элементы множества $L^{\bar{\psi}}$ – это функции, представимы свертками функций $\varphi \in L$ с ядрами (9).

Системы чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k \in \mathcal{N}$, удобно рассматривать как сужения на множестве $\mathcal{N}$ непрерывных функций $\psi_1(v)$ и $\psi_2(v)$ непрерывного аргумента v . Чтобы не вводить новых обозначений, в дальнейшем через $\mathfrak{M}$ обозначается также множество функций $\psi(\cdot)$, для которых функции $|\psi(v)|$ являются выпуклыми при всех $v \geq 1$ и

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \psi(v) = 0; \quad (10)$$

через $\mathfrak{M}'$ – подмножество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, подчиненных еще условию

$$\int_1^{\infty} \frac{|\psi(t)|}{t} dt < \infty. \quad (11)$$

Ясно, что если $\psi \in \mathfrak{M}'$, то значения $|\psi(k)|$ удовлетворяют соотношению (6).

Заметим, что в силу выпуклости и условия (10), функции $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$ всегда сохраняют свой знак.

Несимметричность условий для функций $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ объясняется тем, что как хорошо известно, условие $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы второй ряд в (7) был рядом Фурье в то время, как первый из этих рядов есть ряд Фурье $\forall \psi_1 \in \mathfrak{M}$.

Функцию $\varphi(\cdot)$ в равенстве (8) иногда удобно называть $\bar{\psi}$ – производной функции $f(\cdot) = \mathcal{I}^{\bar{\psi}}(\varphi; \cdot)$. При этом используются следующие обозначения $\varphi(\cdot) = D^{\bar{\psi}}(f; \cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

В общем случае понятие $\bar{\psi}$ – производной вводится следующим образом (см. [1, §1]).

Определение 2. Пусть $f \in L$, (1)-е ряд Фурье и пара $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ удовлетворяет условию

$$\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathcal{N}. \quad (12)$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\psi}^2(k)} \left(\psi_1(k) A_k(f; x) - \psi_2(k) \tilde{A}_k(f; x) \right) \quad (13)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, то φ назовем $\bar{\psi}$ -производной функции f и будем писать $\varphi(\cdot) = D^{\bar{\psi}}(f; x) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Подмножество функций $f \in L$, у которых существуют $\bar{\psi}$ -производные, обозначим через $\bar{L}^{\bar{\psi}}$. Если $f \in \bar{L}^{\bar{\psi}}$ и при этом $f^{\bar{\psi}} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} \subset L$, то полагаем $f \in \bar{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$.

В [1, §1] показано, что для любых пар $\bar{\psi}$, удовлетворяющих условию (12), справедливо равенство

$$\bar{L}^{\bar{\psi}} = L^{\bar{\psi}} L^o. \quad (14)$$

Таким образом, если выполнено (12), то множество $\bar{\psi}$ -интегралов всех функций $f \in L^o$ совпадает с множеством функций, обладающих $\bar{\psi}$ -производными и состоит из $\bar{\psi}$ -интегралов от их $\bar{\psi}$ -производных.

Условие (12) заведомо выполняется, если $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$. Поэтому в рассматриваемом случае в силу (14) и (8) $\forall f \in L^{\bar{\psi}}$ почти всюду справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(x-t) \Psi(t) dt = \frac{a_o}{2} + (f^{\bar{\psi}} * \Psi)(x), \quad (15)$$

в котором a_o – свободный член разложения Фурье функции $f(\cdot)$.

Понятие $\bar{\psi}$ -производной совпадает с понятием $(\psi, \bar{\beta})$ -производной, введенной автором в [2, стр.33] в том смысле, что всякая $\bar{\psi}$ -производная совпадает с $(\psi, \bar{\beta})$ -производной, если определяющие их параметры связаны соотношением

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta_k \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta_k \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

или, что тоже самое,

$$\psi(k) = \bar{\psi}(k), \quad \cos \beta_k \frac{\pi}{2} = \psi_1(x)/\bar{\psi}(k), \quad \sin \beta_k \frac{\pi}{2} = \psi_2(k)/\bar{\psi}(k). \quad (16')$$

При этом выполняются равенства

$$L^{\bar{\psi}} = L_{\bar{\beta}}^{\psi}, \quad L^{\bar{\psi}}\mathfrak{M} = L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{M} \quad \forall \mathfrak{M} \in L^o. \quad (17)$$

Заметим также, что в силу (16) любая (ψ, β) -производная $(\beta_k \equiv \beta)$ является и $\bar{\psi}$ -производной, если

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

В частности, известная r -я ($r > 0$) производная $f_r^r(\cdot)$ в смысле Вейля функции $f(\cdot)$ есть (ψ, β) -производной при $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$. Следовательно, согласно (16') $f_r^r(\cdot)$ будет совпадать с $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$, если положить

$$\psi_1(k) = k^{-r} \cos r \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = k^{-r} \sin r \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

В настоящей работе устанавливаются асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}}\mathfrak{M}) = \sup\{|\rho_n(f; x)| : f \in C^{\bar{\psi}}\mathfrak{M}\} \quad (20)$$

в случае, когда $\mathfrak{M}$ есть либо единичный шар S_M в пространстве M , $S_M = \{\varphi : \|\varphi\|_M \leq 1\}$, либо класс H_ω , а также находятся оценки величин $|\rho_n(f; x)|$ для каждой индивидуальной функции $f \in C^{\bar{\psi}}C^o$, выраженные через наилучшие приближения ее $\bar{\psi}$ -производной. Эти оценки точные как по порядку так и в смысле констант у главных членов их представлений. Для формулировки основных результатов требуется еще следующее определение.

Определение 3. Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим пару функций

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1} \left(\frac{1}{2} \psi(t) \right) \quad \text{и} \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1.$$

Тогда через $\mathfrak{M}_0$ обозначается подмножество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, у которых величина $\mu(t)$ является ограниченной при всех $t \geq 1$, т.е.

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi; t) \leq K\}, \quad (21)$$

где K – некоторая постоянная (которая, возможно, зависит от ψ .)

В [2, стр.95] показано, что если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall t \geq 1$

$$t|\psi'(t)| \leq K|\psi(t)|. \quad (22)$$

Записывая это неравенство в виде $\psi'(t)/\psi(t) \leq Kt^{-1}$ и интегрируя последнее соотношение по промежутку $[t_0, t]$, $t_0, t \geq 1$, приходим к выводу, что существуют такие положительные числа K и α , что при всех $t \geq 1$

$$|\psi(t)| \geq Kt^{-\alpha}. \quad (23)$$

Это означает, что функции $\psi \in \mathfrak{M}_0$ не могут стремиться к нулю быстрее некоторой отрицательной степени t . К $\mathfrak{M}_0$ принадлежат функции t^{-r} при любом $r > 0$ и все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, которые стремятся к нулю медленнее, чем t^{-r} , как например, функции $t^{-r} \ln^\alpha(t+e)$, $r, \alpha > 0$, $\ln^{-\alpha}(t+e)$, $\alpha > 0$ и др. В то же время функция $\exp(-\alpha t^r)$ к $\mathfrak{M}_0$ не принадлежит ни при каких $\alpha, r > 0$.

Первое утверждение, которое будет здесь доказано, состоит в следующем

Теорема 1. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_0$. Тогда величина

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}}) = \sup\{|f(x) - S_{n-1}(f; x)| : f \in C_\infty^{\bar{\psi}}\}, \quad C_\infty^{\bar{\psi}} = C_\infty^\psi S_M^o \quad (24)$$

не зависит от значения x и при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}}) = \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1)\bar{\psi}(n), \quad (25)$$

в котором $\bar{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$, а $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Во многих случаях утверждение этой теоремы является известным. Отметим некоторые из наиболее важных таких случаев. Положим

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi : \psi \in \mathfrak{M}, \quad 0 < K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2 < \infty, \quad t \geq 1\}, \quad (26)$$

где K_1 и K_2 некоторые постоянные, которые, вообще, могут зависеть от функции ψ .

Ясно, что $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$. Если $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то как показано в [2, стр.95], найдутся положительные постоянные K_1 и K_2 такие, что

$$K_1 t |\psi'(t)| \leq |\psi(t)| \leq K_2 t |\psi'(t)|. \quad (27)$$

Поэтому, если $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt \leq K_2 \left| \int_n^\infty \psi_2'(t) dt \right| = K_2 |\psi_2(n)| \quad (28)$$

и, следовательно, если $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, а ψ_1 – по-прежнему находится в $\mathfrak{M}_0$, то равенство (25) принимает вид

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}}) = \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n). \quad (25')$$

Пусть теперь функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ выбраны согласно равенствам (18) при условиях, что $\psi \in \mathfrak{M}_C$, а β – произвольное положительное число. Тогда $C_\infty^{\bar{\psi}} = C_{\beta, \infty}^\psi = L_\beta^\psi S_M \cap C$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_C$. Поэтому, согласно (25') из теоремы 1 следует, что

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta, \infty}^\psi) = \frac{4}{\pi^2} |\psi(n)| \ln n + O(1) |\psi(n)|, \quad \psi \in \mathfrak{M}, \quad \beta \in R^1. \quad (29)$$

Это неравенство впервые получено автором (см. напр. [2, стр.121]).

Если $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$, $r > 0$, то, как уже отмечалось, (ψ, β) – производная совпадает с r -той производной в смысле Вейля. В этом случае $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и множество $C_{\beta, \infty}^\psi$ совпадает с известным классом W^r функций $f(\cdot)$, r -тые производные которых в смысле Вейля почти всюду ограничены единицей. Поэтому, согласно (29)

$$\mathcal{E}_n(W^r) = \frac{4 \ln n}{\pi^2 n^r} + O(1) n^{-r}, \quad r > 0. \quad (30)$$

Если $r \in \mathcal{N}$, то (30) – известное равенство А.Н.Колмогорова [3], положившее начало целому направлению в теории рядов Фурье и в теории приближения функций, связанному с получением асимптотических равенств

для верхних граней уклонений приближающих агрегатов на заданных классах функций. Более подробно о величинах $\mathcal{E}_n(C_\beta^\psi, \infty)$ и, в частности, о величинах $\mathcal{E}_n(W^r)$ можно прочитать, например в [2, стр. 262] и [4, стр. 151]. Здесь же еще отметим, что равенство (25) доказано А.С.Теляковским [5] в случае, когда выполнены соотношения (18) при условии, что $\psi \in \mathfrak{M}'_0$ и автором [2, стр.135] $\forall \psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ при условии, что $\psi_2(k) \equiv 0$.

Аналогом теоремы 1 для классов $C^{\bar{\psi}} H_\omega^o$ является следующее утверждение

Теорема 2. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. Тогда величина

$$\mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}} H_\omega^o) = \sup\{|f(x) - S_{n-1}(f; x)| : f \in C^{\bar{\psi}} H_\omega^o\} \quad (31)$$

не зависит от значения x и при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}} H_\omega^o) &= \theta_\omega \left(\frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vtdvdt \right| + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin tdt \right) + O(1) \bar{\psi}(n) \omega(1/n), \end{aligned} \quad (32)$$

и в котором $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, причем $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности и $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Утверждение этой теоремы также известно в ряде важных случаев. Ниже будет показано (см.доказательство соотношения (102)), что $\forall \psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vtdvdt \right| = O(1) \omega(1/n) \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt. \quad (33)$$

Поэтому, если $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то вследствие соотношений (28), и (33)

из (32) получаем

$$\mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}}H_\omega^o) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + O(1)\bar{\psi}(n)\omega(1/n). \quad (32')$$

Это равенство $\forall \psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ при условии, что $\psi_2(k) \equiv 0$ получено в [2, стр. 135].

Если функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ выбраны по формулам (18) при условиях, что $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$, тогда $C^{\bar{\psi}}H_\omega^o = C_\beta^\psi H_\omega^o$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_C$. Следовательно, из теоремы 2 в силу равенства (32'), имеем

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^\psi H_\omega^o) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}|\psi(n)|\ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + O(1)|\psi(n)|\omega(1/n). \quad (32'')$$

Это равенство доказано автором (см. напр. [6, стр. 135] или [2, стр. 117]). В случае, когда $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$, $r > 0$, равенство (32'') было получено С.М.Никольским [7], а для любых $\beta \in R$ – А.В.Ефимовым [8].

Наконец, в настоящей работе доказывается утверждение, которое нам представляется аналогом для классов $C^{\bar{\psi}}C^o$ известного неравенства Лебега: $\forall f \in C$

$$\|f(x) - S_{n-1}(f; x)\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right) E_n(f), \quad (34)$$

где

$$E_n(f) = \inf\{\|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C : t_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}\}, \quad (35)$$

$\mathcal{F}_{n-1}$ – множество тригонометрических полиномов порядка $n - 1$.

Теорема 3. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. Тогда $\forall f \in C^{\bar{\psi}}C^o$ при любом $n \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_{n-1}(f; x)\|_C &\leq \left(\frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n + O(1)\bar{\psi}(n)\right) E_n(f^{\bar{\psi}}) = \\ &= \left(\mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}}) + O(1)\bar{\psi}(n)\right) E_n(f^{\bar{\psi}}), \end{aligned} \quad (36)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathcal{N}$ и по $f \in C^{\bar{\psi}}C^o$.

Для любой функции $f \in C^{\bar{\psi}}C^o$ при каждом $n \in \mathcal{N}$ в пространстве $C^{\bar{\psi}}C^o$ найдется функция $F(x) = F(f; n; x)$ такая, что $E_n(F^{\bar{\psi}}) = E_n(f^{\bar{\psi}})$ и для нее соотношение (36) переходит в равенство.

Вторая часть теоремы 3 показывает, в частности, что неравенство (36) асимптотически точное на всем пространстве $C^{\bar{\psi}}C^o$. Это неравенство асимптотически точно и на некоторых важных подмножествах из $C^{\bar{\psi}}C^o$. Одним из таких подмножеств есть $C^{\bar{\psi}}_{\infty}$. В самом деле, учитывая, что $\forall \varphi \in C^o$ справедлива оценка $E_n(\varphi) \leq 1$ и рассматривая верхние грани обеих частей (36) по классу $C^{\bar{\psi}}C^o$, $\forall \psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\forall \psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ имеем

$$\mathcal{E}_n \left(C^{\bar{\psi}}C^o \right) \leq \frac{2}{\pi} \int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n). \quad (37)$$

Но, согласно (25), в этом соотношении строго неравенства быть не может. Следовательно, (37) на самом деле есть равенство и, стало быть, неравенство (36) асимптотически точное на классе $C^{\bar{\psi}}C^o$. В тоже время на классе $C^{\bar{\psi}}H^o_{\omega}$ неравенство (36) может быть и строгим. В этом случае если $\omega(t)$ – выпуклая функция, то (см. например [9, с.208])

$$\sup_{\varphi \in H^o_{\omega}} E_n(\varphi) = \frac{1}{2} \omega \left(\frac{\pi}{n} \right). \quad (39)$$

Если применить это равенство к правой части (36), получим величину, отличающуюся в общем случае от значения $\mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}}H^o_{\omega})$, доставляемого формулой (32).

Обратим внимание на то, что в равенстве (25) (а также и в равенствах (32) и (36)) главным членом правой части может быть первое слагаемое. Например, функция $\psi_{\alpha}(t) = (\ln t \ln^{\alpha}(\ln t))^{-1}$ принадлежит к $\mathfrak{M}'_0$ при любом $\alpha > 1$ и для нее (см. [11, с.408])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_{\alpha}(n) \ln n) / \int_n^{\infty} \frac{\psi_{\alpha}(t)}{t} dt = 0.$$

Более того, как показано в [10] в таких случаях величины $\mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}})$ будут асимптотически равны точным верхним граням наилучших равномерных приближений тригонометрическими полиномами порядка $n - 1$ на классе $C_\infty^{\bar{\psi}}$.

В связи с теоремой 3 обратим внимание еще на одно обстоятельство. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$, $n \in \mathcal{N}$ – произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность неотрицательных чисел. Тогда при каждом натуральном n через $C_n(\varepsilon)$ обозначим множество непрерывных функций $\varphi(\cdot)$, для которых при данном n выполняется неравенство $E_n(\varphi) \leq \mathcal{E}_n$, через $C_n^{\bar{\psi}} C_n^o(\varepsilon)$ – множество непрерывных функций, $\bar{\psi}$ – производные которых принадлежат к $C_n^o(\varepsilon) = C_n(\varepsilon) \cap C^o$. Из теоремы 3 получается следующее утверждение

Теорема 3'. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. Тогда для любого класса $C_n^{\bar{\psi}} C_n^o(\varepsilon)$ при любом $n \in \mathcal{N}$

$$\mathcal{E}_n \left(C_n^{\bar{\psi}} C_n^o(\varepsilon) \right) = \left(\frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \right) \mathcal{E}_n, \quad (40)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Действительно, если $f \in C_n^{\bar{\psi}} C_n^o(\varepsilon)$, то $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$ непрерывна и $E_n(f^{\bar{\psi}}) \leq \varepsilon_n$. Поэтому, в силу (36) величина $\|\rho_n(f; x)\|_C$ не превышает правой части (40). В то же время для функции $F(x)$ из теоремы 3, построенной по функции $\varphi \in C_n^o(\varepsilon)$ такой, что $E_n(\varphi) = \varepsilon_n$, значение $\|\rho_n(F; x)\|_C$ будет совпадать с правой частью (40), что и доказывает теорему 3'.

Отметим еще, что теоремы 3 и 3' для классов $C_\beta^\psi C^o$ при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$, а также для классов $C_o^\psi C^o$ при любом $\psi \in \mathfrak{M}_0$ доказаны автором ранее в [11].

§2. Вспомогательные утверждения

Отправной точкой при доказательстве теорем 1 – 3', а также следующих ниже теорем 4 и 5 будет следующее утверждение, установленное в [1, с.27].

Лемма 1. Если $f \in C^{\bar{\psi}}M$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то в каждой точке $x \in R$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \rho_n(f; x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, t) (\mathcal{I}_2(\psi_1; n; t)_o + \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x, t) (\psi_1(n) \cos nt + \psi_2(n) \sin nt) dt, \end{aligned} \quad (41)$$

в котором $\Delta(x, t)$ есть либо $f^{\psi}(x - t)$, либо $f^{\bar{\psi}}(x - t) - f^{\bar{\psi}}(x)$, либо $f^{\bar{\psi}}(x - t) - t_{n-1}(x - t)$, где $t_{n-1}(\cdot)$ – любой полином из $\mathcal{F}_{n-1}$, и

$$\mathcal{I}_2(\psi_1; n; t)_o = \frac{1}{\pi} \int_n^{\infty} \psi_1(v) \cos vtdv, \quad (42)$$

$$\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 = \frac{1}{\pi} \int_n^{\infty} \psi_2(v) \sin vtdv. \quad (42')$$

Если же $f \in L^{\bar{\psi}}$ и, по-прежнему, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то равенство (41) выполняется почти всюду.

Дальше задача состоит в том, чтобы упростить правые части в (41), не потеряв при этом их главных значений. Промежуточной целью в этом направлении будет следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ и a – произвольное положительное число. Тогда, если $f \in C^{\bar{\psi}}_{\infty}$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x

$$\begin{aligned} \rho_n(f; x) = & \int_{|t| \leq a/n} f^{\bar{\psi}}(x - t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt + \\ & + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{a/n \leq |t| \leq \pi/2} f^{\bar{\psi}}(x - t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt + O(1)\bar{\psi}(n); \end{aligned} \quad (43)$$

если $f \in C^{\bar{\psi}}H^o_{\omega}$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x

$$\rho_n(f; x) = \int_{|t| \leq a/n} \left(f^{\bar{\psi}}(x - t) - f^{\bar{\psi}}(a) \right) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt +$$

$$+\frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{a/n \leq |t| \leq \pi/2} \left(f^{\bar{\psi}}(x-t) - f^{\bar{\psi}}(x) \right) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt + O(1)\bar{\psi}(n)\omega(1/n). \quad (44)$$

Если же $f \in C^{\bar{\psi}}C^o$, то $\forall n \in \mathcal{N}$, при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке x

$$\begin{aligned} \rho_n(f; x) &= \int_{|t| \leq a/n} \left(f^{\bar{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t) \right) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt + \\ &+ \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{a/n \leq |t| \leq \pi/2} \left(f^{\bar{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t) \right) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt + \\ &+ O(1)\bar{\psi}(n) \|f^{\psi}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \end{aligned} \quad (45)$$

В равенствах (43)–(45)

$$\bar{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}, \quad \gamma_n = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)} \quad (46)$$

и $O(1)$ – величины, которые не зависят ни от $n \in \mathcal{N}$, ни от функций $f(\cdot)$, принадлежащих соответствующим рассматриваемым классам.

Доказательство леммы 2 проведем в несколько этапов. Сначала обозначим через $R_n = R_n(f; \bar{\psi}; x)$ второе слагаемое правой части (41) и заметим, что справедлива

Лемма 3. Пусть $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$ – любые действительные числа. Тогда, если $f \in C_{\infty}^{\bar{\psi}}$, то $\forall n \in \mathcal{N}$

$$\|R_n(f; \bar{\psi}; x)\|_C = O(1)\bar{\psi}(n), \quad (47)$$

если $f \in C^{\bar{\psi}}H_{\omega}^o$, то $\forall n \in \mathcal{N}$

$$\|R_n(f; \bar{\psi}; x)\|_C = O(1)\bar{\psi}(n)\omega(1/n). \quad (47')$$

Если же $f \in C^{\bar{\psi}}C^o$, то $\forall n \in \mathcal{N}$, при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$

$$\|R_n(f; \bar{\psi}; x)\|_C = O(1)\bar{\psi}(n) \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \quad (47'')$$

Действительно, $\forall f \in C^\psi C^o$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x, t) (\psi_1(n) \cos nt + \psi_2(n) \sin nt) dt \right\| \leq \\ & \leq O(1) \|\Delta(x, t)\|_M (|\psi_1(n)| + |\psi_2(n)|). \end{aligned}$$

Отсюда сразу получаем (47''), а положив в (47') $t_{n-1}(\cdot) \equiv 0$, получим и (47). В случае, когда $f \in C^{\bar{\psi}} H_\omega^o$ имеем

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{\psi_1(n)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x-t) \cos ntdt + \frac{\psi_2(n)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(x-t) \sin ntdt = \\ &= \frac{\psi_1(n)}{2} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) + \frac{\psi_2(n)}{2} (\alpha_n \sin nx - \beta_n \cos nx), \end{aligned} \quad (48)$$

где α_n и β_n – коэффициенты Фурье функции $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Так как $f^{\bar{\psi}} \in H_\omega^o$, то, как хорошо известно (см. например [2, с.72]),

$$|\alpha_n| < \frac{2}{\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad |\beta_n| \leq \frac{2}{\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (49)$$

Поэтому, объединив (48) и (49), получим (47'). Таким образом, величина $R_n(f; \bar{\psi}; x)$ всегда имеет порядок остаточных членов в равенствах (43)-(45). Следовательно главные значения величин $\rho_n(f; x)$ сосредоточены в интегралах

$$R_n^{(1)} = R_n^{(1)}(f; x; \psi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, t) \mathcal{I}_2(\psi_1; n; t)_o dt \quad (50)$$

и

$$R_n^{(2)} = R_n^{(2)}(f; x; \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt. \quad (51)$$

Эти главные значения определяются в следующих леммах 4 и 5.

Лемма 4. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}$. Тогда $\forall a > 0$ при любом $n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x справедливо равенство

$$R_n^{(1)} = -\frac{\psi_1(n)}{\pi} \int_{|t| \geq a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt + b_n^{\psi_1}(a; f; x). \quad (52)$$

При этом, если $f^{\bar{\psi}} \in S_M^o$, то $\Delta(x, t) = f^{\bar{\psi}}(x - t)$ и

$$\|b_n^{\psi_1}(a; f; x)\|_C = O(1)|\psi_1(n)|, \quad (53)$$

если $f^{\bar{\psi}} \in H_\omega^o$, то $\Delta(x, t) = f^{\bar{\psi}}(x - t) - f^{\bar{\psi}}(x)$ и

$$\|b_n^{\psi_1}(a; f; x)\|_C = O(1)|\psi_1(n)|\omega(1/n). \quad (54)$$

Если же $f^{\bar{\psi}} \in C^o$, то $\Delta(x, t) = f^{\bar{\psi}}(x - t) - t_{n-1}(x - t)$, где $t_{n-1}(\cdot)$ – произвольный полином из $\mathcal{T}_{n-1}$ и

$$\|b_n^{\psi_1}(a; f; x)\|_C = O(1)|\psi_1(n)| \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \quad (55)$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(\psi_1; n; t)_o &= -\frac{\psi_1(n) \sin nt}{\pi t} - \frac{1}{\pi t} \int_n^\infty \psi_1'(v) \sin vtdv \stackrel{df}{=} \\ &= -\frac{\psi_1(n) \sin nt}{\pi t} - \frac{1}{\pi} \mathcal{I}_3^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (56)$$

то

$$b_n^{\psi_2}(a, f; x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi} \int_{|t| \leq a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \Delta(x, t) \mathcal{I}_3^{(1)}(t) dt. \quad (57)$$

Если $f^{\bar{\psi}} \in S_M^o$, то почти при всех x и t $|\Delta(x, t)| \leq 1$. Значит тогда

$$\left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int_{|t| \leq a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \frac{|\psi_1(n)|}{\pi} \cdot 2a. \quad (58)$$

Если $f^{\bar{\psi}} \in C^o$, то аналогично получим

$$\left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int_{|t| \leq a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \frac{|\psi_1(n)|}{\pi} 2a \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \quad (59)$$

В случае, когда $f^{\bar{\psi}} \in H_\omega^o$, то $|\Delta(x, t)| = |f^{\bar{\psi}}(x - t) - f^{\bar{\psi}}(x)| \leq \omega(t)$. Поэтому

$$\left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int_{|t| \leq a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \frac{2|\psi_1(n)|}{\pi} \omega\left(\frac{a}{n}\right) = O(1)|\psi_1(n)|\omega(1/n). \quad (60)$$

Остается убедиться, что оценки вида (58)–(60) справедливы и для второго слагаемого в (57). Рассмотрим сначала случай, когда $f^{\bar{\psi}} \in C^o$.

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\bar{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t) \right) \mathcal{I}_3^{(1)}(t) dt \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi} \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{I}_3^{(1)}(t)| dt. \end{aligned} \quad (61)$$

В [2, с.133] показано, что если $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{I}_3^{(1)}(t)| dt \leq O(1)|\psi(n)|. \quad (62)$$

Поэтому

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\bar{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t) \right) \mathcal{I}_3^{(1)}(t) dt \right| = O(1)|\psi_1(n)| \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \quad (63)$$

Ясно, что таким же путем получается и оценка вида (58): $\forall f^{\bar{\psi}} \in S_M^o$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(x-t) \mathcal{I}_3^{(1)}(t) dt \right| = O(1)|\psi_1(n)|. \quad (64)$$

Поэтому остается установить, что $\forall f^{\bar{\psi}} \in H_\omega^o$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\bar{\psi}}(x-t) - f^{\bar{\psi}}(x) \right) \mathcal{I}_3^{(1)}(t) dt \right| = O(1)|\psi_1(n)|\omega(1/n), \quad (65)$$

или же

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\bar{\psi}}(x-t/n) - f^{\bar{\psi}}(x) \right) \frac{n}{t} \int_1^{\infty} \psi_1(nt) \sin vtdv dt \right| = O(1)|\psi_1(n)|\omega(1/n).$$

Но последнее соотношение доказано в [2, с.133]. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. Тогда $\forall a > 0$ при любом $n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x справедливо равенство

$$R_n^{(2)} = \int_{|t| \leq a/n} \Delta(x, t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt + \frac{\psi_2(n)}{\pi} \int_{|t| \geq a/n} \Delta(x, t) \frac{\cos nt}{t} dt + b_n^{\psi_2}(a; f; x). \quad (66)$$

При этом, если $f^{\bar{\psi}} \in S_M^o$, то $\Delta(x, t) = f^{\bar{\psi}}(x - t)$ и

$$\|b_n^{\psi_2}(a; f; x)\|_C = O(1)|\psi_2(n)|, \quad (67)$$

если $f^{\bar{\psi}} \in H_\omega^o$, то $\Delta(x, t) = f^{\bar{\psi}}(x - t) - f^{\bar{\psi}}(x)$ и

$$\|b_n^{\psi_2}(a; f; x)\|_C = O(1)|\psi_2(n)|\omega(1/n). \quad (68)$$

Если же $f^{\bar{\psi}} \in C^o$, то $\Delta(x, t) = f^{\bar{\psi}}(x - t) - t_{n-1}(x - t)$, где $t_{n-1}(\cdot)$ – произвольный полином из $\mathcal{T}_{n-1}$ и

$$\|b_n^{\psi_2}(a; f; x)\|_C = O(1)|\psi_2(n)| \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \quad (69)$$

Доказательство. Поскольку

$$\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 = \frac{\psi_2(n)}{\pi} \frac{\cos nt}{t} + \frac{1}{\pi t} \int_n^\infty \psi_2'(v) \cos vtdv, \quad (70)$$

то в силу (51) и (66)

$$\begin{aligned} b_n^{\psi_2}(a; f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq a/n} \Delta(x, t) \frac{1}{t} \int_n^\infty \psi_2'(v) \cos vtdvdv = \\ &= \frac{n}{\pi} \int_{|t| \geq a} \Delta(x, t/n) \mathcal{I}_3^{(2)}(t) dt, \end{aligned} \quad (71)$$

где с учетом принятых в [2] обозначений положено

$$\mathcal{I}_3^{(2)}(t) = \frac{1}{t} \int_1^\infty \psi_2'(nv) \cos vtdv.$$

Если теперь $f^{\bar{\psi}} \in S_M^o$, то из (71) получаем

$$\|b_n^{\psi_2}(a; f; x)\| \leq \frac{n}{\pi} \int_{|t| \geq a} |\mathcal{I}_3^{(2)}(t)| dt. \quad (72)$$

В [2, с.60] показано, что $\forall \psi \in \mathfrak{M}'$ и $\forall t \neq 0$

$$\frac{n}{\pi} |\mathcal{I}_3^{(2)}(t)| \leq \frac{2n|\psi'(n)|}{t^2}. \quad (73)$$

Поэтому с учетом (72) и (22) убеждаемая в справедливости соотношения (67). Понятно, что таким же путем получается и равенство (69).

Соотношение (68) получается посредством применения следующей леммы из [2, с.73].

Лемма 6. Пусть $\varphi(t)$ – интегрируема на I функция ($\varphi \in L(I)$). Тогда, если $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ и $x_k, k = 1, 2, \dots, m, a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$ – некоторый набор точек, для которых

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad (74)$$

то $\forall f \in H_\omega(I) = \{f : |f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|), x, x' \in I\}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \max_{a \leq t \leq x_1} |f(t)| \int_a^{x_1} |\varphi(t)| dt + \\ & + \omega(\Delta) \int_{x_1}^{x_m} |\varphi(t)| dt + \max_{x_m \leq t \leq b} |f(t)| \int_{x_m}^b |\varphi(t)| dt, \quad \Delta = \max_k (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Если $I = \{x : x \geq a\}$, и $x_k, k = 1, 2, \dots, a \leq x_1 < x_2 < \dots$ – опять набор некоторых точек таких, что выполняется (74) $\forall k \in \mathcal{N}$, то $\forall f \in H_\omega(I)$

$$\left| \int_a^\infty f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \max_{a \leq t \leq x_1} |f(t)| \int_a^{x_1} |\varphi(t)| dt + \omega(\Delta) \int_{x_1}^\infty |\varphi(t)| dt.$$

Функция (см.[2, стр. 102–105])

$$\Phi(x) = \int_x^{\infty} \mathcal{I}_3^{(2)}(t) dt, \quad x > 0,$$

на каждом промежутке (x_k, x_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots$, где x_k – нули интегрально-го косинуса

$$Cix = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt,$$

перенумерованные в порядке возрастания, обращается в нуль с переменной знака в некоторой точке $\bar{x}_k$, причем $k\pi < \bar{x}_k < (k+1)\pi + \pi/6$.

Пусть $\bar{x}'_k$ – ближайший справа от точки a такой нуль. Применяя лемму 6, $\forall f \in H^0_\omega$ получим

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{\infty} \Delta(x, t/n) \mathcal{I}_3^{(2)}(t) dt \right| &\leq \max_{a \leq t \leq \bar{x}'_k} |\Delta(x, t/n)| \int_a^{\bar{x}'_k} |\mathcal{I}_3^{(2)}(t)| dt + \\ &+ \omega(\Delta/n) \int_{\bar{x}'_k}^{\infty} |\mathcal{I}_3^{(2)}(t)| dt, \quad \Delta = \sup_k (x_{k+1} - x_k) < 4\pi. \end{aligned} \quad (75)$$

Так как $\Delta(x, 0) = 0$, то

$$\max_{a \leq t \leq \bar{x}'_k} |\Delta(x, t/n)| \leq \omega(\bar{x}'_k/n) \leq \omega\left(\frac{a+2\pi}{n}\right) = O(1)\omega(1/n). \quad (76)$$

Из (75) и (76) с учетом оценок (73) и (22) заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{n}{\pi} \left| \int_a^{\infty} \Delta(x, t/n) \mathcal{I}_3^{(2)}(t) dt \right| &= \\ &= O(1)\omega(1/n)n \int_a^{\infty} |\mathcal{I}_3^{(2)}(t)| dt = O(1)|\psi_2(n)|\omega(1/n). \end{aligned} \quad (77)$$

Ясно, что вследствие нечетности функции $\mathcal{I}_3^{(2)}(t)$, такая же оценка справедлива и для интеграла по промежутку $t < -a$. Отсюда, приняв во внимание равенство (71), убеждаемся в справедливости соотношения (68). Нам еще понадобится

Лемма 7. Если $\varphi \in S_M^o$, то $\forall b > 0$ и $\forall \gamma \in R^1$

$$\left| \int_{|t| \geq b} \varphi(x-t) \frac{\sin(nt + \gamma)}{t} dt \right| = O(1), \quad (78)$$

если $\varphi \in H_\omega^o$, то $\forall b > 0$ и $\forall \gamma \in R^1$

$$\left| \int_{|t| \geq b} (\varphi(x-t) - \varphi(x)) \frac{\sin(nt + \gamma)}{t} dt \right| = O(1)\omega(1/n). \quad (79)$$

Если же $\varphi \in C^o$, то $\forall b > 0$ и $\forall \gamma \in R^1$, при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$

$$\left| \int_{|t| \geq b} (\varphi(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \frac{\sin(nt + \gamma)}{t} dt \right| = O(1)\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \quad (80)$$

В равенствах (78)–(80) $O(1)$ –величины, равномерно ограниченные по всем рассматриваемым параметрам.

Соотношения (78) и (79) доказаны в [2, с.110], соотношение (80) – в [10, с.505].

Если воспользуемся леммой 6, положив в ней $b = \pi/2$, то увидим, что интегралы, взятые по промежуткам $|t| \geq a/n$ в равенствах (52) и (66) можно заменить интегралами, распространенными только на промежутки $a/n \leq |t| \leq \pi/2$, допустив при этом ошибку, которая не будет превышать остаточных членов в этих равенствах.

Поэтому объединив утверждения лемм 3–7, убеждаемся в справедливости всех утверждений леммы 2.

Число a , фигурирующее в лемме 2, будем выбирать с учетом следующего утверждения

Лемма 8. Для любой функции $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ существует такое число $a > 0$, что $\forall n \in \mathcal{N}$ на промежутке $(0, a/n)$ выполняется равенство

$$\text{sign}\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) = \text{sign}\psi_2(n), \quad t \in (0, a/n). \quad (81)$$

Доказательство. Предположим для определенности, что $\forall n \in \mathcal{N}$ $\psi_2(n) > 0$. Тогда утверждение леммы будет доказано, если убедимся в наличии числа $a > 0$ такого, что будет

$$\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t/n) = \frac{n}{\pi} \int_1^{\infty} \psi_2(nv) \sin vtdv > 0 \quad \forall t \in (0, a), \quad n \in \mathcal{N}. \quad (82)$$

С этой целью положим

$$\varphi_n(v) = \begin{cases} \psi_2(nv), & v \geq 1 \\ \psi_2(n), & 0 < v \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Функция $\varphi_n(v)$ не возрастает. Поэтому $\forall t > 0$

$$\int_0^{\infty} \varphi_n(v) \sin vtdv > 0. \quad (83)$$

Но, вследствие (16),

$$\int_0^{\infty} \varphi_n(v) \sin vtdv = \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t/n) + \psi_2(n) \frac{2 \sin^2 t/2}{t}.$$

Отсюда с учетом (83) получаем доказываемый факт, ибо

$$\frac{2\psi_2(n)}{t} \sin^2(t/2) < \psi_2(1)t/2.$$

В дальнейшем всегда будем считать, что число a в равенствах (43)–(45) выбрано так, чтобы выполнялось соотношение (81).

Чтобы иметь возможность еще больше упростить правую часть в (41), поступим следующим образом. Имея в виду равенства (43)–(45), положим

$$x_k = (k\pi + \gamma_n)/n, \quad t_k = x_k - \pi/2n, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad n \in \mathcal{N} \quad (84)$$

и обозначим через k_0 то значение k , для которого t_{k_0} есть ближайшая справа от точки $(a + \pi)/n$ точка, в которой $\sin(nt - \gamma_n) = 1$, а через k_1 – наибольшее из значений k таких, что $t_k < \pi/2$. Далее, обозначим через k_2

такое число, что точка t_{k_2} является ближайшей слева от точки $-(a + \pi)/n$ среди тех, в которых $\sin(nt + \gamma_n) = -1$, а через k_3 – наименьшее из значений, удовлетворяющих условию $t_k > -\pi/2$ и положим

$$l_n(t) = x_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = k_0, \dots, k_1 - 1, \quad k = k_3, k_3 + 1, \dots, k_2 - 1. \quad (85)$$

Докажем еще следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 9. Пусть a – произвольное положительное число, $\gamma \in R^1$ и $n \in \mathcal{N}$. Тогда если $\varphi \in S_M$, то в каждой точке x

$$\int_{a/n \leq |t| \leq \pi/2} \varphi(x-t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt = \int_{i_{3,1}} \varphi(t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt + O(1), \quad (86)$$

если $\varphi \in H_\omega$, то

$$\begin{aligned} \int_{a/n \leq |t| \leq \pi/2} (\varphi(x-t) - \varphi(x)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt &= \int_{i_{3,1}} (\varphi(t) - \varphi(x)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt + \\ &+ O(1)\omega(1/n). \end{aligned} \quad (87)$$

Если же $\varphi \in C$, то при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке x

$$\begin{aligned} \int_{a/n \leq |t| \leq \pi/2} (\varphi(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt &= \\ &= \int_{i_{3,1}} (\varphi(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt + \\ &+ O(1)\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \end{aligned} \quad (88)$$

В равенствах (86)–(88) $i_{3,1} = (t_3, t_2) \cup (t_0, t_1)$ и $O(1)$ – величины, равномерно ограниченные по n и по функциям $\varphi(\cdot)$ из соответствующих рассматриваемых классов.

Доказательство. Пусть, как и раньше, $\Delta(x, t)$ есть либо $\varphi(x-t)$, либо $\varphi(x-t) - \varphi(x)$, либо $\varphi(x-t) - t_{n-1}(x-t)$. Рассмотрим разность

$$R_n(\varphi, a)_+ = \int_{a/n}^{\pi/2} \Delta(x, t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt - \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \Delta(x, t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt =$$

$$= \int_{(a/n, t_{k_0}) \cup (t_{k_1}, \pi/2)} \Delta(x, t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt + \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \Delta(x, t) \frac{l_n(t) - t}{tl_n(t)} \sin(nt - \gamma_n) dt. \quad (89)$$

Обозначим через $R_n^{(1)}(\varphi; a)$ и $R_n^{(2)}(\varphi; a)$ соответственно, первое и второе слагаемое правой части (89). Тогда, замечая, что в силу

$$t_{k_0} - a/n \leq 2\pi/n, \text{ и } \pi/2 - x_1 \leq 2\pi/n, \quad (90)$$

закключаем, что

$$R_n^{(1)}(\varphi; a) = \begin{cases} O(1), & \text{если } \varphi \in S_M, \\ O(1)\omega(1/n), & \text{если } \varphi \in H_\omega, \\ O(1)\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C, & \text{если } \varphi \in C. \end{cases} \quad (91)$$

Покажем, что такое же соотношение справедливо и для величины $R_n^{(2)}(\varphi; a)$. С этой целью заметим, что

$$\int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \left| \frac{l_n(t) - t}{tl_n(t)} \right| dt = O(1). \quad (92)$$

Поэтому

$$R_n^{(2)}(\varphi; a) = \begin{cases} O(1) & , \text{если } \varphi \in S_M, \\ O(1)\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C, & \text{если } \varphi \in C. \end{cases} \quad (93)$$

Чтобы показать, что $\forall \varphi \in H_\omega$

$$R_n^{(2)}(\varphi, a) = O(1)\omega(1/n), \quad (94)$$

заметим, что функция

$$r_n(t) = \frac{l_n(t) - t}{tl_n(t)} \sin nt$$

на промежутках (t_k, t_{k+1}) , $k = \overline{k_0, k_1 - 1}$ сохраняет свой знак чередуя его с изменением номера k . При этом числа

$$d_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} r_n(t) dt$$

строго убывают с возрастанием номера k . Отсюда следует, что функция

$$\bar{r}_n(x) = \int_x^{t_{k_1}} r_n(t) dt$$

на каждом промежутке (t_k, t_{k+1}) , $k = \overline{k_0, k_1 - 1}$ имеет единственный простой нуль $\bar{x}_k$. Поэтому, применяя лемму 6 и учитывая соотношение (92), получим (94). Таким образом ,

$$R_n(\varphi; a)_+ = \begin{cases} O(1), & \text{если } \varphi \in S_M \\ O(1)\omega(1/n), & \text{если } \varphi \in H_\omega \\ O(1)\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C, & \text{если } \varphi \in C. \end{cases} \quad (95)$$

Понятно, что поступая аналогичным образом, оценку вида (95) получим и для величины

$$R_n(\varphi; a)_- = \int_{-\pi/2}^{-a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt - \int_{t_{k_3}}^{t_{k_2}} \Delta(x, t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt,$$

и тем самым убедимся в справедливости всех утверждений леммы 9.

Объединяя утверждения лемм 2 и 9, получаем

Следствие 1. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ и a – произвольное положительное число. Тогда, если $f \in C_\infty^{\bar{\psi}}$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x

$$\rho_n(f; x) = \int_{|t| \leq a/n} f^{\bar{\psi}}(x - t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt +$$

$$+ \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} f^{\bar{\psi}}(x-t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt + O(1)\bar{\psi}(n), \quad (96)$$

если $f \in C^{\bar{\psi}}H_{\omega}^o$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x

$$\begin{aligned} \rho_n(f; x) = & \int_{|t| \leq a/n} (f^{\bar{\psi}}(x-t) - f(x)) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt + \\ & + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} (f^{\bar{\psi}}(x-t) - f^{\bar{\psi}}(x)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt + O(1)\bar{\psi}(n)\omega(1/n). \end{aligned} \quad (97)$$

Если же $f \in C^{\bar{\psi}}C^o$, то $\forall n \in \mathcal{N}$, при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$, в каждой точке x

$$\begin{aligned} \rho_n(f; x) = & \int_{|t| \leq a/n} (f^{\bar{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt + \\ & + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} (f^{\bar{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt + \\ & + O(1)\bar{\psi}(n) \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \end{aligned} \quad (98)$$

В равенствах (96)–(98) $i_{3,1} = (t_{k_3}, t_{k_2}) \cup (t_{k_0}, t_{k_1})$,

$$\bar{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}, \quad \gamma_n = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)},$$

и $O(1)$ – величины, которые не зависят ни от $n \in \mathcal{N}$, ни от функции $f(\cdot)$, принадлежащих соответствующим рассматриваемым классам.

§3. Доказательства теорем 1 – 3'

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 1–3'. Сначала заметим, что классы $C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ инвариантны относительно сдвига аргумента: если $f \in C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$, то при любом $h \in R^1$ функция $f_1(x) = f(x+h)$ также принадлежит к $C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$. Отсюда заключаем:

$$\mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup\{|\rho_n(f; x)| : f \in C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}\} = \sup\{|\rho_n(f; 0)| : f \in C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}\}.$$

Таким образом, величина $\mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N})$ не зависит от значения x . Учитывая это, а также тот факт, что наряду с функцией $\varphi(t)$ из S_M^o в этот класс входит и функция $\varphi(-t)$, согласно (96), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}}) &\leq \sup_{\varphi \in S_M^o} \left| \int_{|t| \leq a/n} \varphi(t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt \right| + \\ &+ \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \sup_{\varphi \in S_M^o} \left| \int_{i_{3,1}} \varphi(t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt \right| + O(1)\bar{\psi}(n) \leq \\ &\leq \int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)| dt + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + O(1)\bar{\psi}(n). \end{aligned} \quad (99)$$

На множестве $l_n = \{t : t \in (-a/n, a/n) \cup i_{3,1}\}$ определим функцию $\varphi_n(t)$, ПОЛОЖИВ

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \text{sign} \mathcal{I}_2(\psi; n; t)_1, & |t| \leq a/n, \\ \text{sign} \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)}, & t \in i_{3,1} \end{cases} \quad (100)$$

и через $\varphi_n^*(t)$ обозначим функцию из S_M^o , совпадающую с $\varphi_n(t)$ на множестве l_n . Ясно, что такая функция $\varphi^*(t)$ всегда существует. В таком случае в силу (96), значение $\rho_n(\mathcal{I}^\psi(\varphi^*; \cdot); x)$ будет в точности совпадать с правой частью соотношения (99). А это означает, что в (99) строгого неравенства быть не может, следовательно,

$$\mathcal{E}(C_\infty^{\bar{\psi}}) = \int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1| dt + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + O(1)\bar{\psi}(n) \quad (101)$$

и для доказательства равенства (24) остается показать, что

$$\int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1| dt = \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + O(1)\bar{\psi}(n) \quad (102)$$

и

$$\int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt = \frac{4}{\pi} \ln n + O(1)\bar{\psi}(n). \quad (103)$$

На промежутке $(0, a/n)$ выполняются равенства (81), поэтому

$$\int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1| dt \leq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^a \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vtdvdt \right| \stackrel{df}{=} I_n(\psi_2; a). \quad (104)$$

Покажем, что в интеграле $I_n(\psi_2; a)$ можно поменять порядок интегрирования.

Функция $\psi_2(v)$ монотонно убывает к нулю. Поэтому функция

$$\Phi_1(x) = \int_x^\infty \psi_2(nv) \sin vtdv, \quad x > 0,$$

при каждых фиксированных n и t непрерывна и на каждом промежутке между соседними нулями v_k и v_{k+1} функции $\sin vt$ имеет по одному простому нулю x_k . Непрерывность функции $\Phi_1(x)$ очевидна, а существование нулей x_k является простым следствием теоремы Лейбница о знакочередующихся рядах; единственность нуля x_k на промежутке (v_k, v_{k+1}) обеспечивается равенством $\text{sign} \Phi_1'(x) = \text{sign} \sin xt$.

Пусть A – любое число, $A \geq 1$. Обозначим через $x_{k'}$ ближайший справа от точки $x = A$, такой нуль, тогда будем иметь $A \leq x_{k'} < A + 2\pi/t$.

Следовательно,

$$\left| \int_A^\infty \psi_2(nv) \sin vtdv \right| \leq \left| \int_A^{A+2\pi/t} \psi_2(nv) dv \right|. \quad (105)$$

Учитывая эти факты, находим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a \int_A^\infty \psi_2(nv) \sin vtdvdt \right| &\leq \int_0^a \left| \int_A^{A+2\pi/t} \psi_2(nv) dv \right| dt = \left| \int_0^a \int_A^{A+2\pi/t} \psi_2(nv) dvdt \right| = \\ &= t \int_A^{A+2\pi/t} \psi_2(nv) dv \Big|_0^a + 2\pi \int_0^a \frac{\psi_2(n(A + 2\pi/t))}{t^2} dt < 2\pi(\psi_2(An) + \\ &+ \int_{2n\pi/a}^\infty \frac{\psi_2(t + An)}{t} dt). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом соотношения (11), заключаем, что $\forall \varepsilon > 0$ всегда можно указать такое число $A(\varepsilon)$, что при $A \geq A(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\left| \int_0^a \int_A^\infty \psi_2(nv) \sin vtdvdt \right| < \varepsilon,$$

которое, очевидно, и обеспечивает возможность изменения порядка интегрирования в (104). Выполняя интегрирование, находим

$$I_n(\psi_2; a) = \frac{2}{\pi} \left| \int_1^\infty \frac{\psi_2(nv)}{v} dv - \int_1^\infty \frac{\psi_2(nv)}{v} \cos avdv \right|. \quad (106)$$

Далее, так как функция $|\psi_2(nv)|/v$ убывает, то поступая также, как и при доказательстве оценки (105), получим

$$\frac{2}{\pi} \left| \int_1^\infty \frac{\psi_2(nv)}{v} \cos avdv \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \int_1^{1+2\pi/a} \frac{\psi_2(nv)}{v} dv \right| \leq \frac{2}{\pi} \psi_2(n) \frac{2\pi}{a} = O(1)\psi_2(n). \quad (107)$$

Объединяя соотношения (106) и (107), получаем (102).

Докажем равенство (103). Учитывая формулы (84) и (85), имеем

$$\begin{aligned} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt &= \sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sin(nt - \gamma_n)| dt + \\ &+ \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sin(nt - \gamma_n)| dt. \end{aligned}$$

Но $\forall k$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sin(nt - \gamma_n)| dt = 2 \int_{t_k}^{t_k + \pi/2n} |\sin(nt - \gamma_n)| dt = 2 \int_0^{\pi/2n} |\sin nt| dt = 2/n. \quad (108)$$

Поэтому

$$\int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt = 2 \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|k\pi - \gamma_n|} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{(k\pi - \gamma_n)} \right) =$$

$$= 2 \left(\sum_{k=|k_2|+1}^{|k_3|} \frac{1}{k\pi + \gamma_n} + \sum_{k=k_o}^{k_1-1} \frac{1}{k\pi - \gamma_n} \right). \quad (109)$$

Согласно построениям $|\gamma_n| \leq 2\pi$ и

$$k_o\pi - \gamma_n > a, \quad |k_2|\pi + \gamma_n > a, \quad k_1 < n/2 + \gamma_n/\pi, \quad |k_3| < n/2 + \gamma_n/\pi. \quad (110)$$

Учитывая эти факты, получаем

$$\begin{aligned} 2 \left(\sum_{k=|k_2|+1}^{|k_3|} \frac{1}{k\pi + \gamma_n} + \sum_{k=k_o}^{k_1-1} \frac{1}{k\pi - \gamma_n} \right) &= 4 \sum_{k=k_o}^{k_1-1} \frac{1}{k\pi - \gamma_n} + O(1) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + O(1) = \frac{4}{\pi} \ln n + O(1). \end{aligned} \quad (111)$$

Объединяя (109) и (111), приходим к соотношению (103). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Выше отмечалось, что величина $\mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}}H_\omega^o)$ не зависит от значения x и так как вместе с функцией $\varphi(t)$ в класс H_ω^o входит также и функция $\varphi_1(t) = \varphi(-t)$, то в силу равенства (97), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}}H_\omega^o) &= \sup_{f \in C^{\bar{\psi}}H_\omega^o} |\rho_n(f; 0)| \leq \\ &\leq \sup_{\varphi \in H_\omega^o} \left| \int_{|t| \leq a/n} (\varphi(t) - \varphi(0)) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right| + \\ &+ \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} e_k(\omega) + \sum_{k=k_o}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} e_k(\omega) \right) + O(1) \bar{\psi}(n) \omega(1/n), \end{aligned} \quad (112)$$

где

$$e_k(\omega) = \sup_{\varphi \in H_\omega^o} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t) \sin(nt - \gamma_n) dt \right|. \quad (113)$$

Функция $\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)$ нечетная. Поэтому $\forall \varphi \in H_\omega^o$

$$\left| \int_{|t| \leq a/n} (\varphi(t) - \varphi(0)) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right| = \left| \int_0^{a/n} (\varphi(t) - \varphi(-t)) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{a/n} \omega(2t) |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)| dt = \left| \int_0^{a/n} \omega(2t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right|. \quad (114)$$

Принимая во внимание равенства (84) $\forall \varphi \in H_\omega^o$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t) \sin(nt - \gamma_n) dt \right| &= \left| \int_{t_k}^{x_k} (\varphi(t) - \varphi(2x_k - t)) \sin(nt - \gamma_n) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_k}^{x_k} \omega(2(x_k - t)) |\sin(nt - \gamma_n)| dt = \int_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin ntdt. \end{aligned} \quad (115)$$

Таким образом,

$$e_k(\omega) \leq \int_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin ntdt. \quad (116)$$

Следовательно, согласно (112)–(116), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(C^{\bar{\psi}} H_\omega^o) &\leq \left| \int_0^{a/n} \omega(2t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right| + \\ &+ \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin ntdt \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} \right) + O(1) \bar{\psi}(n) \omega(1/n). \end{aligned} \quad (117)$$

Теперь построим функцию $f^* \in C^\psi H_\omega^o$, для которой значение $\rho_n(f^*; 0)$ совпадает с правой частью (117). С этой целью положим

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \omega(2(x_k - t)), & t \in (t_k, x_k), \\ -\frac{1}{2} \omega(2(t - x_k)), & t \in (x_k, t_{k+1}), \quad k = \overline{k_0, k_1 - 1}, \quad k = \overline{k_3, k_2 - 1}. \end{cases} \\ \varphi_+(t) &= (-1)^{k-k_0} \varphi_k(t) - \frac{1}{2} \left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) - \omega\left(\frac{2a}{n}\right) \right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{k_0, k_1 - 1}, \\ \varphi_-(t) &= (-1)^{k-k_2+1} \varphi_k(t) + \frac{1}{2} \left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) - \omega\left(\frac{2a}{n}\right) \right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{k_3, k_2 - 1}, \end{aligned}$$

и

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2|t|), & |t| \leq a/n, \\ \frac{1}{2}\omega(2a/n), & t \in [a/n, t_{k_o}], \\ \varphi_+(t), & t \in [t_{k_o}, t_{k_1}], \\ -\frac{1}{2}\omega(2a/n), & t \in [t_{k_2}, -a/n], \\ \varphi_-(t), & t \in [t_{k_3}, t_{k_2}], \end{cases} \quad (118)$$

Предположим сначала, что $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности. Тогда функция $\hat{\varphi}(t)$, будучи непрерывной на промежутке $[t_{k_3}, t_{k_1}]$, в силу выпуклости функции $\omega(t)$, будет удовлетворять соотношению (см. напр.[4,с.23])

$$|\hat{\varphi}(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|), \quad t, t' \in [t_{k_3}, t_{k_1}]. \quad (119)$$

Кроме того,

$$\int_{t_{k_3}}^{t_{k_1}} \hat{\varphi}(t) dt = \int_{t_{k_2}}^{-a/n} \hat{\varphi}(t) dt + \int_{a/n}^{t_{k_o}} \hat{\varphi}(t) dt = \omega\left(\frac{2a}{n}\right) (t_o + t_{k_2})$$

и так как согласно построению

$$a/n \leq t_{k_o} \leq 2\pi/n, \quad -a/n - 2\pi/n \leq t_{k_2} \leq -a/n,$$

то

$$\left| \int_{t_{k_3}}^{t_{k_1}} \hat{\varphi}(t) dt \right| \leq \frac{2\pi}{n} \omega\left(\frac{2a}{n}\right). \quad (120)$$

Ясно, что эта оценка позволяет доопределить функцию (118) на оставшемся множестве периода $[-\pi, \pi]$, так чтобы полученная в результате функция (ее по-прежнему обозначим через $\hat{\varphi}(t)$) удовлетворяла бы условию (119) на промежутке $[-\pi, \pi]$, ее среднее значение на периоде равнялось бы нулю и в точках $-\pi$ и π принимала бы одинаковые значения. В

таким случае 2π -периодическое продолжение функции $\hat{\varphi}(t)$ обозначим через $\varphi^*(t)$ и положим $f^*(\cdot) = \mathcal{I}^{\bar{\psi}}(\varphi^*; \cdot)$. Это и есть искомая экстремальная функция, поскольку, согласно ее определению, $f^* \in C^{\bar{\psi}} H_\omega^o$ и, как показывают непосредственные подсчеты (см. напр. [2, с.82,83]), значение величины (96) для нее совпадает с правой частью (117). Этим в случае, когда $\omega(t)$ – выпуклая функция, показано, что соотношение (117) на самом деле является равенством. А это с учетом равенства (111) доказывает теорему 2 для выпуклых модулей непрерывности, если учесть, что $\forall a > 0$

$$r_n = \left| \int_a^1 \omega(2t/n) \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vt dv dt \right| = O(1) \psi_2(n) \omega(1/n).$$

Действительно, учитывая (105), находим

$$\begin{aligned} r_n &\leq \left| \int_a^1 \omega(2t/n) \int_1^{1+2\pi/t} \psi_2(nv) dv dt \right| \leq \\ &\leq |\psi_2(n)| \omega \left(\frac{2 \max(a, 1)}{n} \right) \frac{2\pi|a-1|}{\min(a, 1)} = O(1) |\psi_2(n)| \omega(1/n). \end{aligned}$$

Если же $\omega(t)$ – не обязательно выпуклый модуль непрерывности, то и в этом случае только что построенная функция $f^*(\cdot)$ будет по-прежнему доставлять значение величине (96), равное правой части (117). Однако функции в (118), а с ними и функция $\hat{\varphi}(\cdot)$ уже могут не удовлетворять условию (119) и, следовательно, функция $\varphi^*(\cdot)$ не обязана принадлежать к H_ω^o . Вместе с тем можно показать (см. напр. [2, с. 70]), что функция $\varphi_*(t) = 2\varphi^*(t)/3$ к множеству H_ω^o принадлежит. Отсюда заключаем, что и в случае произвольных модулей непрерывности соотношение (117) является равенством (с некоторым неопределенным значением θ_ω , причем $\theta_\omega \in [2/3, 1]$). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f(\cdot)$ – любая функция из $C^{\bar{\psi}} C^o$. Тогда

в силу (98)

$$\begin{aligned} \|\rho_n(f; x)\|_C \leq & \left(\int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1| dt + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + \right. \\ & \left. + O(1)\bar{\psi}(n) \right) \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \end{aligned} \quad (121)$$

Отсюда, выбирая в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ тригонометрический полином $t_{n-1}^*(\cdot)$, осуществляющий наилучшее приближение функции $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$ в равномерной метрике и учитывая равенства (102) и (103), получим оценку (36).

Чтобы доказать вторую часть теоремы 3, вследствие соотношений (98) и (121) достаточно показать, что $\forall f \in C^{\bar{\psi}}C^o$ и $\forall n \in \mathcal{N}$ найдется функция $F(x)$, для которой $E_n(F^{\bar{\psi}}) = E_n(f^{\bar{\psi}})$, и, кроме того

$$\begin{aligned} & \int_{|t| \leq a/n} [F^{\bar{\psi}}(t) - t_{n-1}^*(t)] \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt + \int_{i_{3,1}} [F^{\bar{\psi}}(t) - t_{n-1}^*(t)] \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt = \\ & = \left(\int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1| dt + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + \right. \\ & \quad \left. + O(1)\bar{\psi}(n) \right) E_n(F^{\bar{\psi}}) = \mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}}) \cdot E_n(F^{\bar{\psi}}). \end{aligned} \quad (122)$$

С этой целью положим $E_n(f^{\bar{\psi}}) = e_n$,

$$\varphi_o(t) = \varphi_o(n; t) = \begin{cases} e_n \operatorname{sign} \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1, & |t| \leq a/n, \\ e_n \operatorname{sign} \mathcal{I}_2(\psi_2; n; a/n)_1, & a/n \leq t \leq x_{k_o}, \\ e_n \operatorname{sign} \mathcal{I}_2(\psi_2; n; -a/n)_1, & x_{k_2} \leq t \leq -a/n, \\ e_n \operatorname{sign} \sin \frac{nt - \gamma_n}{l_n(t)}, & t \in i_{3,1}. \end{cases} \quad (123)$$

Далее, через $\varphi_1(t) = \varphi_1(n; t; \delta)$ обозначим функцию, совпадающую с $\varphi_o(t)$ всюду на $[t_3, t_1]$, за исключением δ -окрестностей ($\delta < \pi/4n$) точек 0, и x_k , $k \in \overline{k_o, k_1 - 1}$, $k = \overline{k_3, k_2 - 1}$, где она линейна и ее график соединяет точки $(-\delta, \varphi_o(-\delta))$ и $(\delta, \varphi_o(\delta))$, а также точки $(x_k - \delta, \varphi_o(x_k - \delta))$ и $(x_k + \delta, \varphi_o(x_k + \delta))$.

На оставшемся участке периода $[-\pi, \pi]$ доопределим $\varphi_1(t)$ так, чтобы она была непрерывной и на промежутке $[-\pi, \pi)$ существовало бы по крайней мере $2n$ точек c_k $-\pi < c_1 < c_2 < \dots < c_{2n} < \pi$, в которых $\varphi_1(t)$ достигает по абсолютной величине максимального значения, равного e_n , причем $\varphi_1(c_k) = (-1)^k e_n$, чтобы $\varphi_1(-\pi) = \varphi_1(\pi)$ и чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(t) dt = 0.$$

Наконец, через $\varphi_\delta(t) = \varphi_\delta(n; t)$ обозначим 2π -периодическое продолжение построенной функции и через $F_\delta(x)$ – ее $\bar{\psi}$ – интеграл. Функция $\varphi_\delta(t)$ при любом $\delta > 0$ непрерывна, причем согласно критерию Чебышева, $E_n(\varphi_\delta) = e_n$ и полином порядка не выше $n - 1$, доставляющий ей наилучшее равномерное приближение есть полином, тождественно равный нулю.

Подставляя функции $F_\delta(\cdot)$ в правую часть (122), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{|t| \leq a/n} F_\delta^{\bar{\psi}} \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt + \int_{i_{3,1}} F_\delta^{\bar{\psi}} \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt = \mathcal{E}_n(C_\infty^{\bar{\psi}}) E_n(F^{\bar{\psi}}) + \\ & + \int_{|t| \leq a/n} (\varphi_\delta(t) - \varphi_o(t)) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt + \int_{i_{3,1}} (\varphi_\delta(t) - \varphi_o(t)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду произвольности δ , заключаем о справедливости утверждения, связанного с соотношением (122). Теорема 3 доказана.

§4. Аналоги теорем 1–3' в интегральной метрике

В этом разделе получены асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}_n(L^{\bar{\psi}} \mathfrak{N})_1 = \sup_{f \in L^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}} \|\rho_n(f; x)\|_1, \quad \|\varphi\|_1 \stackrel{df}{=} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)| dt, \quad (124)$$

где, как и раньше, $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$, $S_{n-1}(f; x)$ – частная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f(\cdot)$, а $\mathfrak{N}$ есть либо единичный шар S_1

в пространстве $L : S_1 = \{\varphi : \|\varphi\|_1 \leq 1\}$, либо класс H_{ω_1} функций из L , удовлетворяющих условию

$$\|\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)\|_1 \leq \omega(t), \quad (125)$$

где $\omega(t)$ – данный модуль непрерывности. Эти результаты составляют содержание следующей теоремы

Теорема 4. Если $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то при $n \rightarrow \infty$ выполняются асимптотические равенства

$$\mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} S_1 \right)_1 = \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n), \quad (126),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} H_{\omega_1} \right)_1 &= \theta_{\omega_1} \left(\frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 \omega \left(\frac{2t}{n} \right) \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vtdv dt \right| + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n \int_0^{\pi/2} \omega \left(\frac{2t}{n} \right) \sin tdt \right) + O(1) \bar{\psi}(n) \omega(1/n), \end{aligned} \quad (127)$$

где $O(1)$ – величины, равномерно ограниченные по n , $\theta_{\omega_1} \in [1/2, 1]$, причем $\theta_{\omega_1} = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности. Здесь будет также доказан следующий аналог теоремы 3.

Теорема 5. Если $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то $\forall f \in L^{\bar{\psi}}$ при любом $n \in \mathcal{N}$

$$\|\rho_n(f; x)\|_1 \leq \left(\frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n) \right) E_n(f^{\bar{\psi}})_1, \quad (128)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n и

$$E_n(f^{\bar{\psi}})_1 = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}} \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_1.$$

Утверждения теорем 4 и 5 в ряде важных случаев известны. Так, если $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то в силу (28), равенства (126) и (127) имеют вид

$$\mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} S_1 \right)_1 = \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n), \quad (126')$$

$$\mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} S_1 \right)_1 = \frac{2\theta_{\omega_1}}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n \int_0^{\pi/2} \omega \left(\frac{2t}{n} \right) \sin t dt + O(1) \bar{\psi}(n) \omega(1/n). \quad (127')$$

При этом, вследствие (17), выполняются равенства $L^{\bar{\psi}} S_1 = L_{\beta'}^{\psi} S_1$ и $L^{\bar{\psi}} H_{\omega_1} = L_{\beta'}^{\psi} H_{\omega_1}$, в которых параметры $\psi(k)$ и β выбраны в соответствии с (18). Таким образом, равенства (126') и (127') означают, что $\forall \psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$

$$\mathcal{E}_n \left(L_{\beta}^{\psi} S_1 \right)_1 = \frac{4}{\pi^2} |\psi(n)| \ln n + O(1) |\psi(n)|, \quad (126'')$$

$$\mathcal{E}_n \left(L_{\beta}^{\psi} H_{\omega_1} \right)_1 = \frac{2\theta_{\omega_1}}{\pi^2} |\psi(n)| \ln n \int_0^{\pi/2} \omega \left(\frac{2t}{n} \right) \sin t dt + O(1) |\psi(n)| \omega(1/n). \quad (127'')$$

Эти равенства впервые были получены в [2, с.146]. В случае, когда $\psi(k) = k^{-r}$ равенство (126'') было ранее доказано С.М.Никольским [12], а равенство (127'') – А.Г.Демченко [13]. Равенства (126) и (127) в случае, когда $\psi_2(k) \equiv 0$, получены автором в [2, с. 157].

Что же касается равенства (128), то оно также известно для классов L_{β}^{ψ} при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$, а также при $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\beta = 0$ (см. [11, с.904]).

Доказательства теорем 4 и 5 проводятся по такой же схеме, что и доказательства теорем 1–3 и начальным пунктом при этом по-прежнему является утверждение леммы 1 в той части, которая относится к функциям из $L^{\bar{\psi}}$: если $f \in L^{\bar{\psi}}$ и $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то равенство (41) выполняется почти всюду. Следуя схеме доказательства леммы 2, используя при этом известные оценки норм свертки вида

$$\left\| \int \varphi(x-t) K(t) dt \right\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \int |K(t)| dt, \quad (129)$$

а также пользуясь доказанным в [2, с.77] аналогом леммы 6 для функций из классов H_{ω_1} , приходим к следующему утверждению

Лемма 2'. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, и a – произвольное положительное число. Тогда, если $f \in L^{\bar{\psi}} S_1$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ почти всюду выполняется

равенство (43), если $f \in L^{\bar{\psi}} H_{\omega_1}$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ почти всюду выполняется равенство (44). Если же $f \in L^{\bar{\psi}}$, то $\forall n \in \mathcal{N}$, при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ почти всюду справедливо равенство (45).

Упомянутый аналог леммы 6 формулируется следующим образом

Лемма 6' [2, стр. 77]. Пусть $\varphi \in L(I)$. Тогда, если $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ и $x_k, k = 1, 2, \dots, m, a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$ – некоторый набор точек, для которых

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad (74)$$

то $\forall f \in H_{\omega_1}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(x-t)\varphi(t) dt \right\|_1 &\leq \left\| \int_a^{x_1} f(x-t)\varphi(t) dt \right\|_1 + \\ &+ \frac{\omega(\Delta)}{2} \int_{x_1}^{x_m} |\varphi(t)| dt + \left\| \int_{x_m}^b f(x-t)\varphi(t) dt \right\|_1. \end{aligned}$$

Если $I = \{x : x \geq a\}$ и $x_k, k = 1, 2, \dots, a \leq x_1 < x_2 < \dots$ – опять некоторый набор точек, для которых выполняется (74) при любом $k \in \mathcal{N}$, то $\forall f \in H_{\omega_1}$

$$\left\| \int_a^\infty f(x-t)\varphi(t) dt \right\|_1 \leq \left\| \int_a^{x_1} f(x-t)\varphi(t) dt \right\|_1 + \frac{\omega(\Delta)}{2} \int_{x_1}^\infty |\varphi(t)| dt.$$

При этом $\Delta = \sup(x_{k+1} - x_k)$.

Получив затем аналог леммы 9, приходим к аналогу следствия 1:

Следствие 1'. Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0, \psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ и a – произвольное положительное число. Тогда, если $f \in L^{\bar{\psi}} S_1$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ почти всюду выполняется равенство (96), если $f \in L^{\bar{\psi}} H_{\omega_1}$, то $\forall n \in \mathcal{N}$ почти всюду выполняется равенство (97). Если же $f \in L^{\bar{\psi}} L^0$, то $\forall n \in \mathcal{N}$, при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ почти всюду справедливо равенство (98).

Перейдем непосредственно к доказательству равенства (125). Согласно следствию 1', имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} S_1^o \right)_1 &= \sup_{\varphi \in S_1^o} \left\| \int_{|t| \leq a/n} \varphi(x-t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)_1 dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \varphi(x-t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt \right\|_1 + O(1) \bar{\psi}(n). \end{aligned} \quad (130)$$

Отсюда, пользуясь оценкой (129) и равенствами (102) и (103), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(L^{\bar{\psi}} S_1^o \right)_1 &\leq \int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)| dt + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + O(1) \bar{\psi}(n) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n). \end{aligned} \quad (131)$$

Покажем теперь, что

$$\mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} S_1^o \right)_1 \geq \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n). \quad (132)$$

Для этого воспользуемся следующим утверждением, доказанным С.М.-Никольским [12] (см. также [2, с.149, 150]).

Лемма 10. Пусть $K(t)$ функция, интегрируема по Лебегу на промежутке $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\sup_{\varphi \in S_1^o} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K(t) dt \right\|_1 \geq \frac{1}{2} \max_{|h| \leq \pi} \|K^*(x) - K^*(x+h)\|_1, \quad (133)$$

где $K^*(\cdot)$ – 2π -периодическое продолжение функции $K(\cdot)$.

С целью применения этой леммы положим

$$K(t) = \begin{cases} \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t), & |t| \leq a/n, \\ \frac{\bar{\psi}(n) \sin(nt - \gamma_n)}{\pi l_n(t)}, & t \in i_{3,1}, \\ 0, & t \in [-\pi, \pi] \setminus i_{3,1} \cup [-a/n, a/n] \end{cases} \quad (134)$$

и через $K^*(t)$ обозначим 2π -периодическое продолжение функции $K(t)$.

Тогда, учитывая (133) и (130), будем иметь

$$\mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} S_1^o \right)_1 \geq \frac{1}{2} \|K^*(x) - K^*(x + \pi/n)\|_1 + O(1)\bar{\psi}(n).$$

Отсюда с учетом (102) и (103) сразу получается оценка (132), так как в силу (134)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|K^*(x) - K^*(x + \pi/n)\|_1 = \|K(\cdot)\|_1 = \\ & = \int_{|t| \leq a/n} \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) |dt| + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt. \end{aligned}$$

Объединяя оценки (131) и (132), получаем равенства (126).

Докажем теперь равенство (127). Будем исходить из равенства (97), которое, согласно следствию 1' в рассматриваемом случае выполняется почти всюду. Прежде всего заметим, что

$$\int_{|t| \leq a/n} \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt = 0, \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt = 0. \quad (135)$$

Поэтому, согласно (97),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} H_{\omega_1}^o \right)_1 & \leq \sup_{\varphi \in H_{\omega_1}^o} \left\| \int_{|t| \leq a/n} \varphi(x-t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right\|_1 + \\ & + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} e_k(\omega)_1 + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} e_k(\omega)_1 \right) + O(1)\bar{\psi}(n)\omega(1/n), \end{aligned} \quad (136)$$

где

$$e_x(\omega)_1 = \sup_{\varphi \in H_{\omega_1}^o} \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(x-t) \sin(nt - \gamma_n) dt \right\|_1. \quad (137)$$

Принимая во внимание нечетность функции $\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)$ и равенства (84)

$\forall \varphi \in H_{\omega_1}^o$, находим

$$\left\| \int_{|t| \leq a/n} \varphi(x-t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right\|_1 \leq \left| \int_0^{a/n} \omega(2t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right|, \quad (138)$$

и

$$e_x(\omega)_1 \leq \int_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin ntdt. \quad (139)$$

Поэтому, согласно (136)–(139),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \left(L^{\bar{\psi}} H_{\omega_1}^o \right)_1 &\leq \left| \int_0^{a/n} \omega(2t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right| + \\ &+ \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin ntdt \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_o}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} \right) + O(1) \bar{\psi}(n) \omega(1/n). \end{aligned} \quad (140)$$

Покажем теперь, что в случае, когда $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, соотношение (140) обращается в равенство. Для этого вследствие (97) и (140) достаточно показать, что в классе $H_{\omega_1}^o$ найдется функция $f^*(t) = f_{\omega}^*(t)$, для которой

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x-t) K(t) dt \right\|_1 &= \left| \int_0^{a/n} \omega(2t) \mathcal{I}_2(\psi_2; n; t) dt \right| + \\ &+ \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin ntdt \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_o}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} \right) + O(1) \bar{\psi}(n) \omega(1/n). \end{aligned} \quad (141)$$

Будем поступать подобно тому, как это делалось в [2, с.138–141]. Положим

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} \omega(2t), & t \in [0, \pi/2n), \\ -\frac{1}{4} \omega(2|t|), & t \in (-\pi/2n, 0], \\ 0, & \pi/2n \leq |t| \leq \pi \end{cases} \quad (142)$$

и через $f_2(t)$ обозначим 2π -периодическое продолжение функции $f_1(t)$. Искомая функция $f^*(t)$ будет представляться равенством $f^*(t) = f_2'(t) - \omega(\pi/n)/2$. В [2, с.139] показано, что $f^* \in H_{\omega_1}^o$. Остается доказать, что для

нее выполняется равенство (141). Положим

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x-t)K(t)dt.$$

На промежутках $(-\pi, t_{k_3} - \pi/2n)$, $(x_{k_2}, -(a/n + \pi/2n))$, $(a/n + \pi/2n, t_{k_o} - \pi/2n)$ и (x_{k_1}, π) функция $\Phi(x)$ тождественно равна нулю; на промежутках $(t_{k_3} - \pi/2n, x_{k_3})$, $(x_{k_3}, x_{k_3+1}), \dots, (x_{k_2}, x_{k_2+1})$, а также на промежутках $(t_{k_o} - \pi/2n, x_{k_o})$, $(x_{k_o}, x_{k_o+1}), \dots, (x_{k_1-1}, x_{k_1})$ функция $\Phi(x)$ сохраняет знак, меняя его поочередно; на промежутках $(-(a/n + \pi/2n), 0)$ и $(0, a/n + \pi/2n)$ справедливо равенство $\text{sign}\Phi(x) = \text{sign}K(x)$. Учитывая эту информацию и поступая подобно тому, как это делалось в [2, с.140,141], придем к соотношению (141).

Итак, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, то соотношение (140) на самом деле есть равенство. Если же $\omega(t)$ – произвольный (не обязательно выпуклый) модуль непрерывности, то построение функции $f^*(\cdot)$, требующее дифференцирования, вообще говоря, незаконно. Однако и в этом случае см. [2, с.141] удастся показать, что соотношение (140) будет равенством, если его правую часть умножить на некоторую величину θ_{ω_1} , которая находится на интервале $[1/2, 1]$. Принимая это во внимание и учитывая равенство (111), приходим к соотношению (127'') и тем заканчиваем доказательство теоремы 4.

Доказательство теоремы 5. Руководствуясь следствием 1', согласно которому $\forall f \in L^{\bar{\psi}}L^o$ при любом $n \in \mathcal{N}$, для любого полинома $t_{n-1}(\cdot)$ из $\mathcal{T}_{n-1}$ почти всюду выполняется равенство (98), находим

$$\begin{aligned} \|\rho_n(f; x)\|_1 \leq & \left(\int_{|t| \leq a/n} |\mathcal{I}_2(\psi_2; n; t)| dt + \frac{\bar{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + \right. \\ & \left. + O(1)\bar{\psi}(n) \right) \|f^{\bar{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда, чтобы получить оценку (128), остается воспользоваться равенствами (102) и (103) и выбрать в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ полином, осуществляю-

щий наилучшее приближение функции $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$ в пространстве L .

Список литературы

- 1. Степанец А.И.** Приближение $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций суммами Фурье//Скорость сходимости рядов Фурье на классах сверток.– Киев, 1996. – С. 3–62.–(Препр./НАНУ. Ин-т математики. 96.11).
- 2. Степанец А.И.** Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук.думка. 1987. – 268с.
- 3. Колмогоров А.Н.** Zur Crossenordnng des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Functionen//Ann. Math. – 1935. –**36**. – S. 521–526.
- 4. Степанец А.И.** Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук.думка, 1981. – 340 с.
- 5. Теляковский С.А.** О приближении функций заданных классов суммами Фурье//Теория функций и приближений: Тр. III Сарат. зим. школы, 27 янв. – 7 февр. 1986 г. Межвуз. науч.сб. – Саратов: Сарат. ун-т, 1987.– Ч.1. – 156 с.
- 6. Степанец А.И.** Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье//Изв. АН СССР. Сер.мат. – 1986. – **50**, N 1. – 101–136.
- 7. Никольский С.М.** Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами//Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**.– С. 1–76.
- 8. Ефимов А.В.** Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье//Изв. АН СССР. Сер.мат. 1960. **24**, N 2 – С. 243–296.
- 9. Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения.– М.: Наука, 1976. – 320 с.

10. Бушев Д.Н., Степанец А.И. О приближении слабо дифференцируемых периодических функций//Укр.мат.журн. – 1990. – **42**, N 3. – С. 406–412.
11. Степанец А.И. К неравенству Лебега на классах (ψ, β) -дифференцируемых функций//Укр.мат.журн.– 1989. – **41**, N 5.– С.449–510.
12. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем//Изв. АН СССР. Сер. мат.1946. – **10**, N 3. – С.207–256.
13. Демченко А.Г. Приближение в среднем функций из классов $W^r H_{[\omega]_L}$ //Укр. мат.журн. – 1973. – **25**, N 2. – С.267–276.