

УДК 517.5

А.И. Степанец, А.С. Сердюк

***ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ
ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ S^p***

В работе продолжаются исследования аппроксимационных свойств пространства S^p . Вводится понятие k -го модуля непрерывности и устанавливаются прямые и обратные теоремы приближения в пространстве S^p в терминах наилучших приближений и модулей непрерывности, подобные известным теоремам Д. Джексона и С.Н. Бернштейна.

Пусть S^p , $1 \leq p < \infty$ — пространство 2π -периодических суммируемых функций f ($f \in L$), заданных на вещественной оси, для которых

$$\|f\|_{S^p} = \left(\sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad (1)$$

где

$$\hat{f}(\nu) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\nu x} dx \quad (2)$$

— коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе $(2\pi)^{-1/2} e^{i\nu x}$, $\nu \in Z$.

Пространства S^p были введены в работе [1] (см. также [2,3]). Там же были исследованы некоторые аппроксимационные свойства таких пространств. В частности было показано, что среди всех сумм вида

$$\sum_{|\nu| \leq n-1} \alpha_\nu e^{i\nu x},$$

в которых α_ν — произвольные комплексные числа, при заданном натуральном n ($n \in N$) наименее уклоняется от функции f из S^p ее частная сумма Фурье

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|\nu| \leq n-1} \hat{f}(\nu) \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3)$$

Т.е., если

$$E_n(f)_{S^p} = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_{S^p}$$

— наилучшее приближение функции $f \in S^p$ тригонометрическими многочленами t_{n-1} порядка $n-1$ в метрике пространства S^p , то справедливы равенства

$$E_n^p(f)_{S^p} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{S^p}^p = \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p. \quad (4)$$

В настоящей работе продолжают исследования аппроксимационных свойств пространств S^p . Вводится понятие k -го модуля непрерывности

и устанавливаются утверждения, подобные известным теоремам Д. Джексона и С.Н. Бернштейна.

Пусть k — любое натуральное число ($k \in N$) и $f \in S^p$. Тогда функцию

$$\omega_k(t)_{S^p} = \omega_k(f, t)_{S^p} = \sup_{|u| \leq t} \|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p},$$

где $\Delta_u^k f(x)$ — конечная разность функции f k -го порядка с шагом u :

$$\Delta_u^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + iu), \quad (5)$$

будем называть модулем непрерывности порядка k функции f . При помощи стандартных в таких случаях рассуждений можно убедиться, что функции $\omega_k(t)_{S^p}$ обладают всеми основными свойствами, характеризующими обычные модули непрерывности. В частности

- а) $\omega_k(0)_{S^p} = 0$;
- б) $\omega_k(t)_{S^p}$ не убывает на промежутке $[0, \infty)$;
- в) $\omega_k(t)_{S^p}$ непрерывна на $[0, \infty)$;
- г) $\omega_k(mt)_{S^p} \leq m^k \omega_k(t)_{S^p}$, $m \in N$.

Кроме того, при $k = 1$ функция $\omega_1(t)$ полуаддитивна:

- д) $\omega_1(t_1 + t_2)_{S^p} \leq \omega_1(t_1)_{S^p} + \omega_1(t_2)_{S^p}$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

В работе устанавливаются прямые и обратные теоремы приближения в пространстве S^p в терминах наилучших приближений и модулей непрерывности. Находятся неравенства Джексона вида

$$E_n(f)_{S^p} \leq K(\tau) \omega_k(f, \frac{\tau}{n})_{S^p}, \quad \tau > 0,$$

и исследуются вопросы о наименьшей константе в этих неравенствах при фиксированных значениях параметров n, k, τ и p , т.е. о величине

$$K_{n,k}(\tau)_{S^p} = \sup \left\{ \frac{E_n(f)_{S^p}}{\omega_k(f, \frac{\tau}{n})_{S^p}} : f \in S^p, f \neq \text{const} \right\}. \quad (6)$$

Рассматриваются также вопросы о конструктивных характеристиках функциональных классов, заданных мажорантами модулей непрерывности их элементов.

1. Прямые теоремы.

Основные результаты настоящего пункта содержатся в следующих утверждениях.

Пусть $M(\tau)$ – множество функций μ , ограниченных, неубывающих, отличных от констант на сегменте $[0, \tau]$.

Теорема 1. Пусть $f \in S^p$, $1 \leq p < \infty$ и $f \not\equiv \text{const}$. Тогда при любом $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$E_n(f)_{S^p} \leq C_{n,k}(\tau)_{S^p} \omega_k(f, \frac{\tau}{n})_{S^p}, \quad k, n \in N, \quad (7)$$

где

$$C_{n,k}(\tau)_{S^p} \stackrel{\text{df}}{=} \left(\inf_{\mu \in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu)} \right)^{1/p}, \quad (8)$$

а

$$I_n(\tau, \mu) = I_{n,k,p}(\tau, \mu) = \inf_{\substack{\nu \geq n \\ \nu \in N}} \int_0^\tau (1 - \cos \frac{\nu}{n} t)^{\frac{kp}{2}} d\mu(t). \quad (9)$$

При этом существует функция $\mu_* \in M(\tau)$, реализующая в (8) точную нижнюю грань. Неравенство (7) неулучшаемо на множестве S^p , в том смысле, что для любых k и $n \in N$ выполняется равенство

$$C_{n,k}(\tau)_{S^p} = K_{n,k}(\tau)_{S^p}. \quad (10)$$

Теорема 2. Для любой функции $f \in S^p$, $1 \leq p < \infty$ имеют место неравенства

$$E_n^p(f)_{S^p} \leq \frac{1}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\frac{kp}{2})} \int_0^\pi \omega_k^p(f, \frac{t}{n})_{S^p} \sin t dt, \quad n, k \in N, \quad (11)$$

где

$$I_n(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{\substack{\nu \geq n \\ \nu \in N}} \int_0^\pi (1 - \cos \frac{\nu}{n} t)^\lambda \sin t dt, \quad \lambda > 0, \quad n \in N. \quad (12)$$

Если при этом $\frac{kp}{2} \in N$, то

$$I_n\left(\frac{kp}{2}\right) = \frac{2^{\frac{kp}{2}+1}}{\frac{kp}{2} + 1} \quad (13)$$

и неравенство (11) не может быть улучшено ни при каком $n \in N$.

В следующем утверждении получены не зависящие от n оценки сверху для констант $K_{n,k}(\tau)_{S^p}$ при $\tau = \pi$, которые в ряде важных случаев являются неулучшаемыми.

Теорема 3. Для любой функции $f \in S^p$, $1 \leq p < \infty$ и произвольных k и $n \in N$ справедливы неравенства

$$K_{n,k}^p(\pi)_{S^p} \leq \frac{1}{2^{\frac{kp}{2}-1} I_n\left(\frac{kp}{2}\right)} \leq \frac{\frac{kp}{2} + 1}{2^{kp} + 2^{\frac{kp}{2}-1} \left(\frac{kp}{2} + 1\right) \sigma\left(\frac{kp}{2}\right)}, \quad (14)$$

в которых величины $I_n(\lambda)$ определены формулой (12), а

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} & - \sum_{m=[\frac{\lambda}{2}]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \left(\frac{1 - (-1)^{[\lambda]}}{2} \binom{2m}{m} - \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{2}{2(m-j)^2 - 1} \right), \quad \lambda > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

(здесь $[\lambda]$ — целая часть числа λ). Если $\frac{kp}{2} \in N$, то величина $\sigma\left(\frac{kp}{2}\right)$ равна нулю и тогда

$$K_{n,k}^p(\pi)_{S^p} \leq \frac{\frac{kp}{2} + 1}{2^{kp}}, \quad \frac{kp}{2} \in N, \quad n \in N. \quad (14')$$

Следующее утверждение показывает равномерную ограниченность констант $K_{n,k}(\pi)_{S^p}$ относительно всех рассматриваемых параметров $(k, n \in N, 1 \leq p < \infty)$.

Теорема 4. Для любой отличной от константы функции $f \in S^p$, $1 \leq p < \infty$ имеют место неравенства

$$E_n(f)_{S^p} < \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2^{k/2}} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^p}, \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

В случае, когда $p = 2$ пространство S^2 есть пространство L_2 функций f из L с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2} = \|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Ввиду важности этого случая, приведем формулировки соответствующих утверждений, вытекающих из теорем 2 и 3.

Теорема 2'. Для любых функций $f \in L_2$ имеет место неравенство

$$E_n^2(f)_2 \leq \frac{k+1}{2^{2k+1}} \int_0^{\pi} \omega_k^2\left(f, \frac{t}{n}\right)_2 \sin t dt, \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (11')$$

Неравенство (11') не может быть улучшено ни при каких k и $n \in N$.

Теорема 3'. Для любой отличной от константы функции $f \in L_2$ имеют место неравенства

$$E_n(f)_2 < \frac{\sqrt{k+1}}{2^k} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_2, \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Неравенства (11') и (17) при $k = 1$ были доказаны Н.И. Черных [4,5]. Им же было показано, что при $k = 1$ неравенство (17) не может быть улучшено ни при каком $n \in N$, т.е., что выполняется равенство

$$K_{n,1}(\pi)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Этот результат в частности означает, что вес $\mu_*(t) = 1 - \cos t$ для случая $k = 1$, $p = 2$, $\tau = \pi$ реализует нижнюю грань в (8).

При p стремящихся к бесконечности неравенства (14) также в определенном смысле неулучшаемы.

Пусть $f \in S^p$. Используя разложение конечной разности $\Delta_u^k f(x)$ k -го порядка с шагом u функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx}$, $k \in Z$, получаем

$$\|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p}^p = \left\| \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(\cdot + ju) \right\|_{S^p}^p = \sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p \left| \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} e^{i\nu ju} \right|^p =$$

$$= \sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p |1 - e^{i\nu u}|^{pk} = 2^{\frac{kp}{2}} \sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p (1 - \cos \nu u)^{\frac{kp}{2}},$$

т.е.

$$\|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p}^p = 2^{\frac{kp}{2}} \sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p (1 - \cos \nu u)^{\frac{kp}{2}}, \quad (19)$$

и, следовательно,

$$\omega_k^p(f, t)_{S^p} = 2^{\frac{kp}{2}} \sup_{0 < u < t} \sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p (1 - \cos \nu u)^{\frac{kp}{2}}. \quad (20)$$

Вследствие равенств (4) и (20) приходим к формуле

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} = \sup_{\rho_\nu \geq 0} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_\nu}{2^{\frac{kp}{2}} \sup_{0 \leq u \leq \tau} \sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_\nu (1 - \cos \frac{\nu}{n} u)^{\frac{kp}{2}}}, \quad (21)$$

в которой внешняя верхняя грань рассматривается по всем последовательностям неотрицательных действительных чисел ρ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, таким, что $\sum_{\nu=1}^{\infty} \rho_\nu < \infty$. Из (21) вытекает, что для произвольных $n, k \in N$, $\tau > 0$, $p \in [1, \infty)$

$$K_{n,k}(\tau)_{S^p} \geq \frac{1}{2^k}. \quad (22)$$

Сопоставив неравенства (14') и (22), видим, что оценки сверху и снизу величины $K_{n,p}(\pi)_{S^p}$ при $p \rightarrow \infty$ совпадают, поскольку $\lim_{p \rightarrow \infty} (\frac{kp}{2} + 1)^{1/p} = 1$.

Это дает основание рассмотреть пространство S^∞ функций $f \in L$ с нормой

$$\|f\|_{S^\infty} = \sup_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|$$

и положить

$$\omega_k(t)_{S^\infty} = \omega_k(f, t)_{S^\infty} = \sup_{|u| \leq t} \|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^\infty}.$$

Также как и в случае когда $p \in [1, \infty)$ функции $\omega_k(f, t)_{S^\infty}$ обладают всеми основными свойствами, характеризующими модули непрерывности k -го порядка и справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Для любой функции $f \in S^\infty$ имеют место неравенства

$$E_n(f)_{S^\infty} \leq \frac{1}{2^k} \omega_k(f, \frac{\pi}{n}), \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Константу $\frac{1}{2^k}$ в неравенствах (23) уменьшить нельзя ни при каких натуральных k и n , т.е.

$$K_{n,k}(\pi)_{S^\infty} = \frac{1}{2^k}.$$

Теорему 5 можно рассматривать как предельный случай (при $p = \infty$) теоремы 3. Ее справедливость вытекает из следующих соображений. Поскольку для любой функции f из S^∞

$$E_n(f)_{S^\infty} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{S^\infty} = \max_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|,$$

то

$$\begin{aligned} \omega_k(f, \frac{\pi}{n}) &= \sup_{|u| \leq \frac{\pi}{n}} \|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^\infty} = \sup_{|u| \leq \frac{\pi}{n}} \max_{\nu \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\nu)| 2^{\frac{k}{2}} (1 - \cos \nu u)^{\frac{k}{2}} \geq \\ &\geq \sup_{|u| \leq \frac{\pi}{n}} \max_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)| 2^{\frac{k}{2}} (1 - \cos \nu u)^{\frac{k}{2}} = \max_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)| \sup_{|u| \leq \frac{\pi}{n}} 2^{\frac{k}{2}} (1 - \cos \nu u)^{\frac{k}{2}} = \\ &= \max_{|\nu| \geq n} 2^k |\hat{f}(\nu)| = 2^k E_n(f)_{S^\infty}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, действительно из (24) вытекает (23). Из соотношений в (24) видим, что равенство в (23) будет иметь место, если для функции f выполнены условия $|\hat{f}(\nu)| = 0$ при $|\nu| < n$. А это и означает, что константа $1/2^k$ в неравенстве (23) уменьшена быть не может.

В случае, когда при фиксированных k и p функция $\omega_k^p(f, \cdot)_{S^p}$ выпукла вверх на промежутке $[0, \frac{\pi}{n}]$, оценка

$$E_n(f)_{S^p} < \frac{1}{2^{\frac{k}{2} - \frac{1}{p}} I_n^{\frac{1}{p}}(\frac{kp}{2})} \omega_k(f, \frac{\pi}{n})_{S^p}, \quad k, n \in N, \quad p \in [1, \infty), \quad f \neq \text{const}, \quad (25)$$

вытекающая из теоремы 2, может быть уточнена в том смысле, что величину π/n в ней можно заменить на $\pi/2n$. Действительно, если $\omega_k(f, t)^p$

выпукла вверх на $[0, \frac{\pi}{n}]$, то существует линейная функция $l(t)$ такая, что

$$l(\frac{\pi}{2n}) = \omega_k^p(f, \frac{\pi}{2n}), \quad \omega_k^p(f, t) \leq l(t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{n}].$$

Поэтому представив интеграл

$$\int_0^{\pi} \omega_k^p(f, \frac{t}{n})_{S^p} \sin t dt$$

в виде суммы

$$\int_0^{\pi} (\omega_k^p(f, \frac{t}{n})_{S^p} - l(\frac{t}{n})) \sin t dt + \int_0^{\pi} (l(\frac{t}{n}) - \omega_k^p(f, \frac{\pi}{2n})_{S^p}) \sin t dt + \omega_k^p(f, \frac{\pi}{2n})_{S^p} \int_0^{\pi} \sin t dt, \quad (26)$$

видим, что первое слагаемое в (26) неположительно, а второе — равно нулю. Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \omega_k^p(f, \frac{t}{n}) \sin t dt \leq 2\omega_k^p(f, \frac{\pi}{2n}). \quad (27)$$

Подставляя эту оценку в (11), приходим к выводу, что для любой $f \in S^p$

$$E_n(f)_{S^p} \leq \frac{1}{2^{\frac{k}{2} - \frac{1}{p}} I_n^{\frac{1}{p}}(\frac{kp}{2})} \omega_k(f, \frac{\pi}{2n})_{S^p}, \quad k, n \in N, \quad p \in [1, \infty) \quad (28)$$

и, значит,

$$E_n(f)_{S^p} \leq \left(\frac{\frac{kp}{2} + 1}{2^{kp} + 2^{\frac{kp}{2} - 1} (\frac{kp}{2} + 1) \sigma(\frac{kp}{2})} \right)^{1/p} \omega_k(f, \frac{\pi}{2n})_{S^p}, \quad p \in [1, \infty), \quad k, n \in N. \quad (29)$$

Полагая в (29) $p = 2$ и $k = 1$, получим оценку

$$E_n(f)_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_1(f, \frac{\pi}{2n})_2, \quad n \in N, \quad (29')$$

справедливую при условии выпуклости вверх функции $\omega^2(f, t)_2$.

Неравенство (29') получено Н.И. Черных в [5]. Им же была доказана и неулучшаемость неравенства (29').

В некоторых случаях равенство (21) позволяет свести задачу о нахождении точной константы Джексона в пространстве S^p к аналогичной задаче в L_2 . Пусть $m = \frac{kp}{2} \in N$. В таком случае, как вытекает из (21), для любых $n \in N$ и $\tau > 0$

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} = \sup_{\rho_\nu \geq 0} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_\nu}{2^m \sup_{0 \leq u \leq \tau} \sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_\nu (1 - \cos \frac{\nu}{n} u)^m} = K_{n,m}^2(\tau)_{S^2}. \quad (21')$$

При $\tau = 2\pi$ точные значения величин $K_{n,m}(\tau)_{S^2}$ для произвольных натуральных n и m вычислены в работе [5].

Именно, было доказано что

$$K_{n,m}(2\pi)_{S^2} = \left(\frac{2m}{m} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n, m \in N. \quad (30)$$

Полагая здесь $m = \frac{kp}{2}$ и используя формулу (19') приходим к такому утверждению.

Предложение 1. Пусть $\frac{kp}{2} \in N$, $k \in N$, $p \in [1, \infty)$. Тогда для любых $n \in N$

$$K_{n,k}(2\pi)_{S^p} = \left(\frac{kp}{\frac{kp}{2}} \right)^{-1/p}.$$

В [5, теорема 2] показано, что в случае, когда $p = 2$ и $\tau = 2\pi$ при любых натуральных k и n вес $\mu_*(t) = -\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \cos t$ реализует точную нижнюю грань в (8). Понятно, что в связи с формулой (11') этот же вес будет экстремальным и в случае, когда $p \geq 1$, $\tau = 2\pi$, $k \in N$, $n \in N$ при условии, что $\frac{kp}{2} \in N$.

Доказательство теоремы 1. При $p = 2$ и $k = 1$ эта теорема доказана в работе А.Г. Бабенко [6]. Доказательство настоящей теоремы во многом повторяет рассуждения из [4,5 и 6]. Пусть $f \in S^p$. Исходя из равенства (19), с учетом (4), имеем

$$\|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p}^p \geq \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p 2^{\frac{kp}{2}} (1 - \cos \nu u)^{\frac{kp}{2}} =$$

$$= \frac{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)} E_n^p(f)_{S^p} + \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p 2^{\frac{kp}{2}} ((1 - \cos \nu u)^{\frac{kp}{2}} - \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)}), \quad (31)$$

где величина $I_n(\tau, \mu)$ определена равенством (9).

Отсюда $\forall t \in [0, \tau]$ находим

$$E_n^p(f)_{S^p} \leq \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu)} (\|\Delta_{\frac{t}{n}}^k f(\cdot)\|_{S^p}^p - 2^{\frac{kp}{2}} \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p ((1 - \cos \frac{\nu t}{n})^{\frac{kp}{2}} - \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)})). \quad (32)$$

Поскольку обе части неравенства (32) неотрицательны и ряд в его правой части мажорируется на всей действительной оси абсолютно сходящимся числовым рядом

$$\sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p 2^{\frac{kp}{2} + 1},$$

то интегрируя это неравенство по $d\mu(t)$ в пределах от 0 до τ , получим

$$\begin{aligned} E_n^p(f)_{S^p} (\mu(\tau) - \mu(0)) &\leq \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu)} \left(\int_0^\tau \|\Delta_{\frac{t}{n}}^k f(\cdot)\|_{S^p}^p d\mu(t) - \right. \\ &\quad \left. - 2^{\frac{kp}{2}} \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p \left(\int_0^\tau (1 - \cos \frac{\nu t}{n})^{\frac{kp}{2}} d\mu(t) - I_n(\tau, \mu) \right) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Второе слагаемое правой части этого неравенства в силу определения величина $I_n(\tau, \mu)$ неотрицательно, поэтому

$$\begin{aligned} E_n^p(f)_{S^p} &\leq \frac{1}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu)} \int_0^\tau \|\Delta_{\frac{t}{n}}^k f(\cdot)\|_{S^p}^p d\mu(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu)} \int_0^\tau \omega_k^p(f, \frac{t}{n}) d\mu(t), \end{aligned} \quad (34)$$

откуда сразу получаем (7) и оценку

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} \leq \inf_{\mu \in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu)} = C_{n,k}^p(\tau)_{S^p}. \quad (35)$$

Остается показать, что соотношение (35) на самом деле является равенством. С этой целью положим

$$W_{n,k,p} = \left\{ \omega(t) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_{\nu} \left(1 - \cos \frac{\nu t}{n}\right)^{\frac{kp}{2}} : \rho_{\nu} \geq 0, \sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_{\nu} = 1 \right\}$$

и

$$\dot{\mathcal{J}}_n(\tau) = \dot{\mathcal{J}}_{n,k,p}(\tau) = \inf_{\omega \in W_{n,k,p}} \|\omega\|_{C[0,\tau]}. \quad (36)$$

Из равенства (21) следует, что

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} = \frac{1}{2^{\frac{kp}{2}} \dot{\mathcal{J}}_n(\tau)}. \quad (37)$$

Далее понадобится соотношение двойственности в пространстве $C[a, b]$ (см., например, [7, с. 30-31]).

Предложение 2. Если F — выпуклое множество в $C[a, b]$, то для любой функции $x(t) \in C[a, b]$

$$\inf_{u \in F} \|x(t) - u(t)\|_{C[a,b]} = \sup_{\substack{b \\ \int_a^b V(g) \leq 1}} \left(\int_a^b x(t) dg(t) - \sup_{u \in F} \int_a^b u(t) dg(t) \right). \quad (38)$$

Для $x \in C[a, b] \setminus \bar{F}$ ($\bar{F}$ — замыкание множества F) существует функция $g(t)$ с вариацией, равной единице на $[a, b]$, реализующая в (38) точную верхнюю грань.

Легко проверить, что множество $W_{n,k,p}$ является выпуклым подмножеством пространства $C[0, \tau]$, поэтому используя равенство (38) при $a = 0$, $b = \tau$, $x(t) \equiv 0$, $u(t) = w(t) \in W_{n,k,p}$, $F = W_{n,k,p}$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}_n(\tau) &= \inf_{w \in W_{n,k,p}} \|0 - w\|_{C[0,\tau]} = \sup_{\substack{\tau \\ \int_0^{\tau} V(g) \leq 1}} \left(0 - \sup_{w \in W_{n,k,p}} \int_0^{\tau} w(t) dg(t) \right) = \\ &= \sup_{\substack{\tau \\ \int_0^{\tau} V(g) \leq 1}} \inf_{w \in W_{n,k,p}} \int_0^{\tau} w(t) dg(t). \end{aligned} \quad (39)$$

При этом в силу предположения 2 существует функция $g_*(t)$, $\bar{V}_0^\tau(g_*) = 1$, реализующая в (39) точную верхнюю грань. Поскольку каждая из функций $w \in W_{n,k,p}$ неотрицательна, то в правой части (39) достаточно верхнюю грань рассматривать по множеству неубывающих функций $\mu(t)$, для которых $\mu(\tau) - \mu(0) \leq 1$. Но для таких функций, в силу определений величины $I_n(\tau, \mu)$ (см. (9)) и множества $W_{n,k,p}$, справедливо равенство

$$\inf_{w \in W_{n,k,p}} \int_0^\tau w(t) d\mu(t) = I_n(\tau, \mu). \quad (40)$$

Из сказанного следует, что существует функция $\mu_* \in M(\tau)$, для которой $\mu_*(\tau) - \mu_*(0) = 1$ и

$$I_n(\tau, \mu_*) = \sup_{\substack{\mu \in M(\tau) \\ \bar{V}_0^\tau(\mu) \leq 1}} I_n(\tau, \mu) = \dot{J}_n(\tau). \quad (41)$$

Из формул (35), (37) и (41) вытекает равенство

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} = \frac{1}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu_*)} = \frac{\mu_*(\tau) - \mu_*(0)}{2^{\frac{kp}{2}} I_n(\tau, \mu_*)} = C_{n,k}^p(\tau)_{S^p}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Неравенство (11) получается из (34), если в нем положить $\tau = \pi$ и $\mu(t) = 1 - \cos t$, $t \in [0, \pi]$. Если при этом $\frac{kp}{2} \in N$, то справедливо равенство (13). Действительно, поскольку

$$\int_0^\pi (1 - \cos t)^\lambda \sin t dt = \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda + 1}, \quad \lambda \geq 0, \quad (42)$$

то воспользовавшись при $\lambda \in N$ разложением

$$(1 - x)^\lambda = 1 + \sum_{m=1}^{\lambda} (-1)^m \binom{\lambda}{m} x^m,$$

положив в нем $\cos \theta t$ вместо x , для любого $\theta \geq 1$ получим

$$\int_0^\pi (1 - \cos \theta t)^\lambda \sin t dt - \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda + 1} = \int_0^\pi ((1 - \cos \theta t)^\lambda - (1 - \cos t)^\lambda) \sin t dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \sum_{m=0}^{\lambda} (-1)^m \binom{\lambda}{m} (\cos^m \theta t - \cos^m t) \sin t dt = \\
&= \sum_{m=1}^{\lambda} (-1)^m \binom{\lambda}{m} \int_0^\pi (\cos^m \theta t - \cos^m t) \sin t dt.
\end{aligned} \tag{43}$$

Покажем, что для любого $\theta > 1$ и произвольных $m \in N$

$$\int_0^\pi (\cos^{2m} \theta t - \cos^{2m} t) \sin t dt \geq 0, \tag{44}$$

и

$$\int_0^\pi (\cos^{2m-1} \theta t - \cos^{2m-1} t) \sin t dt = \int_0^\pi \cos^{2m-1} \theta t \sin t dt \leq 0. \tag{44'}$$

Имеем

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2 \binom{2m}{j} \cos 2(m-j)x + \binom{2m}{m} \right), \tag{45}$$

так что

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi (\cos^{2m} \theta t - \cos^{2m} t) \sin t dt = \\
&= \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \int_0^\pi (\cos 2(m-j)\theta t - \cos 2(m-j)t) \sin t dt.
\end{aligned} \tag{46}$$

Пользуясь формулой

$$\int \sin at \cos btdt = -\frac{\cos(a+b)t}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)t}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2 \tag{47}$$

при $a = 1$, $b = 2(m-j)\theta$, получим

$$\int_0^\pi (\cos 2(m-j)\theta t - \cos 2(m-j)t) \sin t dt = \frac{2}{(2(m-j))^2 - 1} - \frac{1 + \cos 2(m-j)\theta\pi}{(2(m-j)\theta)^2 - 1} \geq 0. \tag{48}$$

Из соотношений (46) и (48) вытекает (44).

Для доказательства (44') воспользуемся равенством

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m-1} t \sin t dt = 0,$$

а также представлением

$$\cos^{2m-1} x = \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1}{j} \cos(2m-2j-1)x. \quad (49)$$

Тогда

$$\int_0^{\pi} (\cos^{2m-1} \theta t - \cos^{2m-1} t) \sin t dt = \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1}{j} \int_0^{\pi} \cos(2m-2j-1)\theta t \sin t dt. \quad (50)$$

Применяя формулу (47) при $a = 1$, $b = (2m-2j-1)\theta$, получим

$$\int_0^{\pi} \cos(2m-2j-1)\theta t \sin t dt = -\frac{1 + \cos(2m-2j-1)\theta\pi}{((2m-2j-1)\theta)^2 - 1} \leq 0. \quad (51)$$

Из (50) и (51) вытекает соотношение (44').

Таким образом, на основании (43), (44) и (44') приходим к неравенству

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos \theta t)^{\lambda} \sin t dt \geq \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad \theta \geq 1, \quad \lambda \in N, \quad (52)$$

которое является равенством при $\theta = 1$. Полагая в (52) $\lambda = \frac{kp}{2}$,

$\theta = \frac{\nu}{n}$, $\nu = n, n+1, \dots$, приходим к (13).

Для доказательства неулучшаемости неравенства (11) при $\frac{kp}{2} \in N$ достаточно убедиться, что для функции

$$f_n(x) = \gamma + \beta e^{-nx} + \delta e^{nx},$$

где γ, β, δ – произвольные комплексные числа,

$$E_n^p(f_n)_{S^p} = \frac{\frac{kp}{2} + 1}{2^{kp+1}} \int_0^{\pi} \omega_k^p(f_n, \frac{t}{n})_{S^p} \sin t dt, \quad p \geq 1, \quad k, n \in N. \quad (53)$$

В рассматриваемом случае функция

$$\|\Delta_{t/n}^k f_n(\cdot)\|_{S^p}^p = 2^{\frac{kp}{2}} (2\pi)^{\frac{p}{2}} (|\beta|^p + |\delta|^p) (1 - \cos t)^{\frac{kp}{2}} \quad (54)$$

не убывает по t на $[0, \pi]$. Поэтому

$$\omega_k(f_n, \frac{t}{n})_{S^p} = \|\Delta_{t/n}^k f_n(\cdot)\|_{S^p};$$

кроме того

$$|\hat{f}_n(\nu)| = 0, \quad 0 < |\nu| < n$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}_n(\nu)|^p (2^{\frac{kp}{2}} \int_0^\pi (1 - \cos \frac{\nu}{n} t)^{\frac{kp}{2}} \sin t dt - \frac{2^{kp+1}}{\frac{kp}{2} + 1}) = \\ & = (2\pi)^{\frac{p}{2}} (|\beta|^p + |\delta|^p) (2^{\frac{kp}{2}} \int_0^\pi (1 - \cos t)^{\frac{kp}{2}} \sin t dt - \frac{2^{kp+1}}{\frac{kp}{2} + 1}) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Учитывая эти факты, приходим к выводу, что при $\tau = \pi$ для веса $\mu(t) = 1 - \cos t$ и функции $f = f_n$ формулы (31)–(34) являются равенствами.

Доказательство теоремы 3. Первое неравенство в (14), а также неравенство (14') вытекают непосредственно из теоремы 2. Остается доказать, что

$$I_n(\frac{kp}{2}) \geq \frac{2^{\frac{kp}{2}+1}}{\frac{kp}{2} + 1} + \sigma(\frac{kp}{2}), \quad k, n \in N. \quad (56)$$

Соотношение (56) будет следовать из неравенства

$$\int_0^\pi (1 - \cos \theta t)^\lambda \sin t dt \geq \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda + 1} + \sigma(\lambda), \quad \theta \geq 1, \quad \lambda > 0, \quad (57)$$

справедливость которого вытекает из следующих соображений. Пользуясь разложением функции $(1 - x)^\lambda$ в биномиальный ряд и учитывая равномерную сходимость последнего на сегменте $[-1, 1]$, а также формулы (42), (45), (46) и (48)–(51) при любых $\theta > 0$ и $\lambda > 0$ можно записать

$$\Delta(\theta, \lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^\pi (1 - \cos \theta t)^\lambda \sin t dt - \left(\frac{2^{\lambda+1}}{\lambda + 1} + \sigma(\lambda) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi ((1 - \cos \theta t)^\lambda - (1 - \cos t)^\lambda) \sin t dt - \sigma(\lambda) = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m-1} \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1}{j} \frac{1 + \cos(2m-2j-1)\theta\pi}{((2m-2j-1)\theta)^2 - 1} - \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{1 + \cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2 - 1} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{2}{(2(m-j))^2 - 1} - \sigma(\lambda). \tag{58}
\end{aligned}$$

Предположим сначала, что $[\lambda]$ чётно. В этом случае

$$\binom{\lambda}{2m-1} > 0, \quad m = 1, 2, \dots, [\lambda/2]; \quad \binom{\lambda}{2m-1} \geq 0, \quad m = [\lambda/2]+1, [\lambda/2]+2, \dots; \tag{59}$$

$$\binom{\lambda}{2m} > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, [\lambda/2]; \quad \binom{\lambda}{2m} \leq 0, \quad m = [\lambda/2] + 1, [\lambda/2] + 2, \dots \tag{59'}$$

и тогда, согласно (58),

$$\begin{aligned}
\Delta(\theta, \lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m-1} \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1}{j} \frac{1 + \cos((2m-2j-1)\theta\pi)}{((2m-2j-1)\theta)^2 - 1} + \\
&+ \sum_{m=1}^{[\lambda/2]} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \left(\frac{2}{(2(m-j))^2 - 1} - \frac{1 + \cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2 - 1} \right) + \\
&+ \left(- \sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{1 + \cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2 - 1} \right). \tag{60}
\end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношения (59) и (59'), видим, что каждое из слагаемых в правой части равенства (60) неотрицательно и, следовательно, справедливо (57).

Пусть теперь $[\lambda]$ нечётно. Тогда

$$\binom{\lambda}{2m} > 0, \quad m = 0, 1, \dots, [\lambda/2]; \quad \binom{\lambda}{2m} \geq 0, \quad m = [\lambda/2] + 1, [\lambda/2] + 2, \dots, \tag{61}$$

$$\binom{\lambda}{2m+1} > 0, \quad m = 0, 1, \dots, [\lambda/2]; \quad \binom{\lambda}{2m+1} \leq 0, \quad m = [\lambda/2]+1, [\lambda/2]+2, \dots, \quad (61')$$

и

$$\begin{aligned} \Delta(\theta, \lambda) = & \sum_{m=1}^{[\lambda/2]} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \left(\frac{2}{(2(m-j))^2 - 1} - \frac{1 + \cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2 - 1} \right) + \\ & + \sum_{m=0}^{[\lambda/2]} \binom{\lambda}{2m+1} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m+1}{j} \frac{1 + \cos((2m-2j+1)\theta\pi)}{((2m-2j+1)\theta)^2 - 1} + \\ & + \left\{ \sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \left(\frac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} - \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{1 + \cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2 - 1} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m+1} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{j} \frac{1 + \cos((2m-2j+1)\theta\pi)}{((2m-2j+1)\theta)^2 - 1} \right\}. \quad (62) \end{aligned}$$

Учитывая (61) и (61'), приходим к выводу, что первые два слагаемые в правой части равенства (62) неотрицательны. Чтобы убедиться в неотрицательности и слагаемого в фигурных скобках, заметим, что это выражение равно величине

$$\sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty} \left(\binom{\lambda}{2m} \int_0^{\pi} \cos^{2m} \theta t \sin t dt - \binom{\lambda}{2m+1} \int_0^{\pi} \cos^{2m+1} \theta t \sin t dt \right),$$

которая заведомо неотрицательна. Этим неравенство (57) доказано при $\theta > 1$. Так как для любого $\lambda > 0$ $\sigma(\lambda) \leq 0$, то на основании (44) убеждаемся в справедливости (57) и в случае $\theta = 1$.

Доказательство теоремы 4. Покажем сначала, что

$$I_n(\lambda) \geq 2 \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (63)$$

Если $[\lambda]$ – четное число, то используя неравенства (44') и (59) для любого $\theta \geq 1$ имеем

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos \theta t)^{\lambda} \sin t dt = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\lambda}{m} \int_0^{\pi} \cos^m \theta t \sin t dt \geq$$

$$\geq \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \int_0^{\pi} \cos^{2m} \theta t \sin t dt = \int_0^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta t)^{\lambda} + (1 - \cos \theta t)^{\lambda}}{2} \sin t dt. \quad (64)$$

При $\lambda \geq 1$ функция u^{λ} выпукла вниз, поэтому

$$\frac{(1 + \cos \theta t)^{\lambda} + (1 - \cos \theta t)^{\lambda}}{2} \geq 1$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta t)^{\lambda} + (1 - \cos \theta t)^{\lambda}}{2} \sin t dt \geq \int_0^{\pi} \sin t dt = 2. \quad (65)$$

Сопоставляя формулы (64) и (65) и учитывая произвольность выбора параметра $\theta \geq 1$, получаем (63). Если $[\lambda]$ нечетное число, то используя неравенство (57) и замечая, что в этом случае

$$\sigma(\lambda) = - \sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \int_0^{\pi} \cos^{2m} \theta t \sin t dt \quad ([\lambda] - \text{нечетно}),$$

имеем

$$I_n(\lambda) \geq \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \sigma(\lambda) = \sum_{m=0}^{[\lambda/2]} \binom{\lambda}{2m} \int_0^{\pi} \cos^{2m} \theta t \sin t dt \geq 2. \quad (66)$$

Неравенство (63) доказано. Покажем, далее, что

$$I_n(\lambda) \geq 1 + 2^{\lambda-1}, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (67)$$

Поскольку в этом случае $[\lambda] = 0$, то из (57) и (15) следует, что

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &\geq \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{2}{(2(m-j))^2 - 1} = \\ &= 2(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}) = 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \left(\frac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} - 1 \right) \\ &= 1 + 2^{\lambda-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \left(\frac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} - 1 \right). \end{aligned} \quad (68)$$

В силу (59') и неравенства $\binom{2m}{m} \leq 2^{2m-1}$, $m \in N$ приходим к заключению, что сумма в правой части (68) неотрицательна и, следовательно, справедливо (67).

Объединяя (63) и (67) при $\lambda = \frac{kp}{2}$, $k \in N$, $p \in [1, \infty)$, имеем

$$I_n\left(\frac{kp}{2}\right) \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (69)$$

Поэтому в силу (14) и (69)

$$K_{n,k}(\pi)_{S^p} \leq \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \left(\frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{1/p}, \quad (70)$$

откуда и следует (16).

2. Обратные теоремы.

Теорема 6. Если $f \in S^p$, $p \geq 1$, то для любых натуральных k и n справедливо неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^p} \leq \frac{\pi^k}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^n (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) E_\nu^p(f)_{S^p} \right)^{1/p}. \quad (71)$$

Доказательство. Пусть $f \in S^p$, и $u \in [0, \pi/n]$. Тогда, с учетом (19),

$$\begin{aligned} \|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p}^p &= 2^{\frac{kp}{2}} \sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p (1 - \cos \nu u)^{\frac{kp}{2}} = 2^{kp} \sum_{|\nu| \leq n-1} |\hat{f}(\nu)|^p \left| \sin \frac{\nu u}{2} \right|^{kp} + \\ &+ 2^{kp} \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p \left| \sin \frac{\nu u}{2} \right|^{kp}. \end{aligned} \quad (72)$$

Ясно, что второе слагаемое правой части (72) не превышает величины

$$2^{kp} \sum_{|\nu| \geq n} |\hat{f}(\nu)|^p = 2^{kp} E_n^p(f)_{S^p}$$

и

$$\begin{aligned} 2^{kp} \sum_{|\nu| \leq n-1} |\hat{f}(\nu)|^p \left| \sin \frac{\nu u}{2} \right|^{kp} &= 2^{kp} \sum_{\nu=1}^{n-1} (|\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p) \sin^{kp} \frac{\nu u}{2} \leq \\ &\leq \left(\frac{\pi}{n} \right)^{kp} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{kp} (|\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p}^p \leq 2^{kp} E_n^p(f)_{S^p} + \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{kp} (|\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p). \quad (73)$$

Далее нам понадобится следующее утверждение, которое проверяется непосредственно.

Лемма 1. Пусть сходится числовой ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}.$$

Тогда для любой последовательности α_{ν} , $\nu \in N$ при всех натуральных m и M , $m \leq M$ справедливо равенство

$$\sum_{\nu=m}^M \alpha_{\nu} c_{\nu} = \alpha_m \sum_{\nu=m}^{\infty} c_{\nu} + \sum_{\nu=m+1}^M (\alpha_{\nu} - \alpha_{\nu-1}) \sum_{i=\nu}^{\infty} c_i - \alpha_M \sum_{\nu=M+1}^{\infty} c_{\nu}. \quad (74)$$

Полагая в (74) $\alpha_{\nu} = \nu^{kp}$, $c_{\nu} = |\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p$, $m = 1$ и $M = n-1$, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{kp} (|\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p) = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (|\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p) + \right. \\ & + \sum_{\nu=2}^{n-1} (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) \sum_{i=\nu}^{\infty} (|\hat{f}(i)|^p + |\hat{f}(-i)|^p) - (n-1)^{kp} \sum_{\nu=n}^{\infty} (|\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p) \Big) = \\ & = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) E_{\nu}^p(f)_{S^p} - (n-1)^{kp} E_n^p(f)_{S^p} \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p}^p & \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) E_{\nu}^p(f)_{S^p} - (n-1)^{kp} E_n^p(f)_{S^p} \right) + \\ & + 2^{kp} E_n^p(f)_{S^p} \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp} \sum_{\nu=1}^n (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) E_{\nu}^p(f)_{S^p}, \end{aligned} \quad (76)$$

откуда и вытекает (71).

При каждом фиксированном $k \in N$ на всем пространстве S^p , $p \in [1, \infty)$ неравенство (71) по порядку улучшено быть не может. Действительно, для любой $f \in S^p$, при любых $k, n \in N$

$$\begin{aligned} \omega_k^p(f, \frac{\pi}{n})_{S^p} &\geq \|\Delta_{\frac{\pi}{n}}^k f(\cdot)\|_{S^p}^p = 2^{kp} \sum_{\nu \in Z} |\hat{f}(\nu)|^p \left| \sin \frac{\nu\pi}{2n} \right|^{kp} \geq \\ &\geq 2^{kp} \sum_{|\nu| \leq n} |\hat{f}(\nu)|^p \left| \sin \frac{\nu\pi}{2n} \right|^{kp} \geq \left(\frac{2}{n}\right)^{kp} \sum_{\nu=1}^n \nu^{kp} (|\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p). \end{aligned} \quad (77)$$

Применяя к последней сумме равенство (74) при $\alpha_\nu = \nu^{kp}$, $c_\nu = |\hat{f}(\nu)|^p + |\hat{f}(-\nu)|^p$, $m = 1$ и $M = n$, получим

$$\omega_k^p(f, \frac{\pi}{n})_{S^p} \geq \frac{2^{kp}}{n^{kp}} \left(\sum_{\nu=1}^n (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) E_\nu^p(f)_{S^p} - n^{kp} E_{n+1}^p(f)_{S^p} \right). \quad (78)$$

Если f — тригонометрический полином T_n степени не выше n , то $E_{n+1}(T_n)_{S^p} = 0$, поэтому в силу (71) и (78)

$$\begin{aligned} \frac{2^k}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^n (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) E_\nu^p(T_n)_{S^p} \right)^{1/p} &\leq \omega_k(T_n, \frac{\pi}{n})_{S^p} \leq \\ &\leq \frac{\pi^k}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^n (\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}) E_\nu^p(T_n)_{S^p} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Так как $\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp} \leq kp\nu^{kp-1}$, то из (71) получаем

$$\omega_k(f, \frac{\pi}{n})_{S^p} \leq \frac{\pi^k (kp)^{1/p}}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{kp-1} E_\nu^p(f)_{S^p} \right)^{1/p}. \quad (71')$$

Отсюда, в частности вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если последовательность наилучших приближений $E_n(f)_{S^p}$ функции f из S^p , $1 \leq p < \infty$ при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет соотношению

$$E_n(f)_{S^p} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то для любых $k \in N$

$$\omega_k(f, t)_{S^p} = \begin{cases} O(t^\alpha), & \text{когда } \alpha < k, \\ O(t^k |\ln t|^{1/p}), & \text{когда } \alpha = k, \\ O(t^k), & \text{когда } \alpha > k. \end{cases}$$

Для пространств L_p 2π -периодических, интегрируемых в p -й степени функций с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

неравенства типа (71') получены в работе [8] (см. также [9, с. 351]).

3. Конструктивные характеристики классов функций, определяемых k -ми модулями непрерывности.

Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) принадлежит классу Φ , и писать $\varphi \in \Phi$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\varphi(t)$ непрерывна на $[0, \pi]$;
- 2) $\varphi(t)$ монотонно возрастает;
- 3) $\varphi(0) = 0$.

Обозначим через H_{k,S^p}^ω , $k \in N$, $\omega \in \Phi$ класс всех функций $f \in S^p$, $1 \leq p < \infty$, для которых

$$\omega_k(f, t)_{S^p} \leq C\omega(t), \quad (79)$$

где C – какая-нибудь положительная константа, вообще говоря различная для различных функций.

Скажем, что некоторая функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию (B_r) , $r \geq 1$, если

$$\sum_{\nu=1}^n \nu^{r-1} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left(n^r \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Условие (B_r) при $r \in N$ было введено в работах Н.К. Бари (см., напр., [10–12]).

Теорема 7. Пусть $\omega(t) \in \Phi$ такова, что $\omega^p(t)$, $p \geq 1$ удовлетворяет условию (B_{kp}) . Тогда для того, чтобы функция $f \in S^p$ принадлежала классу H_{k,S^p}^ω необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f)_{S^p} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Пусть $f \in H_{k,S^p}^\omega$. Согласно теореме 4

$$E_n(f)_{S^p} = O(\omega_k(f, \frac{1}{n})_{S^p}), \quad f \in S^p, \quad (80)$$

поэтому из (79) вытекает (80). С другой стороны, согласно (71')

$$\omega_k(f, \frac{1}{n})_{S^p} \leq \frac{A_k}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{kp-1} E_\nu^p(f)_{S^p} \right)^{1/p}, \quad f \in S^p$$

следовательно, с учетом (79), получим

$$\omega_k(f, \frac{1}{n})_{S^p} = O\left(\frac{1}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{kp-1} \omega^p\left(\frac{1}{\nu}\right) \right)^{1/p}\right). \quad (81)$$

Поскольку ω^p удовлетворяет условию (B_{kp}) , то

$$\sum_{\nu=1}^n \nu^{kp-1} \omega^p\left(\frac{1}{\nu}\right) = O(n^{kp} \omega^p\left(\frac{1}{n}\right)). \quad (82)$$

Сопоставляя формулы (81) и (82), приходим к соотношению (79).

Функция $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha < r$ удовлетворяет условию (B_r) . Поэтому, обозначая через H_{k,S^p}^α класс H_{k,S^p}^ω при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq k$, получаем

Следствие 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < k$. Для того, чтобы функция $f \in S^p$ принадлежала классу H_{k,S^p}^α , $p \geq 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f)_{S^p} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

4. Замечания для случая $p \in (0, 1)$.

Определение пространств S^p имеет смысл при всех $p > 0$. В случае $p \in (0, 1)$ оно представляет собой линейное метрическое пространство с метрикой

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{S^p} = \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\nu) - \hat{g}(\nu)|^p \right)^{1/p}.$$

Также как и в случае $p \geq 1$, для функции $f \in S^p$, $p \in (0, 1)$ через $E_n(f)_{S^p}$ обозначим ее наилучшее приближение тригонометрическими многочленами t_{n-1} порядка $n - 1$ в метрике S^p , а через

$\omega_k(f, t)_{S^p}$, $p \in (0, 1)$ – ее k -й модуль непрерывности, т.е.

$$E_n(f) = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_{S^p}, \quad \omega_k(f, t)_{S^p} = \sup_{|u| \leq t} \|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p}, \quad p \in (0, 1), \quad k \in N.$$

Анализируя доказательства теорем 1, 2 и 3, можно убедиться, что условие $1 \leq p < \infty$ не принципиально и может быть заменено условием $0 < p < \infty$, при этом утверждения всех трех теорем остаются в силе.

Аналогом теоремы 4 в случае, когда $p \in (0, 1)$ является следующее утверждение.

Теорема 4'. Если $f \in S^p$, $p \in (0, 1)$, то

$$E_n(f)_{S^p} \leq \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/p} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^p}, \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (83)$$

Доказательство этого утверждения базируется на неравенствах (14), которые, как уже отмечалось, справедливы и в случае $0 < p < 1$, а также неравенствах (63) и (67) при $\lambda = \frac{kp}{2}$, $k \in N$, $p \in (0, 1)$. При этих ограничениях имеем

$$I_n\left(\frac{kp}{2}\right) \geq 1,5,$$

что в силу (14) влечет (83).

Анализ доказательства теоремы 6 показывает, что для любой $f \in S^p$ неравенство (71) остается в силе и при $p \in (0, 1)$, а значит и в этом случае справедливо неравенство (71').

Отметим, что для пространств L_p , $p \in (0, 1)$ 2π -периодических функций, интегрируемых в p -й степени с метрикой

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_p^p = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^p dx$$

аналогичный результат был получен в [13] (см. также [14]). Там же были установлены и прямые теоремы, аналогичные теореме 4'.

Еще отметим, что полученные в работе результаты допускают обобщение и на случай модулей непрерывности, порядок которых задается произ-

вольным положительным числом k (в том числе и дробным), определяемых формулами

$$\omega_k(f, t)_{S^p} = \sup_{0 \leq |u| \leq t} \|\Delta_u^k f(\cdot)\|_{S^p} = \sup_{0 \leq |u| \leq t} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} f(\cdot + (k-i)u) \right\|_{S^p}.$$

При этом, в частности, теоремы 1–3, 6 и 7 остаются справедливыми и в случае, когда k — произвольное положительное число.

1. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_{φ}^p . — Киев, 2000. — 52 с. — (Препр./ НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
2. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_{φ}^p // Укр. мат.журн. — 2001. — 53, № 3. — С. 392 — 416.
3. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_{φ}^p в разных метриках// Укр. мат. журн. — 2001. — 53, № 8. — С1121 — 1146.
4. *Черных Н.И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИ АН СССР. — 1967. — 88. — С. 71–74.
5. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 //Матем. заметки. — 1967. — 20, № 3. — С. 513 — 522.
6. *Бабенко А.Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 //Матем. заметки. — 1986. — 39, № 5. — С. 651 — 664.
7. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
8. *Тиман М.Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p //Матем. сборник. — 1958. — 46, № 1. — С. 125–132.
9. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. — 624с.
10. *Бари Н.К.* О наилучшем приближении тригонометрическими поли-

номами двух сопряженных функций//Изв. Ан СССР. Сер. матем. — 1955. — 19. — С. 285 — 302.

11. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций//Труды Моск.матем.общества. — 1956. — 5. — С. 483 — 522.

12. *Стечкин С.Б.* Избранные труды: Математика. — М.: Наука. Физматлит, 1998. — 384с.

13. *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ //Матем. заметки. — 1975. — 18, № 5. — С. 641 — 658.

14. *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ //Теория приближения функций/Труды Международной конференции по теории приближения функций. Калуга, 24–28 июля 1975 г. — М.: Наука, 1977. — С. 200–204.