УДК 517.5

Степанец А.И., Сердюк А.С.

(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММАМИ ФУРЬЕ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Asymtotic equalities are found for upper bounds of approximations by Fourier sums and for best approximations in metrics C and L_1 on classes of convolutions of periodic functions admitting regular continuation to fixed strip of complex plane.

Знайдено асимптотичні рівності для верхніх граней наближень сумами Фур'є та для найкращих наближень в метриках C і L_1 на класах згорток періодичних функцій, що допускають регулярне продовження у фіксовану смугу комплексної площини.

В работе продолжаются исследования аппроксимационных свойств классов $L^{\bar\psi}\mathfrak{N}$ 2π-периодических суммируемых функций, которые вводятся следующим образом (см.[1]).

Пусть $f(\cdot)$ – 2π-периодическая интегрируема на периоде функция ($f \in L$) и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \qquad (1)$$

– ее ряд Фурье.

Пусть, далее, $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \dots$, – произвольные системы действительных чисел, $\psi_1(0) = 1$. Если для данной функции $f(\cdot)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k)A_k(f;x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f;x), \quad \tilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx \qquad (2)$$

является рядом Фурье некоторой функции $F(\cdot)$, то эту функцию назовем $\bar\psi$-интегралом функции $f(\cdot)$ и будем писать $F(x) = \mathcal{J}^{\bar\psi}(f;x)$. Множество $\bar\psi$-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^{\bar\psi}$; если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество функций $f \in L$, то $L^{\bar\psi}\mathfrak{N}$ обозначает множество $\bar\psi$-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Если C – подмножество непрерывных функций из L, то полагаем $C \cap L^{\bar\psi}\mathfrak{N} = C^{\bar\psi}\mathfrak{N}$.

Если $F(x) = \mathcal{J}^{\bar\psi}(f;x)$, то функцию $f(\cdot)$ естественно назвать $\bar\psi$-производной функции $F(\cdot)$. При этом мы пишем $f(x) = D^{\bar\psi}(F;x) = F^{\bar\psi}(x)$.

В [1] показано, что если пара $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такова, что

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} \neq 0 \ \ \forall k \in N, \qquad (3)$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx \qquad (4)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Psi(x)$ (при этом мы пишем $\bar\psi \in$

$\mathscr{L}$), то $\forall f \in L^{\bar{\psi}}$ почти всюду выполняется равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(x-t)\Psi(t)dt \overset{df}{=} \frac{a_0}{2} + (f^{\bar{\psi}} * \Psi)(x), \tag{5}$$

в котором a_0 – свободный член разложения Фурье функции $f(\cdot)$.

В работе будут использованы также классы $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$, которые определяются следующим образом (см.[2, с.33]).

Пусть $f \in L$ и ряд (1) – ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi = \psi(k)$ и $\bar{\beta} = \beta_k$ – произвольные фиксированные последовательности действительных чисел. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}(a_k \cos(kx + \beta_k \frac{\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \beta_k \frac{\pi}{2})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_k \frac{\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(f;x) - \frac{\sin \beta_k \frac{\pi}{2}}{\psi(k)} \tilde{A}_k(f;x) \tag{6}$$

является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции $f^{\psi}_{\bar{\beta}}(\cdot)$, то ее называют $(\psi, \bar{\beta})$-производной функции $f(\cdot)$. Множество всех функций из L, обладающих $(\psi, \bar{\beta})$-производными, обозначается через $L^{\psi}_{\bar{\beta}}$. Если $f \in L^{\psi}_{\bar{\beta}}$ и, кроме того, $f^{\psi}_{\bar{\beta}} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$– некоторое подмножество из $L^0 = \{f : \ \ f \in L, \ \ f \perp 1\}$, то полагают $f \in L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$. В случае, когда выполняется тождество $\beta_k \equiv \beta$, то $(\psi, \bar{\beta})$-производная обозначается через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$, а множества $L^{\psi}_{\bar{\beta}}$ и $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ – соответственно через L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Кроме того, полагают

$$C^{\psi}_{\bar{\beta}} = C \cap L^{\psi}_{\bar{\beta}}, \ \ C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}, \ \ C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}.$$

В [1] показано, что всякая $(\psi, \bar{\beta})$-производная функции $f \in L$ является и $\bar{\psi}$-производной, если компоненты $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ подобраны согласно равенствам

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta_k \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta_k \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

и любая $\bar{\psi}$-производная есть $(\psi, \bar{\beta})$-производной, если параметры $\psi(k)$ и $\beta(k)$ определить формулами

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}, \;\; \cos\beta_k\frac{\pi}{2} = \psi_1(k)/\psi(k), \;\; \sin\beta_k\frac{\pi}{2} = \psi_2(k)/\psi(k). \quad (8)$$

В обоих случаях выполняются равенства

$$L^{\bar{\psi}} = L^{\psi}_{\bar{\beta}}, \;\; L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N} \;\; \forall\mathfrak{N} \in L^0. \quad (9)$$

В [2] показано, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \beta_k\frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Psi_{\bar{\beta}}(t)$, то элементы $f(\cdot)$ множества $L^{\psi}_{\bar{\beta}}$ почти всюду представимы равенствами

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)\Psi_{\bar{\beta}}(t)dt. \quad (11)$$

При каждом фиксированном $q \in [0,1]$ через $\mathscr{D}_q$ обозначим множество последовательностей $\psi(k)$, $k \in N$, для которых

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q. \quad (12)$$

Основные результаты данной работы будут получены для классов $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$, определяющие параметры $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ которых таковы, что последовательности $\psi(k) = (\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k))^{1/2}$ принадлежат к множеству $\mathscr{D}_q$ при некотором $q \in [0,1)$. В этом случае множества $C^{\bar{\psi}}$ и $C^{\psi}_{\bar{\beta}}$ состоят из 2π-периодических функций $f(x)$, допускающих регулярное продолжение в полосу $|\mathrm{Im} z| \le \ln 1/q$ (см.,напр. [2, с.35]).

Важным для дальнейшего примером ядер вида (10), коэффициенты $\psi(k)$ которых удовлетворяют условию (12), являются ядра

$$P_{q,\bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k\cos(kt - \beta_k\frac{\pi}{2}), \;\; q \in (0,1), \;\; \beta_k \in R, \quad (13)$$

которые при $\beta_k \equiv \beta$ являются известными ядрами Пуассона и обозначаются через $P_{q,\beta}(\cdot)$.

Классы $L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$, порождаемые ядрами (13) обозначаются через $L^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$, а соответствующие $(\psi,\bar\beta)$-интегралы – через $\mathcal{J}^{q}_{\bar\beta}(f;x)$.

Введем еще ряд обозначений. Как обычно L_p, $1 \le p \le \infty$ будет обозначать пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|f\|_p$, где при $p \in [1,\infty)$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = (\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{1/p},$$

так, что $L_1 = L$, а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty \overset{df}{=} \|f\|_M = \operatorname{ess\,sup} |f(t)|.$$

Единичный шар в L_p обозначаем через U_p; кроме того полагаем

$$L^{\bar\psi} U^0_p = L^{\bar\psi}_p, \;\; L^{\psi}_{\bar\beta} U^0_p = L^{\psi}_{\bar\beta,p}, \;\; U^0_p = \{\varphi : \;\; \varphi \in U_p, \;\; \varphi \perp 1\}.$$

Через $\omega(t) = \omega(f;t)$ и $\omega_p(t) = \omega_p(f;t)$ обозначим соответственно модули непрерывности функций $f \in C$ и $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$ в пространствах C и L_p :

$$\omega(t) = \omega(f;t) = \sup_{0 \le h \le t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_C,$$

$$\omega_p(t) = \omega_p(f;t) = \sup_{|h| \le t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p, \;\; 1 \le p < \infty.$$

Тогда положив

$$H_\omega = \{\varphi \in C, \;\; \omega(\varphi;t) \le \omega(t)\}, \;\; H_{\omega_p} = \{\varphi \in L_p, \;\; \omega_p(\varphi;t) \le \omega(t)\}, \;\; 1 \le p < \infty,$$

где $\omega = \omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, будем рассматривать еще классы $C^{\bar\psi} H_\omega$, $C^{\psi}_{\bar\psi} H_\omega$, $L^{\bar\psi} H_{\omega_p}$ и $L^{\psi}_{\bar\psi} H_{\omega_p}$.

Пусть теперь, $f \in L$, $S_n(f;x) = S_n(f)$ – частные суммы Фурье функции f порядка n :

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \;\; (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\rho_n(f;x) \stackrel{df}{=} f(x) - S_{n-1}(f;x).$$

Пространство тригонометрических многочленов t_{n-1}, порядок которых не превосходит $n-1$ обозначим через $\mathscr{T}_{2n-1}$. Величина

$$E_n(f)_s \stackrel{df}{=} \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_s$$

есть наилучшее приближение f в метрике L_s тригонометрическими полиномами порядка $n-1$.

В настоящей работе исследуются величины $\|\rho_n(f;x)\|_s$ и $E_n(f)_s$, $f \in L^{\bar\psi}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – некоторое фиксированное подмножество из L_p, $0 \le p, s \le \infty$, а также величины

$$\mathscr{E}_n(L^{\bar\psi}\mathfrak{N})_s = \sup_{f\in L^{\bar\psi}\mathfrak{N}} \|f - S_{n-1}(f)\|_s$$

и

$$E_n(L^{\bar\psi}\mathfrak{N})_s = \sup_{f\in L^{\bar\psi}\mathfrak{N}} E_n(f)_s = \sup_{f\in L^{\bar\psi}\mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_s$$

с целью получения для них асимптотических равенств, когда $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$.

Основная идея работы отражена в следующей ниже лемме 1, суть которой состоит в том, что остатки $\rho_n(\Psi_{\bar\beta})$ ядра $\Psi_{\bar\beta}(t)$ вида (10) при $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, при $n \to \infty$ ведут себя примерно так же, как и остатки $\rho_n(P^q_{\bar\beta})$ ядра $P^q_{\bar\beta}(t)$. Это позволяет, в частности, сводить задачи о получении асимптотических равенств для величин $\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ и $E_n(L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ к аналогичным задачам для величин $\mathscr{E}_n(L^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ и $E_n(L^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ соответственно. В ряде важных случаев для величин $\mathscr{E}_n(L^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ и $E_n(L^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ асимптотические равенства (и даже их точные значения) известны. В этих случаях появляется возможность выписать асимптотические равенства и для величин $\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ и

$E_n(L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$. В частности, таким путем, отправляясь от известных результатов С.М.Никольского [3] и С.Б.Стечкина [4] удается получить асимптотические равенства для величин $\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ и $\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1$ для всех $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$. Ранее этот случай не был охвачен.

Более подробно познакомиться с известными результатами, связанными с получением асимптотических равенств для величин $\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ и историей этого вопроса можно, например, по работам [1–11].

1. Оценка остатка ряда Фурье для аналитических функций. Следующая теорема устанавливает связь между нормами в пространстве L_s остатков ряда Фурье $\bar\psi$-интегралов $\mathcal{J}^{\psi}_{\bar\beta}(\varphi)$, $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$ и остатков ряда Фурье интегралов $\mathcal{J}^{q}_{\bar\beta}(\varphi)$, $\varphi \in L_p$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p, s \le \infty$ *и* $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тогда* $\forall f \in L^{\psi}_{\bar\beta}L_p$ *при* $n \to \infty$ *имеет место формула*

$$\|\rho_n(f)\|_s = \psi(n)(q^{-n}\|\rho_n(\mathcal{J}^{q}_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta}))\|_s + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\bar\beta})_p}{(1-q)^2}), \tag{14}$$

в которой $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$, $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная относительно параметров* $n, p, s, q, \psi(k)$ *и* β_k.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующее утверждение, которое, возможно, представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $\psi(k)$, $k \in N$ *– произвольная числовая последовательность из* $\mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$. *Тогда для любой последовательности действительных чисел* γ_k, $k = 1, 2, \ldots$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt-\gamma_k) = \psi(n)(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_n(t)), \tag{15}$$

при этом для величины $r_n(t) = r_n(\psi, \bar\gamma, t)$, *начиная с некоторого номера*

n_0, *имеет место оценка*

$$|r_n(t)| \le \frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)}, \tag{16}$$

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n} |\delta_k|, \ \ \delta_k = \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q. \tag{16$'$}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi(n+i)\cos((n+i)t-\gamma_{n+i}) =$$

$$= \psi(n)(\cos(nt-\gamma_n) + \sum_{i=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)}\cos((n+i)t-\gamma_{n+i})) =$$

$$= \psi(n)(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_n(t)),$$

где

$$r_n(t) = r_n(\psi,\bar\gamma,t) = \sum_{i=1}^{\infty}(\prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)} - q^i)\cos((n+i)t-\gamma_{n+i}). \tag{17}$$

Докажем неравенство (16). Вследствие (17) имеем

$$|r_n(t)| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\tilde q_i - q^i|, \tag{18}$$

где

$$\tilde q_i = \prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)}. \tag{19}$$

В случае, когда $\tilde q_i \ge q^i$ будет

$$|\tilde q_i - q^i| = \tilde q_i - q^i \le \prod_{l=0}^{i-1}(q+\varepsilon_n) - q^i = (q+\varepsilon_n)^i - q^i.$$

Если же $\tilde q_i < q^i$, то в силу выпуклости функции t^k, $k = 1, 2, \ldots, t > 0$,

$$|\tilde q_i - q^i| = q^i - \tilde q_i \le \prod_{l=0}^{i-1}(q-\varepsilon_n) - q^i = (q-\varepsilon_n)^i - q^i \le (q+\varepsilon_n)^i - q^i.$$

Таким образом, всегда

$$|\tilde{q}_i - q^i| \leq (q + \varepsilon_n)^i - q^i. \qquad (20)$$

Учитывая вытекающий из (12) и $(16')$ факт монотонного убывания к нулю последовательности ε_n, замечаем, что начиная с некоторого номера n_0 будет $\varepsilon_n < 1 - q$. Поэтому, учитывая (18) и (20), при $n \geq n_0$ находим

$$|r_n(t)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}((q + \varepsilon_n)^i - q^i) = \frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in L^{\psi}_{\bar{\beta}} L_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда в силу (11) почти всюду

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\bar{\beta},n}(t) f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)dt, \qquad (21)$$

где

$$\Psi_{\bar{\beta},n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}).$$

Положив

$$P_{q,\bar{\beta},n}(t) \overset{df}{=} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}), \ \ 0 < q < 1, \ \ \beta_k \in R, \ \ k \in N,$$

на основании (21) и (15) заключаем, что почти всюду

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(n)(q^{-n} P_{q,\bar{\beta},n}(t) + r_n(t)) f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)dt =$$

$$= \psi(n)(\frac{q^{-n}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{q,\bar{\beta},n}(t) f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)dt + R_n(f;x)) =$$

$$= \psi(n)(q^{-n}\rho_n(\mathcal{J}^{q}_{\bar{\beta}}(f^{\psi}_{\bar{\beta}};x)) + R_n(f;x)), \qquad (22)$$

где $R_n(f;x)\stackrel{df}{=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} r_n(t)f_{\bar\beta}^{\psi}(x-t)dt$, а функция $r_n(t)$ определена формулой (17) при $\gamma_k=\beta_k$, $k\in N$.

Покажем, что для любого тригонометрического полинома $t_{n-1}\in\mathscr{T}_{2n-1}$

$$\|R_n(f)\|_s\le 4\pi\|f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1}\|_p\|r_n\|_\infty,\ \ 1\le p,s\le\infty. \tag{23}$$

Воспользовавшись неравенством Хаусдорфа–Юнга для сверток [12,с.67]:

$$\|y*z\|_s\le\frac{1}{\pi}\|y\|_p\|z\|_r,\ \ 1\le p\le s\le\infty,$$
$$\frac{1}{r}=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{s},\ \ y\in L_p,\ \ z\in L_r,$$

при $p\le s$ получим

$$\|R_n(f)\|_s=\|(f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1})*r_n\|_s\le\frac{1}{\pi}\|f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1}\|_p\|r_n\|_r. \tag{24}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\frac{1}{r}=(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{s})\in[0,1]$, то

$$\|r_n\|_r\le\|r_n\|_\infty(2\pi)^{1/r}\le 2\pi\|r_n\|_\infty. \tag{25}$$

Сопоставляя оценки (24) и (25), получим

$$\|R_n(f;x)\|_s\le 2\|f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1}\|_p\|r_n\|_\infty. \tag{26}$$

Пусть теперь $1\le s\le p\le\infty$. В силу неравенства Гельдера

$$\forall f\in L_p\ \ \|f\|_s\le(2\pi)^{\frac{p-s}{ps}}\|f\|_p,\ \ 1\le s\le p\le\infty,$$

поэтому

$$\|R_n(f)\|_s=\|(f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1})*r_n\|_s\le 2\pi\|(f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1})*r_n\|_p\le$$
$$\le 2\|f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1}\|_p\|r_n\|_1\le 4\pi\|f_{\bar\beta}^{\psi}-t_{n-1}\|_p\|r_n\|_\infty \tag{27}$$

и формула (23) вытекает из оценок (26) и (27).

Выбирая в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ полином $t^*_{n-1}(t)$ наилучшего приближения в пространстве L_p функции $f^\psi_{\bar\beta}(\cdot)$, а также применяя неравенство (16), получаем следующую оценку

$$\|R_n(f;x)\|_s = O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^\psi_{\bar\beta})_p}{(1-q)^2}, \quad 1 \le p, s \le \infty. \tag{28}$$

Объединяяя формулы (22) и (28), получаем равенство (14).

Полагая в формуле (14) $s = p$, $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in R$ и применяя асимптотическое неравенство (3) статьи 2 настоящего сборника, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$ *и* $\beta \in R$. *Тогда* $\forall f \in L^\psi_\beta L_p$ *справедливо асимптотическое неравенство*

$$\|\rho_n(f)\|_p \le \psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2})E_n(f^\psi_\beta)_p,$$

в котором $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$, $\mathbf{K}(q) = \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$ *– полный эллиптический интеграл первого рода, а* $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* $n, p, q, \beta, \psi(k)$ *и по* $f \in L^\psi_\beta L_p$.

Если $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, то в силу признака Даламбера сходимости числовых положительных рядов, ряд (10) сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, если $f \in C^\psi_{\bar\beta} L_p$, то равенство (11), а с ним и равенства (21) и (22) выполняются в каждой точке x. Поэтому из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема $1'$. *Пусть* $1 \le p \le \infty$ *и* $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тогда для любой функции* $f \in C^\psi_{\bar\beta}$, *где* X *есть* L_p, $1 \le p \le \infty$ *или* C *при* $n \to \infty$ *справедливо равенство*

$$\|\rho_n(f)\|_C = \psi(n)(q^{-n}\|\rho_n(\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^\psi_{\bar\beta}))\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^\psi_{\bar\beta})_X}{(1-q)^2}), \tag{14'}$$

в котором $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$, $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная относительно* $n, p, q, \psi(k)$ *и* β_k.

Записывая формулу $(14')$ при $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in R$ в случае, когда $f \in C^\psi_\beta C$ и применяя теорему 2 статьи 2 настоящего сборника, приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. *Пусть* $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$ *и* $\beta \in R$. *Тогда если* $f \in C^\psi_\beta C$, *то*

$$\|\rho_n(f)\|_C \le \psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2})E_n(f^\psi_\beta)_C.$$

При этом для любой функции $f \in C^\psi_\beta C$ *при каждом натуральном* n *в пространстве* $C^\psi_\beta C$ *найдется функция* $F(x) = F(f;n;x)$ *такая, что* $E_n(F^\psi_\beta) = E_n(f^\psi_\beta)$ *и для нее выполняется равенство*

$$\|\rho_n(F;x)\|_C = \psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2})E_n(F^\psi_\beta)_C.$$

В двух последних формулах $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$, $\mathbf{K}(q) = \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$, *а* $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные по* $n, q, \beta, \psi(k)$ *и* $f \in C^\psi_\beta C$.

Рассматривая верхние грани обеих частей соотношения (14) по классам $L^\psi_{\bar\beta,p}$, а соотношения $(14')$ – по классам $C^\psi_{\bar\beta}$, и учитывая, что

$$\sup_{f\in L^\psi_{\bar\beta,p}} \|\rho_n(f;\cdot)\|_s = \sup\{\|\rho_n(\mathcal{J}^\psi_{\bar\beta}(\varphi;\cdot)\|_s : \|\varphi\|_p \le 1,\ \varphi \perp 1\},$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p, s \le \infty$ *и* $\psi \in \mathscr{D}_q$, $\psi(k) > 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathscr{E}_n(L^\psi_{\bar\beta,p})_s = \psi(n)(q^{-n}\mathscr{E}_n(L^q_{\bar\beta,p})_s + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}), \tag{29}$$

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C = \psi(n)(q^{-n}\mathscr{E}_n(C^{q}_{\bar\beta,p})_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}), \tag{30}$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\geq n}|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$, *а* $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные относительно* $n, p, s, q, \psi(k)$ *и* β_k.

Величины $q^{-n}\mathscr{E}_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s$ и $q^{-n}\mathscr{E}_n(C^{q}_{\bar\beta,p})_C$ при $n\to\infty$ являются ограниченными сверху и снизу некоторыми положительными числами, зависящими, возможно, только от q, p и s. Действительно,

$$\mathscr{E}_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s = \sup_{\substack{\|\varphi\|_p\leq 1\\ \varphi\perp 1}} \|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt-\frac{\beta_k\pi}{2})\|_s \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{\|\varphi\|_p\leq 1\\ \varphi\perp 1}} C^{(1)}_{p,s}\|\varphi\|_p\|\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt-\frac{\beta_k\pi}{2})\|_C \leq C^{(1)}_{p,s}\sum_{k=n}^{\infty}q^k =$$

$$= C^{(1)}_{p,s}\frac{q^n}{1-q},$$

следовательно,

$$q^{-n}\mathscr{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s \leq C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1}.$$

Чтобы получить нужную оценку снизу, рассмотрим функцию $f_n(x)$,

$$f_n(x) = q^n\|\sin t\|_p^{-1}\sin(nx-\frac{\beta_n\pi}{2}),$$

которая, очевидно, находится в $L^{q}_{\bar\beta,p}$.

$$q^{-n}\mathscr{E}_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s \geq q^{-n}\|\rho_n(f_n;x)\|_s = \frac{\|\sin t\|_s}{\|\sin t\|_p} = C^{(2)}_{p,s}.$$

Так, что

$$C^{(2)}_{p,s} \leq q^{-n}\mathscr{E}_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s \leq C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1},\ \ C^{(i)}_{p,s}>0,\ \ i=1,2. \tag{31}$$

Такими же рассуждениями доказывается, что и

$$C^{(2)}_{p} \leq q^{-n}\mathscr{E}_n(C^{q}_{\bar\beta,p})_C \leq C^{(1)}_{p}(1-q)^{-1},\ \ C^{(i)}_{p}>0,\ \ i=1,2. \tag{31$'$}$$

Поскольку последовательность ε_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то, с учетом (29) и (30), в случаях, когда известны асимптотические равенства для величин $\mathscr{E}_n(L^q_{\bar\beta,p})_s$ и $\mathscr{E}_n(C^q_{\bar\beta,p})_C$, соотношения (14) и $(14')$ дают возможность записать аналогичные равенства и для величин $\mathscr{E}_n(L^\psi_{\bar\beta,p})_s$ и $\mathscr{E}_n(C^\psi_{\bar\beta,p})_C$ соответственно.

Согласно определению множеств $\mathscr{D}_q$ (см. (12)), из того, что $\psi \in \mathscr{D}_{q_1}$, а $\varphi \in \mathscr{D}_{q_2}$, $0 \le q_1, q_2 \le 1$ вытекает, что $\psi_1 \cdot \psi_2 \in \mathscr{D}_{q_3}$ при $q_3 = q_1 q_2$ (в частности, если $\psi \in \mathscr{D}_{q_1}$, а $\varphi \in \mathscr{D}_1$, то $\psi \cdot \varphi \in \mathscr{D}_q$, $0 \le q \le 1$). Таким образом, к множеству $\mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$ принадлежат любые последовательности вида $\psi(k) = q^k\varphi(k)$, где $0 \le q < 1$ и $\varphi \in \mathscr{D}_1$. С другой стороны, если $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 \le q < 1$, то представив $\psi(k)$ в виде

$$\psi(k) = q^k \frac{\psi(k)}{q^k} = q^k\varphi(k),$$

где $\varphi(k) \stackrel{df}{=} \dfrac{\psi(k)}{q^k}$, убеждаемся, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} = 1.$$

Поэтому справедливо утверждение.

Утверждение 1. *Для того, чтобы последовательность $\psi(k)$ принадлежала множеству $\mathscr{D}_q$, $0 \le q < 1$ необходимо и достаточно чтобы имело место представление*

$$\psi(k) = q^k\varphi(k),$$

в котором $\varphi(k)$ – некоторая последовательность из $\mathscr{D}_1$.

В частности к $\mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$ принадлежат последовательностит $\psi^*(k) = q^k k^r$, $r \in (-\infty, +\infty)$; $\psi^{**}(k) = q^k e^{\alpha k^r}$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $r \in (0,1)$ и др.

В случае, когда $\beta_k = \beta$, $k \in N$, $\beta \in R$, как уже отмечалось, ядра $P_{q,\bar\beta}(t)$

являются ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt-\frac{\beta\pi}{2}),\ \ 0<q<1,\ \ \beta\in R. \tag{32}$$

Классы $L^q_{\bar{\beta},p}$ в этом случае обозначим через $L^q_{\beta,p}$.

В 1946 г. С.М.Никольский [3, с. 221–223] нашел асимптотические равенства для величин $\mathscr{E}_n(C^q_{\beta,\infty})_C$ и $\mathscr{E}_n(L^q_{\beta,1})_1$.

Следующее утверждение воспроизводит результат С.М.Никольского с уточненным С.Б. Стечкиным [4, с.139] остаточным членом.

Теорема А. *Пусть* $n\in N$, $\beta\in R$, $0<q<1$. *Тогда при* $n\to\infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{E}_n(C^q_{\beta,\infty})_C \\ \mathscr{E}_n(L^q_{\beta,1})_1\end{array}\right\}=q^n(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)}), \qquad (33),\ (33')$$

в которых $\boldsymbol{K}(q)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$ *– полный эллиптический интеграл 1-го рода, а* $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные относительно параметров* n,q *и* β.

Объединяя теорему 2 и теорему А, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть классы* $C^\psi_{\beta,\infty}$ *и* $L^\psi_{\beta,1}$ *порождены ядром* $\Psi_\beta(t)$

$$\Psi_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt-\frac{\beta\pi}{2}),\ \ \beta\in R,\ \ \psi(k)\geq 0,\ \ \psi\in\mathscr{D}_q,\ \ 0<q<1. \tag{34}$$

Тогда при $n\to\infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty})_C \\ \mathscr{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_L\end{array}\right\}=\psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q)+O(1)(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})), \qquad (35),\ (35')$$

в которых $\varepsilon_n=\sup\limits_{k\geq n}|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q|$, $\boldsymbol{K}(q)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$, *а* $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные относительно параметров* n,β *и* ψ.

Замечание 1. *Асимптотические равенства (35) и* $(35')$ *остаются в силе, если в теореме 3 условие* $0<q<1$ *заменить условием* $0\leq q<1$.

Действительно, формально полагая $q = 0$ *и замечая, что* $\boldsymbol{K}(0) = \pi/2$, *оценки (35) и* $(35')$ *запишем в виде*

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{E}_n(C_{\beta,\infty})_C \\ \mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1\end{array}\right\} = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\psi(n+1). \qquad \begin{array}{r}(36)\\(36')\end{array}$$

Истинность асимптотических равенств (36) и $(36')$ *для* $\psi \in \mathscr{D}_0$, $\psi(k) > 0$ *вытекает, например, из [1,с.1103–1104] (см.также [13,14]).*

Условиям теоремы 3 удовлетворяют ядра Пуассона бигармонического уравнения

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{1-q^2}{2}k)q^k\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2}),\ \ 0 < q < 1,\ \ \beta \in R, \qquad (37)$$

а также ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2}),\ \ 0 < q < 1,\ \ \beta \in R. \qquad (38)$$

Легко проверить, что для коэффициентов $\psi(k)$ ядер $B_{q,\beta}(t)$ и $N_{q,\beta}(t)$

$$|\varepsilon_k| = |\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q| \le \frac{q}{k},\ \ k \in N. \qquad (39)$$

Следовательно, из теоремы 3 и соотношений (39) получаем утверждения.

Следствие 3. *Пусть классы* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *и* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *порождены ядром* $B_{q,\beta}(t)$ *вида (37),* $n \in N$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C \\ \mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1\end{array}\right\} = q^n(1 + \frac{1-q^2}{2}n)(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)^2})),$$

в которых величины $O(1)$ *равномерно ограничены относительно* n, q *и* β.

Следствие 4. *Пусть классы* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *и* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *порождены ядром* $N_{q,\beta}(t)$ *вида (38),* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C \\ \mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1\end{array}\right\} = \frac{q^n}{n}(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)^2})),$$

в которых величины $O(1)$ равномерно ограничены относительно n, q и β.

Анализируя доказательство теоремы А, содержащееся в [4, с.139–142], несложно убедиться, что используемые в нем методы позволяют получить асимптотические оценки величин $\mathscr{E}_n(C^q_{\bar\beta,\infty})_C$ и $\mathscr{E}_n(L^q_{\bar\beta,1})_1$ для классов $C^q_{\bar\beta,\infty}$ и $L^q_{\bar\beta,1}$, порождаемых ядрами $P_{q,\bar\beta}(t)$ вида (13), у которых $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. При этом форма получаемых оценок по сравнению со случаем $\beta_k = \beta$, $k \in N$, $\beta \in R$, не изменится. А именно, справедлива

Теорема Б. *Пусть $n \in N$, $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. Тогда при $n \to \infty$ имеют место асимптотические равенства*

$$\left.\begin{array}{c}\mathscr{E}_n(C^q_{\bar\beta,\infty})_C \\ \mathscr{E}_n(L^q_{\bar\beta,1})_1\end{array}\right\} = q^n\Big(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\Big), \qquad \begin{array}{r}(40)\\(40')\end{array}$$

в которых $\boldsymbol{K}(q) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$, а $O(1)$ – величины, равномерно ограниченные относительно параметров n, q и β.

Сопоставление теоремы 2 и теоремы Б позволяет сформулировать следующий аналог теоремы 3.

Теорема $3'$. *Пусть классы $C^\psi_{\bar\beta,\infty}$ и $L^\psi_{\bar\beta,1}$ порождены ядром $\Psi_{\bar\beta}(t)$*

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\Big(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\Big), \quad \psi(k) > 0,$$

у которого $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$.

Тогда при $n \to \infty$

$$\left.\begin{array}{c}\mathscr{E}_n(C^q_{\bar\beta,\infty})_C \\ \mathscr{E}_n(L^q_{\bar\beta,1})_1\end{array}\right\} = \psi(n)\Big(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\Big(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\Big), \qquad \begin{array}{r}(41)\\(41')\end{array}$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{k \ge n}\Big|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\Big|, \quad \boldsymbol{K}(q) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}},$$

и $O(1)$ – величины, равномерно ограниченные относительно параметров n, β и ψ.

Теорема 3 допускает следующее обобщение на классы $C_\infty^{\bar\psi}$ и $L_1^{\bar\psi}$.

Теорема 4. *Пусть классы* $C_\infty^{\bar\psi}$ *и* $L_1^{\bar\psi}$ *порождены ядром*

$$\Psi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt), \tag{42}$$

в котором

$$\psi_i\in\mathscr{D}_{q_i},\ \ 0<q_i<1,\ \ i=1,2. \tag{43}$$

Тогда при $n\to\infty$ *выполняются асимптотические равенства*

$$\mathscr{E}_n(C_\infty^{\bar\psi})_C=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)}\left(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q)+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{44}$$

$$\mathscr{E}_n(L_1^{\bar\psi})_1=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)}\left(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q)+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{44$'$}$$

в которых $q=\max\{q_1,q_2\}$, $\boldsymbol{K}(q)=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2u}}$,

$$\varepsilon_n=\begin{cases}\max\limits_{i=1,2}\{\varepsilon_n^{(i)}\}, & \text{если}\quad q_1=q_2,\\ \varepsilon_n^{(1)}, & \text{если}\quad q_1>q_2,\\ \varepsilon_n^{(2)}, & \text{если}\quad q_1<q_2,\end{cases}$$

$$\varepsilon_n^{(i)}=\sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)}-q_i\right|,\ \ i=1,2,$$

и $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные относительно* n, ψ_1 *и* ψ_2.

Доказательство. Пусть $f\in C_\infty^{\bar\psi}$. Тогда

$$\rho_n(f,x)=f(x)-S_{n-1}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(t)\varphi(x-t)dt, \tag{45}$$

где

$$\Psi_n(t)=\sum_{k=n}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt)=G_n(t)+H_n(t),\ \ n\in\mathbb{N};$$

$$G_n(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\psi_1(k)\cos kt,\ \ H_n(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\psi_2(k)\sin kt.$$

На основании условий (43) и леммы 1, примененной к каждой из функций $G_n(t)$ и $H_n(t)$, можем записать

$$\Psi_n(t) = G_n(t) + H_n(t) = \psi_1(n)(q_1^{-n} P_{q_1,0,n}(t) + R_n(\psi_1;t))+$$

$$+\psi_2(n)(q_2^{-n} P_{q_2,1,n}(t) + R_n(\psi_2;t)) = \psi_1(n) q_1^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q_1^k \cos kt +$$

$$+\psi_2(n) q_2^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q_2^k \sin kt + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n^{(1)}\psi_1(n)}{(1-q_1)^2} + \frac{\varepsilon_n^{(2)}\psi_2(n)}{(1-q_2)^2}\right), \tag{46}$$

где

$$P_{q_1,0,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q_1^k \cos kt, \quad P_{q_2,1,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q_2^k \sin kt,$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \sup_{k\geq n} \left|\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i\right|, \quad i = 1,2.$$

Пусть сначала $q_1 = q_2 = q$, тогда из (46) следует, что

$$\Psi_n(t) = \psi(n)(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \left(\frac{\psi_1(n)}{\psi(n)} \cos kt + \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)} \sin kt\right)+$$

$$+O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}) = \psi(n)(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta_n \pi}{2}) + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}), \tag{47}$$

где $\varepsilon_n = \max\limits_{i=1,2}\{\varepsilon_n^{(i)}\}$, $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ и β_n – числа из промежутка $[0,4)$, определяемые равенствами

$$\cos\frac{\beta_n \pi}{2} = \frac{\psi_1(n)}{\psi(n)}, \quad \sin\frac{\beta_n \pi}{2} = \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)}.$$

На основании (45) и (47) заключаем, что

$$\mathscr{E}_n(C_\infty^{\bar\psi})_C = \sup_{f\in C_\infty^{\bar\psi}} \|\rho_n(f;x)\|_C =$$

$$= \sup_{\substack{\|\varphi\|_\infty \leq 1 \\ \varphi \perp 1}} \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(n)(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta_n\pi}{2}) + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\varphi(x-t)dt\right\|_C =$$

$$= \psi(n)(\sup_{\substack{\|\varphi\|_\infty \le 1 \\ \varphi \perp 1}} q^{-n} \| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{q,\beta_n,t}(t)\varphi(x-t)dt\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}) =$$

$$= \psi(n)(q^{-n}\mathscr{E}_n(C^q_{\beta_n,\infty})_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}). \qquad (48)$$

Учитывая равномерность величины $O(1)$ в равенстве (33) относительно параметра β, это равенство можно записать в виде

$$\mathscr{E}_n(C^q_{\alpha_n,\infty})_C = q^n(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}), \qquad (33')$$

где α_n, $n = 1, 2, \ldots$ – любые действительные числа. Воспользовавшись этим равенством при $\alpha_n = \beta_n$, из (48) получаем равенство (44).

Пусть теперь ,к примеру, $q_1 < q_2 = q$. Тогда в силу (43) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi_1(k+1)\psi_2(k)}{\psi_2(k+1)\psi_1(k)} = \frac{q_1}{q_2} < 1,$$

и, следовательно, для любого $\varepsilon \in (0, 1 - q_1/q_2)$ существует номер n_0 такой, что для всех $k \ge n_0$

$$\frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} \le \frac{q_1}{q_2} + \varepsilon, \;\; \varphi(k) := \frac{\psi_1(k)}{\psi_2(k)}. \qquad (49)$$

Отсюда вытекает, что для последовательностей

$$\alpha_k^{(1)} := |\frac{\psi_1(k)}{\psi(k)}|, \;\; \alpha_k^{(2)} := 1 - |\frac{\psi_2(k)}{\psi(k)}|$$

справедливы равенства

$$\alpha_k^{(i)} = O(1)(\frac{q_1}{q_2} + \varepsilon)^k, \;\; \varepsilon \in (0, 1 - \frac{q_1}{q_2}), \;\; i = 1, 2, \qquad (50)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная относительно k, q_1, q_2 и ε. Из соотношений (46) и (50) и очевидного неравенства

$$q_i^{-n}P_{q_i,\beta,n}(t) \le \frac{1}{1-q_i} \le \frac{1}{1-q}, \;\; \beta \in R, \;\; i = 1, 2$$

следует, что

$$\Psi_n(t) = \psi(n)\sum_{k=n}^{\infty}(\frac{\psi_1(n)}{\psi(n)}q_1^{k-n}\cos kt + \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)}q_2^{k-n}\sin kt) +$$

$$+O(1)(\frac{\varepsilon_n^{(1)}\psi_1(n)}{(1-q_1)^2}+\frac{\varepsilon_n^{(2)}\psi_2(n)}{(1-q_2)^2})=\psi(n)(q_2^{-n}P_{q_2,1,n}(t)\mathrm{sign}\psi_2(n)+$$

$$+O(1)(\frac{\varepsilon_n^{(2)}}{(1-q)^2}+\frac{\alpha_n}{1-q}(\frac{\varepsilon_n^{(1)}+\varepsilon_n^{(2)}}{1-q}+1)))=\psi(n)(q_2^{-n}P_{q_2,1,n}(t)\mathrm{sign}\psi_2(n)+$$

$$+O(1)(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{\alpha_n}{1-q})), \qquad (51)$$

где $\varepsilon_n=\varepsilon_n^{(2)}$ и $\alpha_n=\max\limits_{i=1,2}\{\alpha_n^{(i)}\}$.

Объединяя соотношения (45) и (51), и полагая $q_2=q$, получаем

$$\mathscr{E}_n(C_\infty^{\bar\psi})_C=\sup_{f\in C_\infty^{\bar\psi}}\|\rho_n(f;x)\|_C=$$

$$\psi(n)=(\sup_{\substack{\|\varphi\|_\infty\le1\\ \varphi\perp1}}q^{-n}\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{q,1,n}(t)\varphi(x-t)dt\|_C+O(1)(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{\alpha_n}{1-q}))=$$

$$=\psi(n)(q^{-n}\mathscr{E}_n(C_{1,\infty}^q)_C+O(1)(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{\alpha_n}{1-q})).$$

Отсюда, учитывая равенство (35) при $\beta=1$, и принимая во внимание, что в силу (50) $\alpha_n=o(1/n)$, находим

$$\varepsilon_n(C_\infty^{\bar\psi})_C=\psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q)+O(1)(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{\alpha_n}{1-q}))=$$

$$=\psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q)+O(1)(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})).$$

Этим соотношение (44) доказано и в случае, когда $q_1<q_2$. Ясно, что теми же рассуждениями (44) доказывается и когда $q_1>q_2$.

Следуя схеме установления соотношения (44) и используя вместо (33) равенство $(33')$, придем к равенству $(44')$. Теорема доказана.

Относительно условий (43) теоремы 4 отметим следующее. Если $q_1\ne q_2$, то, как вытекает из (49), отношение $\dfrac{\psi_1(k)}{\psi_2(k)}=\varphi(k)$ всегда имеет предел при $k\to\infty$, который равен либо 0 (когда $q_1<q_2$), либо $\pm\infty$ (когда $q_1>q_2$). Это значит, что определив последовательность действительных чисел β_k из промежутка $[0,4)$ при помощи равенств (8), можем гарантировать существование предела последовательности β_k при $k\to\infty$ на этом промежутке.

Если же $q_1=q_2=q$, то можно указать такие последовательности $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ из $\mathscr{D}_q$, что, определяемая ими на промежутке $[0,4)$, в соответствии с формулами (8), последовательность β_k, предела иметь не будет. Такими, например, будут последовательности

$$\psi_1(k)=q^k,\ \ \psi_2(k)=q^k\varphi(k),\ \ k\in N,\ \ 0<q<1,$$

где

$$\varphi(k)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-\dfrac{k}{2^{2\nu+1}}, & 2^{2\nu}\le k<2^{2\nu+1},\\ \dfrac{k}{2^{2(\nu+1)}}, & 2^{2\nu+1}\le k<2^{2(\nu+1)}, \nu=0,1,2,\dots\ .\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)}=1,$$

поэтому $\psi_1,\psi_2\in\mathscr{D}_q$. В то же время $\dfrac{1}{2}\le\varphi(k)\le 1\ \forall k\in N$ и при любом $\nu\in N\quad \varphi(2^{2\nu})=1$, а $\varphi(2^{2\nu+1})=1/2$. Следовательно, при $k\to\infty$ функция $\varphi(k)$ предела не имеет. Значит и соответствующая последовательность чисел β_k, задающаяся формулой $\beta_k=\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\varphi(k)$, будет лежать на промежутке $[\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ и в силу непрерывности на этом промежутке функции $\mathrm{tg}x$, предела иметь не будет.

Замечание 2. *Следуя схеме доказательства теоремы 4 и учитывая соотношения (36),* $(36')$, *(40) и* $(40')$, *нетрудно убедиться, что асимптотические равенства (44) и* $(44')$ *остаются в силе если условия (43) теоремы 4 заменить одним из следующих трех условий:*

$$1)\ \lim_{k\to\infty}\frac{\psi_1(k+1)}{\psi_1(k)}=q_1,\ \ |q_1|<1,\ \ |\frac{\psi_2(k+1)}{\psi_2(k)}|\le q_2,\ \ 0\le q_2<|q_1|;$$

$$2)\ \lim_{k\to\infty}\frac{\psi_2(k+1)}{\psi_2(k)}=q_2,\ \ |q_2|<1,\ \ |\frac{\psi_1(k+1)}{\psi_1(k)}|\le q_1,\ \ 0\le q_1<|q_2|;$$

$$3)\ \lim_{k\to\infty}\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)}=q_i,\ \ |q_i|<1,\ \ i=1,2,\ \ |q_1|=|q_2|$$

и положить $q=\max\{q_1,q_2\}$.

Аналог теоремы 2 имеет место и для классов, определяющихся модулями непрерывности. Рассматривая верхние грани обеих частей соотношения $(14')$ по классам $L^\psi_\beta H_{\omega_p}$ и $C^\psi_\beta H_\omega$ и учитывая, что

$$\sup_{f\in L^\psi_\beta H_{\omega_p}}\|\rho_n(f;\cdot)\|_s=\sup\{\|\rho_n(\mathcal{J}^\psi_\beta(\varphi;\cdot)\|_s:\ \varphi\in H_{\omega_p}\},$$

а также, что в силу неравенств Джексона в пространствах L_p и C (см. [2, с.227]) справедливы неравенства

$$\sup_{\varphi\in H_{\omega_p}}E_n(\varphi)_p\le K\omega_p(\frac{1}{n}),\ \ 1\le p<\infty,$$

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}E_n(\varphi)\le K\omega(\frac{1}{n}),$$

в которых K – абсолютная постоянная, приходим к следующему утверждению.

Теорема $2'$. *Пусть* $1\le s\le\infty$, $1\le p<\infty$ *и* $\psi\in\mathscr{D}_q$, $0<q<1$, $\psi(k)>0$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathscr{E}_n(L^\psi_\beta H_{\omega_p})_X=\psi(n)(q^{-n}\mathscr{E}_n(L^q_\beta H_{\omega_p})_X+O(1)\frac{\varepsilon_n\omega_p(n^{-1})}{(1-q)^2}),\tag{29'}$$

где X *есть* L_s *либо* C;

$$\mathscr{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega)_C=\psi(n)(q^{-n}\mathscr{E}_n(C^q_\beta H_\omega)_C+O(1)\frac{\varepsilon_n\omega(n^{-1})}{(1-q)^2}),\tag{30'}$$

где величины ε_n *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме 2.*

На основании равенства $(30')$, а также теоремы 1 статьи 1 настоящего сборника приходим к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть* $\psi\in\mathscr{D}_q$, $0<q<1$, $\psi(k)>0$, $\beta\in R$ *и* $\omega(t)$ *– произвольный модуль непрерывности. Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathscr{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega)=\psi(n)(\frac{4}{\pi^2}e_n(\omega)\mathbf{K}(q)+O(1)\frac{\omega(1/n)(\varepsilon_n+1/n)}{(1-q)^2}),$$

где

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int\limits_0^{\pi/2} \omega(\frac{2t}{n}) \sin t dt,$$

$\theta_\omega \in [1/2, 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ *– выпуклый модуль непрерывности;* $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n, q, β *и* $\psi(k)$.

2. Оценка для наилучших приближений аналитических функций. Следующая теорема устанавливает связь между наилучшими приближениями в метрике пространства L_s $\bar{\psi}$-интегралов $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{\psi}(\varphi)$, при $\psi \in \mathscr{D}_q$ и наилучшими приближениями интегралов $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{q}(\varphi)$ при $\varphi \in L_p$.

Теорема 6. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$ *и* $\psi(k) > 0$. *Тогда для любой* $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi} L_p$ *при* $n \to \infty$ *имеет место формула*

$$E_n(f)_s = \psi(n)(q^{-n} E_n(\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{q}(f_{\bar{\beta}}^{\psi}))_s + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_p}{(1-q)^2}), \;\; 1 \leq s < \infty. \qquad (52)$$

Если же $f \in C_{\bar{\beta}}^{\psi} L_p$, *то*

$$E_n(f)_C = \psi(n)(q^{-n} E_n(\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{q}(f_{\bar{\beta}}^{\psi}))_C + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_p}{(1-q)^2}), \qquad (52')$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k \geq n} |\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$, $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная относительно* $n, p, s, q, \psi(k)$ *и* β_k.

Доказательство. Докажем сначала равенство (52). В силу соотношений двойственности (см.,напр.[15, с. 42]),

$$\inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_s = \sup_{\substack{y \perp t_{n-1} \\ \|y\|_{s'} \leq 1}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) y(t) dt, \;\; 1 \leq s < \infty, \;\; \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \qquad (53)$$

Поэтому с учетом (22) и (53), имеем

$$E_n(f)_s = \sup_{\substack{y \perp t_{n-1} \\ \|y\|_{s'} \leq 1}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) y(t) dt = \sup_{\substack{y \perp t_{n-1} \\ \|y\|_{s'} \leq 1}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f; t) y(t) dt =$$

$$= \sup_{\substack{y \perp t_{n-1} \\ \|y\|_{s'} \le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(n)(q^{-n}\rho_n(\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta};x)) + R_n(f;x))y(x)dx =$$

$$= \psi(n) \sup_{\substack{y \perp t_{n-1} \\ \|y\|_{s'} \le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} (q^{-n}\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta};x) + R_n(f;x))y(x)dx, \tag{54}$$

где $R_n(f;x) = (r_n * f^{\psi}_{\bar\beta})(x)$, а $r_n(t)$ – функция, определена формулой (17) при $\gamma_k = \beta_k$, $k \in N$. Используя неравенство Гельдера, оценку (28) $\forall y \in U^0_{s'}$, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_n(f;x)y(x)dx \le \frac{1}{\pi}\|y\|_{s'}\|R_n(f;x)\|_s \le \frac{1}{\pi}\|R_n(f;x)\|_s =$$

$$= O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\bar\beta})_p}{(1-q)^2}. \tag{55}$$

Таким образом, в силу (54) и (55)

$$E_n(f)_s = \psi(n)\Big(\sup_{\substack{y \perp t_{n-1} \\ \|y\|_{s'} \le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} q^{-n}\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta};x)y(x)dx + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\bar\beta})_p}{(1-q)^2}\Big)$$

и для доказательства равенства (52) остается заметить, что в силу (53)

$$\sup_{\substack{y \perp t_{n-1} \\ \|y\|_{s'} \le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta};x)y(x)dx = E_n(\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta}))_s. \tag{56}$$

Доказательство равенства $(52')$ получается тем же путем, что и доказательство равенства (52). В этом случае соотношение двойственности имеет вид [15, с. 41]

$$\inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C = \sup_{\substack{g \in F^{\perp}_{n-1} \\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g) \le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dg(x), \tag{57}$$

где $F^{\perp}_{n-1}$ – множество функций $g(t)$ с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t)dg(t) = 0 \ \ \forall t_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}.$$

Учитывая соотношения (22) и (57), имеем

$$E_n(f)_C = \sup_{\substack{g\in F^{\perp}_{n-1} \\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f;x)dg(x) =$$

$$= \sup_{\substack{g\in F^{\perp}_{n-1} \\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(n)(q^{-n}\rho_n(\mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta};x)) + R_n(f;x))dg(x) =$$

$$= \psi(n) \sup_{\substack{g\in F^{\perp}_{n-1} \\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}} (q^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta};x)dg(x) + \int_{-\pi}^{\pi} R_n(f;x)dg(x)). \tag{58}$$

Но с учетом (28)

$$\sup_{\substack{g\in F^{\perp}_{n-1} \\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} R_n(f;x)dg(x) \le \|R_n\|_\infty \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g) \le \|R_n\|_\infty =$$

$$= O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\bar\beta})_p}{(1-q)^2}, \ \ 1 \le p \le \infty, \tag{59}$$

поэтому из (58) и (59) вытекает, что

$$E_n(f)_C = \psi(n)(q^{-n} \sup_{\substack{g\in F^{\perp}_{n-1} \\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{J}^q_{\bar\beta}(f^{\psi}_{\bar\beta};x)dg(x) + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\bar\beta})_p}{(1-q)^2}). \tag{60}$$

Применяя соотношения (57) к первому слагаемому правой части равенства (60), убеждаемся в справедливости $(52')$. Теорема доказана.

Рассматривая верхние грани обеих частей соотношений (52) и $(52')$ по классам $L^{\psi}_{\bar\beta,p}$ и $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$ и учитывая, что

$$\sup_{f\in L^{\psi}_{\bar\beta,p}} E_n(f)_s = \sup_{\substack{\|\varphi\|_p\le 1\\ \varphi\perp 1}} E_n(\mathcal{J}^{\psi}_{\bar\beta}(\varphi))_s,$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. *Пусть* $1\le p\le\infty$ *и* $\psi\in\mathscr{D}_q$, $0<q<1$, $\psi(k)>0$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,p})_s = \psi(n)(q^{-n}E_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}),\ 1\le s<\infty; \tag{61}$$

$$E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C = \psi(n)(q^{-n}E_n(C^{q}_{\bar\beta,p})_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}), \tag{61'}$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$, $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные относительно* $n,p,s,q,\psi(k)$ *и* β_k.

Величины $q^{-n}E_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s$, $1\le s<\infty$ и $q^{-n}E_n(C^{q}_{\bar\beta,p})_C$ при $n\to\infty$ являются ограниченными сверху и снизу некоторыми положительными числами, зависящими, возможно, только от q, p и s. Оценка сверху величины $q^{-n}E_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s$ следует из того, что $q^{-n}E_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s\le q^{-n}\mathscr{E}_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s\le C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1}$ (см.(31)). Чтобы получить нужную оценку снизу, достаточно заметить, что функция $f_n(x)=\|\sin t\|_p^{-1}q^n\cdot\sin(nx-\dfrac{\beta_n\pi}{2})$ принадлежит $L^{q}_{\bar\beta,p}$, $1\le p\le\infty$ и для нее наилучшее приближение в пространстве L_s, $1\le s<\infty$ среди полиномов $t_{n-1}\in\mathscr{T}_{2n-1}$ будет доставлять полином, тождественно равный нулю (см., например, предложения 3.3.3 и 3.3.4 из [15,с.56]). Следовательно

$$q^{-n}E_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s\ge q^{-n}E_n(f_n)_s = q^{-n}\|f_n\|_s = \frac{\|\sin t\|_s}{\|\sin t\|_\rho} = C^{(2)}_{p,s}.$$

Так что

$$C^{(2)}_{p,s}\le q^{-n}E_n(L^{q}_{\bar\beta,p})_s\le C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1},\ \ 1\le s<\infty, C^{(1)}_{p,s},\ C^{(2)}_{p,s}>0. \tag{62}$$

Используя такие же рассуждения, получим

$$C_p^{(2)} \le q^{-n} E_n(C^q_{\bar\beta,p})_C \le C_p^{(1)}(1-q)^{-1},\;\; C_p^{(1)}, C_p^{(2)} > 0. \tag{62'}$$

Поскольку последовательность ε_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то, с учетом (62) и $(62')$ в случае, когда известны асимптотические равенства для величин $E_n(L^q_{\bar\beta,p})_s$ и $E_n(C^q_{\bar\beta,p})_C$ соотношения (61) и $(61')$ дают возможность записать асимптотическое равенство и для величин $E_n(L^\psi_{\bar\beta,p})_s$ и $E_n(C^\psi_{\bar\beta,p})_C$.

К настоящему времени известны точные значения величин $E_n(L^q_{\beta,1})_1$ и $E_n(C^q_{\beta,\infty})_C$, $0<q<1$, $\beta \in R$ (при $\beta \in \mathbb{Z}$ см. [16], при $\beta \in R$ – [17]).

Теорема B. *Пусть* $0<q<1$, $\beta \in R$, $n \in N$. *Тогда*

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(L^q_{\beta,1})_1 = \frac{1}{\pi}E_n(P_{q,\beta})_1 = \|P_{q,\beta} * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_\infty =$$

$$= \frac{4}{\pi}\max_t \Big|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin((2\nu+1)t - \frac{\beta\pi}{2})\Big|. \tag{63}$$

Из равенств (63) вытекает, что

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(L^q_{\beta,1})_1 = \frac{4}{\pi}(q^n+\delta_n),\;\; |\delta_n| < \frac{q^{3n}}{3(1-q^{2n})}. \tag{64}$$

Соотношения (64), а также теорема 7 позволяют записать следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $\beta \in R$, $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0<q<1$, $\psi(k)>0$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\left.\begin{array}{c} E_n(C^\psi_{\beta,\infty})_C \quad (65)\\ E_n(L^\psi_{\beta,1})_1 \quad (65')\end{array}\right\} = \psi(n)\Big(\frac{4}{\pi} + O(1)\Big(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\Big)\Big),$$

где $\varepsilon_n = \max\limits_{k\ge n}\Big|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\Big|$, $O(1)$ – *равномерно ограниченная величина относительно* n, q, β *и* $\psi(k)$.

Анализируя доказательство теоремы B, содержащееся в [17, с. 128–129], можно убедиться, что равенства (63) останутся в силе, если вместо β, фигурирующего в определении классов $C^q_{\beta,\infty}$ и $L^q_{\beta,1}$ и ядра $P_{q,\beta}$, взять последовательность $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. Т.е.справедлива

Теорема Г. *Пусть* $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $k \in N$. *Тогда*

$$E_n(C^q_{\bar\beta,\infty})_C = E_n(L^q_{\bar\beta,1})_1 = \frac{1}{\pi}E_n(P_{q,\bar\beta})_1 = \|P_{q,\bar\beta} * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_\infty =$$

$$= \frac{4}{\pi}\max_t \Big|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin((2\nu+1)t - \frac{\beta\pi}{2})\Big|. \tag{66}$$

Сопоставляя теорему 7 и теорему Г, получаем следующее утверждение.

Теорема $8'$. *Пусть* $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in R$, $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$, $k \in N$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\left.\begin{aligned} E_n(C^\psi_{\bar\beta,\infty})_C \quad (67)\\ E_n(L^\psi_{\bar\beta,1})_1 \quad (67')\end{aligned}\right\} = \psi(n)\Big(\frac{4}{\pi} + O(1)\Big(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\Big)\Big),$$

где $\varepsilon_n = \max_{k\ge n}\Big|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\Big|$, $O(1)$ – *величины, равномерно ограниченные относительно* n, q, β *и* $\psi(k)$.

Замечание 3. *Асимптотические равенства (67) и* $(67')$, *остаются в силе и в случае* $q = 0$. *При этом в качестве* β_k *могут выступать произвольные последовательности действительных чисел, т.е. в случае, когда* $\psi \in \mathscr{D}_0$, $\psi(k) > 0$, $\beta_k \in R$, $k \in N$ *при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\left.\begin{aligned} E_n(C^\psi_{\bar\beta,\infty})_C, \quad (68)\\ E_n(L^\psi_{\bar\beta,1})_1 \quad (68')\end{aligned}\right\} = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\psi(n+1),$$

в которых $O(1)$ – *величины, равномерно ограниченные относительно* n, β_k *и* $\psi(k)$.

Действительно, так как

$$E_n(C^\psi_{\bar\beta,\infty})_C \le \mathscr{E}_n(C^\psi_{\bar\beta,\infty})_C, \quad E_n(L^\psi_{\bar\beta,1})_1 \le \mathscr{E}_n(L^\psi_{\bar\beta,1})_1,$$

то оценки сверху величин $E_n(C^\psi_{\bar\beta,\infty})_C$ и $E_n(L^\psi_{\bar\beta,1})_1$ вытекают из (36) и $(36')$.

С другой стороны, как следует из теоремы 1 работы [18], если $\psi \in \mathscr{D}_0$, $\psi(k) > 0$, то найдется номер n_0 такой, что для любых натуральных $n \ge n_0$

будут выполняться неравенства

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \geq \|\Psi_{\bar\beta} * \sin n(\cdot)\|_{\infty}, \qquad (69)$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L_1) \geq \|\Psi_{\bar\beta} * \mathrm{sign} n(\cdot)\|_{\infty}, \qquad (69')$$

в которых $d_N(\mathfrak{N}, X)$ – N-мерный поперечник по Колмогорову, т.е. аппроксимационная характеристика центрально-симметричного множества $\mathfrak{N}$ банахового пространства X, определяемая равенством

$$d_N(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_N \subset X} \sup_{v \in \mathfrak{N}} \inf_{\xi \in F_N} \|v - \xi\|_X,$$

где точная нижняя грань берется по всем подпространствам F_N пространства X, размерность которых не превышает $N \in N$ ($\mathrm{dim} F_N \leq N$). Сочетание оценок (69) и $(69')$ с очевидными неравенствами

$$E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C \geq d_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C),$$

$$E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_1 \geq d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L_1)$$

дает нужные оценки снизу величин $E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C$ и $E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_1$. Таким образом, верхние грани приближений при помощи сумм Фурье на классах $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ и $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, $\psi \in \mathscr{D}_0$, $\psi(k) > 0$ асимптотически совпадают со значениями верхних граней значения наилучших приближений и колмогоровских поперечников для этих классов в пространствах C и L соответственно.

Сопоставляя соотношения (35) и $(35')$ с (65) и $(65')$ видим, что если $\psi(k) > 0$ и $\psi \in \mathscr{D}_q$, $0 < q < 1$, то верхние грани приближений в метриках C и L, доставляемых суммами Фурье и многочленами наилучших приближений, на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $L^{\psi}_{\beta,1}$ перестают асимптотически совпадать, оставаясь равными по порядку. При этом аппроксимативные свойства сумм Фурье, по сравнению с полиномами наилучших приближений, ухудшаются с уменьшением гладкости приближаемых функций, что выражается в увеличении значений $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C}{E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_C}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathscr{E}_n(E^{\psi}_{\beta,1})_1}{E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1}$ от 1 до $+\infty$ при росте q от 0 до 1.

1. *Степанец А.И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов//Укр.мат.журн. – 1997. – 49, N 8. – С. 1069 – 1113.

2.Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем//Изв.АН СССР. Сер. мат. – 1946. – 10, N 3. – С. 207 – 256.

4. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций//Труды МИАН СССР. – 1980. – 145. – С. 126 – 151.

5. *Kolmogoroff A.* Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen//Ann. Math. (2), – 1935. – 36, N 2. – С. 521 – 526.

6. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами//Труды МИАН СССР. – 1945. – 15. – С. 1–76.

7. *Ефимов А.В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье//Изв. АН СССР. Сер.мат. – 1960. – 24, N 2. – С. 243 – 296.

8. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. 1//Труды МИАН СССР. – 1961. – 62. С. 61 – 97.

9. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.

10. *Степанец А.И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) I//Укр.мат.журн. – 1998. – 50, N 2. – С. 274 – 291.

11. *Степанец А.И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) II//Там же. – 1998. – 50, N 3. – С. 388 – 400.

12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т.1. – 615 с.

13. *Теляковский С.А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости//Укр.мат.журн. – 1989. – 41, N 4. – С. 510 – 518.

14. *Степанец А.И.* Уклонения сумм Фурье на классах целых функций //Укр.мат.журн. – 1989. – 41, N 6. – С. 783 – 789.

15. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

16. *Крейн М.Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций//ДАН СССР. – 1938. – 18, N 4–5.–С. 245 – 249.

17. *Шевалдин В.Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона//Мат. заметки. – 1992. – 51, N 6. – С. 126 – 136.

18. *Сердюк А.С.* Поперечники та найкращі наближення класів згорток періодичних функцій//Укр.мат.журн. – 1999. – 51, N 5. – С. 674 – 687.

Степанец А.И., Сердюк А.С.

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ ФУРЬЕ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Stepanets A.I., Serdyuk A.S.

APPROXIMATIONS BY FOURIER SUMS AND BEST APPROXIMATIONS ON CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS