

**НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ФУР'Є**

**APPROXIMATIONS OF ANALYTIC FUNCTIONS BY FOURIES SUMS**

УДК 517.5

© 1999

О.І.Степанець, А.С.Сердюк

## Наближення аналітичних функцій сумами Фур'є

Нехай  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$  – простір  $2\pi$ -періодичних сумовних на  $(0, 2\pi)$  в  $p$ -й степені функцій  $f(\cdot)$ , в якому норма визначена за допомогою рівності,  $\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = (\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{1/p}$ ;  $L_\infty$  – простір  $2\pi$ -періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій  $f(\cdot)$  із нормою  $\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$ ;  $C$  – простір неперервних на всій дійсній осі  $2\pi$ -періодичних функцій  $f(\cdot)$  з нормою  $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$ .

Нехай  $\mathfrak{N} \subset L_1$ . Через  $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$  будемо позначати клас сумовних  $2\pi$ -періодичних функцій  $f$ , які допускають зображення у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x-t)\varphi(t)dt \stackrel{df}{=} \frac{a_0}{2} + (\Psi * \varphi)(x), \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

де  $\Psi(t)$  – фіксоване ядро із  $L_1$  з рядом Фур'є

$$S[\Psi] = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k) \cos kt + \psi_2(k) \sin kt), \quad \psi_i(k) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

а  $\varphi(t) \in \mathfrak{N}$ . При цьому будь-яку функцію  $f(\cdot)$ , що зображається у вигляді (1) будемо називати  $\bar{\psi}$ -інтегралом функції  $\varphi(\cdot)$  і позначати  $f(x) = \mathcal{J}^{\bar{\psi}}(\varphi, x)$ ; функцію  $\varphi(\cdot)$  в інтегральному зображенні (1) домовимось називати  $\bar{\psi}$ -похідною функції  $f(\cdot)$  і позначати  $\varphi(t) = f^{\bar{\psi}}(t)$  [1].

Через  $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$  позначимо клас сумовних  $2\pi$ - періодичних функцій  $f(\cdot)$  вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt,$$

де  $\Psi_\beta(t) \in L_1$  і

$$S[\Psi_\beta] = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi(k) \cos(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}), \quad \psi(k), \beta_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

а  $\varphi \in \mathfrak{N}$ . При цьому будь-яку функцію  $f(\cdot)$ , що зображається у вигляді (3) будемо називати  $(\psi, \bar{\beta})$ -інтегралом функції  $\varphi(\cdot)$  і позначати  $f(\cdot) = \mathcal{J}_{\bar{\beta}}^\psi(\varphi, \cdot)$ ; функцію  $\varphi(t)$  у зображенні (3) називають  $(\psi, \bar{\beta})$ -похідною функції  $f(\cdot)$  і позначають  $\varphi(\cdot) = f_{\bar{\beta}}^\psi(\cdot)$ . У випадку, коли  $\beta_k = \beta, k = 1, 2, \dots, \beta \in \mathbb{R}$  класи  $L_{\bar{\beta}}^\psi \mathfrak{N}$  позначимо через  $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ . Зрозуміло, що при виконанні умов

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

$$\cos \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}}, \quad \sin \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (6)$$

класи  $L^\psi \mathfrak{N}$  і  $L_{\bar{\beta}}^\psi \mathfrak{N}$  співпадають (див. [2, с.33]).

При кожному фіксованому  $q \in [0, 1]$  позначимо через  $\mathcal{D}_q$  множину послідовностей  $\psi(k), k = 1, 2, \dots$ , що задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q. \quad (7)$$

На протязі усієї роботи будемо вважати, що коефіцієнти Фур'є  $\psi_1(k)$  і  $\psi_2(k)$  ядра  $\Psi(t)$  в формулі (1) такі, що послідовність  $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}, k \in \mathbb{N}$  належить множині  $\mathcal{D}_q, 0 \leq q < 1$ . В цьому випадку функціональні класи  $L^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}$  (як і  $L_{\bar{\beta}}^\psi \mathfrak{N}, \psi \in \mathcal{D}_q, 0 \leq q < 1$ ) складаються із  $2\pi$ -періодичних аналітичних на дійсній осі функцій  $f(z) = f(x + iy)$ , що допускають регулярне продовження у смугу  $|y| \leq \ln \frac{1}{q}$  (див., наприклад, [2, с. 35]).

Важливим для подальшого прикладом ядер вигляду (4), коефіцієнти  $\psi(k)$  яких задовольняють умову (7), є ядра

$$P_{q, \bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}), \quad q \in (0, 1), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

котрі при  $\beta_k \equiv \beta$  є відомими ядрами Пуассона і позначаються через  $P_{q,\beta}(t)$ . Класи  $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ , що породжуються ядрами (8) позначимо через  $L_{\bar{\beta}}^q\mathfrak{N}$ , а відповідні  $(\psi, \bar{\beta})$  – інтеграли  $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{\psi}(\varphi, \cdot)$  – через  $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^q(\varphi, \cdot)$ .

Якщо  $\mathfrak{N} = U_p^0$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , де  $U_p^0 \stackrel{df}{=} \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0\}$ , класи  $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$  і  $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$  домовимось позначати відповідно через  $L_p^{\bar{\psi}}$  і  $L_{\bar{\beta},p}^{\psi}$ .

Нехай  $f \in L_1$ ,  $S_n(f, \cdot)$  – часткові суми Фур'є порядку  $n$  функції  $f(\cdot)$ ,

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

і  $\rho_n(f, x) = f(x) - S_{n-1}(f, x)$ .

В даній роботі досліджуються величини  $\|\rho_n(f, x)\|_s$ ,  $f \in L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ , де  $\mathfrak{N}$  – деякі фіксовані підмножини з  $L_p$ ,  $0 \leq p, s \leq \infty$ , а також величини

$$\mathcal{E}_n(L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N})_s = \sup_{f \in L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}} \|f - S_{n-1}(f)\|_s \quad (9)$$

з метою отримання для них асимптотичних рівностей, коли  $\psi \in \mathcal{D}_q$ ,  $0 < q < 1$  і  $\psi = \psi(k)$  визначаються рівністю (5).

Основна ідея роботи полягає у тому, що при  $n \rightarrow \infty$  залишки  $\rho_n(\Psi_{\bar{\beta}}; \cdot)$  ядра  $\Psi_{\bar{\beta}}(t)$  вигляду (4), коли  $\psi \in \mathcal{D}_q$ ,  $0 < q < 1$  поведуть себе подібно відповідним залишкам  $\rho_n(P_{\bar{\beta}}^q; \cdot)$  ядер  $P_{\bar{\beta}}^q(t)$  вигляду (8). Це, зокрема, дозволяє зводити задачу про отримання асимптотичних рівностей для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N})_s$  до аналогічної задачі для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\bar{\beta}}^q\mathfrak{N})_s$ . В ряді важливих випадків для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\bar{\beta}}^q\mathfrak{N})_s$  асимптотичні рівності відомі. У цих випадках з'являється можливість записати асимптотичні рівності і для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N})$ . Зокрема, таким шляхом, відштовхуючись від відомих результатів С.М.Нікольського [3] і С.Б.Стєчкіна [4], вдається отримати асимптотичні рівності для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\bar{\beta},p}^{\psi})_p$ ,  $p = 1, \infty$ , при довільних  $\psi \in \mathcal{D}_q$ ,  $0 < q < 1$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Раніше цей випадок не був охоплений (більш детально

познайомитись з історією отримання асимптотичних рівностей для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N})_s$  можна, наприклад, по роботах [1–13]).

Наступна теорема установлює зв'язок між нормами в просторі  $L_s$  залишків ряду Фур'є  $(\psi, \bar{\beta})$ -інтегралів  $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{\psi}(\varphi; \cdot)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}_q$ ,  $0 < q < 1$  і залишків ряду Фур'є інтегралів  $\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^q(\varphi; \cdot)$ ,  $\varphi \in L_p$ .

**Теорема 1.** *Нехай  $1 \leq p, s \leq \infty$  і  $\psi \in \mathcal{D}_q$ ,  $0 < q < 1$ ,  $\psi(k) > 0$ . Тоді  $\forall f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi}L_p$  при  $n \rightarrow \infty$  має місце формула*

$$\|\rho_n(f, \cdot)\|_s = \psi(n)(q^{-n}\|\rho_n(\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^q(f_{\bar{\beta}}^{\psi}), \cdot)\|_s + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_p}{(1-q)^2}), \quad (10)$$

в якій  $\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} |\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$ ,  $E_n(\varphi)_n \stackrel{df}{=} \inf_{t_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|$  – найкраще наближення функції  $\varphi$  тригонометричними многочленами  $t_{n-1}$  порядку  $n-1$ ,  $O(1)$  – величина, рівномірно обмежена відносно  $n, p, s, q, \psi(k)$  і  $\beta_k$ .

**Доведення** теореми 1 ґрунтується на наступному твердженні, яке, можливо, має самостійний інтерес.

**Лема 1.** *Нехай  $\psi(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  – довільна числова послідовність із  $\mathcal{D}_q$ ,  $0 < q < 1$ . Тоді для будь-якої послідовності дійсних чисел  $\bar{\gamma} = \gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  виконується рівність*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \gamma_k) = \psi(n)(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt - \gamma_k) + r_n(t)), \quad (11)$$

при цьому для величини  $r_n(t) = r_n(\psi, \bar{\gamma}, t)$  починаючи з деякого номера  $n_0$  справедлива оцінка

$$|r_n(t)| \leq \frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)}.$$

Розглядаючи верхні межі обох частин співвідношення (10) по класах  $L_{\bar{\beta},p}^{\psi}$  і враховуючи, що

$$\sup_{f \in L_{\bar{\beta},p}^{\psi}} \|\rho_n(f, \cdot)\|_s = \sup_{\substack{\|\varphi\|_p \leq 1 \\ \varphi \perp 1}} \|\rho_n(\mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{\psi}(\varphi), \cdot)\|_s,$$

приходимо до наступного твердження.

**Теорема 2.** *Нехай  $1 \leq p, s \leq \infty$  і  $\psi \in \mathcal{D}_q$ ,  $\psi(k) > 0$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s = \psi(n)(q^{-n}\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^q)_s + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}), \quad (12)$$

де  $O(1)$  – величина, рівномірно обмежена відносно  $n, p, s, q, \psi(k)$  і  $\beta_k$ .

Неважко переконатись, що при  $n \rightarrow \infty$  величини  $q^{-n}\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^q)_s$  обмежені зверху і знизу деякими додатними константами, залежними, можливо, тільки від  $q, p$  і  $s$ . Тому оскільки послідовність  $\varepsilon_n$  прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ , у випадках, коли відома асимптотична рівність для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^q)_s$  співвідношення (12) дає можливість записати асимптотичну рівність і для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$ .

У випадку, коли  $\beta_k = \beta$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , як вже відзначалось, ядра  $P_{q,\beta}(t)$  є ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2}), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Класи  $L_{\beta,p}^q$  в цьому випадку позначимо через  $L_{\beta,p}^q$ . В 1946 р. С.М.Нікольський знайшов асимптотичні рівності для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^q)_p$ ,  $p = 1, \infty$ , [3, с.221–223]. На основі згаданого результату С.М.Нікольського (з уточненням С.Б.Стєчкіним [4, с. 139] залишковим членом) і теореми 2 отримуємо наступне твердження.

**Теорема 3.** *Нехай  $\psi \in \mathcal{D}_q$ ,  $0 < q < 1$ ,  $\psi(k) > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  мають місце асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(L_{\beta,\infty}^\psi)_C = \psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\mathbb{K}(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})), \quad (14)$$

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi)_1 = \psi(n)(\frac{8}{\pi^2}\mathbb{K}(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})), \quad (15)$$

в котрих  $\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} |\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|$ ,  $\mathbb{K}(q) = \int_0^{\pi/2} (1 - q^2 \sin^2 u)^{-1/2} du$  – повний

еліптичний інтеграл першого роду,  $O(1)$  – величини, рівномірно обмежені відносно параметрів  $n, \beta$  і  $\psi(k)$ .

Як випливає із [10,11] (див. також [1]), асимптотичні рівності (14) і (15) залишаються в силі і у випадку, коли  $q = 0$ .

Теорема 3 допускає наступне узагальнення на класи  $L_\infty^{\bar{\psi}}$  і  $L_1^{\bar{\psi}}$ .

**Теорема 4.** Нехай класи  $L_\infty^{\bar{\psi}}$  і  $L_1^{\bar{\psi}}$  породжені ядром  $\Psi(t)$  вигляду (2), у якого  $\psi_i \in \mathcal{D}_{q_i}$ ,  $0 < q_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  виконуються асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}_n(L_\infty^{\bar{\psi}})_C = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)} \left( \frac{8}{\pi^2} \mathbb{K}(q) + O(1) \left( \frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right),$$

$$\mathcal{E}_n(L_1^{\bar{\psi}})_1 = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)} \left( \frac{8}{\pi^2} \mathbb{K}(q) + O(1) \left( \frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right),$$

в котрих  $q = \max\{q_1, q_2\}$ ,  $\mathbb{K}(q) = \int_0^{\pi/2} (1 - q^2 \sin^2 u)^{-1/2} du$ ,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \max\{\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)}\}, & \text{якщо } q_1 = q_2, \\ \varepsilon_n^{(1)}, & \text{якщо } q_1 > q_2, \\ \varepsilon_n^{(2)}, & \text{якщо } q_1 < q_2, \end{cases}$$

$\varepsilon_n^{(i)} = \sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i \right|$ ,  $i = 1, 2$ ,  $O(1)$  – величини, рівномірно обмежені відносно  $n, \psi_1(k)$  і  $\psi_2(k)$ .

*Довідка про авторів*

**Степанець** Олександр Іванович – член–кореспондент НАН України, доктор фіз.–мат. наук, професор, заступник директора по науковій роботі Інституту математики НАН України.

тел. 224–05–97 (с), 224–22–50 (д)

**Сердюк** Анатолій Сергійович – канд. фіз.–мат. наук, науковий співробітник Інституту математики НАН України.

тел. 224–65–26 (с)