

УДК 517.5

А. И. Степанец
Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ

§1. Пространства S^p_φ

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathcal{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит к φ , определено скалярное произведение (x, y) , удовлетворяющее условиям

- 1) $(x, y) = (\overline{y}, x)$, где $\bar{z}$ – число, комплексно сопряженное с z ;
- 2) $(\lambda x_1 + \mu x_2; y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ – произвольные числа;
- 3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $f \in \mathcal{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots\}$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{X} : \sum_{k=1}^\infty |\hat{f}_\varphi(k)|^p < \infty\}. \quad (1.1)$$

Элементы $x, y \in S^p_\varphi$ считаются тождественными, если при всех $k \in \mathcal{N}$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Таким образом, множество S^p_φ порождается пространством $\mathcal{X}$, системой φ и числом p .

Для векторов $x, y \in \mathcal{X}$ определим расстояние между ними при помощи равенства

$$\begin{aligned} \rho(x, y)_p &\stackrel{\text{df}}{=} \|x - y\|_p = \|x - y\|_{\varphi, p} = \\ &= \|(\widehat{x - y})_\varphi(k)\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^\infty |\hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k)|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Нулевым элементом пространства S^p_φ называется вектор θ , для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in \mathcal{N}$. Расстояние $\rho(\theta, x)$, $x \in S^p_\varphi$, называется нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_p$. Таким образом,

$$\|x\|_p = \|x\|_{\varphi, p} = \rho(\theta, x) = \left(\sum_{k=1}^\infty |\hat{x}_\varphi(k)|^p \right)^{1/p}. \quad (1.2)$$

Множество S^p_φ – линейное метрическое пространство: операции сложения векторов и умножения их на числа, определенные во всем $\mathcal{X}$,

остаются пригодными и для любой пары $x, y \in S_\varphi^p$ и для любых чисел λ и μ $\lambda x + \mu y = z \in S_\varphi^p$. В самом деле, поскольку $z \in \mathcal{X}$, то $\hat{z}(k) = \lambda \hat{x}(k) + \mu \hat{y}(k)$, и если $p \geq 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\|z\|_p \leq \lambda \|x\|_p + \mu \|y\|_p,$$

если же $p \in (0, 1)$, то так как для любых двух чисел a и b

$$|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \quad 0 \leq p < 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} \|z\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda \hat{x}(k) + \mu \hat{y}(k)|^p \right)^{1/p} \leq (\lambda^p \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k)|^p + \\ &+ \mu^p \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{y}(k)|^p)^{1/p} \leq 2^{\frac{1}{p}} (\lambda \|x\|_p + \mu \|y\|_p), \end{aligned}$$

т.е. всегда $z \in S_\varphi^p$.

Ясно, что при $p \geq 1$ норма, введенная равенством (1.2), удовлетворяет всем необходимым аксиомам, поэтому при $p \geq 1$ S_φ^p – линейное нормированное пространство, содержащее ортонормированную систему φ .

Ясно также, что при $p = 2$ пространство S_φ^2 при условии его полноты является гильбертовым. При всех остальных $p \in (0, \infty)$ пространства S_φ^p наследуют важнейшие свойства гильбертовых пространств – равенство Парсеваля в виде соотношения (1.2) и минимальное свойство частных сумм ряда Фурье, которое формулируется следующим образом.

Предложение 1. Пусть $f \in S_\varphi^p$, $p \in (0, \infty)$,

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) \varphi_k \quad (1.3)$$

– ряд Фурье элемента f по системе φ и

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^n \hat{f}(k) \varphi_k, \quad k \in \mathcal{N},$$

– частные суммы этого ряда.

Среди всех сумм вида

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

при данном $n \in \mathcal{N}$ наименее уклоняется от f частная сумма $S_n(f)$:

$$\inf_{\alpha_k} \|f - \Phi_n\|_p = \|f - S_n(f)\|_p.$$

Причем

$$\|f - S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^p. \quad (1.4)$$

Доказательство этого утверждения следует из равенства (1.2), согласно которому

$$\|f - \Phi_n\|_p^p = \sum_{k=1}^n |\hat{f}(k) - \alpha_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^p.$$

При $n \rightarrow \infty$ правая часть в (1.4) стремится к нулю. Отсюда следует, что для любого элемента f из S_φ^p его ряд Фурье (1.3) сходится к f , т.е. система φ полна в S_φ^p и S_φ^p сепарабельно.

Отметим еще одно из важнейших свойств пространств S_φ^p : если система $\varphi' = \{\varphi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ получена из системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ путем любой перестановки членов последней, то

$$S_\varphi^p = S_{\varphi'}^p, \quad \text{и} \quad \|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p} \quad \forall f \in S_\varphi^p. \quad (1.5)$$

Этот факт сразу следует из (1.1) и (1.2).

Это замечание позволяет обобщить утверждение предложения 1 в следующем направлении.

Предложение 2. Пусть $\{g_\alpha\}$ – семейство ограниченных подмножеств, зависящих от параметра α и таких, что любое число $n \in \mathbb{N}$ принадлежит всем множествам g_α с достаточно большими индексами α . Пусть, далее, $f \in S_\varphi^p$ и

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \hat{f}(k) \varphi_k$$

– частная сумма ряда $S[f]_\varphi$, отвечающая множеству g_α . Тогда среди всех сумм вида

$$\Phi_\alpha = \sum_{k \in g_\alpha} c_k \varphi_k$$

наименее уклоняется от f частная сумма $S_\alpha(f)$, т.е.

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_\alpha\|_p = \|f - S_\alpha(f)\|_p.$$

При этом

$$\|f - S_\alpha(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k \in g_\alpha} |\hat{f}(k)|^p$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|f - S_\alpha(f)\|_p = 0.$$

Приведем одну из возможных конкретизаций этих построений, на которую всегда будем ориентироваться.

Пусть R^m – m -мерное, $m \geq 1$, евклидово пространство, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ – его элементы, Z^m – целочисленная решетка в R^m – множество векторов $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ с целочисленными координатами, $\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_my_m$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}\mathbf{x})}$ и, в частности, $\mathbf{k}\mathbf{x} = k_1x_1 + \dots + k_mx_m$, $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ – множество всех 2π -периодических по каждой из переменных функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m ,

$$Q^m = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in R^m, -\pi \leq x_k \leq \pi, k = 1, \dots, m\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции f по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} \in Z^m, \quad (1.6)$$

т.е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{k} \in Z^m} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t}. \quad (1.7)$$

Если считать неразличимыми функции, эквивалентные относительно меры Лебега, то в качестве $\mathcal{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве системы φ – тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{i\mathbf{k}_s \mathbf{x}}, \quad \mathbf{k}_s \in Z^m, \quad s = 1, 2, \dots,$$

полученную из системы (1.6) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в таком случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{k}_s \mathbf{t}} d\mathbf{t} = \hat{f}(\mathbf{k}_s) = \hat{f}_\tau(\mathbf{k}_s).$$

Получающиеся при этом множества S_τ^p согласно (1.5) не зависят от нумерации системы (1.6) и в дальнейшем обозначаются через S^p .

§2. ψ -Интегралы и характеристические последовательности. Аппроксимационные характеристики и полученные ранее результаты

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathcal{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (1.3)

существует элемент $F \in \mathcal{X}$, для которого

$$S[F] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}(k) \varphi_k, \quad (2.1)$$

т.е. когда

$$\hat{F}_\varphi = \psi_k \hat{f}(k), \quad k \in \mathcal{N}, \quad (2.2)$$

то вектор F будем называть ψ -интегралом вектора f и записывать $F = \mathcal{J}^\psi f$. Если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из $\mathcal{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ договоримся обозначать множество ψ -интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, ψS_φ^p – множество ψ -интегралов всех векторов, принадлежащих к S_φ^p .

Если f и F связаны соотношением (2.1) (или (2.2)), то иногда удобно f называть ψ -производной элемента F и писать $f = D^\psi F = F^\psi$.

В дальнейшем предполагается, что система ψ подчинена условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\psi_k| = 0. \quad (2.3)$$

Понятно, что это условие обеспечивает включение $\psi S_\varphi^p \subset S_\varphi^p$. Ясно, что для такого включения необходимым и достаточным есть условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|$, $k \in N$.

Конструкция агрегатов, используемых для приближения элементов $f \in \psi S_\varphi^p$, определяется характеристическими последовательностями $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ системы ψ , которые задаются следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющих условию (2.3). Тогда через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ обозначается множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию; через $g(\psi) = g_1, g_2, \dots$ – система множеств

$$g_n = g_n^\psi = \{k \in N : |\psi_k| \geq \varepsilon_n\}$$

и через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \dots$ – последовательность чисел $\delta_n = |g_n|$, где $|g_n|$ – количество чисел $k \in N$, содержащихся в множестве g_n .

Учитывая условие (2.3), последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ можно определить при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sup_{k \in N} |\psi_k|, \quad g_1 = \{k \in N : |\psi_k| = \varepsilon_1\}, \\ \varepsilon_n &= \sup_{k \notin g_{n-1}} |\psi_k|, \quad g_n = g_{n-1} \cup \{k \in N : |\psi_k| = \varepsilon_n\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что любое число $n^* \in N$ принадлежит всем множествам g_n^ψ с достаточно большими номерами n и что всегда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \infty. \quad (2.5)$$

В дальнейшем ради удобства через $g_0 = g_0^\psi$ обозначается пустое множество и считается, что $\delta_0 = 0$.

Пусть множество S_φ^p порождается пространством $\mathcal{X}$, системой φ и числом p , $p > 0$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (2.3). Пусть, далее,

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} = S_{g_n^\psi}(f) = \sum_{k \in g_n^\psi} \hat{f}(k) \varphi_k, \\ k = 1, 2, \dots, \quad S_{0,\psi}(f)_\varphi = \theta, \quad (2.6)$$

где g_n^ψ – элементы последовательности $g(\psi)$, а θ – нулевой вектор пространства S_φ^p ;

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi}\|_p; \\ E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{\alpha_k} \|f - \sum_{k \in g_{n-1}^\psi} \alpha_k \varphi_k\|_p \quad (2.7)$$

и

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_n} \|x - u\|_Y$$

– поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Y с нормой $\|\cdot\|_Y$. Здесь $\mathcal{F}_n$ – множество всех подпространств размерности $n \in N$ пространства Y .

Следуя С.Б. Стечкину [3], приведем еще такое определение. Пусть $n \in N$, γ_n – произвольный набор из n различных натуральных чисел и

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k, \quad (2.8)$$

где α_k – некоторые комплексные числа.

Величина

$$e_n(f)_p = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_p \quad (2.9)$$

называется наилучшим n -членным приближением элемента $f \in S_\varphi^p$ в пространстве S_φ^p .

Пусть, наконец,

$$U_\varphi^p = \{f \in S_\varphi^p : \|f\|_p \leq 1\} \quad (2.10)$$

и ψU_φ^p – множество ψ -интегралов всех элементов из U_φ^p . Заметим, что если

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in N, \quad (2.11)$$

то

$$\psi U_\varphi^p = \{f \in S_\varphi^p : \sum_{k=1}^\infty |\frac{\hat{f}(k)}{\psi_k}|^p \leq 1\}, \quad (2.12)$$

т.е. множество ψU_φ^p является p -эллипсоидом в пространстве S_φ^p с полуосями, равными $|\psi_k|$.

В [1,2 и 4], в частности, доказаны следующие утверждения.

Теорема А. Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система чисел, для которой выполняются условия (2.3) и (2.11). Тогда при любых $n \in N$ и $p \in (0, \infty)$ справедливы равенства

$$\sup_{f \in \psi U_\varphi^p} E_n(f)_{\psi,p} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^p} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n; \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} e_n^p(f)_p &= \sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{k=1}^l \bar{\psi}_k^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}} = \\ &= (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}_k^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}}, \quad 0 < q \leq p, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где ε_n – n -й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$,
 $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность, задающаяся соотношениями

$$\bar{\psi}_k = \varepsilon_n \quad \text{при} \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \dots,$$

δ_n – члены характеристической последовательности $\delta(\psi)$, а l^* – некоторое натуральное число, которое в условиях теоремы всегда существует.

Если $p \in [1, \infty)$, то при любых $n \in N$

$$\begin{aligned} d_{\delta_{n-1}}(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p) &= d_{\delta_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p) = \dots = \\ &= d_{\delta_n-1}(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p) = \sup_{f \in \psi U_\varphi^p} \mathcal{E}_n^\psi(f) = \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отметим еще, что, как показано в [1,2], при всех $p \in [1, \infty)$ и $n \in N$

$$\sup_{f \in \psi U_\varphi^p} e_n^p(f)_p < d_n(\psi U_\varphi^p; S_\varphi^p).$$

В [4] рассмотрено приближение индивидуальных элементов из множеств ψS_φ^p и основными в этом направлении являются следующие две теоремы.

Теорема В. Пусть $f \in \psi S_\varphi^p$, $p > 0$, и последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (2.3). Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}$$

сходится и при любом $n \in N$ справедливо равенство

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}, \quad (2.16)$$

в котором величины $E_n(x)_{\psi,p}$ определяются равенством (2.7), а ε_k , $k = 1, 2, \dots$, – элементы характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.

Теорема С. Пусть $f \in S_\varphi^p$, $p > 0$, и последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (2.3). Пусть, далее,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k^{-1} E_k(f)_{\psi,p} = 0.$$

Тогда для того, чтобы выполнялось включение

$$f \in \psi S_\varphi^p, \quad (2.17)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходил ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}. \quad (2.18)$$

Если этот ряд сходится, то при любом $n \in N$ выполняется равенство

$$E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p} E_n^p(f)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}, \quad (2.19)$$

в котором величины $E_n(x)_{\psi,p}$ и ε_k имеют тот же смысл, что и в теореме В.

Теорема В устанавливает связь между наилучшим приближением элемента f и наилучшими приближениями его производных. Подобные утверждения в теории приближений, как хорошо известно, принято называть прямыми теоремами. Теорема С в этом смысле является обратной: в ней по свойствам наилучшего приближения элемента f указывается о наличии у него производных и дается информация о наилучшем приближении этих производных.

Величины ε_n строго убывают, поэтому из (2.16) следует оценка

$$E_n^p(f)_{\psi,p} \leq \varepsilon_n^p E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} \quad \forall f \in \psi S_\varphi^p, \quad \forall n \in N. \quad (2.20)$$

Заметим, что в силу (2.5) и предложения 2 всегда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = 0.$$

На важных подмножествах $\mathfrak{N}$ из ψS_φ^p соотношение (2.20) дает точный результат. Отметим один из таких случаев.

Согласно неравенству Йенсена, для любой неотрицательной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \geq 0$, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q \right)^{1/q}, \quad 0 < q \leq p. \quad (2.21)$$

Поэтому справедливы включения

$$S_\varphi^q \subset S_\varphi^p, \quad 0 < q \leq p, \quad (2.22)$$

и

$$\psi U_\varphi^q \subset \psi U_\varphi^p, \quad 0 < q \leq p. \quad (2.23)$$

Отметив это, возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ множество ψU_φ^q при $0 < q \leq p$. Если $f \in \psi U_\varphi^q$, то $f^\psi \in U_\varphi^q$ и, тем более, $f^\psi \in U_\varphi^p$. Значит, $\|f^\psi\|_p^p \leq 1$. Следовательно, и $E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} \leq 1$. Поэтому

$$E_n^p(f)_{\psi,p} \leq \varepsilon_n^p \quad \forall f \in \psi U_\varphi^q, \quad 0 < q \leq p. \quad (2.24)$$

С другой стороны, пусть k' – любая точка из множества $g_n^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ и $f_* = \psi_{k'} \varphi_{k'}$ ($\psi_{k'} \neq 0$). Так как $f_*^\psi = \varphi_{k'}$, то при любом $q > 0$ $\|f_*^\psi\|_q = 1$. Следовательно, $f_* \in \psi U_\varphi^q$ при любом $q > 0$. Но ясно, что

$$E_n(f_*)_{\psi,p} = \|f_*\|_{\varphi,p} = \psi_{k'} = \varepsilon_n. \quad (2.25)$$

Таким образом, объединяя соотношения (2.24) и (2.25) и полагая

$$\begin{aligned} E_n(\psi U_\varphi^q)_{\psi,p} &= \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} E_n(f)_{\psi,p}, \\ \mathcal{E}_n(\psi U_\varphi^q)_{\psi,p} &= \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

приходим к следующему утверждению, обобщающему равенство (2.13).

Теорема Д. Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система чисел, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.11). Тогда при любых $n \in N$ и $0 < q \leq p < \infty$ справедливы равенства

$$E_n(\psi U_\varphi^q)_{\psi,p} = \mathcal{E}_n(\psi U_\varphi^q)_{\psi,p} = \varepsilon_n,$$

где ε_n – n -й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.

Отметим, что доказательства равенств (2.13) и (2.15) по существу совпадают с рассуждениями В.М. Тихомирова [5, §4.4], где находятся поперечники эллипсоидов в гильбертовом пространстве, т.е. множеств, которые в принятых здесь обозначениях являются замыканиями множеств ψU_φ^2 . Отметим также, что в случае гильбертова пространства функций, заданных на отрезке, утверждения, подобные теоремам В и С, доказаны ранее в [6].

§3. Наилучшие n -членные приближения

В этом разделе рассматриваются величины $e_n(f)_p$, $p > 0$, определяемые равенством (2.9) в случае, когда приближаемый элемент находится в множестве ψU_φ^q при $q > p$. Точнее, рассматриваются величины

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p = e_n(\psi U_\varphi^q; S_\varphi^p)_p = \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} e_n(f)_p =$$

$$= \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_p, \quad q > p > 0. \quad (3.1)$$

По-прежнему предполагается, что системы чисел ψ подчинены условию (2.3) и, кроме того, предполагается, что

$$\|\psi\|_{l^{\frac{pq}{q-p}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty. \quad (3.2)$$

Это условие обеспечивает включение

$$\psi U_\varphi^q \subset S_\varphi^p. \quad (3.3)$$

Действительно, если $f \in \psi U_\varphi^q$, то $f^\psi \in U_\varphi^q$, и тогда, согласно (2.10),

$$\|f^\psi\|_q^q = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k^\psi|^q \leq 1. \quad (3.4)$$

Следовательно, в силу неравенства Гельдера,

$$\|f\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p |f^\psi|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f^\psi(k)|^q \right)^{\frac{p}{q}} < \infty.$$

Можно показать, что условие (3.2) является и необходимым для справедливости (3.3).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (2.11) и (3.2), p и q — произвольные числа такие, что $q > p > 0$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p = \bar{\sigma}_1(s)^{\frac{p}{q}} \left[(s - n)^{\frac{q}{q-p}} + \bar{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s) \bar{\sigma}_2(s) \right]^{\frac{q-p}{q}}, \quad (3.5)$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^s \bar{\psi}_k^{-q}, \quad \bar{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \bar{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}, \quad (3.6)$$

$\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, для которой $\bar{\psi}_k = \varepsilon_n$ при $k \in (\delta_{n-1}, \delta_n]$, ε_n и δ_n — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$; число s выбрано из условия

$$\bar{\psi}_s^{-q} \leq \frac{1}{s - n} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}_k^{-q} < \bar{\psi}_{s+1}^{-q}. \quad (3.7)$$

Такое число s всегда существует и единственно.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму для числовых рядов

Лемма. Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, $\alpha_k > 0 \quad \forall k \in N$, для которой при данном $r \in (0, 1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty \quad (3.12)$$

и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, $m_k \geq 0 \quad \forall k \in N$, удовлетворяющая условию

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1. \quad (3.13)$$

Пусть, далее,

$$S^{(r)}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r, \quad S_{\gamma_n}^{(r)}(m) = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \quad (3.14)$$

где γ_n — некоторый набор из n натуральных чисел,

$$\mathcal{E}_n(m) = \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)}(m) = S^{(r)}(m) - \sup_{\gamma_n} S_{\gamma_n}^{(r)}(m)$$

и

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)} = \sup_{|m| \leq 1} \mathcal{E}_n^{(\alpha, r)}(m). \quad (3.15)$$

Тогда для любого натурального n

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(\alpha, r) = \sigma_1^{-r}(s) [(s - n)^{\frac{1}{1-r}} + \sigma_1^{\frac{r}{1-r}}(s) \sigma_2(s)]^{1-r}, \quad (3.16)$$

где

$$\sigma_1(s) = \sigma_1(\alpha; s) = \sum_{k=1}^s \alpha_k^{-\frac{1}{r}}, \quad \sigma_2(s) = \sigma_2(\alpha; s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}},$$

число s выбрано из условия

$$\alpha_s^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{\sigma_1(s)}{s - n} < \alpha_{s+1}^{-\frac{1}{r}}, \quad s > n. \quad (3.17)$$

Такое число всегда существует и единственно. Верхняя грань в (3.15) реализуется последовательностью $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k = \begin{cases} \left(\frac{t_s}{\alpha_k} \right)^{1/r}, & k = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{1 - t_s^{1/r} \sigma_1(s)}{\sigma_2(s)} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}, & k = s + 1, s + 2, \dots, \\ t_s = \left(\sigma_1(s) + \left(\frac{\sigma_1(s)}{s - n} \right)^{\frac{1}{1-r}} \sigma_2(s) \right)^{-r}. \end{cases}$$

§5. Наилучшие приближения q -эллипсоидов в пространствах S_φ^p

Наилучшими приближениями элементов $f \in \psi U_\varphi^q$ в пространствах S_φ^p называются величины (2.8), т.е. величины

$$E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{P_{g_{n-1}^\psi}} \|f - \Phi_{g_{n-1}^\psi}\|_P, \quad (5.1)$$

где

$$\Phi_{g_{n-1}^\psi} = \sum_{k \in g_{n-1}^\psi} c_k \varphi_k \quad (5.2)$$

и c_k – произвольные комплексные числа.

Следующее утверждение, дополняет результат теоремы D в случае, когда $q > p > 0$.

Теорема 2. Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система чисел, удовлетворяющая условиям (2.11) и (3.2), p и q – произвольные числа, для которых $q > p > 0$. Тогда при любом $n \in N$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} E_n(f)_{\psi,p} &= \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \\ &= \left(\sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \bar{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность, для которой

$$\bar{\psi}_k = \varepsilon_k, \quad \delta_{n-1} < k \leq \delta_n,$$

ε_n и δ_n – члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$.

§6. Приложения полученных результатов к задачам приближения периодических функций многих переменных

Пусть, как и в §1, $L = L(R^m)$ – множество всех 2π -периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m , $m \geq 1$, и (1.7) – ряд Фурье функции $f \in L$ по системе (1.9). Эквивалентные относительно меры Лебега функции считаются неразличимыми.

Пусть, далее, S^p – пространство, порожденное множеством L , системой (1.9) и некоторым числом p , $p \in (0, \infty)$ со скалярным произведением (1.10) и нормой $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{S^p}$, определенной согласно (1.2):

$$\|f\|_p = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m} |\hat{f}(\mathbf{k})|^p \right)^{1/p}. \quad (6.1)$$

Пусть теперь $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in Z^m}$ – произвольная система комплексных чисел – кратная последовательность. Для функций $f \in L$ наряду с (1.7) рассмотрим ряд

$$(2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{k} \in Z^m} \psi(\mathbf{k}) \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (6.2)$$

Если этот ряд для данной функции f и системы ψ является рядом Фурье некоторой функции F из L , то F назовем ψ -интегралом функции f и будем писать $F(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^\psi(f; \mathbf{x})$. При этом иногда удобно функцию f называть ψ -производной функции F и писать $f(\mathbf{x}) = D^\psi(F; \mathbf{x}) = F^\psi(\mathbf{x})$. Множество ψ -интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через L^ψ . Если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из L , то $L^\psi \mathfrak{N}$ будет обозначать множество ψ -интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Ясно, что если $f \in L^\psi$, то коэффициенты Фурье функций f и f^ψ связаны соотношением

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k}) \hat{f}^\psi(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in Z^m. \quad (6.3)$$

Будем рассматривать в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U^p в пространстве S^p :

$$U^p = \{f : f \in S^p, \|f\|_p \leq 1\}. \quad (6.4)$$

В таком случае полагаем $L^\psi U^p = L_p^\psi = L_p^\psi(R^m)$. Относительно системы ψ предполагается, что

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{k}) = 0. \quad (6.5)$$

Заметим, что если $f \in L^\psi S^p$ и $|\psi(\mathbf{k})| \leq C$, $\mathbf{k} \in Z^m$, $C = \text{const}$, то $f \in S^p$, т.е. условие (6.5) всегда гарантирует включение $L_p^\psi \subset S^p$.

Определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ следующим образом:

$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ – множество значений величин $|\psi(\mathbf{k})|$, $\mathbf{k} \in Z^m$, упорядоченное по их убыванию; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$g_n = g_n^\psi = \{\mathbf{k} \in Z^m : |\psi(\mathbf{k})| \geq \varepsilon_n\};$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, где $\delta_n = \delta_n^\psi = |g_n|$ – количество чисел $\mathbf{k} \in Z^m$, принадлежащих множеству g_n .

Ввиду условия (6.5), в рассматриваемом случае последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ определяются равенствами (2.4) с учетом того, что на этот раз $\mathbf{k} \in Z^m$. Как и раньше считается, что $g_0 = g_0^\psi$ есть пустое множество и что $\delta_0 = \delta_0^\psi = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in L^\psi$ рассмотрим тригонометрические полиномы

$$S_n(f; \mathbf{x}) = S_{g_n^\psi}(f; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{k} \in g_n^\psi} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (6.6)$$

$$n \in N, \quad S_0(f; \mathbf{x}) = 0,$$

где g_n^ψ – элементы последовательности $g(\psi)$.

Пусть p и q – произвольные числа, $p, q > 0$,

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \|f(\mathbf{x}) - S_{n-1}(f; \mathbf{x})\|_{S^p}, \quad (6.7)$$

$$\mathcal{E}_n(L_q^\psi)_p = \sup_{f \in L_q^\psi} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

$$E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{a_k} \|f(\mathbf{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{k} \in g_{n-1}^\psi} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\|_{S^p} \quad (6.9)$$

и

$$E_n(L_q^\psi)_p = \sup_{f \in L_q^\psi} E_n(f)_{\psi,p}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Пусть, далее,

$$d_n(L_p^\psi)_p = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L_p^\psi} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{S^p},$$

$$n \in N, \quad d_0(L_p^\psi)_p \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in L_p^\psi} \|f\|_{S^p}, \quad (6.11)$$

где G_n – множество всех n -мерных подпространств в S^p – поперечники по Колмогорову классов L_p^ψ и

$$e_n(L_q^\psi)_p = \sup_{f \in L_q^\psi} \inf_{a_{\mathbf{k}}, \gamma_n} \|f(\mathbf{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\|_{S^p}, \quad (6.12)$$

где γ_n – произвольный набор из n векторов $\mathbf{k} \in Z^m$, – величина наилучшего n -членного приближения класса L_q^ψ в пространстве S^p .

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения – аналогии, а по существу – частные случаи теорем А–2.

Теорема 3. Пусть $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in Z^m}$ – система чисел, удовлетворяющая условию (6.5) и таких, что

$$\psi(\mathbf{k}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{k} \in Z^m. \quad (6.13)$$

Тогда при любых $n \in N$ и $0 < q \leq p < \infty$ справедливы равенства

$$E_n(L_q^\psi)_p = \mathcal{E}_n(L_q^\psi)_p = \varepsilon_n, \quad (6.14)$$

$$e_n^p(L_q^\psi)_p = \sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{k=1}^l \bar{\psi}_k^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}} = (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}_k - q \right)^{-\frac{p}{q}}, \quad (6.15)$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность, определяемая соотношениями

$$\bar{\psi}_k = \varepsilon_n \quad \text{при} \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.17)$$

ε_n и δ_n — члены характеристических последовательностей системы ψ , а l^* — некоторое натуральное число, которое в условиях теоремы всегда существует.

Эта теорема при $p = q$ доказана в [1,2], а при $0 < q < p < \infty$ — в [4]. Аналогами теорем В и С являются следующие утверждения, доказанные в [4].

Теорема В'. Пусть $f \in L_p^\psi$, $p > 0$, и $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условию (6.5). Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}$$

сходится и при любых $n \in N$ справедливо равенство

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^\psi)_{\psi,p},$$

где величины $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ определяются равенством (6.9), а ε_k — элементы характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ системы ψ .

Теорема С'. Пусть $f \in S^p$, $p > 0$, и система $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m}$ удовлетворяет условию (6.5). Пусть, далее,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k^{-1} E_k(f)_{\varphi,p} = 0.$$

Тогда для того, чтобы выполнялось включение

$$f \in L_p^\psi$$

необходимо и достаточно, чтобы сходил ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}.$$

Если этот ряд сходится, то при любом $n \in N$ справедливо равенство

$$E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p} E_n^p(f)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p},$$

в котором величины $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ и ε_k имеют тот же смысл, что и в теореме В'.

Пусть $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m}$ — произвольная система чисел, удовлетворяющая условию (6.5). Перенумеруем все векторы $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$ в каком-нибудь порядке, используя натуральный индекс s . Будем говорить, что система

ψ принадлежит множеству $A_{p,q}$ при некоторых значениях p и q ,
 $q > p > 0$, если

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\psi(k_s)|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty. \quad (6.18)$$

Ясно, что множества $A_{p,q}$ не зависят от способа нумерации чисел $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$, а полностью определяются величинами $|\psi(\mathbf{k})|$ и числами p и q .

Теорема 4. Пусть система $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m}$ при данных p и q ,
 $q > p > 0$, принадлежит множеству $A_{p,q}$. Тогда

$$\begin{aligned} E_n(L_q^\psi)_p &= \mathcal{E}_n(L_q^\psi)_p = \\ &= \left(\sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.19)$$

и

$$e_n^p(L_q^\psi)_p = \bar{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}}(s) [(s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \sigma_1^{\frac{p}{q-p}}(s) \bar{\sigma}_2(s)]^{\frac{q-p}{q}}, \quad (6.20)$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^s \bar{\psi}_k^{-q}, \quad \bar{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \bar{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}},$$

$\bar{\psi} = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, для которой

$$\bar{\psi}_k = \varepsilon_k \quad \text{при} \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.21)$$

ε_n и δ_n — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$; число s в (6.20) выбрано из условия

$$\bar{\psi}_s \leq \frac{1}{s-n} \sum_{k=1}^s \bar{\psi}_k^{-q} < \bar{\psi}_{s+1}^{-q}. \quad (6.22)$$

Такое число s всегда существует и единственно.

Теорема 5. Пусть $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям (6.5) и (6.13) и $p \in [1, \infty)$. Тогда при любом $n \in N$

$$\begin{aligned} d_{\delta_{n-1}}(L_p^\psi; S^p) &= d_{\delta_{n-1}+1}(L_p^\psi; S^p) = \dots = d_{\delta_n-1}(L_p^\psi; S^p) = \\ &= \mathcal{E}_n(L_p^\psi)_p = \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где ε_n и δ_n — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$.

§7. Замечания

1. О последовательностях Ψ . Во всех предыдущих построениях центральное место отводится последовательностям ψ : они определяют приближаемые множества, по ним строится аппарат приближения и через них выражаются аппроксимационные характеристики. Кроме условий вида (6.5) и (6.18), без которых рассмотрения становятся почти бессодержательными, в настоящей работе на последовательности ψ никаких ограничений не налагалось. Поэтому сами системы ψ , а с ними и их характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в общем случае могут быть достаточно сложными.

В многомерном случае, по-видимому, наиболее простыми и естественными являются системы ψ , у которых числа $\psi(\mathbf{k})$ представляются произведениями

$$\psi(\mathbf{k}) = \psi(k_1, \dots, k_m) = \prod_{j=1}^m \psi_j(k_j), \quad k_j \in Z^1, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7.1)$$

значений одномерных последовательностей $\psi_j = \{\psi_j(k_j)\}_{k_j=1}^\infty$. Если к тому же

$$\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}, \quad j = \overline{1, m}$$

(через $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное к z), то множества g_n^ψ будут симметричными относительно всех координатных плоскостей и, как не трудно убедиться,

$$\sum_{\mathbf{k} \in Z^m} \psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}t} = \sum_{\mathbf{k} \in Z_+^m} 2^{m-q(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^m |\psi_j(k_j)| \cos(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j} \pi}{2}), \quad (7.2)$$

где $Z_+^m = \{\mathbf{k} \in Z^m, k_i \geq 0, i = \overline{1, m}\}$, $q(\mathbf{k})$ – количество координат вектора $\mathbf{k}$, равных нулю, а числа β_{k_j} определяются равенствами

$$\cos \frac{\beta_{k_j} \pi}{2} = \frac{\operatorname{Re} \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}, \quad \sin \frac{\beta_{k_j} \pi}{2} = \frac{\operatorname{Im} \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}.$$

В таком случае множество L^ψ ψ -интегралов действительных функций φ из $L(R^m)$ состоит из действительных функций f и если при этом ряд в (7.2) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathcal{D}_\psi(t)$, то необходимым и достаточным условием включения $f \in L^\psi \mathfrak{N}$ является возможность представления f сверткой вида

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int_{Q_m} \varphi(x-t) \mathcal{D}_\psi(t) dt,$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{N}$ и почти всюду $\varphi(x) = f^\psi(x)$. Это, в частности, означает, что классы $L^\psi \mathfrak{N}$ охватывают классы функций, представимых свертками с фиксированными суммируемыми ядрами. (см., напр., [7, §1.9]).

2. О связи между пространствами S^p и L_p .

Пусть $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1, \infty)$, – пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{Q^m} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/p}. \quad (7.3)$$

Связь между множествами L_p и S^p устанавливает известная теорема Хаусдорфа–Юнга (см., напр., [8, п. XII.2]), утверждающая, что

(I) Если $f \in L_p$, $p \in (1, 2]$, и $\hat{f}(\mathbf{k})$ – коэффициенты Фурье функции f , определяемые формулой

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t}, \quad (7.4)$$

то

$$\left(\sum_{\mathbf{k} \in Z^m} |\hat{f}(\mathbf{k})|^{p'} \right)^{1/p'} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L_p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

(II) Пусть $\{c_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in Z^m}$ – последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{\mathbf{k} \in Z^m} |c_{\mathbf{k}}|^p < \infty, \quad p \in (1, 2].$$

Тогда существует функция $f \in L_{p'}$, для которой $\hat{f}(\mathbf{k}) = c_{\mathbf{k}}$, и

$$\|f\|_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \left(\sum_{\mathbf{k} \in Z^m} |c_{\mathbf{k}}|^p \right)^{1/p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Из этой теоремы следует, что если $p \in (1, 2]$, то

$$L_p \subset S^{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{S^{p'}} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L_p}, \quad (7.5)$$

$$S^p \subset L_{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f\|_{S^p}. \quad (7.6)$$

В частности, при $p = p' = 2$ справедливы равенства

$$L_2 = S^2 \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{S^2}. \quad (7.7)$$

В силу соотношений (7.5) и (7.6), теоремы, доказанные для пространств S^p , содержат информацию и для пространств L_p , которая является наиболее полной вследствие (7.7) в случае, когда $p = 2$.

Ввиду особой важности этого случая, приведем точные формулировки соответствующих утверждений.

Пусть, как и раньше, $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in Z^m}$ – произвольная система комплексных чисел и $L^\psi \mathfrak{N}$ – множество ψ -интегралов всех функций $f \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из $L = L(R^m)$, $m \geq 1$. Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U_{L_2} в пространстве L_2 :

$$U_{L_2} = \{f : f \in L_2, \|f\|_{L_2} \leq 1\}. \quad (7.8)$$

Здесь норма $\|\cdot\|_{L_2}$ определяется равенством (7.3) при $p = 2$. В таком случае положим $L^\psi U_{L_2} = U_{L_2}^\psi$.

Считая выполненным условие (6.5), определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$, а также полиномы $S_n(f; x)$ согласно формул (6.6) и для $f \in U_{L_2}^\psi$ положим

$$\mathcal{E}_n^\psi(f)_{L_2} = \|f(\mathbf{x}) - S_{n-1}(f; \mathbf{x})\|_{L_2},$$

$$\mathcal{E}_n(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \sup_{f \in U_{L_2}^\psi} \mathcal{E}_n^\psi(f)_{L_2},$$

$$E_n^\psi(f)_{L_2} = \inf_{a_{\mathbf{k}}} \|f(\mathbf{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{k} \in g_{n-1}^\psi} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\|_{L_2}$$

и

$$E_n(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \sup_{f \in U_{L_2}^\psi} E_n^\psi(f)_{L_2}.$$

Пусть еще

$$d_n(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in U_{L_2}^\psi} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{L_2}, \quad n \in N,$$

$$d_0(U_{L_2}^\psi) = \sup_{f \in U_{L_2}^\psi} \|f\|_{L_2},$$

где G_n – множество всех n -мерных подпространств в L_2 и

$$e_n(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \sup_{f \in U_{L_2}^\psi} \inf_{a_{\mathbf{k}}, \gamma_n} \|f(\mathbf{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\|_{L_2},$$

где γ_n – произвольный набор из n векторов $\mathbf{k} \in Z^m$ – величина наилучшего n -членного приближения класса $U_{L_2}^\psi$ в пространстве L_2 .

Справедливо следующее утверждение

Теорема 6. Пусть $\psi = \psi(\mathbf{k})_{\mathbf{k} \in Z^m}$ – система чисел, удовлетворяющая условиям (6.5) и (6.13). Тогда при любых $n \in N$ выполняются равенства

$$E_n(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \mathcal{E}_n(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \varepsilon_n, \quad (7.9)$$

$$d_{\delta_{n-1}}(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = d_{\delta_{n-1}+1}(U_{L_2}^\psi) = \dots =$$

$$= d_{\delta_n-1}(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = E_n(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \varepsilon_n, \quad (7.10)$$

$$e_n^2(U_{L_2}^\psi)_{L_2} = \sup_{l>n} (q-n)/\sum_{s=1}^l \bar{\psi}_s^{-2} = (l^*-n)/\sum_{s=1}^{l^*} \bar{\psi}_s^{-2}. \quad (7.11)$$

В этих равенствах ε_s и δ_s – элементы характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$, $\delta_0 = 0$, l^ – некоторое натуральное число и*

$$\bar{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \leq \delta_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Полные доказательства всех утверждений данной работы имеются в [12].

Список литературы

- [1] А. И. Степанец. Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p . – Киев, 2000. – 52 с. – (Препр./ НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
- [2] А. И. Степанец. "Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p ", *Укр. мат. журн.*, **53**, No. 3, 392 – 416 (2001).
- [3] С. Б. Стечкин. "Об абсолютной сходимости ортогональных рядов", *Докл. АН СССР*, **102**, No. 1, 37–40 (1955).
- [4] А. И. Степанец. "Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках", *Укр. мат. журн.*, **53**, No. 8, 1121–1146 (2001).
- [5] В. М. Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближений – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976, 304 с.
- [6] А. И. Степанец. "Среднеквадратическая скорость сходимости ортогональных рядов", *Укр. мат. журн.*, **39**, No. 5, 606– 611 (1987).
- [7] А. И. Степанец. Классификация и приближение периодических функций, Киев: Наук. думка, 1987, 286 с.
- [8] Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961, 936 с.
- [9] А. Н. Колмогоров. "Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklass", *Ann. of Math.*, **37**, No. 1, 107 – 110 (1936).
- [10] К. И. Бабенко. "О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами", *Докл. АН СССР*, **132**, No. 2, 247–250 (1960).
- [11] К. И. Бабенко. "О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами", Там же. – No. 5, 982 – 985.
- [12] А. И. Степанец. Методы теории приближений. В 2-х ч. Ч. 2. — Труды И-та мат. НАН Украины, 2002. – 468 с.