

УДК 517.5

А. И. Степанец (Институт математики НАН Украины, Киев)

В. В. Савчук (Институт математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

APPROXIMATION OF CAUCHY TYPE INTEGRALS

Approximation of analytical functions represented by Cauchy type integrals in Jordan domain of complex plane is investigated. In this paper results given in [1-3] have got their following development, modernization and completeness. Importance of investigation of approximation by Taylor's sums of functions analytical in disc is emphasized. In particular, asymptotic equalities for upper bounds of deviation of Taylor's sums of on classes of ψ – integrals of functions analytical in unit disc and continuous in its closing are obtained. This equalities have become a generalization of well-known results of S. B. Stechkin [4] on approximation of analytical in unit disc functions with bounded r -th (r -natural) derivatives.

On the basis of results obtained for disc, point-by-point estimates of deviations of partial sums of Faber's series on classes of ψ – integrals of functions analytical in domains with rectifiable Jordan boundary are found. It has been shown that this estimates in closed domain are sharp in the meaning of order and sharp in the meaning of constants by main terms if and only if when domain is Faber's domain.

Досліджуються наближення аналітичних функцій, заданих інтегралами типу Коші в жорданових областях комплексної площини. В цій роботі

результати, викладені в [1 – 3] зазнають свого подальшого розвитку і модернізації та набувають в певному розумінні завершеності. Важливе значення в роботі надається дослідженню наближень сумами Тейлора функцій, аналітичних в крузі. Зокрема, знаходяться асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень сум Тейлора на класах ψ – інтегралів функцій, аналітичних в одиничному крузі та неперервних в його замиканні. Ці рівності стали узагальненням відомих результатів С. Б. Стєчкіна [4] про наближення аналітичних в одиничному крузі функцій з обмеженими r -тими (r – натуральне) похідними.

На основі результатів, отриманих для круга, знаходяться поточкові оцінки відхилень частинних сум рядів Фабера на класах ψ – інтегралів функцій, аналітичних в областях зі спрямлюваними жордановими межами. Показано, що ці оцінки в замкненій області є точними за порядком і точними в розумінні констант при головних членах тоді і лише тоді, коли область є фаберовою.

Основой данной работы являются исследования авторов, изложенные в работах [1 – 3]. В этой работе результаты, полученные ранее находят дальнейшее развитие и модернизацию и приобретают в известной мере законченность. Одним из элементов метода, использованного в работах [1 – 3] и в данной работе является редукция задачи о приближении функций, заданных в произвольных областях к соответствующей задаче о приближениях в единичном круге. Поэтому важное место в этих исследованиях отводится исследованию приближений суммами Тейлора функций, аналитических в круге.

Здесь находятся асимптотические равенства для верхних граней отклонений сумм Тейлора на классах ψ – интегралов функций, аналитических в круге и непрерывных в замкнутом круге, обобщающие известные результаты С. Б. Стечкина [4], для функций с ограниченными r – тыми (r – натуральное) производными на окружности. Отметим, что первые такие результаты были получены в [2,3].

На основании результатов, полученных для круга, находятся оценки отклонений частных сумм рядов Фабера на классах ψ – интегралов функций, аналитических в областях со спрямляемыми жордановыми границами. Показано, что для замкнутых областей эти оценки являются точными по порядку и точными в смысле констант у главных членов тогда и только тогда, когда данная область является фаберовой. В связи с этим отметим, что нам не известно о существовании жордановых областей со спрямляемыми границами, которые не были бы фаберовыми.

1. Определения и вспомогательные утверждения. Пусть Ω – односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, граница которой является спрямляемой жордановой замкнутой кривой Γ (при этом иногда будем писать $\Gamma = \partial\Omega$), $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ – замыкание области Ω , $\Omega_\infty = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ –

внешность кривой Γ (дополнение области Ω к расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) и $\mathbb{D}_\infty = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : |w| > 1\}$ – внешность единичной окружности $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$.

Вследствие теоремы Римана, существует единственная мероморфная в области $\mathbb{D}_\infty$ функция $\Psi(w)$ разлагаемая в окрестности бесконечно удаленной точки $w = \infty$ в ряд Лорана

$$\Psi(w) = \gamma w + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w^{-k}, \quad \gamma > 0,$$

которая конформно и однолистно отображает область $\mathbb{D}_\infty$ на область Ω_∞ , и существует единственная обратная к $\Psi(w)$ функция $w = \Phi(z)$ с лорановским разложением в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\gamma} z + \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{-k},$$

которая конформно и однолистно отображает область Ω_∞ на область $\mathbb{D}_\infty$.

Число γ называется трансфинитным диаметром области Ω . В дальнейшем, не умаляя общности полагаем, $\gamma = 1$.

Многочленом Фабера n -го порядка для области Ω называется алгебраический многочлен $F_n(z)$, который состоит из суммы членов с неотрицательными степенями в лорановском разложении функции $[\Phi(z)]^n$ (т.е. правильная часть этого разложения):

$$\begin{aligned} [\Phi(z)]^n &= \left[z + \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{-k} \right]^n = \\ &= z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{n,k} z^k, \end{aligned}$$

так, что

$$F_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} z^k.$$

Систему многочленов Фабера $\{F_k\}$ для области Ω можно определить также как коэффициенты разложения функции

$$K_z(w) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$$

в окрестности точки $w = \infty$ в ряд Лорана :

$$K_z(w) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z) w^{-k-1}, \quad |w| > 1. \quad (1)$$

Пусть, как обычно, H_p , $0 < p < \infty$, обозначает пространство Харди функций f , каждая из которых аналитична в круге $\mathbb{D}$ и удовлетворяет при заданом $p \in (0, \infty)$ условию

$$\|f\|_{H_p} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{0 < \rho < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Через H_∞ обозначается множество ограниченных аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций f с нормой

$$\|f\|_{H_\infty} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Множество функций f , аналитических в области $\mathbb{D}_\infty$, для которых функция $g(w) = f(w^{-1})$, $w \in \mathbb{D}$, принадлежит к H_p , $p \in (0, \infty)$, обозначим через $H_p(\mathbb{D}_\infty)$.

Любая функция $f \in H_p$ ($f \in H_p(\mathbb{D}_\infty)$), $p > 0$ имеет почти всюду на окружности $\mathbb{T}$ определенные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию, которую будем обозначать через $f(e^{it})$.

Хорошо известно [5, с. 405], что если функция Ψ однолистно отображает область $\mathbb{D}_\infty$ на дополнение $\Omega_\infty = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ области Ω , ограниченной замкнутой спрямляемой жордановой кривой, то :

- 1) Ψ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}_\infty}$ и абсолютно непрерывна на окружности $\mathbb{T}$,
- 2) $\Psi' \in H_1(\mathbb{D}_\infty)$,
- 3) $\frac{d\Psi(e^{it})}{dt} = ie^{it}\Psi'(e^{it})$ почти всюду на окружности $\mathbb{T}$,
- 4) длина $s(t_1, t_2)$ дуги, заданной уравнением $z = \Psi(e^{it})$, $t \in [t_1, t_2]$, определяется по формуле

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\Psi'(e^{it})| dt.$$

Из п. 2) этого утверждения и теоремы Ф. Рисса (см., например [5, с. 390]), с учетом (1) вытекает, что для любого фиксированного $z \in \Omega$ функция $K_z(w)$ имеет почти всюду на окружности $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ определенные предельные значения по некасательным путям в области $\mathbb{D}_\infty$, образующие на окружности $\mathbb{T}$ суммируемую граничную функцию

$$K_z(e^{it}) = K(e^{it}, z) = \frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - z},$$

ряд Фурье которой имеет вид

$$S[K_z(e^{it})] \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z) e^{-i(k+1)t}. \quad (2)$$

Пусть $C(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, – соответственно, пространства непрерывных и суммируемых в p -ой степени функций φ на кривой Γ , с нормами

$$\|\varphi\|_{C(\Gamma)} = \max_{\zeta \in \Gamma} |\varphi(\zeta)|,$$

и

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |\varphi(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{1/p},$$

где $|\Gamma|$ – длина кривой Γ и $L_\infty(\Gamma)$ – пространство функций φ , существенно ограниченных на Γ с нормой

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} = \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \Gamma} |\varphi(\zeta)|.$$

Везде в дальнейшем, не умаляя общности, считаем, что длина кривой Γ , ограничивающей область Ω , равна 2π .

Пусть, далее, $L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 \leq p < \infty$ – подмножество функций $\varphi \in L_1(\Gamma)$, суммируемых в p -той степени с весом Φ' :

$$L_p(\Gamma, \Phi') = \{\varphi \in L_1(\Gamma) : \varphi \cdot (\Phi')^{1/p} \in L_p(\Gamma)\},$$

и

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma, \Phi')} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi(\zeta)|^p |\Phi'(\zeta)| |d\zeta| \right)^{1/p}.$$

Пространство $L_p(\Gamma, \Phi')$ при $p = \infty$ отождествим с пространством $L_\infty(\Gamma)$.

Заметим, что включение $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 \leq p \leq \infty$, возможно тогда и только тогда, когда $\varphi \circ \Psi \in L_p(\mathbb{T})$, и кроме того, справедливо равенство

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma, \Phi')} = \|\varphi \circ \Psi\|_{L_p(\mathbb{T})}.$$

Пусть $\varphi \in L_q(\Gamma, \Phi')$, $1 \leq q \leq \infty$. Положим

$$\tilde{\varphi} = \widetilde{(\varphi \circ \Psi)} \circ \Phi,$$

где $\tilde{\varphi}$ – функция, тригонометрически сопряженная к φ ;

$$\varphi_+ = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}(\varphi + i\tilde{\varphi})$$

и

$$\varphi_- = -\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}(\varphi - i\tilde{\varphi}),$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi \circ \Psi)(e^{it}) dt.$$

Хорошо известно, что функция f , представимая интегралом типа Коши

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

является функцией аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и если $z \in \Omega$, то $f(z)$ разлагается в ряд по многочленам Фабера

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k F_k(z),$$

в котором

$$f_k \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi \circ \Psi)(e^{it}) e^{-ikt} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что числа f_k совпадают с коэффициентами Фурье функции $\varphi \circ \Psi$ с неотрицательными индексами.

В вопросах приближения интегралов $\mathcal{K}\varphi(z)$ во внутренних точках области Ω важное место занимает такое утверждение [1].

Предложение 1. Пусть Ω – область, для которой $\Psi' \in H_p(\mathbb{D}_{\infty})$, $1 \leq p \leq \infty$ и $\varphi \in L_q(\Gamma, \Phi')$, $\Gamma = \partial\Omega$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда, если $\tilde{\varphi} \in L_q(\Gamma, \Phi')$, то в каждой точке $z \in \Omega$

$$\mathcal{K}\varphi(z) = \mathcal{K}\varphi_+(z). \tag{5}$$

Пусть теперь $L_1(\Gamma, \Phi')_+$ – подмножество функций $\varphi \in L_1(\Gamma, \Phi')$, которые порождают на окружности $\mathbb{T}$ функции $\varphi \circ \Psi$, принадлежащие $L_1(\mathbb{T})$ и имеющие ряды Фурье степенного типа, т.е.

$$L_1(\Gamma, \Phi')_+ = \{\varphi \in L_1(\Gamma, \Phi') : S[\varphi \circ \Psi] = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{\varphi \circ \Psi})(k) e^{ikt}\}.$$

Положим

$$L_p(\Gamma, \Phi')_+ = L_1(\Gamma, \Phi')_+ \cap L_p(\Gamma, \Phi'), \quad 1 < p \leq \infty,$$

$$\mathcal{K}_p(\Omega) = \{\mathcal{K}\varphi(z), z \in \Omega : \varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')\},$$

$$\mathcal{K}_p(\Omega)_+ = \{\mathcal{K}\varphi(z), z \in \Omega : \varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')_+\},$$

и

$$C\mathcal{K}(\Omega)_+ = \{\mathcal{K}\varphi(z), z \in \Omega : \varphi \in C(\Gamma) \cap L_1(\Gamma, \Phi')_+\}$$

и докажем следующее

Предложение 2. Пусть $1 < p < \infty$ и область Ω такая, что $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $q = p/(p-1)$. Тогда

$$\mathcal{K}_p(\Omega) = \mathcal{K}_p(\Omega)_+.$$

Доказательство. Соотношение $\mathcal{K}_p(\Omega) \supset \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ очевидно. Докажем противоположное включение. Пусть $f \in \mathcal{K}_p(\Omega)$, тогда

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega,$$

где $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')$. Поскольку $\varphi \circ \Psi \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, то в силу теоремы М. Рисса, и $\widetilde{\varphi \circ \Psi} \in L_p(\mathbb{T})$. Поэтому $\tilde{\varphi} \in L_p(\Gamma, \Phi')$ и согласно предложению 1

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) = \mathcal{K}\varphi_+(z). \quad (6)$$

Но поскольку $\varphi_+ \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$, то из равенства (6) следует, что $f \in \mathcal{K}_p(\Omega)$. Таким образом, действительно, $\mathcal{K}_p(\Omega) \subset \mathcal{K}_p(\Omega)_+$.

Предложения 1 и 2 показывают, что для каждой функции $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')$, при $p \in [1, \infty]$, для которой $\tilde{\varphi} \in L_p(\Gamma, \Phi')$ и тем более для всех функций $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 < p < \infty$, найдется функция $f \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$ такая, что $\mathcal{K}\varphi(z) = \mathcal{K}f(z) \quad \forall z \in \Omega$. Поэтому, при исследовании интегралов типа Коши $\mathcal{K}\varphi$ у которых $\varphi, \tilde{\varphi} \in L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 \leq p \leq \infty$, достаточно ограничиться изучением интегралов типа Коши $\mathcal{K}f$ у которых плотности f принадлежат $L_p(\Gamma, \Phi')_+$.

В дальнейшем важную роль играет следующая конкретизация множеств $\mathcal{K}_p(\Omega)_+$ в случае, когда $\Omega = \mathbb{D}$.

Предложение 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$\mathcal{K}_p(\mathbb{D})_+ = H_p,$$

и

$$C\mathcal{K}(\mathbb{D})_+ = A(\overline{\mathbb{D}}),$$

где $A(\overline{\mathbb{D}})$ – пространство функций аналитических в круге $\mathbb{D}$ и непрерывных в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$, снабженное нормой $\|f\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$.

Доказательство этого утверждения является несложным упражнением с использованием основных свойств функций из H_p и принципа максимума для аналитических функций.

Пусть $H_p(\mathbb{T})$ – множество всех функций из $L_p(\mathbb{T})$, которые являются некасательными граничными значениями функций из H_p .

Замечание 1. Из предложения 3 и теоремы Коши следует, что $L_p(\mathbb{T})_+ = H_p(\mathbb{T})$, откуда заключаем, что множество $\mathcal{K}_p(\Omega)_+$ совпадает

с множеством интегралов

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z} dt, \quad z \in \Omega,$$

в которых $f \in H_p(\mathbb{T})$.

2. Множества ψ – интегралов.

Множество $\mathcal{K}_p(\Omega)_+$ можно разбить на классы $\mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ по принципу разбиения множества $L_p(\mathbb{T})_+$ на классы $L_p^\psi(\mathbb{T})_+$, которое осуществляется следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ ($\psi_0 = 1$) – произвольная последовательность комплексных чисел, функция $f \in L_1(\mathbb{T})_+$ и

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

– ее ряд Фурье. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

является рядом Фурье некоторой функции $g \in L_1(\mathbb{T})_+$, то ее называют ψ – интегралом функции f и обозначают $\mathcal{J}^\psi f$. Множество ψ – интегралов всех функций $f \in L_1(\mathbb{T})_+$ обозначается через $L^\psi(\mathbb{T})_+$; если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество $L_1(\mathbb{T})_+$, то $L^\psi \mathfrak{N}(\mathbb{T})_+$ обозначает множество ψ – интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$.

Если для заданной функции $F \in L^\psi(\mathbb{T})_+$ указана функция $f \in L_1(\mathbb{T})_+$ такая, что почти всюду на $\mathbb{T}$ выполняется равенство $F(e^{it}) = \mathcal{J}^\psi f(e^{it})$, то функцию f естественно назвать ψ – производной функции F . При этом мы пишем $f = D^\psi F = F^\psi$.

Положим

$$L_p^\psi(\mathbb{T})_+ = L^\psi L_p(\mathbb{T})_+ \cap L_p(\mathbb{T}), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Как обычно, через $\mathfrak{M}$ обозначается множество выпуклых убывающих к нулю последовательностей положительных чисел $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, т.е. последовательностей, удовлетворяющих условиям

$$\psi_k > 0, \quad \psi_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty),$$

$$\psi_k - 2\psi_{k+1} + \psi_{k+2} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Сначала отметим следующий факт.

Предложение 4. Пусть $\psi_1 = \operatorname{Re} \psi$, $\psi_2 = \operatorname{Im} \psi$. Если $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, то для любого $p \in [1, \infty]$

$$L^\psi L_p(\mathbb{T})_+ = L_p^\psi(\mathbb{T})_+.$$

При $p = \infty$

$$L^\psi L_\infty(\mathbb{T})_+ \subset C^\psi(\mathbb{T})_+,$$

где $C^\psi(\mathbb{T})_+ = L^\psi(\mathbb{T})_+ \cap C(\mathbb{T})$.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать включения

$$L^\psi L_p(\mathbb{T})_+ \subset L_p(\mathbb{T})_+, \tag{7}$$

и

$$L^\psi L_\infty(\mathbb{T})_+ \subset C(\mathbb{T})_+.$$

Для этого заметим, что если $f \in L^\psi L_p(\mathbb{T})_+$, то $f = \mathcal{J}^\psi g$, где $g = f^\psi \in L_p(\mathbb{T})_+$, причем

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{g}(k) e^{ikt}. \tag{8}$$

Так как $\psi_j = \{\psi_{j,k}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2$, то $\psi_{j,k} \leq \psi_{j,1}$ и для каждого $\nu \in N$

$$\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} |\psi_{j,k} - \psi_{j,k+1}| = \psi_{j,2^\nu} - \psi_{j,2^{\nu+1}} \leq 2\psi_{j,1}, \quad j = 1, 2.$$

Следовательно, последовательность ψ удовлетворяет условиям теоремы Марцинкевича [6], в силу которой заключаем, что если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}(k) e^{ikt},$$

есть рядом Фурье функции из $L_p(\mathbb{T})_+$, $p \in (1, \infty)$, то такими же будут ряды в (8), т. е. включение (7) имеет место для $p \in (1, \infty)$.

При условиях, которым удовлетворяет последовательность ψ , ряды

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{j,k} \cos kt = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \psi_{j,|k|} e^{ikt}, \quad j = 1, 2$$

являются рядами Фурье суммируемых функции χ_j . Поэтому, если производная f^ψ принадлежит к $L_1(\mathbb{T})_+$ ($L_\infty(\mathbb{T})_+$) и имеет ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi_k} e^{ikt},$$

то свертка $f^\psi * \chi$, в которой $\chi = \chi_1 + i\chi_2$ является суммируемой (непрерывной) и

$$S[f^\psi * \chi] = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt}.$$

Отсюда сразу же следует справедливость соотношения (7) и в случае, когда $p = 1$ и $p = \infty$.

Переходя к распространению понятий ψ – интеграла и ψ – производной для функций, заданных на спрямляемых жордановых кривых, положим

$$L_p^\psi(\Gamma, \Phi')_+ = \{f \in L_p(\Gamma, \Phi')_+ : f \circ \Psi \in L_p^\psi(\mathbb{T})_+\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Определение 1. Пусть $f \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$, $1 \leq p \leq \infty$. Функция $g \in L_1^\psi(\Gamma, \Phi')$, для которой почти всюду на $\mathbb{T}$ выполняется равенство $(g \circ \Psi)(w) = \mathcal{J}^\psi(f \circ \Psi)(w)$, называется ψ -интегралом функции f и обозначается через $g = \mathcal{J}^\psi f$.

Определение 2. Пусть $f \in L_p^\psi(\Gamma, \Phi')_+$, $1 \leq p \leq \infty$. Функция $h \in L_1(\Gamma, \Phi')$, для которой почти всюду на $\mathbb{T}$ выполняется равенство $\mathcal{J}^\psi(h \circ \Psi)(w) = (f \circ \Psi)(w)$, называется ψ -производной функции f и обозначается через f^ψ .

Классы интегралов типа Коши определим следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+ &= \mathcal{K}(L_p^\psi(\Gamma, \Phi')_+) = \\ &= \{\mathcal{K}f(z) : z \in \Omega, f \in L_p^\psi(\Gamma, \Phi')_+\}, \\ C\mathcal{K}^\psi(\Omega)_+ &= \mathcal{K}_1^\psi(\Omega)_+ \cap C\mathcal{K}(\Omega)_+. \end{aligned}$$

Заметим, что согласно предложению 3 справедливы включения $\mathcal{K}_p^\psi(\mathbb{D})_+ \subset H_p$ и $C\mathcal{K}^\psi(\mathbb{D})_+ \subset A(\overline{\mathbb{D}})$. Поэтому в случае, когда $\Omega = \mathbb{D}$, таким образом осуществляется разбиение пространства Харди и пространства $A(\overline{\mathbb{D}})$ на классы $H_p^\psi \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{K}_p^\psi(\mathbb{D})_+$ и $A^\psi(\overline{\mathbb{D}}) \stackrel{\text{df}}{=} C\mathcal{K}^\psi(\mathbb{D})_+$, соответственно.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+r+1)}, \quad r > 0, \quad k = \overline{1, \infty},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда множества H_p^ψ и $A^\psi(\overline{\mathbb{D}})$ являются множествами функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, для которых дробные производные в смысле Римана – Лиувилля

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=[r]}^{\infty} \frac{\Gamma(k+r+1)}{\Gamma(k+1)} f_k z^k$$

принадлежат к H_p и к $A(\overline{\mathbb{D}})$ соответственно. Здесь $[r]$ – целая часть числа r .

Если $f = \mathcal{K}\varphi$, то по определению полагаем

$$f(z\langle e^{it} \rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta\langle e^{it} \rangle)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$\mathcal{J}^\psi f(z\langle e^{it} \rangle) = \mathcal{K}(\mathcal{J}^\psi \varphi \circ \zeta\langle e^{it} \rangle)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{J}^\psi \varphi(\zeta\langle e^{it} \rangle)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$f^\psi(z\langle e^{it} \rangle) = \mathcal{K}(\varphi^\psi \circ \zeta\langle e^{it} \rangle)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^\psi(\zeta\langle e^{it} \rangle)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где

$$\zeta\langle e^{it} \rangle = \Psi(\Phi(\zeta)e^{it}), \quad \zeta \in \Gamma, \quad t \in R.$$

Докажем следующее утверждение о представлении функций из множеств $\mathcal{K}_p^\psi(\Omega)$ при помощи сверток.

Предложение 5. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ ($f = \mathcal{K}\varphi$), $1 \leq p \leq \infty$, и кривая Γ такова, что $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Тогда в каждой точке $z \in \Omega$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_\psi(t) f^\psi(z\langle e^{it} \rangle) dt = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} D_\psi(t) \int_{\Gamma} \frac{\varphi^\psi(\zeta\langle e^{it} \rangle)}{\zeta - z} d\zeta dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$D_\psi(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cos kt = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{1,k} + i\psi_{2,k}) \cos kt.$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что при $\psi_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2$, функция D_ψ суммируема.

Поскольку $\varphi \in L_p^\psi(\Gamma, \Phi')_+$, то $\varphi = \mathcal{J}^\psi g$, причем почти всюду на Γ $g = \varphi^\psi \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$. Это позволяет рассмотреть для произвольной фиксированной точки $z \in \Omega$ функцию

$$f^\psi(z\langle\cdot\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^\psi(\zeta\langle\cdot\rangle)}{\zeta - z} d\zeta,$$

определенную на окружности $\mathbb{T}$.

Производя в интеграле замену $\zeta = \Psi(e^{i\theta})$, получим

$$\begin{aligned} f^\psi(z\langle e^{it}\rangle) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\varphi^\psi \circ \Psi)(e^{i(\theta+t)}) \frac{\Psi'(e^{i\theta})}{\Psi(e^{i\theta}) - z} de^{i\theta} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\varphi^\psi \circ \Psi)(e^{i(\theta+t)}) K(e^{i\theta}; z) de^{i\theta}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (2), функция $f^\psi(z\langle e^{it}\rangle)$, как свертка функций из $L_p(\mathbb{T})$ и $L_q(\mathbb{T})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ является непрерывной и разлагается в ряд Фурье

$$S[f^\psi(z\langle\cdot\rangle)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_k} (\widehat{\varphi \circ \Psi})(k) F_k(z) e^{ikt}. \quad (10)$$

Поэтому, на основании равенства Парсеваля, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_\psi(t) f^\psi(z\langle e^{it}\rangle) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{\varphi \circ \Psi})(k) F_k(z).$$

Но, для каждого $z \in \Omega$

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{\varphi \circ \Psi})(k) F_k(z).$$

Отсюда заключаем о справедливости равенства (9).

Предложение 5 позволяет рассматривать элементы множества $\mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ в каждой фиксированной точке $z \in \Omega$ как значение в точке

$x = 0$ свертки $(h(z\langle e^{i\cdot} \rangle) * D_\psi)(x)$ 2π – периодических функций $h(z\langle e^{i\cdot} \rangle)$ с ядрами D_ψ .

Развивая эту идею, докажем следующее

Предложение 6. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$, $1 \leq p \leq \infty$ и кривая Γ такова, что $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Тогда для каждой фиксированной точки $z \in \Omega$ функция $f(z\langle \cdot \rangle)$ принадлежит $C^\psi(\mathbb{T})_+$, причем $(f(z\langle \cdot \rangle))^\psi = f^\psi(z\langle \cdot \rangle)$.

Доказательство. Пусть $f = \mathcal{K}\varphi$, где $\varphi \in L_p^\psi(\Gamma, \Phi')$. Тогда $f(z\langle \cdot \rangle)$ как свертка функций из $L_p(\mathbb{T})$ и $L_q(\mathbb{T})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, является непрерывной и согласно (2) разлагается в ряд Фурье

$$S[f(z\langle \cdot \rangle)] = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{\varphi \circ \Psi})(k) F_k(z) e^{ikt},$$

т. е. $f(z\langle \cdot \rangle) \in C(\mathbb{T})_+$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_k} (\widehat{\varphi \circ \Psi})(k) F_k(z) e^{ikt}.$$

Согласно (10) и теореме единственности рядов Фурье, этот ряд является рядом Фурье некоторой функции $h \in C(\mathbb{T})_+$, а именно ψ – производной функции $f(z\langle \cdot \rangle)$, т. е. $(f(z\langle \cdot \rangle))^\psi = h(\cdot)$. Следовательно, $f(z\langle \cdot \rangle) \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ и, к тому же, в силу равенства (10), $(f(z\langle \cdot \rangle))^\psi = f^\psi(z\langle \cdot \rangle)$.

Предложение 6 позволяет редуцировать задачу о приближении функций из классов $\mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ к задаче о приближении функций из классов $C^\psi(\mathbb{T})_+$, поскольку, если $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ и $P(z)$ – некоторый алгебраический многочлен, то для каждого $z \in \Omega$ справедливо неравенство

$$|f(z) - P(z)| \leq \max_t |f(z\langle e^{it} \rangle) - P(z\langle e^{it} \rangle)|,$$

где $f(z\langle \cdot \rangle) \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ и $P(z\langle \cdot \rangle)$ – тригонометрический многочлен.

С учетом этого замечания, становится целесообразным более детально рассмотреть приближения функций из классов $C^\psi(\mathbb{T})_+$, чему и посвящен следующий пункт.

3. Приближения функций из классов $C^\psi(\mathbb{T})_+$.

Пусть $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = \overline{0, \infty}$, $k = \overline{0, n}$ – произвольная бесконечная треугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ на основании ее разложения в ряд Фурье поставим в соответствие многочлен $U_n(f; e^{it}; \Lambda)$ вида

$$U_n(f; e^{it}; \Lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} \widehat{f}(k) e^{ikt}.$$

Ближайшей целью будет получение интегрального представления для величины

$$\delta_n(f; e^{it}; \Lambda) \stackrel{\text{df}}{=} f(e^{it}) - U_n(f; e^{it}; \Lambda)$$

на классах $C^\psi(\mathbb{T})_+$. Для этого будем пользоваться следующим утверждением.

Лемма 1. Пусть γ_1 и γ_2 – функции непрерывные на полуоси R^+ такие, что их преобразования Фурье

$$\hat{\gamma}_{1+}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \gamma_1(v) \cos vtdv, \quad \hat{\gamma}_{2-}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \gamma_2(v) \sin vtdv$$

суммируемы на оси R . Тогда для любой функции $\varphi \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ свертка

$$(\varphi * \hat{\gamma})(e^{ix}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^{i(x+t)}) \hat{\gamma}(t) dt, \quad (11)$$

в которой

$$\hat{\gamma}(t) = \hat{\gamma}_{1+}(t) - i\hat{\gamma}_{2-}(t),$$

является непрерывной функцией на окружности $\mathbb{T}$ и

$$S[\varphi * \hat{\gamma}] = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_1(k) + \gamma_2(k)) \hat{\varphi}(k) e^{ikt}. \quad (12)$$

Доказательство. Непрерывность свертки $\varphi * \hat{\gamma}$ есть следствием того факта, что $\varphi \in C(\mathbb{T})_+$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\gamma}(t)| dt < \infty$. Поэтому остается показать справедливость (12). Для этого вычислим коэффициенты Фурье функции (11). Поскольку произведение $\varphi(e^{i(x+t)})\hat{\gamma}(t)$ суммируемо в полосе $\{(x, t) : x \in [0, 2\pi], t \in \mathbb{R}\}$, то по теореме Фубини имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi * \hat{\gamma}}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^{i(x+t)}) \hat{\gamma}(t) dt \right) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(t) \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i(x+t)}) e^{-ikx} dx dt = \hat{\varphi}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(t) e^{ikt} dt. \end{aligned}$$

Далее, используя хорошо известные формулы о преобразованиях Фурье, получим

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi * \hat{\gamma}}(k) &= \hat{\varphi}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(t) e^{ikt} dt = \\ &= \hat{\varphi}(k) \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\gamma}_{1+}(t) - i\hat{\gamma}_{2-}(t)) (\cos kt + i \sin kt) dt = \\ &= (\gamma_1(k) + \gamma_2(k)) \hat{\varphi}(k), \end{aligned}$$

откуда и следует равенство (12).

В дальнейшем, последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, определяющую класс $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$, будем считать значениями некоторой непрерывной на полуоси R^+ комплекснозначной функции $\psi(\cdot)$ при натуральном аргументе. Учитывая это, докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = \overline{0, \infty}$, $k = \overline{0, n}$ – фиксированная бесконечная треугольная числовая матрица, $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($\psi_0 = 1$, $|\psi_k| > 0$) – произвольная последовательность комплексных чисел, $\lambda(\cdot)$ и $\psi(\cdot) = \psi_1(\cdot) + i\psi_2(\cdot)$ – функции непрерывные на полуоси R^+ , такие, что $\lambda_n(k) = \lambda_k^{(n)}$ и $\psi(k) = \psi_k$. Тогда :

1) если косинус преобразование Фурье функции $\tau(v) = (1 - \lambda_n(v))\psi(v)$ суммируемо на оси R ($\hat{\tau}_+ \in L(\mathbb{R})$), то для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$\delta_n(f; e^{it}; \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta) f^\psi(e^{i(t+\theta)}) d\theta, \quad (13)$$

где

$$\hat{\tau}_n(\theta) = \hat{\tau}_+(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau(v) \cos v\theta dv;$$

2) если косинус и синус преобразования Фурье функции $\tau(v) = (1 - \lambda_n(v))\psi(v)$ суммируемы на оси R ($\hat{\tau}_+, \hat{\tau}_- \in L(\mathbb{R})$), то для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$ выполняется равенство (13), и в случае, когда

$$\hat{\tau}_n(\theta) = \frac{1}{2}[\hat{\tau}_+(\theta) - i\hat{\tau}_-(\theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tau(v) e^{-iv\theta} dv.$$

Доказательство. Если положить в лемме 1 $\gamma_1(v) = \tau(v)$, $\gamma_2(v) = 0$, то согласно (12), по теореме единственности рядов Фурье получим равенство (13). Если же положить $\gamma_1(v) = \gamma_2(v) = \tau(v)/2$, то получим (13) и в оставшемся случае.

Руководствуясь теоремой 1 получим интегральные представления для

величин

$$r_n(f; e^{it}) \stackrel{\text{df}}{=} f(e^{it}) - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) e^{ikt} = f(e^{it}) - S_{n-1}(f; e^{it})$$

– уклонений сумм Фурье на классах $C^\psi(\mathbb{T})_+$.

С этой целью положим

$$\lambda_n(v) = \begin{cases} 1, & v \in [0; n-1], \\ n-v, & v \in [n-1; n], \\ 0, & v \in [n; \infty). \end{cases} \quad (14)$$

Пусть, как обычно, $\mathfrak{M}$ – множество непрерывных на полуоси R^+ положительных функций ψ , выпуклых вниз и убывающих к нулю на бесконечности и $\mathfrak{M}'$ – подмножество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty.$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}$, то согласно лемме 5.1 из [7, с. 64] косинус преобразование Фурье функции $\tau(n-1; \cdot) = (1 - \lambda_n(\cdot))\psi(\cdot)$ суммируемо на оси R ($\tau(n-1; \cdot)_+ \in L(R)$), а если $\psi \in \mathfrak{M}'$, то согласно лемме 4.1 из [7, с. 58] и синус преобразование Фурье также суммируемо на $\mathbb{R}$ ($\tau(n-1; \cdot)_- \in L(R)$). Учитывая эти факты, придем к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $n \in N$, $\lambda_n(v)$ определяется формулой (14). Тогда:

1) если $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, то для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$r_n(f; e^{it}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta) f^\psi(e^{i(t+\theta)}) d\theta \quad (15)$$

где

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (1 - \lambda_n(v)) (\psi_1(v) + i\psi_2(v)) \cos vtdv. \quad (16)$$

2) если $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$ выполняется равенство (15) и в случае, когда

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (1 - \lambda_n(v))(\psi_1(v) + i\psi_2(v))e^{-ivt} dv. \quad (17)$$

Приведем некоторые следствия из этой теоремы .

Пусть $\mathcal{T}_n$ – множество тригонометрических полиномов вида

$$T_n(e^{it}) = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt}.$$

Прежде всего заметим, что справедливо

Следствие 1. Для любого полинома $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке e^{it} окружности $\mathbb{T}$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta) T_{n-1}(e^{i(t+\theta)}) d\theta = 0. \quad (18)$$

Пусть выполняются условия теоремы 2. Положим

$$\delta(f; e^{it}) = f(e^{it}) - T_{n-1}(e^{it}), \quad T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}.$$

Тогда равенство (15), с учетом (18), можно преобразовать в следующее

$$r_n(f; e^{it}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta) \delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) d\theta. \quad (19)$$

Поскольку, согласно (14),

$$(1 - \lambda_n(v))\psi(v) = \begin{cases} 0, & v \in [0; n-1], \\ (v - n + 1)\psi(n), & v \in [n-1; n], \\ \psi(v), & v \in [n, \infty), \end{cases}$$

то формулу (16) можно записать таким образом

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_n(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (1 - \lambda_n(v)) \psi(v) \cos v\theta dv = \\
 &= \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{n-1}^n (v - n + 1) \cos v\theta dv + \frac{1}{\pi} \int_n^\infty \psi(v) \cos v\theta dv = \\
 &= \frac{\psi(n)}{\pi} \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^2} \sin n\theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cos n\theta \right) + \frac{1}{\pi} \int_n^\infty \psi(v) \cos v\theta dv. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Поступая аналогично, формулу (17) можно записать в виде

$$\hat{\tau}_n(\theta) = \frac{\psi(n)}{2\pi} e^{-in\theta} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} + i \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^2} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_n^\infty \psi(v) e^{-iv\theta} dv. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \delta(f^\psi; e^{it}).$$

В силу условий теоремы 2 функция $F(\cdot)$ является 2π – периодической и непрерывной на оси R . Поэтому, согласно лемме 1.1 из [7, с. 43] справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^\infty F(t) \sin nt \frac{t - \sin t}{t^2} dt = 0, \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^\infty F(t) \cos nt \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi F(t) \cos ntdt = \frac{\pi \hat{f}(n)}{2 \psi(n)}, \quad (23)$$

а также равенства

$$\int_{-\infty}^\infty F(t) e^{-int} \frac{t - \sin t}{t^2} dt = 0, \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^\infty F(t) e^{-int} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi F(t) e^{-int} dt = \pi \frac{\hat{f}(n)}{\psi(n)}. \quad (25)$$

Подставляя формулы (20) и (21) в (19) и учитывая равенства (22)–(25), получим

Следствие 2. Пусть $n \in N$, $\Delta(f^\psi; e^{it})$ обозначает либо $f^\psi(e^{it})$, либо $\delta(f^\psi; e^{it})$. Тогда :

1) если $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, где $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, то для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$r_n(f; e^{it}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}(\psi; n; \theta) d\theta + \frac{1}{2} \widehat{f}(n) e^{int}, \quad (26)$$

где

$$\mathcal{J}(\psi; n; \theta) = \mathcal{J}_2(\psi; n; \theta)_0 = \frac{1}{\pi} \int_n^\infty \psi(v) \cos v\theta dv, \quad (27)$$

2) если $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, где $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$ выполняется равенство (26) и в том случае, когда

$$\mathcal{J}(\psi; n; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_n^\infty \psi(v) e^{-iv\theta} dv. \quad (28)$$

Важной характеристикой функций из множества $\mathfrak{M}$ является величина

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

в которой

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2).$$

С помощью этих двух величин из множества $\mathfrak{M}$ выделим два подмножества $\mathfrak{M}_0$ и F . Ко множеству $\mathfrak{M}_0$ относятся все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $0 < \mu(\psi; t) \leq \text{const}$, а ко множеству F – все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\eta'(t) = \eta'(\psi; t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \leq \text{const}, \quad t \geq 1,$$

$$\eta'(t) \stackrel{\text{df}}{=} \eta'(t+0).$$

Отметим, что естественными представителями множества $\mathfrak{M}_0$ являются функции $\psi(t) = t^{-r}$ ($r > 0$), $\psi(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$ ($r > 0$), $\psi(t) = t^{-r} \ln^\varepsilon(t+e)$ ($r \geq 0$) и др.. Множеству F принадлежат функции $\psi(t) = \exp(-\alpha t^r)$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$.

На основании теоремы 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тогда для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ и любого полинома $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$ при $n \in N$

$$r_n(f; e^{it}) = -\psi(n)S_{n-1}(f^\psi - T_{n-1}; e^{it}) + O(1)|\psi(n)|\|f^\psi - T_{n-1}\|_{C(\mathbb{T})}, \quad (29)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n и по f .

Эта теорема устанавливает связь между поведением остатка ряда Фурье функции f и поведением частной суммы ряда Фурье ее ψ – производной. В частности, из нее вытекает

Следствие 3. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тогда для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ и любого полинома $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ при $n \in N$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \|r_n(f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} &= |\psi(n)|\|S_{n-1}(f^\psi - T_{n-1}; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} + \\ &+ O(1)|\psi(n)|\|f^\psi(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что для того чтобы выполнялось равенство

$$\|r_n(f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = O(1)|\psi(n)|E_n(f^\psi), \quad n \in N,$$

где

$$E_n(\varphi) = \inf_{T_{n-1}} \|\varphi - T_{n-1}\|_{C(\mathbb{T})},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\|S_{n-1}(f^\psi; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = O(1).$$

В случае, когда $\psi = \Gamma(k+1)/\Gamma(k+r+1)$ теорема 3 и следствие 3 доказаны С. Б. Стечкиным [4].

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим равенство

$$r_n(f; e^{it}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}_2(\psi; n; \theta)_0 d\theta + \frac{1}{2} \widehat{f}(n) e^{int},$$

в котором $\mathcal{J}_2(\psi; n; \theta)_0$ определяется формулой (27).

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(\psi; n; \theta)_0 &= \frac{1}{\pi} \int_n^\infty \psi(v) \cos v\theta dv = \\ &= -\frac{\psi(n)}{\pi} \frac{\sin n\theta}{\theta} - \frac{1}{\pi\theta} \int_n^\infty \psi'(v) \sin v\theta dv = \\ &= -\frac{\psi(n)}{\pi} \cdot \frac{\sin n\theta}{\theta} - \frac{1}{\pi} \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta)_0, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} r_n(f; e^{it}) &= -\psi(n) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta)_0 d\theta + \frac{1}{2} \widehat{f}(n) e^{int}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для сокращения записей доказательство проведем для случая, когда $\Delta(f^\psi; e^{it}) = f^\psi(e^{it})$, поскольку в оставшемся случае оно аналогично.

Пусть $0 < \rho < 1$. Рассмотрим тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^\psi(\rho e^{i(t+\theta)}) \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)} \rho^k e^{i(t+\theta)} \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)} \rho^k e^{ikt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta,$$

в котором

$$f^\psi(\rho e^{it}) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{K} f^\psi(\rho e^{it}).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos k\theta \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos k\theta \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta = \begin{cases} \pi, & k = \overline{0, n-1}, \\ \frac{\pi}{2}, & k = n, \\ 0, & k = \overline{n+1, \infty} \end{cases} \end{aligned}$$

и, кроме того, в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)} \rho^k e^{ikt} = f^\psi(e^{it}),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta &= \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi(\rho e^{i(t+\theta)}) \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)} e^{ikt} + \frac{\widehat{f}(n)}{2\psi(n)} e^{int} = S_{n-1}(f^\psi; e^{it}) + \frac{\widehat{f}(n)}{2\psi(n)} e^{int}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (30), получим

$$r_n(f; e^{it}) = -\psi(n) S_{n-1}(f^\psi; e^{it}) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta)_0 d\theta.$$

Но, согласно соотношению (10.9) из [7, с. 133] для $\psi_j \in \mathfrak{M}_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{J}_3(\psi_j; n; \theta)_0| d\theta \leq O(1) \psi_j(n), \quad j = 1, 2,$$

поэтому в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$|r_n(f; e^{it}) + \psi(n)S_{n-1}(f^\psi; e^{it})| \leq O(1)|\psi(n)|,$$

что и доказывает теорему 3.

Отправляясь от следствия 2, докажем следующее утверждение

Лемма 2. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$; $a = \{a(n)\}_0^\infty$ – произвольная последовательность действительных чисел, для которой $na(n) \geq a_0 > 0 \forall n \in N$. Тогда, если $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$, то в каждой точке окружности $\mathbb{T}$ выполняется равенство

$$r_n(f; e^{it}) = \psi(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\theta| \geq a(n)} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta + b_n^\psi(a; f; e^{it}), \quad (31)$$

где

$$\|b_n^\psi(a; f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq O(1) \max_{j=1,2} (\psi_j(n) + Q_n^{\psi_j}(a)). \quad (31')$$

Кроме того, для любого полинома $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$r_n(f; e^{it}) = \psi(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\theta| \geq a(n)} \delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta + \bar{b}_n^\psi(a; f; e^{it}), \quad (32)$$

где $\delta(f^\psi; e^{i\tau}) = f^\psi(e^{i\tau}) - T_{n-1}(e^{i\tau})$ и

$$\|\bar{b}_n^\psi(a; f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq O(1) \max_{j=1,2} (\psi_j(n) + Q_n^{\psi_j}(a)) \|\delta(f^\psi; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \quad (32')$$

Величины $Q_n^{\psi_j}(a)$ определяются равенствами

$$Q_n^{\psi_j}(a) = \int_{1/a(n)}^\infty \frac{\psi_j(\theta + n)}{\theta} d\theta + \int_{a(n)}^\infty \frac{\psi_j(n) - \psi_j(n + 1/\theta)}{\theta} d\theta, \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Эта лемма является аналогом леммы 3 и следствия 2 из [8] и ее доказательство получается повторением соответствующих

мест из рассуждений, при помощи которых была установлены лемма 3 и следствия 2 из [8] с их модификацией для комплексного случая.

Прежде всего, в силу равенства (26), в котором величина $\mathcal{J}(\psi; n; \theta)$ выбрана согласно (28), имеем

$$r_n(f; e^{it}) = \left(\int_{|\theta| \geq a(n)} + \int_{|\theta| \leq a(n)} \right) \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}(\psi; n; \theta) d\theta + \frac{1}{2} \widehat{f}(n) e^{int},$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\psi; n; \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_n^\infty \psi(v) e^{-iv\theta} dv = \frac{\psi(n)}{2\pi i} \frac{e^{-in\theta}}{\theta} + \frac{1}{2\pi i \theta} \int_n^\infty \psi'(v) e^{-iv\theta} dv = \\ &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{\psi(n)}{2\pi i} \frac{e^{-in\theta}}{\theta} + \frac{1}{2\pi i} \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} r_n(f; e^{it}) &= \psi(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\theta| \geq a(n)} \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta + \\ &+ B_n(a; f^\psi; e^{it}) + P_n(a; f^\psi; e^{it}) + \frac{1}{2} \widehat{f}(n) e^{int}, \end{aligned}$$

где

$$B_n(a; f^\psi; e^{it}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\theta| \geq a(n)} \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta) d\theta, \quad (33)$$

$$P_n(a; f^\psi; e^{it}) = \int_{|\theta| \leq a(n)} \Delta(f^\psi; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}(\psi; n; \theta) d\theta. \quad (34)$$

Поскольку

$$\mathcal{J}_3(\psi; n; \theta) = \frac{1}{\theta} \int_n^\infty \psi'(v) \cos v\theta dv - \frac{i}{\theta} \int_n^\infty \psi'(v) \sin v\theta dv$$

и

$$\mathcal{J}(\psi; n; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_n^\infty \psi(v) \cos v\theta dv - \frac{i}{2\pi} \int_n^\infty \psi(v) \sin v\theta dv,$$

то, используя обозначения

$$\mathcal{J}_3(\psi; n; \theta)_\beta = \frac{1}{\theta} \int_n^\infty \psi'(v) \cos(v\theta - \beta \frac{\pi}{2}) dv, \quad \beta \in R,$$

$$\mathcal{J}_2(\psi; n; \theta)_\beta = \int_n^\infty \psi(v) \cos(v\theta - \beta \frac{\pi}{2}) dv, \quad \beta \in R,$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta) &= \mathcal{J}_3(\psi_1; n; \theta)_0 - i\mathcal{J}_3(\psi_1; n; \theta)_1 + \\ &+ \mathcal{J}_3(\psi_2; n; \theta)_1 + i\mathcal{J}_3(\psi_2; n; \theta)_0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\psi; n; \theta) &= \frac{1}{2\pi} [\mathcal{J}_2(\psi_1; n; \theta)_0 - i\mathcal{J}_2(\psi_1; n; \theta)_1 + \\ &+ \mathcal{J}_2(\psi_2; n; \theta)_1 + i\mathcal{J}_2(\psi_2; n; \theta)_0] \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (33) и (34), видим, что доказательство первой части леммы фактически сводится к получению оценок для величин, аналогичных величинам $R_n^\psi(a; f; x)$ и $P_n^\psi(a; f; x)$ из соотношения (6.13) [7, с. 99] Производя необходимые оценки, получаем соотношения (31) и (31'). Соотношения (32) и (32') получаются аналогично.

4. Асимптотические равенства.

Для получения асимптотически точных равенств для величин

$$\|r_n(f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{C(\mathbb{T})}$$

на классах $C^\psi(\mathbb{T})_+$ нам понадобится следующий замечательный результат Е. Ландау [9] о норме частных сумм рядов Тейлора функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$.

Теорема А. Пусть B – множество функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ таких, что $\|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sup_{f \in B} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |S_n(f; z)| = G_n,$$

где

$$G_0 = 1, \quad G_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

При этом

$$G_n = \frac{1}{\pi} \ln(n+1) + O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

На основании теоремы 3 и леммы 2 находятся асимптотические равенства для величин

$$R_n(C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+) = \sup_{f \in C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})},$$

где

$$C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+ = \{f \in C^\psi(\mathbb{T})_+ : \|f^\psi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

В случае, когда $\psi_i \in \mathfrak{M}_0$, $i = 1, 2$, справедлива

Теорема 4. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$R_n(C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+) = \frac{1}{\pi} |\psi(n)| \ln n + O(1) |\psi(n)|, \quad (35)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

В случае, когда $\psi(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$ теорема 4 доказана С. Б. Стечкиным [4].

Доказательство. Согласно следствию 3

$$R_n(C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+) = |\psi(n)| \sup_{f \in C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+} \|S_{n-1}(f^\psi; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} + O(1) |\psi(n)| \quad (36).$$

Если $f \in C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+$, то $f^\psi(\rho e^{it}) = \mathcal{K}f^\psi(\rho e^{it}) \in B$, причем почти всюду на окружности $\mathbb{T}$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} f^\psi(\rho e^{it}) = f^\psi(e^{it}).$$

С другой стороны, для любой функции $g \in B$ в классе $C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+$ найдется функция f , для которой f^ψ почти всюду на окружности $\mathbb{T}$ совпадает с угловыми граничными значениями функции g .

Поэтому, согласно теореме А при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{f \in C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+} \|S_{n-1}(f^\psi; \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \sup_{f \in B} \max_{z \in \mathbb{D}} |S_{n-1}(f; z)| = G_n = \frac{1}{\pi} \ln n + O(1). \quad (37)$$

Объединяя (36), (37), получим соотношение (35).

Отправляясь от леммы 2, получим следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ и, кроме того, выполняются условия

$$0 < K_1 \leq \frac{\eta(\psi_1; t) - t}{\eta(\psi_2; t) - t} \leq K_2 < \infty \quad \forall t \geq 1. \quad (38)$$

Тогда справедливо асимптотическое равенство

$$R_n(C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+) = \frac{1}{\pi} |\psi(n)| \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) |\psi(n)|, \quad (39)$$

в котором $\eta(n)$ есть либо $\eta(\psi_1; t) = \psi_1^{-1}(\frac{1}{2}\psi_1(n))$, либо $\eta(\psi_2; t) = \psi_2^{-1}(\frac{1}{2}\psi_2(n))$ и $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Доказательство. В [10, с.112] доказано включение $F \subset \mathfrak{M}'$. Кроме того, в [10, с.112] показано, что

$$\mu(\psi; t) \geq K_1 > 0 \quad \forall t \geq 1,$$

а в [11, с.134] показано, что

$$Q_n^\psi(\gamma) \leq K_2 |\psi(n)| \quad \forall \psi \in F,$$

$$\gamma = \gamma(n) = (\eta(\psi; n) - n)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $Q_n^\psi(\gamma)$ – величина, определяемая равенством (31''), а K_1, K_2 – некоторые постоянные.

Поэтому, выбирая величину $a(n)$ в (31) согласно равенству $a(n) = \gamma(n)$, с учетом (38) будем иметь

$$\|b_n^\psi(a; f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq O(1)|\psi(n)|.$$

Таким образом, из (31) находим

$$\begin{aligned} R_n(C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+) &= |\psi(n)| \frac{1}{2\pi} \sup_{f \in C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+} \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| \int_{|\theta| \geq a(n)} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta \right| + \\ &\quad + O(1)|\psi(n)|. \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что для любой функции $f \in C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+$ найдется функция $g \in L_\infty(\mathbb{T})_+$ такая, что $\|g\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leq 1$ и $f^\psi = g$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Поэтому, учитывая еще и инвариантность множества $L_\infty(\mathbb{T})$ относительно сдвига аргумента, заключаем, что

$$\begin{aligned} &\sup_{f \in C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+} \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| \int_{|\theta| \geq a(n)} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta \right| = \\ &= \sup_{\varphi \in L_\infty(\mathbb{T})_+ : \|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leq 1} \left| \int_{|\theta| \geq a(n)} \varphi(e^{i\theta}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta \right| = \mathcal{M}_n. \end{aligned}$$

При любом фиксированном $p \in (0, 1]$ справедлива оценка (см. соотношение (7.11) из [7]):

$$\left| \int_{p\pi}^{\infty} \varphi(e^{i\theta}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta \right| = O(1)\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\mathcal{M}_n = \sup_{\varphi \in L_\infty(\mathbb{T})_+ : \|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leq 1} \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \varphi(e^{i\theta}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta \right| + O(1) \quad (41)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{M}_n \leq 2 \ln^+ \frac{p\pi}{a(n)} + O(1) = 2 \ln^+(\eta(n) - n) + O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Отсюда с учетом соотношений (40) и (41) следует нужная оценка сверху величины $R_n(C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+)$ и для получения равенства (38) остается показать, что в (42) строгого неравенства быть не может.

Для этого рассмотрим последовательность функций

$$L_n(z) = z^n \frac{l_n(1/z)}{l_n(z)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$l_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^k.$$

Поскольку коэффициенты многочлена $l_n(z)$ положительны и, кроме того,

$$1 > \frac{1}{2} > \dots > \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

то по теореме Какейя (см., например [12]) все нули $l_n(z)$ лежат вне окружности $\mathbb{T}$. Следовательно функции $L_n(z)$, $n \in N$ аналитичны в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$ и

$$|L_n(\zeta)| = \left| \frac{l_n(\bar{\zeta})}{l_n(\zeta)} \right| = 1 \quad \forall \zeta \in \mathbb{T},$$

т. е. $L_n \in B$.

Поэтому для величины $\mathcal{M}_n$, с учетом (41), имеем оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &\geq \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} L_n(e^{i\theta}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta \right| + O(1) = \\ &= \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{d\theta}{\theta} \right| + O(1) \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (43)$$

для любого положительного числа $p \leq 1/2$.

Для дальнейшего заменим интеграл в (43) интегралом

$$\int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - 1}.$$

Погрешность при этом равна величине

$$q_n = \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \left(\frac{1}{\theta} - i \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1} \right) d\theta \right|$$

и для ее оценки воспользуемся тождествами

$$\frac{1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{2}{e^{i2\theta} - 1} + \frac{1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{-i\theta}}{i \sin \theta} + \frac{1}{e^{i\theta} + 1}.$$

Учитывая, что $\theta - \sin \theta \leq \theta \sin \theta$ ($\theta \in [0, \pi/2]$), получаем

$$\begin{aligned} q_n &\leq \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right) d\theta \right| + \\ &\quad + \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1} d\theta \right| \leq \\ &\leq \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{|\theta - \sin \theta|}{\theta \sin \theta} d\theta + \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} + 1|} \leq \\ &\leq 2(p\pi - a(n)) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) < 2\pi \quad \forall n \in N. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (43), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &\geq \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - 1} \right| + O(1) \geq \\ &\geq \left| \operatorname{Re} \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{e^{i\theta} d\theta}{1 - e^{i\theta}} \right| + O(1). \end{aligned} \tag{44}$$

Но, поскольку

$$\frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \left| \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| e^{i\phi(\theta)} = \frac{e^{i\phi(\theta)}}{|1 - e^{i\theta}|},$$

где

$$\phi(\theta) = \theta - 2 \arg l_n(e^{i\theta}) - \arg(1 - e^{i\theta}),$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \cdot \frac{e^{i\theta} d\theta}{1 - e^{i\theta}} &= \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\phi(\theta)}}{|1 - e^{i\theta}|} d\theta = \\ &= \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{\cos \phi(\theta)}{|1 - e^{i\theta}|} d\theta. \end{aligned} \quad (45)$$

Следовательно соотношение (44) приобретает вид

$$\mathcal{M}_n \geq \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{\cos \phi(\theta)}{|1 - e^{i\theta}|} d\theta \right| + O(1).$$

Пусть теперь s – произвольное фиксированное число, $s > 1$. Поскольку

$$\begin{aligned} \left| \int_{a(n) \leq |\theta| \leq sa(n)} \frac{\cos \phi(\theta)}{|1 - e^{i\theta}|} d\theta \right| &\leq \int_{a(n) \leq |\theta| \leq sa(n)} \frac{d\theta}{|1 - e^{i\theta}|} \leq 2 \frac{a(n)(s-1)}{|1 - e^{ia(n)}|} = \\ &= \frac{a(n)(s-1)}{\sin a(n)/2} = O(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то согласно (44) и (45)

$$\mathcal{M}_n \geq \left| \int_{sa(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{\cos \phi(\theta)}{|1 - e^{i\theta}|} d\theta \right| + O(1). \quad (46)$$

Далее, получим оценки значений функции $\cos \phi(\theta)$ на промежутках $\gamma_n = \{\theta : sa(n) \leq |\theta| \leq p\pi\}$, $n \in N$.

Используя разложения

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^k, \quad z \in \mathbb{D},$$

и

$$\frac{1}{1 - z \sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sin^{2k} x, \quad z \in \mathbb{D}, \quad x \in R,$$

а также формулу Валлиса для коэффициентов первого разложения

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx, \quad (47)$$

получаем равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} - l_n(z) = z^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2(n+1)} x}{1 - z \sin^2 x} dx \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Отсюда, если $\theta \in \gamma_n$, то, учитывая (47) и соотношение (см., например, [13, с. 280])

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (1 + o(1)) \quad n \rightarrow \infty,$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{1-e^{i\theta}}} - l_n(e^{i\theta}) \right| &= \left| \lim_{\rho \rightarrow 1-} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2(n+1)} x}{1 - \rho e^{i\theta} \sin^2 x} dx \right| = \\ &= \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2(n+1)} x}{1 - e^{i\theta} \sin^2 x} dx \right| \leq \frac{1}{\min_{x \in [0, \pi/2]} |1 - e^{i\theta} \sin^2 x|} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \\ &= \frac{1}{\min_{x \in [0, \pi/2]} |1 - e^{i\theta} \sin^2 x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (48)$$

Легко видеть, что

$$\min_{x \in [0, \pi/2]} |1 - e^{i\theta} \sin^2 x| = \sin \theta \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

Поэтому из (48), с учетом того, что $na(n) > a_0 > 0$, $n \in N$ и $\sin x \geq 2x/\pi \quad \forall x \in [0, \pi/2]$, следует неравенство

$$\left| 1 - l_n(e^{i\theta}) \sqrt{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{\sqrt{|1 - e^{i\theta}|}}{|\sin \theta|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (1 + o(1)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2|\sin \theta/2|}}{|\sin \theta|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1)) = \\
&= \frac{1}{\cos \theta/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2|\sin \theta/2|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1)) \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{|\sin \theta/2|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1)) \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{|\theta|n}}(1 + o(1)) \leq \frac{1}{\sqrt{sna(n)}}(1 + o(1)) < \\
&< \frac{1}{\sqrt{sa_0}}(1 + o(1)) \quad \forall \theta \in \gamma_n, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{49}$$

Пусть $s > 4/a_0$. Тогда из (49), заключаем, что существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geq n_0$ будет выполняться неравенство

$$\left| 1 - l_n(e^{i\theta})\sqrt{1 - e^{i\theta}} \right| < \frac{2}{\sqrt{sa_0}} < 1 \quad \forall \theta \in \gamma_n.$$

Отсюда, пользуясь простыми геометрическими соображениями, получаем, что для $\theta \in \gamma_n$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
&\left| \arg(l_n(e^{i\theta})\sqrt{1 - e^{i\theta}}) \right| = \\
&= \left| \arg l_n(e^{i\theta}) + \frac{1}{2} \arg(1 - e^{i\theta}) \right| < \arcsin \frac{2}{\sqrt{sa_0}}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Выберем число p согласно равенству

$$p = p(s) = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{2}{\sqrt{sa_0}}.$$

Теперь, учитывая (50), имеем оценку

$$\begin{aligned}
|\phi(\theta)| &= |\theta - 2 \arg l_n(e^{i\theta}) - \arg(1 - e^{i\theta})| \leq \\
&\leq |\theta| + 2 \left| \arg l_n(e^{i\theta}) + \frac{1}{2} \arg(1 - e^{i\theta}) \right| \leq \\
&\leq p\pi + 2 \arcsin \frac{2}{\sqrt{sa_0}} = 3 \arcsin \frac{2}{\sqrt{sa_0}} \quad \forall \theta \in \gamma_n, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем s столь большим, чтобы $\cos \phi(\theta) > 1 - \varepsilon$ для всех $\theta \in \gamma_n$ при достаточно больших n .

Тогда, продолжая оценку (46), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &\geq (1 - \varepsilon) \int_{sa(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{d\theta}{|1 - e^{i\theta}|} + O(1) = \\ &= (1 - \varepsilon) \int_{sa(n)}^{p\pi} \frac{d\theta}{\sin \theta/2} + O(1) = 2(1 - \varepsilon) \int_{sa(n)}^{p\pi} \frac{d\theta}{\theta} + O(1) = \\ &= 2(1 - \varepsilon) \ln \frac{p\pi}{sa(n)} + O(1) = 2(1 - \varepsilon) \ln(\eta(n) - n) + O(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, в силу произвольности ε , учитывая (42), (46) и (51), имеем

$$\mathcal{M}_n = 2 \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \quad n \rightarrow \infty.$$

Подставляя найденное асимптотическое значение величины $\mathcal{M}_n$ в (40), получим соотношение (39).

6. Неравенства Лебега – Ландау.

Пусть $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, $n \in N$, тогда согласно теореме А

$$\begin{aligned} \|f - S_{n-1}(f)\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} &\leq \|f - P_{n-1}^*\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} + \|S_{n-1}(f - P_{n-1}^*)\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} \leq \\ &\leq (G_{n-1} + 1)E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})} = \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1)\right)E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})}, \end{aligned}$$

где P_{n-1}^* – алгебраический многочлен степени $\leq n - 1$ наилучшего приближения функции f и

$$E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})} = \inf_{P_{n-1}} \|f - P_{n-1}\|_{A(\overline{\mathbb{D}})}$$

– величина наилучшего равномерного приближения функции f посредством алгебраических многочленов степени $\leq n - 1$.

Таким образом, для каждой функции $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ при любом $n \in N$

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1)\right) E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})}.$$

Последнее неравенство, являющееся аналогом известного неравенства Лебега, уместно назвать неравенством Лебега – Ландау для функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$.

В этом пункте получим аналоги неравенства Лебега – Ландау для классов $C^\psi(\mathbb{T})_+$.

Теорема 6. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тогда для каждой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ при любом $n \in N$ справедливо неравенство

$$\|r_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1)\right) |\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})}, \quad (52)$$

в котором $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Для любой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ при каждом $n \in N$ найдется функция $F(e^{it}) = F(e^{it}; n)$ такая, что $E_n(F^\psi)_{C(\mathbb{T})} = E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})}$ и для нее соотношение (52) становится равенством.

Замечание 2. Утверждение теоремы 6 остается в силе и в случае, когда $\psi \equiv 1$.

Доказательство. Пусть $P_{n-1}^*(e^{it})$ – многочлен степени $n-1$ наилучшего приближения функции $f^\psi(e^{it})$. Тогда, согласно следствию 3

$$\|r_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} = |\psi(n)| \|S_{n-1}(f^\psi - P_{n-1}^*)\|_{C(\mathbb{T})} + O(1) |\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})}. \quad (53)$$

Поскольку функция $f^\psi - P_{n-1}^*$ является некасательным граничным значением ограниченной аналитической в круге $\mathbb{D}$ функции $f^\psi(z) - P_{n-1}^*(z)$, то согласно теореме А

$$\|S_{n-1}(f^\psi - P_{n-1}^*)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1)\right) E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})}.$$

С учетом этой оценки из соотношения (53) получим неравенство (52).

Для доказательства второй части теоремы построим функцию $F(e^{it})$ такую, что $F^\psi(e^{it}) = E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})} L_n(e^{it})$.

В доказательстве теоремы 5 было показано, что функция $L_n(z)$ аналитична в $\overline{\mathbb{D}}$ и, кроме того, в круге $\mathbb{D}$ имеет ровно n нулей. Следовательно, такими же свойствами обладает и функция $F^\psi(z) = \mathcal{K}F^\psi(z)$, $z = \rho e^{it}$, $0 \leq \rho < 1$. Учитывая, еще что $\|F^\psi\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} = E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})} \|L_n\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} = E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})} |L_n(e^{it})| = E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})} = |F^\psi(e^{it})|$, $0 \leq t \leq 2\pi$, видим, что функция $F^\psi(z)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 4' из [14], согласно которой $E_n(F^\psi)_{C(\mathbb{T})} = E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})}$.

Покажем, что для функции $F(e^{it}) = \mathcal{J}^\psi F^\psi(e^{it}) = E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})} \mathcal{J}^\psi L_n(e^{it})$ соотношение (52) является равенством. Для этого достаточно показать, что

$$|\mathcal{J}^\psi L_n(1) - S_{n-1}(\mathcal{J}^\psi L_n)(1)| \geq |\psi(n)| \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right). \quad (55)$$

Согласно соотношению (29) для любого полинома $P_{n-1}(e^{it})$ степени $\leq n-1$

$$\begin{aligned} |\psi(n)| |S_{n-1}(L_n - P_{n-1}; 1)| &\leq |\mathcal{J}^\psi L_n(1) - S_{n-1}(\mathcal{J}^\psi L_n)(1)| + \\ &+ O(1) |\psi(n)| \|L_n - P_{n-1}\|_{C(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Выбирая в качестве полинома P_{n-1} полином наилучшего приближения функции L_n и учитывая то, что согласно теореме 4' из [14] этот полином тождественно равняется нулю, получим

$$|\mathcal{J}^\psi L_n(1) - S_{n-1}(\mathcal{J}^\psi L_n)(1)| \geq |\psi(n)| |S_{n-1}(L_n; 1)| - O(1) |\psi(n)|, \quad n \in N.$$

Отсюда согласно теореме А, следует соотношение (55). Теорема доказана.

Подобно тому, как на основании леммы 2 была получена оценка (42), получается следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ и, кроме того, выполняются условия (38). Тогда для каждой функции $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ при любом

$n \in N$ справедливо неравенство

$$\|r_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\right) |\psi(n)| E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})}, \quad (56)$$

в котором $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n , а $\eta(n)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 5.

7. Приближения интегралов типа Коши.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о приближении интегралов типа Коши из классов $\mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ во внутренних точках области Ω , в случае, когда производная Ψ' отображающей функции принадлежит к пространству $H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Отправной точкой на этом пути послужит предложение 6, согласно которому для любой функции $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ ($f = \mathcal{K}\varphi$) в случае, когда $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, при каждом фиксированном $z \in \Omega$ интеграл типа Коши

$$f(z\langle e^{it} \rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta\langle e^{it} \rangle)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it}))}{\zeta - z} d\zeta,$$

как функция точки e^{it} , заданная на окружности $\mathbb{T}$, принадлежит к классу $C^\psi(\mathbb{T})_+$ и $(f(z\langle \cdot \rangle))^\psi = f^\psi(z\langle \cdot \rangle)$.

С учетом этого предложения из неравенств Лебега – Ландау (52) и (56) непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 8. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ при любых $n \in N$, $z \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z)| &\leq \|f(z\langle \cdot \rangle) - S_{n-1}(f(z\langle e^{it} \rangle); \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1)\right) |\psi(n)| E_n(f^\psi(z\langle \cdot \rangle))_{C(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (57)$$

в котором

$$E_n(f^\psi(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} = \inf_{T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^\psi(\zeta\langle\cdot\rangle)}{\zeta - z} d\zeta - T_{n-1,z}(\cdot) \right\|_{C(\mathbb{T})},$$

$\mathcal{T}_{n-1}$ – множество функций $T_{n-1,z}$ вида

$$T_{n-1,z}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) e^{ikt},$$

$O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Теорема 8. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ и, кроме того, выполняются условия (38). Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ при любых $n \in N$, $z \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z)| &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^\psi(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (58)$$

где η есть либо $\eta_1(\psi_1; n)$, либо $\eta_2(\psi_2; n)$ и $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

В неравенствах (57), (58) фигурируют величины $E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})}$, которые зависят от точки z . Поэтому для получения равномерных оценок в замкнутой области $\overline{\Omega}$ целесообразно более детально исследовать эти величины.

Прежде всего заметим, что в интеграле типа Коши

$$\mathcal{K}\varphi(z\langle e^{it} \rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta\langle e^{it} \rangle)}{\zeta - z} d\zeta,$$

в случае, когда $\varphi \in L_p(\Gamma)_+$ можно существенно изменить ядро Коши, не изменяя значений самого интеграла. Именно, имеет место следующая лемма [1].

Лемма 3. Пусть $\Psi' \in H_1(\mathbb{D}_\infty)$, G_Ω – множество функций $g(\zeta, z)$, $\zeta \in \Gamma$, $z \in \Omega$, удовлетворяющих условию : при каждом $z \in \Omega$ функция $g_z(\cdot) = g(\Psi(\cdot), z)\Psi'(\cdot)$ принадлежит к $L_1(\mathbb{T})_+$. Тогда для любой функции $f \in L_1(\Gamma, \Phi')_+$ и любой функции $g \in g_\Omega$ в каждой точке $z \in \Omega$ почти всюду по переменной w на окружности $\mathbb{T}$ справедливо равенство

$$\mathcal{K}f(z\langle w \rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta\langle w \rangle) \left(\frac{1}{\zeta - z} + g(\zeta, z) \right) d\zeta. \quad (59)$$

Если выполнены условия леммы 3, то для любой функции $h \in \mathcal{K}_1(\Omega)_+$ ($h = \mathcal{K}\varphi$) в каждой точке $z \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} & E_n(h(z\langle \cdot \rangle))_{C(\mathbb{T})} \leq \\ & \leq \inf_{T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta\langle \cdot \rangle) Q(\zeta, z) d\zeta - T_{n-1,z}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$Q(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z} + g(\zeta, z), \quad g \in G_\Omega.$$

Пусть $\tau_{n-1}(e^{it})$ – произвольный тригонометрический полином порядка $n - 1$ вида

$$\tau_{n-1}(e^{it}) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \widehat{\tau}_k e^{ikt}, \quad (61)$$

и

$$T_{n-1,z}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) e^{ikt}. \quad (62)$$

Тогда при каждом фиксированном $z \in \Omega$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} (\varphi \circ \Psi)(we^{it}) T_{n-1,z}(\bar{w}) \frac{dw}{w} + \\ & + \int_{\mathbb{T}} \tau_{n-1}(we^{it}) \left(Q(\Psi(w), z) \Psi'(w) w - T_{n-1,z}(\bar{w}) \right) \frac{dw}{w} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) e^{ikt} \in \mathcal{T}_{n-1}, \quad (63)$$

где $a_k(z)$ – некоторые функции от z и $\bar{w}$ – число, сопряженное к w .

Поэтому, вследствие (60), (63) для каждого фиксированного $z \in \Omega$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & E_n(h(z\langle \cdot \rangle))_{C(\mathbb{T})} \leq \\ & \leq \inf \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \left((\varphi \circ \Psi)(w\cdot) - \tau_{n-1}(w\cdot) \right) \times \right. \\ & \times \left(Q(\Psi(w), z) \Psi'(w)w - T_{n-1,z}(\bar{w}) \right) \frac{dw}{w} \left. \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (64)$$

где нижняя грань берется по всем тригонометрическим полиномам τ_{n-1} , всем функциям $g \in G_\Omega$ и $T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Положим

$$G_{\Omega,p} = \{g \in G_\Omega : |g_z(\cdot)|^p \in L_1(\mathbb{T})\}, \quad p > 0.$$

и предположим, что $h \in \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ ($h = \mathcal{K}\varphi$), $1 \leq p \leq \infty$ и $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Тогда, применяя неравенство Гельдера к правой части (64), при каждом $z \in \Omega$ находим

$$\begin{aligned} & E_n(h(z\langle \cdot \rangle))_{C(\mathbb{T})} \leq \inf_{\tau_{n-1}} \|\varphi \circ \Psi - \tau_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{T})} \times \\ & \times \inf_{g_z \in G_{\Omega,q}^0, T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \|K_z^*(\cdot) + g_z(\cdot) - T_{n-1,z}(\bar{\cdot})\|_{L_q(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$G_{\Omega,q}^0 = \{g \in G_{\Omega,p} : \int_{\mathbb{T}} g_z(w) dw = 0 \quad \forall z \in \Omega\},$$

и

$$K_z^*(w) = K_z(w)w = \frac{\Psi'(w)w}{\Psi(w) - z}.$$

Отсюда, полагая

$$E_m(\varphi)_p = \inf_{\tau_k} \|(\varphi \circ \Psi)(\cdot) - \sum_{|k| \leq m-1} \tau_k e_k(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})},$$

где τ_k – произвольные числа, $e_k(w) = w^k$, (таким образом, $E_m(\varphi)_p$ – величина наилучшего приближения функции $\varphi \circ \Psi$ тригонометрическими полиномами порядка $m - 1$ в пространстве $L_p(\mathbb{T})$) и

$$\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Omega, z)_q = \inf_{g \in G_{\Omega,q}^0, T_{m-1,z} \in \mathcal{T}_{m-1}} \|K_z^*(\cdot) + g_z(\cdot) - T_{m-1,z}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})},$$

приходим к следующему предложению.

Теорема 10. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда для любой функции $h \in \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ ($h = \mathcal{K}\varphi$) при каждом $n \in \mathbb{N}$ в каждой точке $z \in \Omega$ справедлива оценка

$$E_n(h(z\langle \cdot \rangle))_{C(\mathbb{T})} \leq E_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q.$$

В лемме 3 показано, что в интеграле типа Коши $\mathcal{K}\varphi(z\langle e^{it} \rangle)$ в случае, когда $\varphi \in L_p(\Gamma)_+$, можно изменять ядро Коши так, что значение самого интеграла остается прежним. Но в этом интеграле можно изменять и функцию φ , не изменяя самого интеграла. Именно, справедлива следующая лемма [1].

Лемма 4. Пусть $\Psi', g \in H_1(\mathbb{D}_\infty)$, $g(\infty) = 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in L_1(\Gamma, \Phi')_+$ в каждой точке $z \in \Omega$, почти всюду по w на окружности $\mathbb{T}$

$$\mathcal{K}\varphi(z\langle w \rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\varphi(\zeta\langle w \rangle) + (g \circ \Phi)(\zeta\langle w \rangle) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (66)$$

Если выполнены условия леммы 4, то в силу (66) для любой функции $h \in \mathcal{K}_1(\Omega)_+$ ($h = \mathcal{K}\varphi$) при каждом $z \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} & E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \leq \\ & \leq \inf_{T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\varphi(\zeta\langle\cdot\rangle) + (g \circ \Phi)(\zeta\langle\cdot\rangle) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - T_{n-1,z}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (67)$$

где $g \in H_1^0(\mathbb{D}_\infty) = \{g \in H_1(\mathbb{D}_\infty) : g(\infty) = 0\}$.

Пусть теперь $\tau_{n-1}(e^{it})$ и $T_{n-1,z}(e^{it})$ – функции вида (61), (62), соответственно. Тогда, вследствие того, что $(\varphi \circ \Psi)(\cdot\omega) \in L_p(\mathbb{T})_+$ для каждого $\omega \in \mathbb{T}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \left((\varphi \circ \Psi)(we^{it}) + g(we^{it}) \right) T_{n-1,z}(\bar{w}) \frac{dw}{w} + \\ & + \int_{\mathbb{T}} \tau_{n-1}(we^{it}) \left(K_z^*(w) - T_{n-1,z}(\bar{w}) \right) \frac{dw}{w} = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) e^{ikt} \in \mathcal{T}_{n-1}, \end{aligned} \quad (68)$$

где $a_k(z)$ – некоторые функции переменного z .

Таким образом, вследствие соотношений (67), (68) для каждого фиксированного $z \in \Omega$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} & \leq \inf \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \left((\varphi \circ \Psi)(w\cdot) + g(w\cdot) - \tau_{n-1}(w\cdot) \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(K_z^*(w) - T_{n-1,z}(\bar{w}) \right) \frac{dw}{w} \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (69)$$

где нижняя грань берется по всем функциям $g \in H_1^0(\mathbb{D}_\infty)$ и по всем полиномам τ_{n-1} и $T_{n-1,z}$ вида (61) и (62), соответственно.

Если теперь предположить, что $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$ при некотором $p \geq 1$ и $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, а к правой части (69) применить неравенство

Гельдера, то будем иметь аналог неравенства (65) :

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \leq \inf_{g \in H_p^0(\mathbb{D}_\infty), \tau_{n-1}} \|\varphi \circ \Psi + g - \tau_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{T})} \times \\ \times \inf_{T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1,z}} \|K_z^*(\cdot) - T_{n-1,z}(\bar{\cdot})\|_{L_q(\mathbb{T})}.$$

Полагая

$$e_m(\varphi)_p = \inf_{g \in H_p^0(\mathbb{D}_\infty), \tau_{m-1}} \|\varphi \circ \Psi + g - \tau_{m-1}\|_{L_p(\mathbb{T})},$$

и

$$\mathcal{E}_{|m|,\infty}(\Omega, z)_q = \inf_{T_{m-1,z} \in \mathcal{T}_{m-1,z}} \|K_z^*(\cdot) - T_{m-1,z}(\bar{\cdot})\|_{L_q(\mathbb{T})},$$

получаем следующий аналог теоремы 10.

Теорема 11. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда для любой функции $h \in \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ ($h = \mathcal{K}\varphi$) при каждом $n \in N$ в каждой точке $z \in \Omega$ справедлива оценка

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \leq e_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{|n|,\infty}(\Omega, z)_q.$$

Объединяя теоремы 8 – 11, приходим к следующим утверждениям

Теорема 12. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ ($f = \mathcal{K}\varphi$) при любых $n \in N$, $z \in \Omega$ справедливы неравенства

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z)| \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q, \quad (70)$$

и

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z)| \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| e_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{|n|,\infty}(\Omega, z)_q,$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Теорема 13. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ и, кроме того, выполняются условия (38). Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ ($f = \mathcal{K}\varphi$) при любых $n \in N$, $z \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & |f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z)| \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{-n, \infty}(\Omega, z)_q, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & |f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z)| \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \right) |\psi(n)| e_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{|n|, \infty}(\Omega, z)_q, \end{aligned}$$

где $\eta(n)$ есть либо $\eta_1(\psi_1; n)$, либо $\eta_2(\psi_2; n)$ и $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n .

Неравенства (70), (71) доказаны в предположении, что $z \in \Omega$, т. е. они справедливы на любом замкнутом подмножестве K точек области Ω . Но любая функция f из класса $\mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ всегда аналитична на K . Поэтому появление логарифмического множителя в (70), (71), по видимому, не вызвано существом вопроса. Более того, естественно ожидать, что величина $\mathcal{E}_{-n, \infty}(\Omega, z)_q$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю со скоростью убывания членов геометрической прогрессии.

В подтверждение сказанного, приведем следующее предложение.

Предложение 7. Пусть $1 \leq q \leq \infty$. Тогда для любой точки $z \in \mathbb{D}$ при каждом $n \in N$

$$\mathcal{E}_{-n, \infty}(\mathbb{D}, z)_q = \frac{|z|^n}{(1 - |z|^2)^{1/p}}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \quad (72)$$

Для доказательства (72) применим соотношение двойственности, сформулированное в следующем виде.

Предложение 8. Пусть X – банахово пространство, Y – замкнутое подпространство в X ; X^* и Y^* – соответственно их сопряженные пространства; $Y^\perp = \{\phi \in X^* : \phi(y) = 0, \forall y \in Y\}$ – замкнутое подпространство в X^* (аннулятор пространства Y). Тогда :

а) фактор-пространство $X^*/Y^\perp$ изометрично изоморфно пространству Y^* и для каждого фиксированного функционала $\phi \in X^*$ справедливо равенство

$$\min_{\psi \in Y^\perp} \|\phi + \psi\| = \sup_{y \in Y, \|y\| \leq 1} |\phi(y)|; \quad (73)$$

б) пространство $(X/Y)^*$ изометрично изоморфно пространству $Y^\perp$ и для каждого фиксированного $x \in X$

$$\inf_{y \in Y} \|x + y\| = \max_{\psi \in Y^\perp, \|\psi\| \leq 1} |\psi(x)|. \quad (74)$$

Докажем сначала равенство (72) при $q \in (1, \infty]$. В этом случае в качестве пространства X выберем банахово пространство $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, а в качестве Y – подпространство $H_{p,n}(\mathbb{T})$, состоящее из функций f , определенных на окружности $\mathbb{T}$, которые являются угловыми граничными значениями функций из H_p , для которых $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$.

Сопряженное пространство к X изометрично изоморфно пространству $L_q(\mathbb{T})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Поэтому полагаем $X^* = L_q(\mathbb{T})$. В качестве элемента $\phi \in L_q(\mathbb{T})$ будет выступать функция $e^{it}/(e^{it} - z)$.

Положим

$$L_{p,n}(\mathbb{T})_+ = \{g \in L_p(\mathbb{T}) : \widehat{g}(k) = 0, k = \overline{-n, -\infty}\}, \quad 0 < p \leq \infty.$$

Поскольку множество $H_{p,n}(\mathbb{T})$ состоит из функций, представимых в виде $e^{int}f(e^{it})$, $f \in H_p(\mathbb{T})$ то, как нетрудно убедиться, $Y^\perp = L_{q,n}(\mathbb{T})_+$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Последнее равенство понимаем в том смысле, что любая функция $g \in L_{q,n}(\mathbb{T})_+$ порождает непрерывный линейный функционал A – аннулятор подпространства $H_{p,n}(\mathbb{T})$ при помощи соотношения

$$A(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})g(e^{it})dt = 0.$$

В таком случае, согласно (73), при $1 < q \leq \infty$ для произвольного фиксированного $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-n,\infty}(\mathbb{D}, z_0)_q &= \min_{g \in L_{q,n}(\mathbb{T})_+} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{it}}{e^{it} - z_0} + g(e^{it}) \right|^p dt \right\}^{1/p} = \\ &= \sup_{f \in B_{p,n}(\mathbb{T})} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z_0} dt \right| = \\ &= |z_0|^n \sup_{f \in B_p} |f(z_0)| \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1), \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$B_p = \{f \in H_p : \|f\|_{H_p} \leq 1\},$$

и

$$B_{p,n} = \{f \in B_p : f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0\}.$$

В последнем равенстве в (75) использовалась формула Коши (см. теорему Ф. и М. Рисса [5, с. 394]).

Осталось показать, что при $p \in [1, \infty)$

$$\sup_{f \in B_p} |f(z_0)| = \frac{1}{(1 - |z_0|^2)^{1/p}}. \quad (76)$$

Для этого рассмотрим сначала случай, когда $p = 2$.

Представляя функцию f из B_2 по формуле Коши и применяя неравенство Коши – Буняковского, для произвольного фиксированного $z_0 \in \mathbb{D}$ имеем

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{dt}{1 - e^{-it}z_0} \right| \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1 - e^{-it}z_0|^2} \right\}^{1/2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - |z_0|^2}}. \end{aligned} \quad (77)$$

Легко видеть, что функция

$$f_0(z) = \sqrt{\frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}},$$

где взята какая ни будь ветвь корня, принадлежит к B_2 и для нее (77) превращается в равенство, что и доказывает (76) при $p = 2$.

Пусть теперь $f \in B_p$ и $p \geq 1$, $p \neq 2$. По теореме Ф. Рисса (см, например, [5, с. 389]) функцию f можно представить в виде $f = gB_f$, где B_f – функция Бляшке, построенная по нулям функции f (здесь важно учесть, что $|B(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}$), $g \in B_p$ и $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

Так как функция $g^{p/2} \in B_p$, то согласно (77)

$$|f(z_0)|^{p/2} \leq |g(z_0)|^{p/2} \leq \sqrt{\frac{1}{1 - |z_0|^2}},$$

причем для функции

$$f_0(z) = \left(\frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} \right)^{1/p}$$

в последнем соотношении выполняется равенство.

Объединяя (75) и (76), получим равенство (72) для $1 < q \leq \infty$.

Для доказательства (72) в случае, когда $q = 1$ воспользуемся соотношением (74), в котором полагаем $X = L_1(\mathbb{T})$, $Y = L_{1,n}(\mathbb{T})_+$. При этом

$X^* = L_\infty(\mathbb{T})$, $Y^\perp = H_{\infty,n}(\mathbb{T})$. Так как любая функция f из $H_{\infty,n}(\mathbb{T})$, для которой $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leq 1$, представима в виде $f(e^{it}) = e^{int}g(e^{it})$, где значения $g(e^{it})$ являются угловыми граничными значениями некоторой функции g из B_∞ , то для произвольного фиксированного $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-n,\infty}(\mathbb{D}, z_0)_1 &= \inf_{g \in L_{1,n}(\mathbb{T})_+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{it}}{e^{it} - z_0} + g(e^{it}) \right| dt = \\ &= \max_{f \in B_{\infty,n}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z_0} dt \right| = |z_0|^n. \end{aligned}$$

Как показывают результаты, в случае, когда $\Omega = \mathbb{D}$, неравенства (70), (71) точны в смысле порядка и в смысле константы у главных значений правых частей для $z \in \mathbb{T}$ и $p = \infty$ (в этом случае $\sup_{z \in \mathbb{D}} \mathcal{E}(\mathbb{D}, z)_1 = 1$, а в левых частях неравенств берется существенный супремум). Из равенства (72), следует, что для любой односвязной области Ω с замкнутой жордановой спрямляемой границей при любом $q \in (1, \infty]$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, q) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{z \in \Omega} \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q = \infty.$$

В тоже время величина $\mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, 1)$ в многих случаях оказывается ограниченной.

Понятно, что для таких областей неравенства (70) и (70) при $p = 1$ будут точны по порядку и в смысле констант при всех $z \in \Gamma$ с надлежащим видоизменением левых частей.

Выясним условия, обеспечивающие ограниченность величин $\mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, 1)$.

Прежде всего заметим, что множество

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \Omega \subsetneq \mathbb{C} : \sup_{z \in \Omega} \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_1 < \infty \right\}, \quad n \in N$$

совпадает с множеством $\mathcal{S}_1$. Поэтому полагаем $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_n$.

Таким образом, задача сводится к исследованию величины

$$\mathcal{E}_{-1,\infty}(\Omega, z)_1 = \inf_{g \in G_\Omega} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z} + g_z(e^{it}) \right| dt. \quad (78)$$

При фиксированом $z \in \Omega$ любая функция $g(z, w)$ порождает функцию $g_z(w)$ из пространства H_1 . Поэтому нижняя грань в (78) совпадает с нижней гранью взятой по H_1 . Применяя соотношение двойственности (см. соотношение (74)), в котором $Y = H_1$ и $Y^\perp = H_{\infty,1}$, имеем

$$\sup_{z \in \Omega} \mathcal{E}_{-1,\infty}(\Omega, z)_1 = \sup_{z \in \Omega} \sup_{f \in B_{\infty,1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z} dt \right|. \quad (79)$$

Теперь дадим следующие определения.

Определение 3. Оператор $T = T_\Omega$, определенный на H_∞ , который действует по правилу

$$T(f)(z) = T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z} dt$$

называется оператором Фабера.

Как обычно, под нормой оператора T будем понимать величину

$$\|T\| = \|T_\Omega\| = \sup_{f \in B_\infty} \sup_{z \in \Omega} |T(f)(z)|. \quad (80)$$

Определение 4. Область $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ называется областью Фабера, если оператор T ограничен, т. е. $\|T\| < \infty$.

Множество всех областей Фабера обозначим через $\mathcal{F}$.

Сравнивая (79) с (80), убеждаемся в том, что величина $\mathcal{E}_{-1,\infty}(\Omega, 1)$ ограничена тогда и только тогда, когда область Ω – фаберова. При этом справедливы неравенства

$$\mathcal{E}_{-1,\infty}(\Omega, 1) \leq \|T\| \leq \mathcal{E}_{-1,\infty}(\Omega, 1) + 1.$$

По поводу свойств оператора Фабера и оценок его нормы см. библиографию в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанец А.И.** Приближение интегралов типа Коши в жордановых областях // Укр. Мат. Журн. – 1993. – **45**, N°6. – С. 809 – 833.
2. **Савчук В.В.** Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, N 7. – С.1001 – 1003.
3. **Савчук В. В.** Швидкості збіжності рядів Тейлора і рядів Фабера на класах $\bar{\psi}$ – інтегралів функцій комплексної змінної / Дисертація канд. фіз. – мат. наук. Київ. – 1998. – 125 С.
4. **Стечкин С. Б.** Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, N 5. – С. 461 – 472.
5. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 623 С.
6. **Marcinkiewicz J.** Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Stud. Math. – 1939. – **8**. –Р. 78 – 91.
7. **Степанец А. И.** Классификация и приближение периодических функций. – Киев : Наук. думка, 1987. – 268 С.
8. **Степанец А. И.** Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$ – интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, N 8. – С.1069 – 1113.

9. **Landau E.** Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.– Berlin – New-York : Springer-Verlag, 1986.– 201 p.
10. **Степанец А. И.** Классы функций, заданных на действительной оси и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, N 1. – С.102 – 112.
11. **Степанец А. И.** Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, N 1. – С. 101 – 136.
12. **Dienes P.** The Taylor series. –New York : Dover Publ., 1957. – 552 P.
13. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 3, Ч. 2.– М.: ГИТТЛ, 1953. – 676 С.
14. **Левин А. Л., Тихомиров В. М.** О приближениях аналитических функций рациональными // Докл. АН СССР. – 1967. – **147**, N 2. – С. 279 – 282.
15. **Суетин П. К.** Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 С.