УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВ S^p_φ

А.И. Степанец

1. Пространства S^p_φ

Пусть $\mathscr{X}$ – произвольное комплексное векторное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$ – фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathscr{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит к φ, определено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее известным условиям

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ – произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $f \in \mathscr{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k \in N$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathscr{X}) = \{f \in \mathscr{X} : \ \sum_{k=1}^\infty |\hat{f}_\varphi(k)|^p < \infty\}. \qquad (1)$$

При этом элементы $x, y \in S^p_\varphi$ отождествляются, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$. Таким образом, множество S^p_φ порождается пространством $\mathscr{X}$, системой φ и числом p.

Для векторов $f \in S^p_\varphi$ при $p \in [1, \infty)$ определим норму посредством равенства

$$\|f\|_p = \|f\|_{\varphi,p} = \|\hat{f}_\varphi\|_{l_p} = (\sum_{k=1}^\infty |\hat{f}_\varphi(k)|^p)^{1/p}. \qquad (2)$$

Сразу же заметим, что если система $\varphi' = \{\varphi'_k\} = \{\varphi_{k_s}\}$, $s = 1, 2, \dots$, получена из системы φ путем любой перестановки ее членов, то, в силу (1) и (2), справедливы равенства

$$S^p_\varphi = S^p_{\varphi'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p} \ \ \forall f \in S^p_\varphi. \tag{3}$$

Множество S^p_φ – линейное пространство: операции сложения векторов и умножения их на числа, определенные во всем $\mathscr{X}$ остаются пригодными и для любой пары $x, y \in S^p_\varphi$ и для любых чисел λ и μ

$$\lambda x + \mu y = z \in S^p_\varphi.$$

Действительно, так как $z \in \mathscr{X}$, то $\hat{z}(k) = \lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(k)$ и в силу неравенства Минковского

$$(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{z}(k)|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(k)|^p)^{1/p} \leq \lambda\|x\|_p + \mu\|y\|_p. \tag{4}$$

Ясно также, что норма, введенная равенством (2), удовлетворяет всем необходимым аксиомам, поэтому S^p_φ – линейное нормированное пространство, содержащее ортонормированную систему φ.

Отметим еще одно из важнейших свойств пространств S^p_φ. Пусть

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \tag{5}$$

– ряд Фурье элемента $f \in S^p_\varphi$ по системе φ и

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \ \ n \in N,$$

– частные суммы этого ряда. Справедливо следующее

Предложение 1. *Среди всех сумм вида*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k$$

при данном $n \in N$ *наименее уклоняется от* $f \in S^p_\varphi$ *частичная сумма* $S_n(f)$. *При этом*

$$\|f - S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{6}$$

Действительно, согласно (2) имеем

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_\varphi(k) - \alpha_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}_\varphi(k)|^p,$$

откуда и следует нужное утверждение.

При $n \to \infty$ правая часть в (6) стремится к нулю. Отсюда следует, что *для любого элемента* f *из* S^p_φ *его ряд Фурье (5) сходится к* f, т.е. система φ полна в S^p_φ и S^p_φ сепарабельно.

Приведем важную для дальнейшего конкретизацию этих построений.

Пусть R^m – m-мерное, $m \geq 1$, евклидово пространство, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ – его элементы, Z^m – целочисленная решетка в R^m – множестве векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами, $\boldsymbol{xy} = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{xx})}$ и, в частности, $\boldsymbol{kx} = k_1 x_1 + \cdots + k_m x_m$, $|\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ – множество всех 2π - периодических по каждой из переменных функций $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m,

$$Q^m = \{\boldsymbol{x} : \ \boldsymbol{x} \in R^m, \ \ -\pi \leq x_k \leq \pi, \ \ k = 1, \ldots, m\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции f по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2} e^{i\boldsymbol{kx}}, \quad \boldsymbol{k} \in Z^m, \tag{7}$$

т.е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{kx}},$$

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\boldsymbol{kt}} d\boldsymbol{t}. \tag{8}$$

Если считать неразличимыми функции, эквивалентные относительно меры Лебега, то в качестве $\mathscr{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве системы φ – тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{i\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{x}}, \;\; \boldsymbol{k}_s \in Z^m, \;\; s = 1, 2, \dots \;,$$

полученную из системы (7) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в таком случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{t}} d\boldsymbol{t} = \hat{f}(\boldsymbol{k}_s) = \hat{f}_\tau(\boldsymbol{k}_s).$$

Получающиеся при этом множества S^p_τ согласно (3) не зависят от нумерации системы (7) и в дальнейшем обозначаются через S^p.

Пусть теперь $\psi = \{\psi_n\}$, $n \in N$, – произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathscr{X}$ существует элемент $F \in \mathscr{X}$, для которого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}_\varphi(k) \varphi_k,$$

т.е.

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi(k), \;\; k \in N, \tag{9}$$

то F будем называть ψ -интегралом вектора f и писать $F = \mathcal{J}^\psi f$. В этом случае иногда удобно f называть ψ -производной элемента F и писать $f = F^\psi$.

Пусть, далее,

$$U^p_\varphi = \{f \in S^p_\varphi : \;\; \|f\|_{\varphi,p} \le 1\}$$

– единичный шар в пространстве S^p_φ. Тогда через $H^\psi_{\varphi,p}$ обозначим множество ψ -интегралов всех векторов $f \in U^p_\varphi$:

$$H^\psi_{\varphi,p} = \{f \in \mathscr{X} : \;\; f^\psi \in U^p_\varphi\}. \tag{10}$$

В дальнейшем предполагаем, что система ψ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n| = 0. \tag{11}$$

Понятно, что это условие заведомо обеспечивает включение $\mathcal{J}^\psi f \subset S^p_\varphi$ для любого элемента $f \in U^p_\varphi$ (ясно, что для такого включения необходимым и достаточным условием есть ограниченность чисел $|\psi_n|$, $n \in N$). Поэтому в рассматриваемом случае

$$H^\psi_{\varphi,p} \subset S^p_\varphi.$$

В настоящей работе предлагается способ построения приближающих агрегатов для векторов из $H^\psi_{\varphi,p}$, приспособленный к данному множеству, и показана его состоятельность в смысле колмогоровских поперечников. Точнее, при минимальных естественных ограничениях на системы ψ – требование (11) и условие

$$\psi_k \neq 0 \;\; \forall k \in N, \tag{12}$$

находятся точные значения поперечников по Колмогорову

$$d_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} \inf_{u\in F_n} \|f-u\|_p, \;\; n = 1, 2, \dots,$$

$$d_0(H^\psi_{\varphi,p}) \overset{\text{df}}{=} \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} \|f\|_p, \tag{13}$$

где G_n – множество всех n-мерных подпространств в S^p_φ. Показывается, что при этом экстремальными подпространствами, реализующими нижнюю грань в (13), являются именно построенные здесь подпространства. Из доказанной ниже теоремы 2, в частности следует, что график величины $d_n(H^\psi_{\varphi,p})$ как функции переменной n в общем случае имеет ступенчатый вид, причем высота и ширина ступени полностью и явно определяются системой ψ.

Здесь также находятся точные значения величин $e_n(H^\psi_{\varphi,p})$ наилучших приближений классов $H^\psi_{\varphi,p}$ при помощи n-членных полиномов по системе φ. Эти значения также явно определяются последовательностью ψ.

Во второй части работы из доказанных утверждений выводятся следствия, дающие точные значения колмогоровских поперечников классов периодических функций многих переменных, определяющихся мультипликаторами в пространстве S^p. Полученные результаты распространяют на более общие классы функций известные утверждения А.Н. Колмогорова , К.И. Бабенко и В.М. Тихомирова, которые в рассматриваемой тематике являются основополагающими. Найдены также значения наилучших n -членных приближений (по Стечкину) таких классов.

2. Колмогоровские поперечники классов $H^{\psi}_{\varphi,p}$

Пусть $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (11). Обозначим через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию, и через $g^{(\psi)} = g_1, g_2, \cdots$ – систему множеств

$$g_n = g_n^{\psi} = \{k \in N : \ |\psi_k| \geq \varepsilon_n\}. \tag{14}$$

Пусть еще $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \cdots,$ где $\delta_n = |g_n|$ – количество чисел $k \in N$, принадлежащих множеству g_n. Учитывая условие (11), последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ можно определить посредством следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \sup_{k\in N} |\psi_k|, \ \ g_1 = \{k \in N : \ |\psi_k| = \varepsilon_1\}, \\ \varepsilon_n = \sup_{k\in N\setminus g_{n-1}} |\psi(k)|, \\ g_n = g_{n-1} \cup \gamma_n, \ \ \gamma_n = \{k \in N : \ |\psi(k)| = \varepsilon_n\}.\end{gathered} \tag{15}$$

Последовательности $\varepsilon(\psi), g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в дальнейшем играют важную роль, поэтому будем называть их характеристическими для данной последовательности ψ.

Заметим, что в случае, когда множество $\varepsilon(\psi)$ значений $|\psi(k)|$ состоит из конечного числа n_0 элементов, то $\varepsilon_{n_0} = 0$ и при $n < n_0$ множества g_n имеют также конечное число δ_n элементов, а $\delta_{n_0} = \infty$. При этом

$$\delta_{n-1} < \delta_n. \tag{16}$$

Если же множество $\varepsilon(\psi)$ бесконечно, то всегда $\delta_n < \infty$ и выполняется неравенство (16). В обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \infty.$$

В дальнейшем ради удобства через g_0^ψ обозначается пустое множество и считается, что $\delta_0 = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для элементов $f \in H^\psi_{\varphi,p}$ будем рассматривать полиномы

$$S_n(f)_\varphi = S_{g_n^\psi}(f)_\varphi = \sum_{k\in g_n^\psi} c_k\varphi_k, \ \ n = 1, 2, \dots, \quad S_0(f)_\varphi = \theta, \tag{17}$$

где g_n^ψ – элементы последовательности $g(\psi)$, а θ – нулевой элемент пространства S^p_φ.

Положим

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi = \|f - S_{n-1}(f)_\varphi\|_{\varphi,p} \tag{18}$$

и

$$\mathscr{E}_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} \mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi, \ \ n = 1, 2, \dots\ . \tag{19}$$

Пусть еще

$$E_n^\psi(f)_\varphi = \inf_{a_k} \|f - \sum_{k\in g_{n-1}^\psi} a_k\varphi_k\|_{\varphi,p} \tag{20}$$

и

$$E_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} E_n^\psi(f)_\varphi. \tag{21}$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}, k = 1, 2, \dots$, *– система чисел, для которой выполняются условия (11) и (12). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливо равенство*

$$E_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \mathscr{E}_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \varepsilon_n, \tag{22}$$

где ε_n *–* n*-й член характеристической последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Доказательство. В силу равенства (2) и (9), с учетом определения чисел ε_n и множеств $g_n,$ для любого элемента $f \in H^\psi_{\varphi,p},$ полагая $\|\cdot\|_{\varphi,p} = \|\cdot\|,$ имеем

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_\varphi = \| \sum_{k\in\bar{g}_{n-1}} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k\| = \| \sum_{k\in\bar{g}_{n-1}} \psi_k \hat{f}^\psi_\varphi(k)\varphi_k\| =$$

$$= (\sum_{k\in\bar{g}_{n-1}} |\psi_k|^p |\hat{f}^\psi_\varphi(k)|^p)^{1/p} \le \varepsilon_n \|f^\psi\| = \varepsilon_n, \ \ \bar{g}_{n-1} = N \setminus g_{n-1}.$$

Таким образом, всегда

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_\varphi \le \varepsilon_n \quad \forall f \in H^\psi_{\varphi,p}. \tag{23}$$

Пусть теперь k' – любая точка из $\gamma_n = g^\psi_n \setminus g^\psi_{n-1}$ и $f_* = \psi_{k'}\varphi_{k'},$ так что $\|f_*\| = |\psi_{k'}| = \varepsilon_n.$ Так как $f^\psi_* = \varphi_{k'},$ то $\|f^\psi_*\| = 1$ и, следовательно, $f_* \in H^\psi_{\varphi,p}.$ Ясно, что

$$E^\psi_n(f_*)_\varphi = \|f_*\| = \varepsilon_n. \tag{24}$$

Поэтому, объединяя соотношения (23) и (24) и учитывая, что всегда $E_n(H^\psi_{\varphi,p}) \le \mathscr{E}_n(H^\psi_{\varphi,p}),$ получаем равенство (22).

Следующее утверждение касается величин поперечников $d_n(H^\psi_{\varphi,p}).$

Теорема 2. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\},$ $k = 1, 2, \dots$ *– система чисел, удовлетворяющая условиям (11) и (12). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(H^\psi_{\varphi,p}) = d_{\delta_{n-1}+1}(H^\psi_{\varphi,p}) = \dots =$$

$$= d_{\delta_n-1}(H^\psi_{\varphi,p}) = E^\psi_n(H^\psi_{\varphi,p})_\varphi = \varepsilon_n, \tag{25}$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *– элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_0 = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $n > 1$. Подпространство $\Phi^{(\psi)}_{n-1}$ полиномов

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k\in g^{\psi}_{n-1}} a_k\varphi_k \tag{26}$$

имеет размерность δ_{n-1}. Поэтому, с учетом (22), находим

$$\varepsilon_n = E_n(H^{\psi}_{\varphi,p}) \geq d_{\delta_{n-1}}(H^{\psi}_{\varphi,p}) \geq d_{\delta_{n-1}+1}(H^{\psi}_{\varphi,p}) \geq \cdots \geq d_{\delta_n-1}(H^{\psi}_{\varphi,p}).$$

Следовательно, для доказательства равенства (25) остается показать, что

$$d_{\delta_n-1}(H^{\psi}_{\varphi,p}) \geq \varepsilon_n, \ \ n = 1, 2, \ldots\ . \tag{27}$$

Для этого воспользуемся известной теоремой о поперечнике шара (см. напр. [1, §10.2]), согласно которой, если множество $\mathfrak{M}$ линейного нормированного пространства $\mathscr{X}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ содержит шар $\gamma U_{\nu+1}$ радиуса γ некоторого $(\nu+1)$ -мерного подпространства $M_{\nu+1}$ из $\mathscr{X}$, т.е. если

$$\mathfrak{M} \supset \gamma U_{\nu+1} = \{y: \ \ y \in M_{\nu+1}, \ \ \|y\|_{\mathscr{X}} \leq \gamma\},$$

то

$$d_{\nu}(\mathfrak{M})_{\mathscr{X}} = \inf_{F_\nu\subset G_\nu}\sup_{f\in\mathfrak{M}}\inf_{u\in F_\nu}\|f-u\|_{\mathscr{X}} \geq \gamma,$$

где G_ν - множество всех ν - мерных подпространств в $\mathscr{X}$.

Пусть $\varepsilon_n U^{\psi}_{n,\Phi}$ – пересечение шара радиуса ε_n в S^p_φ с пространством Φ^{ψ}_n (размерности δ_n) полиномов вида (26):

$$\varepsilon_n U^{\psi}_{n,\Phi} = \{\Phi_n \in \Phi^{(\psi)}_n: \ \ \|\Phi_n\| \leq \varepsilon_n\}. \tag{28}$$

Для ψ -производной Φ^{ψ}_n любого элемента $\Phi_n \in \varepsilon_n U^{\psi}_{n,\Phi}$, с учетом (28), имеем

$$\|\Phi^{\psi}_n\| = \|\sum_{k\in g^{\psi}_n}\frac{a_k}{\psi_k}\varphi_k\| = (\sum_{k\in g^{\psi}_n}\frac{|a_k|^p}{|\psi_k|^p})^{1/p} \leq \frac{1}{\varepsilon_n}(\sum_{k\in g^{\psi}_n}|a_k|^p)^{1/p} \leq 1.$$

Следовательно, $\Phi_n \in H^{\psi}_{\varphi,p}$. Таким образом, шар $\varepsilon_n U^{\psi}_{n,\Phi}$ δ_n -мерного подпространства $\Phi_n(\psi)$ из S^p_φ находится в классе $H^{\psi}_{\varphi,p}$, что в силу упомянутой теоремы и влечет соотношение (27). В случае $n>1$ теорема доказана. При $n=1$ ее доказательство остается без изменений, если принять, что $\Phi_0(\psi)$ состоит из нулевого элемента θ и размерность его равна нулю.

Отметим, что доказательство теоремы 2 по существу скопировано из рассуждений В.М. Тихомирова в [1, §4.4], где находятся поперечники эллипсоидов в гильбертовом пространстве, т.е. множеств, совпадающих в принятых здесь обозначениях с замыканием множеств $H^{\psi}_{\varphi,2}$.

3. Наилучшие n -членные приближения классов $H^{\psi}_{\varphi,p}$

Пусть, как и раньше, $S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathscr{X})$ – множество, порожденное произвольным линейным пространством $\mathscr{X}$, ортонормированной системой $\varphi=\{\varphi_n\}$, $n\in N$, и числом $p\in[1,\infty)$. Следуя С.Б. Стечнику [2], дадим такое определение

Определение 1. *Пусть* n *– фиксированное натуральное число,* Γ_n *– произвольный набор из* n *натуральных чисел и*

$$P_{\Gamma_n} = \sum_{k\in\Gamma_n} a_k\varphi_k,$$

где a_k *– некоторые комплексные числа.*

Величина

$$e_n(f)_\varphi = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{a_k,\Gamma_n} \|f-P_{\Gamma_n}\|_{\varphi,p}$$

называется наилучшим n *-членным приближением элемента* $f\in S^p_\varphi$ *в пространстве* S^p_φ*.*

Согласно (2) $\forall f\in S^p_\varphi$

$$\|f-P_{\Gamma_n}\|^p_{\varphi,p} = \sum_{k\bar\in\Gamma_n} |\hat f_\varphi(k)|^p + \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat f_\varphi(k)-a_k|^p \ge \sum_{k\bar\in\Gamma_n} |\hat f_\varphi(k)|^p =$$

$$= \|f\|^p_{\varphi,p} - \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p.$$

Отсюда видим, что

$$e^p_n(f)_\varphi = \|f\|^p_{\varphi,p} - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{29}$$

При $k \to \infty$ величины $\hat{f}_\varphi(k)$ стремятся к нулю. Поэтому значение верхней грани в (29) всегда достигается для некоторого набора Γ^*_n (не обязательно единственного), так что

$$e^p_n(f)_\varphi = \|f\|^p_{\varphi,p} - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p = \|f\|^p_{\varphi,p} - \sum_{k\in\Gamma^*_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{30}$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots,$ – *система чисел, удовлетворяющая условиям (11) и (12). Тогда при любом* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$e^p_n(H^\psi_{\varphi,p}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} e^p_n(f)_\varphi =$$

$$= \sup_{q>n} (q-n) / \sum_{k=1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p} = (q^*_n - n) / \sum_{k=1}^{q^*_n} \bar{\psi}_k^{-p}, \tag{31}$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}$, $k = 1, 2, \dots,$ – *последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\bar{\psi}_k = \varepsilon_n, \ \ \delta_{n-1} < k \le \delta_n, \ \ n = 1, 2, \dots\ , \tag{32}$$

и q^*_n – *некоторое натуральное число.*

Доказательство. Если $f \in H^\psi_{\varphi,p}$, то согласно (30) и (9)

$$e^p_n(f)_\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i|^p |\hat{f}^\psi_\varphi(i)|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{i\in\Gamma_n} |\psi_i|^p |\hat{f}^\psi_\varphi(i)|^p. \tag{33}$$

Пусть i_k, $k = 1, 2, \dots,$ – натуральные числа такие, что

$$\psi_{i_k} = \bar{\psi}_k, \ \ k = 1, 2, \dots\ . \tag{34}$$

Тогда в силу (33)

$$e_n^p(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)|^p \tag{35}$$

и, следовательно,

$$e_n^p(H_{\varphi,p}^\psi) = \sup_{f\in H_{\varphi,p}^\psi} (\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}_\varphi^\psi(i_k)|^p).$$

Для нахождения значений правой части этого соотношения воспользуемся следующей леммой для числовых рядов.

Лемма. *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – *невозрастающая последовательность положительных чисел,* $\alpha_k > 0 \quad \forall k \in N$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{k\to 0} \alpha_k = 0, \tag{36}$$

и $m = \{m_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность неотрицательных чисел,* $m_k \geq 0 \ \ \forall k \in N$, *для которой*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1. \tag{37}$$

Пусть, далее,

$$S(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_m m_k, \ \ S_{\Gamma_n}(m) = \sum_{k\in\Gamma_n} \alpha_k m_k, \tag{38}$$

где Γ_n – *произвольный набор из* n *натуральных чисел,*

$$\mathscr{E}_n(m) = \mathscr{E}_n^{(\alpha)}(m) = S_{(m)} - \sup_{\Gamma_n} S_{\Gamma_n}(m)$$

и

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n^{(\alpha)} = \sup_{|m|\leq 1} \mathscr{E}_n(m). \tag{39}$$

Тогда для любого натурального n *существует число* $q^* = q_n^* \in N$, $q_n^* > n$, *такое, что*

$$\mathscr{E}_n = (q^* - n) / \sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}.$$

Число q_n^* *определяется равенством*

$$\sup_{q>n}(q-n)/\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{-1}=(q^*-n)/\sum_{k=1}^{q^*}\alpha_k^{-1}$$

и верхняя грань в (39) реализуется для последовательности $m'=\{m'_k\}$, $k=1,2,\ldots,$ *у которой*

$$m'_k=\begin{cases}(\alpha_k\sum\limits_{i=1}^{q^*}\dfrac{1}{\alpha_k})^{-1}, & k=1,2,\ldots,q^*,\\ 0, & k>q^*.\end{cases}$$

Предположим, что лемма доказана. Тогда полагая $\bar\psi_k^p=\alpha_k$, $k\in N$, видим, что в силу (11) и (32), числа α_k удовлетворяют требованиям леммы и так как $\forall f\in H^\psi_{\varphi,p}$ $\|\hat f^\psi_\varphi\|_{l_p}\le 1$, то

$$e_n^p(H^\psi_{\varphi,p})\le\sup_{|m|\le 1}(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k m_k-\sup_{\Gamma_n}\sum_{k\in\Gamma_n}\alpha_k m_k)=$$

$$=(q^*-n)/\sum_{k=1}^{q^*}\alpha_k^{-1},$$

и для завершения доказательства теоремы остается показать, что в классе $H^\psi_{\varphi,p}$ существует элемент f_*, для которого

$$e_n^p(f_*)=(q_n^*-n)/\sum_{k=1}^{q^*}\bar\psi_k^{-p}. \tag{40}$$

С этой целью положим

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}c_{i_k}\varphi_{i_k}, \tag{41}$$

где числа i_k выбраны согласно (34) и

$$c_{i_k}^p=\begin{cases}(\bar\psi_k^p\sum\limits_{j=1}^{q^*}\dfrac{1}{\bar\psi_j^p})^{-1}, & k=1,2,\ldots,q^*,\\ 0, & k>q^*.\end{cases} \tag{42}$$

Элемент h является линейной комбинацией конечного числа элементов φ_j, поэтому он принадлежит к S^p_φ, а так как

$$\|h\|^p_{\varphi,p}=\sum_{k=1}^{q^*}c_{i_k}^p=(\sum_{j=1}^{q^*}\frac{1}{\bar\psi_j^p})^{-1}\sum_{k=1}^{q^*}\frac{1}{\bar\psi_k^p}=1,$$

то $h \in U_p^{\varphi}$. Поэтому полагая $f_* = \mathcal{J}^{\psi} h$, заключаем, что $f_* \in H_{\varphi,p}^{\psi}$ и $f_*^{\psi} = h$.

В силу (35), (41) и (42)

$$e_n^p(f_*)_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}_k^p c_{i_k}^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k \in \Gamma_n} \bar{\psi}_k^p c_{i_k}^p = (q^* - n) / \sum_{k=1}^{q^*} \bar{\psi}_k^{-p}.$$

Таким образом, соотношение (40), а с ним и теорема 3 доказаны.

Доказательство леммы. Пусть последовательности α и m удовлетворяют условиям леммы $(\alpha \in \mathcal{A},\ m \in \mathcal{M})$ и $\Gamma_n^* = \Gamma_n^*(m)$ – набор из n натуральных чисел, для которого

$$\sup_{\Gamma_n} S_{\Gamma_n}(m) = S_{\Gamma_n^*}(m). \tag{43}$$

В силу (36) и (37) ряд в (38) сходится, значит $\alpha_k m_k \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно, всегда найдется по крайней мере одно множество Γ_n^*, удовлетворяющее условию (43). Пусть еще

$$\mu = \mu_n(m) = \min_{k \in \Gamma_n^*} \alpha_k m_k.$$

Справедливо

Предложение 2. *Если* $\alpha \in \mathcal{A}$, *то для любой последовательности* $m \in \mathcal{M}$ *можно указать последовательность* $m^* \in \mathcal{M}$, *для которой* $|m^*| = |m|$ *и число* $q > n$ *такое, что*

$$\alpha_k m_k^* = \begin{cases} \mu, & k = 1, 2, \dots, q, \\ \lambda\mu, & k = q+1, \\ 0, & k > q+1, \end{cases} \tag{44}$$

где $\lambda \in [0, 1)$ *и при этом будет выполняться неравенство*

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(m^*). \tag{45}$$

Идея доказательства этого утверждения основана на том, что если при некотором k значение m_k представить в виде $m_k = m_k' + m_k''$, m_k',

$m_k'' \geq 0,$ то в силу монотонного убывания последовательности α будет

$$\alpha_l(m_l + m_k') + \alpha_k m_k'' \geq \alpha_l m_l + \alpha_k m_k \ \ \forall l \in [1, k). \tag{46}$$

Последовательность m^* можно построить ,например, таким образом. Первый шаг состоит в следующем.

Если $\alpha_1 m_1 < \mu,$ то через s_1 обозначим наименьшее из натуральных чисел (больших, чем 1), для которого будет

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{s_1} m_i \geq \mu.$$

Значение m_{s_1} представим в виде $m_{s_1} = \bar{m}_{s_1} + \bar{\bar{m}}_{s_1},$ где $\bar{m}_{s_1}$ подобрано так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha_1 (\sum_{i=1}^{s_1 - 1} m_i + \bar{m}_{s_1}) = \mu,$$

и положим $m^{(1)} = \{m_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty},$ где

$$m_k^{(1)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s_1-1} m_i + \bar{m}_{s_1}, & k = 1, \\ 0, & 1 < k < s_1, \\ \bar{m}_{s_1}, & k = s_1, \\ m_k, & k > s_1. \end{cases} \tag{47}$$

Если же $\alpha_1 m_1 \geq \mu,$ то положим $m^{(1)} = m.$ В силу соотношения (46) в обоих случаях будем иметь

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}). \tag{48}$$

Сделаем второй шаг. Если значение $m_2^{(1)}$ таково, что $\alpha_2 m_2^{(1)} < \mu,$ то через s_2 обозначим наименьшее из натуральных чисел, больших, чем 2, для которого

$$\alpha_2 \sum_{i=2}^{s_2} m_i^{(1)} \geq \mu,$$

значение $m_{s_2}^{(1)}$ представим в виде $m_{s_2}^{(1)} = \bar{m}_{s_2}^{(1)} + \bar{\bar{m}}_{s_2}^{(1)}$, где $\bar{m}_{s_2}^{(1)}$ подобрано по условию

$$\alpha_2(\sum_{i=2}^{s_2-1} m_i^{(1)} + \bar{m}_{s_2}^{(1)}) = \mu$$

и положим $m^{(2)} = \{m_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(2)} = \begin{cases} m_1^{(1)}, & k=1, \\ \sum\limits_{i=2}^{s_2-1} m_i^{(1)} + \bar{m}_{s_2}^{(1)}, & k=2, \\ 0, & 2<k<s_2, \\ \bar{\bar{m}}_{s_2}^{(1)}, & k=s_2, \\ m_k, & k>s_2. \end{cases}$$

Если же окажется, что $\alpha_2 m_2^{(1)} \geq \mu$, то положим $m^{(2)} = m^{(1)}$. Ясно, что и в этом случае будет выполняться аналог (48):

$$\mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(2)}).$$

Продолжая эту процедуру, на некотором шаге (пусть его номер будет j) построим последовательность $m^{(j)} = \{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(j)} = \begin{cases} m_k^{(j-1)}, & k=1,2,\ldots,j-1, \\ \sum\limits_{i=j}^{s_j-1} m_i^{(j-1)} + \bar{m}_{s_j}^{(j-1)}, & k=j, \\ 0, & j<k<s_j, \\ \bar{\bar{m}}_{s_j}^{(j-1)}, & k=s_j, \\ m_k, & k>s_j. \end{cases}$$

Для этой последовательности будем иметь

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \cdots \leq \mathscr{E}_n(m^{(j)}) \tag{49}$$

и, кроме того,

$$\alpha_j \sum_{k\geq j} m_k^{(j)} = \alpha_j(\bar{\bar{m}}_{s_j}^{(j)} + \sum_{k>j} m_k) < \mu. \tag{50}$$

На следующем шаге положим $m^{(j+1)} = \{m_k^{(j+1)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(j+1)} = \begin{cases} m_k^{(j)}, & k = 1, 2, \dots, j, \\ \sum\limits_{k>j} m_k^{(j)}, & k = j+1, \\ 0, & k > j+1. \end{cases}$$

Принимая во внимание соотношения (44)–(50), видим, что

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(m^{(j+1)})$$

и, кроме того,

$$m_k^{(j+1)} = m_k^{(j)} \ge \mu, \;\; k = 1, 2, \dots, j; \quad m_{j+1}^{(j+1)} < \mu.$$

Ясно также, что число j удовлетворяет условию

$$j \ge n.$$

Теперь величину

$$\beta = \sum_{i=1}^{j} (m_k^{(j+1)} - \mu) + m_{j+1}^{(j+1)}$$

представим в виде

$$\beta = \beta_{j+1} + \beta_{j+2} + \dots + \beta_{j+l}, \;\; \beta_{j+i} \ge 0, \;\; i = \overline{1, l},$$

где числа β_ν и l подобраны так, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_{j+i}\beta_{j+i} = \mu, \quad i = \overline{1, l-1},$$

$$\alpha_{j+l}\beta_{j+l} < \mu,$$

и положим $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^* = \begin{cases} \mu/\alpha_k, & k = 1, 2, \dots, j+l-1, \\ \beta_{j+l}, & k = j+l, \\ 0, & k > j+l. \end{cases}$$

Понятно, что последовательность m^* будет искомой: для этого достаточно положить $p = j + l - 1$ и $\lambda = \alpha_{j+l}\beta_{j+l}/\mu$.

Предложение 2 доказано. Продолжим доказательство леммы. При данном натуральном n обозначим через $\mathcal{M}_n$ подмножество последовательностей m из $\mathcal{M}$, для которых при некотором натуральном q, $q > n$, справедливо представление

$$\alpha_k m_k = \begin{cases} \mu, & k = 1, 2, \ldots, q, \\ \lambda\mu, & k = q+1,\ \lambda \in [0, 1), \\ 0, & k > q+1, \end{cases} \tag{51}$$

где μ – некоторое положительное число.

Так как построенная выше последовательность m^* принадлежит к $\mathcal{M}_n$, то из (45) следует равенство

$$\mathscr{E}_n = \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathscr{E}_n(m) = \sup_{m \in \mathcal{M}_n} \mathscr{E}_n(m),$$

означающее, что для нахождения величины $\mathscr{E}_n$ достаточно ограничиться последовательностями $m \in \mathcal{M}_n$.

Если $m \in \mathcal{M}_n$, то в силу (51)

$$\mathscr{E}_n(m) = (q-n)\mu + \lambda\mu = (q-n+\lambda)|m|/(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} + \frac{\lambda}{\alpha_{q+1}}). \tag{52}$$

При фиксированном n и натуральных $q > n$ рассмотрим функции

$$f(q) = (q-n)/\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k}$$

и

$$f(q, \lambda) = (q-n+\lambda)/(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} + \frac{\lambda}{\alpha_{q+1}}), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Видим, что

$$f(q, 0) = f(q), \quad f(q, 1) = f(q+1).$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(q, \lambda)}{\partial \lambda} = (\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}})(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} + \frac{\lambda}{\alpha_{q+1}})^{-2},$$

то на промежутке $\lambda \in [0, 1]$ эта производная сохраняет знак. Следовательно, на этом промежутке функция $f(q, \lambda)$ с ростом λ либо убывает, либо возрастает. В таком случае $\forall\lambda \in [0,1]$ будет либо $f(q,\lambda) \le f(q)$, либо $f(q,\lambda) \le f(q+1)$. Поэтому в силу (52) $\forall m \in \mathcal{M}_n$

$$\mathscr{E}_n(m) \le |m| \max(f(q),\ \ f(q+1)).$$

Значит, согласно (52)

$$\mathscr{E}_n \le \sup_{q>n} f(q) = \sup_{q>n} (q-n)/\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k}. \tag{53}$$

Далее, при любом $q > n$ имеем

$$f(q+1) - f(q) = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} + \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}})(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} \sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{\alpha_k})^{-1}. \tag{54}$$

Величина

$$r_n(q) = \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}} = \sum_{k=n+1}^{q} (\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{q+1}})$$

отрицательна и в силу (36) ее абсолютная величина , не убывая, – стремится к бесконечности. Поэтому из (54) следует, что найдется такое значение $q_0,$ начиная с которого функция $f(q)$ будет строго убывающей. Следовательно, на промежутке $(n, q_0]$ существует точка $q^*,$ для которой

$$\sup_{q>n} f(q) = \max_{q \in (n,q_0]} f(q) = f(q^*) = (q^* - n)/\sum_{k=1}^{q^*} \frac{1}{\alpha_k}. \tag{55}$$

Таким образом, согласно (76) и (78),

$$\mathscr{E}_n \le (q^* - n)/\sum_{k=1}^{q^*} \frac{1}{\alpha_k}. \tag{56}$$

Остается показать, что строгого неравенства в этом соотношении быть не может. С этой целью рассмотрим последовательность $m' = \{m'_k\},$ у которой

$$m'_k = \begin{cases} (\alpha_k \sum_{i=1}^{q^*} \frac{1}{\alpha_i})^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0, & k > q^*. \end{cases}$$

Ясно, что $m' \in \mathcal{M}_n$ и для нее согласно (52)

$$\mathscr{E}_n(m') = (q^* - n) / \sum_{k=1}^{q^*} \frac{1}{\alpha_k}.$$

Объединяя это соотношение и соотношение (56), заканчиваем доказательство всех утверждений леммы.

Замечание 1. Если система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что при данном некотором $n \in N$ множество $g_n^{\psi} \setminus g_{n-1}^{\psi}$, определяемое формулой (14), содержит более одной точки, то в силу (25)

$$d_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \varepsilon_n \quad \forall \nu \in [\delta_{n-1}, \delta_n - 1].$$

Значения же $e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi})$ с увеличением номера ν всегда строго убывают:

$$e_{\nu+1}^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q > \nu+1} \frac{q - \nu - 1}{\sum\limits_{k=1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p}} < \sup_{q > \nu+1} \frac{q - \nu}{\sum\limits_{k=1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p}} \le e_\nu^p(H_{\varphi,p}^{\psi}),$$

т.е. всегда $e_{\nu+1}(H_{\varphi,p}^{\psi}) < e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi})$ и, к тому же, всегда $e_{\delta_{n-1}}(H_{\varphi,p}^{\psi}) < \varepsilon_n = d_{\delta_{n-1}}(H_{\varphi,p}^{\psi})$. Действительно, согласно (31)

$$e_{\delta_{n-1}}^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q > \delta_{n-1}} \frac{q - \delta_{n-1}}{\sum\limits_{k=1}^{\delta_{n-1}} \bar{\psi}_k^{-p} + \sum\limits_{k=\delta_{n-1}+1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p}} <$$

$$< \sup_{q > \delta_{n-1}} \frac{q - \delta_{n-1}}{\sum\limits_{k=\delta_{n-1}+1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p}} \le \sup_{q > \delta_{n-1}} \frac{q - \delta_{n-1}}{(q - \delta_{n-1}) \bar{\psi}_{\delta_{n-1}+1}^{-p}} = \bar{\psi}_{\delta_{n-1}+1}^p = \varepsilon_n^p.$$

Таким образом, всегда

$$e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}) \; < \; d_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}).$$

4. Колмогоровские поперечники и наилучшие n-членные приближения периодических функций многих переменных в пространстве S^p

Пусть, как и раньше, $L = L(R^m)$ – множество всех 2π - периодических по каждой из переменных функций $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m и (8) – ряд Фурье функции $f \in L$ по системе (7). При этом эквивалентные функции считаются неразличимыми.

Пусть, далее, S^p – пространство, порожденное множеством L, системой (11) и некоторым числом $p \in [1, \infty)$ с нормой $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{S^p}$, определяемой согласно (2), для которой в силу (3) справедливы равенства

$$\|f\|_p = \|f\|_{S^p} = (\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^p)^{1/p}.$$

Пусть теперь $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ – произвольная система комплексных чисел – кратная последовательность. Для функций $f \in L$ наряду с (8) рассмотрим ряд

$$(2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} \psi(\boldsymbol{k}) \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}.$$

Если этот ряд данной функции f и системы ψ является рядом Фурье некоторой функции F из L, то F назовем ψ-интегралом функции f и будем писать $F(\boldsymbol{x}) = \mathcal{J}^\psi(f; \boldsymbol{x})$. При этом иногда удобно функцию f называть ψ-производной функции F и писать $f(\boldsymbol{x}) = D^\psi(F; \boldsymbol{x}) = F^\psi(\boldsymbol{x})$. Множество ψ-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через L^ψ. Если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из L, то $L^\psi \mathfrak{N}$ будет обозначать множество ψ-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Ясно, что если $f \in L^\psi$, то коэффициенты Фурье функций f и f^ψ связаны соотношением

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \psi(\boldsymbol{k}) \hat{f}^\psi(\boldsymbol{k}), \ \ \boldsymbol{k} \in Z^m.$$

Будем рассматривать в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U^p в пространстве S^p :

$$U^p = \{f : \ \ f \in S^p, \ \ \|f\|_p \le 1\}.$$

В таком случае полагаем $L^\psi U^p = L^\psi_p = L^\psi_p(R^m)$. Относительно системы ψ предполагается, что

$$\lim_{|\boldsymbol{k}| \to \infty} \psi(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{57}$$

Заметим, что если $f \in L^\psi S^p$ и $|\psi(\boldsymbol{k})| \le C$, $\boldsymbol{k} \in Z^m$, $C = \mathrm{const}$, то $f \in S^p$, т.е. условие (57) всегда гарантирует включение $L^\psi_p \subset S^p$.

Определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi), g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ следующим образом:

$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – множество значений величин $|\psi(\boldsymbol{k})|$, $\boldsymbol{k} \in Z^m$, упорядоченное по их убыванию; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$g_n = g_n^\psi = \{\boldsymbol{k} \in Z^m : \quad |\psi(\boldsymbol{k})| \ge \varepsilon_n\};$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, где $\delta_n = \delta_n^\psi = |g_n|$ – количество чисел $\boldsymbol{k} \in Z^m$, принадлежащих множеству g_n.

Ввиду условия (57), в рассматриваемом случае последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ определяются равенствами (15) с учетом того, что на этот раз $\boldsymbol{k} \in Z^m$. Как и раньше считается, что $g_0 = g_0^\psi$ есть пустое множество и что $\delta_0 = \delta_0^\psi = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in L^\psi$ рассмотрим тригонометрические полиномы

$$S_n(f;\boldsymbol{x}) = S_{g_n^\psi}(f;\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in g_n^\psi} \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}},$$

$$n \in N, \ \ S_0(f;\boldsymbol{x}) = 0, \tag{17'}$$

где g_n^ψ – элементы последовательности $g(\psi)$.

Пусть

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_p = \|f(\boldsymbol{x}) - S_{n-1}(f;\boldsymbol{x})\|_{S^p}, \tag{18'}$$

$$\mathscr{E}_n(L_p^\psi)_p = \sup_{f \in L_p^\psi} \mathscr{E}_n^\psi(f)_p, \ \ n = 1, 2, \ldots . \tag{19'}$$

$$E_n^\psi(f)_p = \inf_{a_k} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in g_{n-1}^\psi} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{S^p} \tag{20'}$$

и

$$E_n(L_p^\psi)_p = \sup_{f \in L_p^\psi} E_n^\psi(f)_p, \ \ n = 1, 2, \ldots . \tag{21'}$$

Пусть, далее,

$$d_n(L^\psi_p)_p = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L^\psi_p} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{S^p}, \quad n \in N, \quad d_0(L^\psi_p)_p \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in L^\psi_p} \|f\|_{S^p},$$

где G_n – множество всех n-мерных подпространств в S^p – поперечники по Колмогорову классов L^ψ_p и

$$e_n(L^\psi_p)_p = \sup_{f \in L^\psi_p} \inf_{a_{\boldsymbol{k}}, \Gamma_n} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in \Gamma_n} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\|_{S^p},$$

где Γ_n – произвольный набор из n векторов $\boldsymbol{k} \in Z^m$, – величина наилучшего n-членного приближения класса L^ψ_p в пространстве S^p.

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения – аналоги, а по существу – частные случаи теорем 1–3.

Теорема 1′. *Пусть* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условию (57) и таких, что*

$$\psi(\boldsymbol{k}) \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{k} \in Z^m. \tag{58}$$

Тогда при любых $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$

$$E_n(L^\psi_p)_p = \mathscr{E}_n(L^\psi_p)_p = \varepsilon_n, \tag{22′}$$

где ε_n *–* n*-й член последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Теорема $2'$. *Пусть* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условия (57) и (58). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(L^\psi_p)_p = d_{\delta_{n-1}+1}(L^\psi_p)_p = \cdots =$$
$$= d_{\delta_n - 1}(L^\psi_p)_p = E_n(L^\psi_p)_p = \varepsilon_n, \tag{25′}$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s \in N$ *– элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_0 = 0$.

Теорема 3$'$. *Пусть* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условиям (57) и (58). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *выполняется* *равенство*

$$e_n^p(L_p^\psi)_p = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{s=1}^{q}\bar\psi_s^{-p} = (q^*-n)/\sum_{s=1}^{q^*}\bar\psi_s^{-p}, \qquad (31')$$

где $\bar\psi = \{\bar\psi_s\}$, $s \in N$ *– последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\bar\psi_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \le \delta_n, \ \ n = 1, 2, \dots\ ,$$

в которых ε_s *и* δ_s *– элементы последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$, *а* q^* *– некоторое натуральное число.*

Доказательство. Отправляясь от заданной системы ψ, фигурирующей в теоремах $1'-3'$, перенумеруем все векторы $\boldsymbol{k} \in Z^m$ так, чтобы числами s при $s \in (\delta_{n-1}, \delta_n)$ были перенумерованы векторы $\boldsymbol{k}$ из множеств $g_k^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ в каком–нибудь фиксированном порядке. Затем определим последовательность $\psi' = \{\psi'_s\}_{s=1}^\infty$, положив

$$\psi'_s = \psi(\boldsymbol{k}_s), \quad s = 1, 2, \dots\ . \qquad (59)$$

Поскольку

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2}\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m}\hat f(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} = (2\pi)^{-m/2}\sum_{s=1}^{\infty}\hat f(\boldsymbol{k}_s)e^{i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{x}},$$

то из (59) заключаем, что

$$\mathcal{J}^{\psi'}(f;\boldsymbol{x}) = \mathcal{J}^{\psi}(f;\boldsymbol{x}) \quad \forall f \in L$$

и, следовательно,

$$L_p^{\psi'} = L_p^{\psi}.$$

Но

$$L_p^{\psi'} = H_{\varphi',p}^{\psi'},$$

где $H_{\varphi',p}^{\psi'}$ – множество определяется согласно равенству (10):

$$H_{\varphi',p}^{\psi'} = \{f \in L: \quad f^{\psi'} \in U_{\varphi'}^p\},$$

в котором $U^p_{\varphi'} = U^p$ и $\varphi' = \{(2\pi)^{-m/2}e^{i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{x}}\}_{s=1}^{\infty}$. К тому же последовательности $\varepsilon(\psi')$ и $\varepsilon(\psi)$, а также $\delta(\psi')$ и $\delta(\psi)$ совпадают и справедливы равенства

$$S_{g_n^{\psi'}}(f)_{\varphi'} = S_{g_n^{\psi}}(f;x), \quad \mathscr{E}_n^{\psi'}(f)_{\varphi'} = \mathscr{E}_n^{\psi}(f)_p,$$

$$\mathscr{E}_n(H^{\psi'}_{\varphi',p}) = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_p)_p, \quad E_n^{\psi'}(f)_{\varphi'} = E_n^{\psi}(f)_p$$

и

$$E_n(H^{\psi'}_{\varphi',p}) = E_n(L^{\psi}_p)_p,$$

в которых левые части определяются равенствами (17)–(21), а правые – соотношениями $(17') - (21')$. Отсюда заключаем, что утверждения теорем $1'$ и $2'$ следуют из теорем 1 и 2. Ясно также, что и $e_n(L^{\psi}_p)_p = e_n(H^{\psi'}_{\varphi',p})$ и что $\bar{\psi}' = \bar{\psi}$. Поэтому и теорема $3'$ вытекает из теоремы 3.

Замечание 2. Выражение (2) определяет норму только при $p \in [1,\infty)$ (при $p \in (0,1)$ не выполняется неравенство (4)), однако оно имеет смысл при всех $p > 0$. Поэтому если под знаком $\|\cdot\|_p$ понимать правую часть соотношения (2), то все утверждения , доказанные выше, остаются в силе, за исключением оценки снизу поперечников d_ν, поскольку применяемая здесь теорема о поперечнике шара предполагает, что $\mathscr{X}$ – нормированное пространство.

Замечание 3. Если последовательность ψ такова, что ряд

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m} \psi(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathscr{D}_\psi(t)$, то необходимым и достаточным условием включения $f \in L^{\psi}\mathfrak{N}$ является возможность представления f сверткой вида

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{Q^m} \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\mathscr{D}_\psi(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}, \tag{60}$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{N}$ и почти всюду $\varphi(\boldsymbol{x}) = f^{\psi}(\boldsymbol{x})$. Таким образом, классы $L^{\psi}\mathfrak{N}$ охватывают классы функций, представимых свертками с фиксированными суммируемыми ядрами (см., например, [3, §1.9]).

Замечание 4. Пусть $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1, \infty)$, – пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = (\int\limits_{Q^m} |f(\boldsymbol{t})|^p d\boldsymbol{t})^{1/p}. \tag{61}$$

Связь между множествами L_p и S^p устанавливает известная теорема Хаусдорфа–Юнга (см. например [4, п. XII.2]), утверждающая, что

(I) Если $f \in L_p$, $p \in (1, 2]$, и $\hat{f}(\boldsymbol{k})$ – коэффициенты Фурье функции f, определяемые формулой

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\boldsymbol{t}) e^{i\boldsymbol{kt}} d\boldsymbol{t},$$

то

$$(\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^{p'})^{1/p'} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L_p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

(II) Пусть $\{c_{\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ – последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |c_{\boldsymbol{k}}|^p < \infty, \quad p \in (1, 2].$$

Тогда существует функция $f \in L_{p'}$, для которой $\hat{f}(\boldsymbol{k}) = c_{\boldsymbol{k}}$, и

$$\|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} (\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |c_{\boldsymbol{k}}|^p)^{1/p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Из этой теоремы следует, что если $p \in (1, 2]$, то

$$L_p \subset S^{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{S^{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L_p}, \tag{62}$$

$$S^p \subset L_{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f\|_{S^p}. \tag{62'}$$

В частности, при $p = p' = 2$ справедливы равенства

$$L_2 = S^2 \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{S^2}. \tag{63}$$

5. Следствия для пространств L_p

В силу соотношений (62) и $(62')$, теоремы $1' - 3'$, доказанные для пространств S^p, содержат информацию и для пространств L_p, которая является наиболее полной вследствие (63) в случае, когда $p = 2$.

Ввиду особой важности этого случая, приведем точные формулировки соответствующих утверждений.

Пусть, как и раньше, $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ – произвольная система комплексных чисел и $L^\psi\mathfrak{N}$ – множество ψ-интегралов всех функций $f \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из $L = L(R^m)$, $m \geq 1$. Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U_{L_2} в пространстве L_2 :

$$U_{L_2} = \{f : \ f \in L_2, \ \ \|f\|_{L_2} \leq 1\}. \tag{64}$$

Здесь норма $\|\cdot\|_{L_2}$ определяется равенством (61) при $p = 2$. В таком случае положим $L^\psi U_{L_2} = U^\psi_{L_2}$.

Считая выполненным условие (57), определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$, а также полиномы $S_n(f;x)$ согласно формул $(17')$ и для $f \in U^\psi_{L_2}$ положим

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_2} = \|f(\boldsymbol{x}) - S_{n-1}(f;\boldsymbol{x})\|_{L_2},$$

$$\mathscr{E}_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f\in U^\psi_{L_2}} \mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_2},$$

$$E^\psi_n(f)_{L_2} = \inf_{a_{\boldsymbol{k}}} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in g^\psi_{n-1}} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{L_2}$$

и

$$E_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f\in U^\psi_{L_2}} E^\psi_n(f)_{L_2}.$$

Пусть еще

$$d_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \inf_{F_n\in G_n} \sup_{f\in U^\psi_{L_p}} \inf_{u\in F_n} \|f-u\|_{L_2}, \ \ n \in N,$$

$$d_0(U^\psi_{L_2}) = \sup_{f\in U^\psi_{L_2}} \|f\|_{L_2},$$

где G_n – множество всех n-мерных подпространств в L_2 и

$$e_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = \sup_{f\in U^{\psi}_{L_2}} \inf_{a_{\boldsymbol{k}},\Gamma_n} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in\Gamma_n} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{L_2},$$

где Γ_n – произвольный набор из n векторов $\boldsymbol{k} \in Z^m$ – величина наилучшего n-членного приближения класса $U^{\psi}_{L_2}$ в пространстве L_2. Справедливо следующее утверждение

Теорема 4. *Пусть* $\psi = \psi(\boldsymbol{k})_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условиям (57) и (58). Тогда при любых* $n \in N$ *выполняются равенства*

$$E_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = \mathscr{E}_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = \varepsilon_n, \tag{65}$$

$$\begin{aligned} d_{\delta_{n-1}}(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} &= d_{\delta_{n-1}+1}(U^{\psi}_{L_2}) = \ldots = \\ &= d_{\delta_n-1}(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = E_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{66}$$

$$e^2_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{s=1}^{q} \bar{\psi}_s^{-2} = (q^* - n)/\sum_{s=1}^{q^*} \bar{\psi}_s^{-2}. \tag{67}$$

В этих равенствах ε_s *и* δ_s *– элементы характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$, $\delta_0 = 0$, p^* *– некоторое натуральное число и*

$$\bar{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \le \delta_n, \;\; n = 1, 2, \ldots \;.$$

Доказательство. В силу (63) и (64) видим, что $U_{L_2} = U^2$ и, следовательно, $U^{\psi}_{L_2} = L^{\psi}_2$. Поэтому справедливы равенства

$$\mathscr{E}^{\psi}_n(U^{\psi}_{L_2})_2 = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_2)_2,$$

$$E_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = E_n(L^{\psi}_2)_2,$$

$$d_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = d_n(L^{\psi}_2)_2$$

и

$$e_n(U^{\psi}_{L_2})_2 = e_n(L^{\psi}_2)_2, \quad n = 1, 2, \ldots \;.$$

Отсюда заключаем, что равенства (65)–(67) следуют из соотношений $(22')$, $(25')$ и $(31')$.

Отметим, что равенства (65) и (66) в одномерном случае, т.е. при $m = 1$ в несколько другой терминологии были получены еще в 1936 г. в известной работе А.Н. Колмогорова [5], положившей начало исследованию поперечников различных функциональных классов. В общем случае эти равенства можно получить и путем анализа результатов и рассуждений упоминавшегося §4.4 книги В.М. Тихомирова [1].

Отметим также, что, как следует из равенств (65) и (66), в пространстве L_2 значения поперечников множеств $U^\psi_{L_2}$ реализуют приближения суммами $(17')$, т.е. полиномами, которые являются наилучшими в смысле поперечников в пространствах S^p при всех $p \in [1, \infty)$ для классов L^ψ_p. Это позволяет предположить, что именно суммы $(17')$ будут наилучшим аппаратом приближения (опять таки в смысле колмогоровских поперечников) и в пространствах L_p при всех $p \geq 1$ для соответствующих множеств $U^\psi_{L_p}$,

$$U^\psi_{L_p} = L^\psi U_{L_p}, \quad U_{L_p} = \{f: \ f \in L_p, \ \|f\|_{L_p} \leq 1\}.$$

Пусть $p \in (1, 2]$ и $f \in L^\psi_p$, где $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ – кратная последовательность, удовлетворяющая условиям (57) и (58). Положим

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_q} = \|f(\boldsymbol{x}) - S_{n-1}(f; \boldsymbol{x})\|_{L_q},$$

где $S_{n-1}(f; x)$ – полиномы, построенные согласно формул $(17')$, а $\|\cdot\|_{L_q}$ – норма, определяющаяся равенством (61). Пусть, далее,

$$\mathscr{E}_n(L^\psi_p)_{L_q} = \sup_{f \in L^\psi_p} \mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_q},$$

$$E^\psi_n(f)_{L_q} = \inf_{a_{\boldsymbol{k}}} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in g^\psi_{n-1}} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{L_q}$$

и

$$E_n(L^\psi_p)_{L_q} = \sup_{f \in L^\psi_p} E^\psi_n(f)_{L_q}.$$

Пусть еще

$$d_n(L^\psi_p)_{L_q} = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L^\psi_p} \inf_{n \in F_n} \|f - u\|_{L_q}, \ \ n \in N,$$

$$d_0(L^\psi_p)_{L_q} = \sup_{f\in L^\psi_p} \|f\|_{L_q},$$

где G_n – множество всех n-мерных пространств в L_q и

$$e_n(L^\psi_p)_{L_q} = \sup_{f\in L^\psi_p} \inf_{a_{\boldsymbol{k}},\Gamma_n} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in\Gamma_n} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{L_q},$$

где Γ_n – произвольный набор из n векторов $\boldsymbol{k} \in Z^m$. Согласно $(62')$, имеем

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \mathscr{E}^\psi_n(f)_p.$$

Поэтому, в силу $(22')$,

$$\mathscr{E}_n(L^\psi_p)_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \varepsilon_n,$$

где как и выше – ε_n – n-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.

Следовательно, и

$$E_n(L^\psi_p)_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{k}'$ – любая точка из $\gamma_n = g^\psi_n \setminus g^\psi_{n-1}$ и $f_* = (2\pi)^{-m/2}\psi(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}}$. Тогда $f_* \in L^\psi_p$ и

$$E^\psi_n(f_*)_{L_{p'}} = \|f_*\|_{L_{p'}} = (2\pi)^{m(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2})} |\psi_{(\boldsymbol{k}')}| \ \|e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{L_{p'}} =$$

$$= (2\pi)^{m(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2})} \varepsilon_n = \varepsilon_n (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}.$$

Таким образом, доказано следующее

Предложение 3. *Если* $p \in (1, 2]$ *и последовательность* $\Phi(\boldsymbol{k})$ *удовлетворяет условиям (57) и (58), то* $\forall n \in N$

$$E_n(L^\psi_p)_{L_{p'}} = \mathscr{E}_n(L^\psi_p)_{L_{p'}} = \varepsilon_n (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \tag{68}$$

Аналогично, с учетом соотношений $(62')$ и (68) в ранее принятых обозначениях получаются следующие оценки:

$$\varepsilon_n (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \ge d_{\delta_{n-1}}(L^\psi_p)_{L_{p'}} \ge d_{\delta_{n-1}+1}(L^\psi_p)_{L_{p'}} \ge \cdots \ge d_{\delta_n-1}(L^\psi_p)_{L_{p'}}$$

и

$$e_n(L_p^\psi)_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{s=1}^{q} \bar{\psi}_s^{-p} = (q^*-n)\sum_{s=1}^{q^*} \bar{\psi}_s^{-p}.$$

Заметим, что в силу теоремы 4 соотношения становятся равенствами при $p=2.$ Отметим также, что величины, подобные величинам $e_n(L_p^\psi)_{L_{p'}}$, изучались ранее в работах [6, 7] и др.

6. Примеры. Во всех предыдущих построениях центральное место занимают последовательности ψ : они определяют приближаемые множества, по ним строится аппарат приближения и через них выражаются аппроксимационные характеристики. Кроме условий вида (57) и (58), без которых рассмотрения становятся почти бессодержательными, в настоящей работе на последовательности ψ никаких ограничений не налагалось. Поэтому сами системы ψ, а с ними и их характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в общем случае могут быть достаточно сложными.

В многомерном случае, по-видимому, наиболее простыми и естественными являются системы ψ, у которых числа $\psi(\boldsymbol{k})$ представляются произведениями

$$\psi(\boldsymbol{k}) = \psi(k_1,\ldots,k_m) = \prod_{j=1}^{m} \psi_j(k_j), \;\; k_j \in Z^1, \;\; j=\overline{1,m},$$

значений одномерных последовательностей $\psi_j = \{\psi_j(k_j)\}_{k_j=1}^{\infty}$. Если к тому же

$$\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}, \quad j=\overline{1,m}$$

(через $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное к z), то множества g_n^ψ будут симметричными относительно всех координатных плоскостей и, как не трудно убедиться,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m} \psi(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{kt}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in Z_+^m} 2^{m-q(\boldsymbol{k})} \prod_{j=1}^{m} |\psi_j(k_j)| \cos(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j}\pi}{2}), \tag{69}$$

где $Z_+^m = \{\boldsymbol{k} \in Z^m,\ k_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}\}$, $q(\boldsymbol{k})$ – количество координат вектора $\boldsymbol{k}$, равных нулю, а числа β_{k_j} определяются равенствами

$$\cos\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\operatorname{Re}\psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}, \quad \sin\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\operatorname{Im}\psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}.$$

В таком случае множество ψ-интегралов действительных функций φ из $L(R^m)$ состоит из действительных функций f и в случае, когда ряд в (69) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathscr{D}_\psi(t)$, согласно замечанию 3 справедлива формула (60) .

Аппроксимационные характеристики различных подмножеств из L^ψ (при тех или иных ограничениях на последовательности $\psi_j(k_j)$) рассматривались ранее в [2,8,9] и др.

При конкретных значениях $\psi_j(k_j)$, именно в случае, когда

$$\psi_j(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ (ik_j)^{r_j}, & k_j \neq 0,\ j = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{70}$$

где r_j – некоторые действительные числа, эти характеристики изучались, как хорошо известно, многими авторами.

Пример 1. Пусть $m = 2$ и последовательности $\psi_1(k_1)$ и $\psi_2(k_2)$ заданы равенствами (70) при условии $r_1 = r_2 = r > 0$.

Классы $U^\psi_{L_2}$, определяющиеся такими последовательностями, с точки зрения нахождения их поперечников впервые рассматривались К.И. Бабенко в [10] и [11], которым в этом случае фактически было получено и соотношение (66).

В данной ситуации характеристическая последовательность $\varepsilon(\psi)$ состоит из элементов $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in N$, множества g_n^ψ – множества векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющих условию

$$k_1' k_2' \leq n, \tag{71}$$

где

$$k_j' = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ |k_j|, & k_j \neq 0,\ j = 1, 2. \end{cases}$$

Такие соотношения впервые появились в упомянутых работах К.И. Бабенко и сейчас их принято называть гиперболическими крестами.

Числа $\delta_n = \delta_n^\psi$ в рассматриваемом случае – число векторов $\boldsymbol{k} \in Z^2$, удовлетворяющих условию (71). Можно подсчитать, что $\delta_1 = 9$, $\delta_2 = 21$, $\delta_3 = 33$, $\delta_4 = 49$, $\delta_5 = 61$, $\delta_6 = 81$, $\delta_7 = 93$, $\delta_8 = 113, \cdots$. Поэтому, полагая $d_\nu = d_\nu(U_{L_2}^\psi)_{L_2}$, на основании равенства (66), имеем

$$d_1 = \cdots = d_8 = 1;\ d_9 = \cdots = d_{20} = 2^{-r};\ d_{21} = \cdots = d_{32} = 3^{-r},$$

$$d_{33} = \cdots = d_{48} = 4^{-r};\ d_{49} = \cdots = d_{60} = 5^{-r};\ d_{61} = \cdots = d_{80} = 6^{-r},$$

$$d_{81} = \cdots = d_{92} = 7^{-r};\ d_{93} = \cdots = d_{112} = 8^{-r}; \cdots .$$

Пример 2. Пусть по-прежнему $m = 2$ и

$$\psi_j(k_j) = e^{-\alpha|k_j|} e^{-i\beta k_j \frac{\pi}{2} \mathrm{sign} k_j},\ \ j = 1, 2,$$

где $\alpha > 0$, β_{k_j} – произвольные действительные числа. Тогда $\varepsilon_n = e^{-\alpha(n-1)}$, $n \in N$, а g_n^ψ – множества векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющие условию $|k_1| + |k_2| \le n - 1$, и $\delta_n = 1 + 2n(n-1)$, $n \in N$. Равенство (66) в этом случае имеет вид

$$d_{2n(n-1)+1} = d_{2n(n-1)+2} = \cdots = d_{2n(n+1)} = e^{-\alpha n}.$$

Здесь, как и раньше, $d_\nu = d_\nu(U_{L_2}^\psi)_{L_2}$.

Пример 3. Пусть опять $m = 2$ и

$$\psi_j(k_j) = e^{-\alpha k_j^2} e^{-i\beta_{k_j} \frac{\pi}{2} \mathrm{sign} k_j},\ \ j = 1, 2,\ \ \alpha > 0,$$

где β_{k_j} – произвольные действительные числа. В этом случае элементами характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ есть упорядоченные по убыванию числа $e^{-\alpha(n_1^2 + n_2^2)}$, $n_1, n_2 \in Z^1$, а множества g_n^ψ состоят из векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in Z^2$, для которых

$$k_1^2 + k_2^2 \le \log_{e^\alpha}\ 1/\varepsilon_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} R_n^2,$$

т.е. g_n^ψ состоят из векторов $\boldsymbol{k}$, находящихся внутри концентрических окружностей, радиусы R_n которых таковы, что число R_n^2 представимо суммой квадратов двух целых чисел. Можно подсчитать, что

$$\varepsilon_1 = 1,\ \ \delta_1 = 1;\ \varepsilon_2 = e^{-\alpha},\ \ \delta_2 = 5;\ \ \varepsilon_3 = e^{-2\alpha},\ \ \delta_3 = 9;$$

$$\varepsilon_4 = e^{-4\alpha},\ \ \delta_4 = 13;\ \ \varepsilon_5 = e^{-5\alpha},\ \ \delta_5 = 21;\ \ \varepsilon_6 = e^{-8\alpha},\ \ \delta_6 = 25;$$

$$\varepsilon_7 = e^{-9\alpha},\ \ \delta_7 = 29;\ \ \varepsilon_8 = e^{-10\alpha},\ \ \delta_8 = 33;\ \ \varepsilon_9 = e^{--13\alpha},\ \ \delta_9 = 41;$$

$$\varepsilon_{10} = e^{-16\alpha},\ \ \delta_{10} = 45;\ \ \varepsilon_{11} = e^{-17\alpha},$$

$$\delta_{11} = 53,\ \ \varepsilon_{12} = e^{-18\alpha},\ \ \delta_{12} = 57;\ \ \ldots\ .$$

В этом случае равенство (66) показывает, что

$$d_1 = \ldots = d_4 = e^{-\alpha};\ \ d_5 = \cdots = d_8 = e^{-2\alpha};\ \ d_9 = \cdots = d_{12} = e^{-4\alpha};$$

$$d_{13} = \cdots = d_{20} = e^{-5\alpha};$$

$$d_{21} = \cdots = d_{24} = e^{-8\alpha};\ \ d_{25} = \cdots = d_{28} = e^{-9\alpha};$$

$$d_{29} = \cdots = d_{32} = e^{-10\alpha};\ \ d_{33} = \cdots = d_{40} = e^{-13\alpha};$$

$$d_{41} = \cdots = d_{44} = e^{-16\alpha};$$

$$d_{45} = \cdots = d_{52} = e^{-17\alpha},\ \ d_{53} = \cdots = d_{56} = e^{-18\alpha};\ \ \cdots\ .$$

Здесь также $d_\nu = d_\nu(U_{L_2}^\psi)_{L_2}$.

Отметим, что подсчеты в примерах 1–3 были выполнены А.С. Сердюком и их результаты приводятся здесь с его любезного согласия.

Пример 4 (к теоремам 3 и $3'$) Пусть система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $|\psi_k| = k^{-r}$, $r > 0$. В таком случае $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in N$, и $\bar\psi_k = |\psi_k| = k^{-r}$, $k \in N$. Поэтому согласно (31)

$$e_n^p(H_{\varphi,p}^\psi) = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{k=1}^q k^{rp}.$$

Пусть, к примеру, $rp = 1$. Так как

$$\sum_{k=1}^{q} k = \frac{q(q+1)}{2},$$

то

$$e_n^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q>n} \frac{2(q-n)}{q(q+1)} = \frac{2(q^*-n)}{q^*(q^*+1)},$$

где

$$q^* = n\sqrt{n^2+n}.$$

Пример $4'$. Пусть в теореме 3 $\psi_k = e^{-k}$. Тогда $\varepsilon_n = e^{-n}$, $\bar{\psi}_k = e^{-k}$ и согласно (31)

$$e_n^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{k=1}^{q} e^{kp} = \sup_{q>n}(q-n)/\frac{e^p(e^{pq}-1)}{e^p-1} =$$

$$= \frac{e^p-1}{e^p} \sup_{q>n} \frac{(q-n)}{e^{pq}-1}.$$

Величина

$$\frac{q-n}{e^{pq}-1}$$

при $q \geq n + 1/p$ убывает. Поэтому при $p \geq 1$

$$e_n^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \frac{e^p-1}{e^p} \frac{1}{e^{p(n+1)}-1}.$$

Автор сердечно благодарит А.С. Сердюка и Т.А. Андрееву за большую помощь в подготовке к печати настоящей работы.

Список литературы

1. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений.–М: Изд.-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

2. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов Докл. АН СССР. – 1955. **102**, № 1. – С. 37 – 40.

3. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

4. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

5. *Колмогоров А.Н.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklass//Ann. Math. – 1936.– **37**, № 1.– S. 107 – 110.

6. *Temlyakov V.N.* Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation// Constr. Approxim.... – 1998. –**14**. – P. 569 – 587.

7. *Temlyakov V.N.* Greedy algorithms and M-term approximation with regard to redundant dictionaries// J. Approxim.... Theory. – 1999. – **98**.– P. 117 – 145.

8. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций// Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545 – 555.

9. *Романюк А.С.* О приближении классов периодических функций многопеременных// Там же. – 1992. –**44** , № 5. – С. 662 – 672.

10. *Бабенко К.И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами// Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 247 – 250.

11. *Бабенко К.И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами//Там же .– 1960. –**132**, № 5. – С. 982 – 985.

УДК 517.5

АПРОКСИМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТОРІВ $\mathbf{S}^{\mathbf{p}}_{\varphi}$

О.І. Степанець

В роботі введені лінійні векторні простори S^p_φ, вивчаються їх апроксимаційні властивості і як наслідок з одержаних загальних результатів виводяться твердження про наближення класів періодичних функцій багатьох змінних за допомогою тригонометричних поліномів.

Linear vector spaces S^p_φ are introduced and their approximation properties are researched. The statements about approximation of classes of periodic multivariable functions from trigonometric polynomials are deduced from obtained general results.