УДК 517.5

А.И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)
В.И. Рукасов (Славян. пед. ин-т)

ПРОСТРАНСТВА S^p С НЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКОЙ

Аннотация

В работе обобщаются пространства S^p_φ, рассматриваемые в [1–5]. Обобщение заключается в том, что нормы элементов пространств определяются несколько более сложным образом – агрегаты, задающие нормы, включают теперь весовые множители. Это позволяет расширить круг приложений полученных общих результатов. Изложение материала проводится по схеме работ [1–4]. Однако, полученные здесь основные результаты непосредственно не следуют из отмеченных работ.

UDC 517.5

A.I. Stepanets (Institute of Mathematics of NASU, Kiev)
V.I. Rukasov (Slavyansk pedagogical institute)

SPACES S^p WITH NONSYMMETRIC METRICS

Abstract

In the paper spaces S^p considered in [1–5] are generalized. Generalization consist in that norms of elements of spaces are defined in slightly more complicated way — aggregates defining the norms now include weight multiplicators. It allows to widen the circle of applications of general results obtained.

Exposition of material is carried out according to scheme of papers [1–4]. However main results received here do not follow immediately from mentioned works.

1. Пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$

Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathscr{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит к φ, определено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\bar{z}$ — число, комплексно сопряженное с z;

2) $(\lambda x_1 + \nu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \nu(x_2, y)$, λ, ν — произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Пусть, далее $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in N = \{1, 2 \ldots\}$.

Каждому элементу $f \in \mathscr{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_{\varphi}(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_{\varphi}(k) = (f; \varphi_k), \ \ k \in N,$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S_{\varphi}^{p,\mu} = S_{\varphi}^{p,\mu}(\mathscr{X}) = \{f \in \mathscr{X} : \ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \hat{f}_{\varphi}(k)|^p < \infty\}. \tag{1}$$

Элементы $x, y \in S_{\varphi}^{p,\mu}$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_{\varphi}(k) = \hat{y}_{\varphi}(k)$. Таким образом, множество $S_{\varphi}^{p,\mu}$ порождается пространством $\mathscr{X}$, системами φ и μ и числом p. В случае, когда

$$\mu_k \equiv 1, \quad k \in N, \tag{2}$$

множества $S_{\varphi}^{p,\mu}$ совпадают с множествами S_{φ}^{p}, которые были введены и изучались в [1–5].

Для векторов $x, y \in \mathscr{X}$ определим расстояние между ними при помощи равенства

$$\rho(x,y)_{p,\mu} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \|x-y\|_{p,\mu} = \|x-y\|_{p,\mu,\varphi} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_{\varphi}(k) - \hat{y}_{\varphi}(k)|^p \mu_k^p)^{1/p}.$$

Нулевым элементом пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$ называется вектор θ, для которого $\hat{\theta}_{\varphi}(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho(\theta, x)_{p,\mu}$, $x \in S_{\varphi}^{p,\mu}$ называется нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_{p,\mu}$. Таким образом,

$$\|x\|_{p,\mu} = \|x\|_{p,\mu,\varphi} = \rho(\theta, x)_{p,\mu} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \hat{x}_{\varphi}(k)|^p)^{1/p}, \ \ x \in S_{\varphi}^{p,\mu}. \tag{3}$$

Множество $S_{\varphi}^{p,\mu}$ — линейное пространство: операции сложения векторов и умножения их на числа, определенные во всем $\mathscr{X}$, пригодны и для любой пары $x, y \in$

$S_\varphi^{p,\mu}$. Кроме того, для любых чисел λ и ν $\lambda x + \nu y = z \in S_\varphi^{p,\mu}$. Действительно, поскольку $z \in \mathscr{X}$, то $\hat{z}(k) = \lambda\hat{x}(k) + \nu\hat{y}(k)$ и если $p \geq 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\|z\|_{p,\mu} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\hat{x}(k) + \nu\hat{y}(k)|^p \mu_k^p)^{1/p} \leq |\lambda|\|x\|_{p,\mu} + |\nu|\|y\|_{p,\mu}.$$

Если же $p \in (0,1)$, то используя неравенство

$$|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \ \ 0 \leq p < 1,$$

верное для любых чисел a и b, имеем

$$\|z\|_{p,\mu} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\hat{x}(k) + \nu\hat{y}(k)|^p \mu_k^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\mu_k\hat{x}(k) + \nu\mu_k\hat{y}(k)|^p)^{1/p} \leq$$

$$\leq (|\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k)|^p \mu_k^p + |\nu|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{y}(k)|^p \mu_k^p)^{1/p} \leq 2^{1/p}(|\lambda|\|x\|_{p,\mu} + |\nu|\|y\|_{p,\mu}).$$

Таким образом, всегда $z \in S_\varphi^{p,\mu}$.

Если в системе μ все числа μ_k отличны от нуля: $\mu_k > 0$, $k \in N$, то равенство $\|x\|_{p,\mu} = 0$ возможно лишь в случае, когда $x = \theta$. Отсюда следует, что при $p \geq 1$ и $\mu_k > 0$, $k \in N$, норма, введенная равенством (3), удовлетворяет всем необходимым аксиомам и тогда $S_\varphi^{p,\mu}$ — линейное нормированное пространство, содержащее ортогональную систему $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\|\varphi_k\|_{p,\mu} = \mu_k$.

Пространства $S_\varphi^{p,\mu}$, подобно пространствам S_φ^p, наследуют важнейшие свойства гильбертовых пространств — равенство Парсеваля в виде соотношения (3) и минимальное свойство частных сумм Фурье, которое формулируется следующим образом.

Предложение 1. *Пусть* $\{g_\alpha\}$ *— семейство ограниченных подмножеств множества* N, *зависящих от параметра* α *и таких, что любое число* $n \in N$ *принадлежит всем множествам* g_α *с достаточно большими индексами* α. *Пусть, далее,* $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, $p \in (0,\infty)$ *и*

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \hat{f}(k)\varphi_k$$

— частная сумма ряда Фурье $S[f]_\varphi$ *элемента* f,

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\varphi_k, \tag{4}$$

отвечающая множеству g_α. *Тогда среди всех сумм вида*

$$\Phi_\alpha = \sum_{k \in g_\alpha} c_k\varphi_k$$

наименее уклоняется от f *в пространстве* $S_\varphi^{p,\mu}$ *частная сумма* $S_\alpha(f)$, *т.е.*

$$\inf_{c_k} \|f-\Phi_\alpha\|_{p,\mu} = \|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu}. \tag{5}$$

При этом

$$\|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k\in g_\alpha} |\mu_k \hat{f}(k)|^p \tag{6}$$

и

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Согласно (3) имеем

$$\inf_{c_k} \|f-\sum_{k\in g_\alpha} c_k\varphi_k\|_{p,\mu}^p = \inf_{c_k} \sum_{k=1}^{\infty} |(\widehat{f-\sum_{k\in g_\alpha} c_k\varphi_k})_\varphi(k)|^p \mu_k^p =$$

$$= \inf_{c_k} (\sum_{k\in g_\alpha} |\hat{f}(k)-c_k|^p\mu_k^p + \sum_{k\bar{\in} g_\alpha} |\mu_k\hat{f}(k)|^p) = \sum_{k\bar{\in} g_\alpha} |\mu_k\hat{f}(k)|^p =$$

$$= \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k\in g_\alpha} |\mu_k\hat{f}(k)|^p = \|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p,$$

чем и доказываются соотношения (5) и (6). Так как $f\in S_\varphi^{p,\mu}$, то в силу (1) правая часть в (6) стремится к нулю при $\alpha\to\infty$, откуда следует и (7).

Из доказанного утверждения вытекает

Предложение 1$'$. *Пусть* $f\in S_\varphi^{p,\mu}$, $p\in(0,\infty)$ *и*

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)\varphi_k, \ \ n\in N,$$

— частная сумма ряда (4). Тогда среди всех сумм вида

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$$

при данном $n\in N$ *наименее уклоняется от* f *в пространстве* $S_\varphi^{p,\mu}$ *частная сумма* $S_n(f)$

$$\inf_{c_k} \|f-\Phi_n\|_{p,\mu} = \|f-S_n(f)\|_{p,\mu}.$$

Причем

$$\|f-S_n(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k=1}^{n} |\mu_k\hat{f}(k)|^p$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|f-S_n(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{8}$$

Из (8) следует, что для любого элемента $f \in S^{p,\mu}_{\varphi}$ его ряд Фурье (4) по системе φ сходится к f по норме пространства $S^{p,\mu}_{\varphi}$, т.е. система φ полна в $S^{p,\mu}_{\varphi}$ и $S^{p,\mu}_{\varphi}$ сепарабельно.

2. ψ-Интегралы и характеристические последовательности

Выделим в пространствах $S^{p,\mu}_{\varphi}$ объекты, для которых впоследствии изучаются их аппроксимационные характеристики.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathscr{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (4), существует элемент $F \in \mathscr{X}$, для которого

$$S[F]_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}(k) \varphi_k, \tag{9}$$

т.е. когда

$$\hat{F}_{\varphi}(k) = \psi_k \hat{f}(k), \quad k \in N, \tag{10}$$

то вектор F называется ψ-интегралом вектора f. В таком случае записывается $F = \mathcal{J}^{\psi} f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathscr{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, $\psi\, S^{p,\mu}_{\varphi}$ — множество ψ-интегралов всех векторов, принадлежащих к данному пространству $S^{p,\mu}_{\varphi}$.

Если f и F связаны соотношением (9) (или 10), то иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и записывать $f = D^{\psi} F = F^{\psi}$.

В дальнейшем предполагается, что система ψ подчинена условию

$$\lim_{k \to \infty} |\psi_k| = 0. \tag{11}$$

Ясно, что это условие обеспечивает включение $\psi S^{p,\mu}_{\varphi} \subset S^{p,\mu}_{\varphi}$. Понятно также, что для такого включения необходимым и достаточным есть условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|$, $k \in N$.

Пусть

$$U^{p,\mu}_{\varphi} = \{f \in S^{p,\mu}_{\varphi} : \ \|f\|_{p,\mu} \le 1\} \tag{12}$$

— единичный шар в данном пространстве $S^{p,\mu}_{\varphi}$ и $\psi U^{p,\mu}_{\varphi}$— множество ψ-интегралов всех элементов из $U^{p,\mu}_{\varphi}$. Именно множества $\psi U^{p,\mu}_{\varphi}$ и являются основными объектами, чьи аппроксимационные характеристики изучаются в настоящей работе. Этим объектам в теории приближения функций отвечают классы функций. Заметим также, что если

$$\psi_k \neq 0 \ \ \forall k \in N,$$

то в силу (10) и (12)

$$\psi U^{p,\mu}_{\varphi} = \{f \in S^{p,\mu}_{\varphi} : \ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \frac{\hat{f}(k)}{\psi_k}|^p \le 1\},$$

т.е. множество $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ является p-эллипсоидом в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ с полуосями, равными $|\psi_k|$.

3. Приближающие агрегаты и аппроксимационные характеристики

Конструкция агрегатов, используемых для приближения элементов $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, определяется характеристическими последовательностями $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ системы ψ, которые задаются следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел,удовлетворяющая условию (11). Тогда через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ обозначается множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию, через $g(\psi) = g_1, g_2, \ldots$ — система множеств

$$g_n = g_n^\psi = \{k \in N: \ \ |\psi_k| \geq \varepsilon_n\}$$

и через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ — последовательность чисел $\delta_n = |g_n|$, где $|g_n|$ — количество чисел $k \in N$, содержащихся в множестве g_n. Последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ называются характеристическими для системы ψ. Заметим, что при таком определении любое число $n^* \in N$ принадлежит всем множествам g_n^ψ с достаточно большими номерами n и что всегда

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty.$$

В дальнейшем удобно через $g_0 = g_0^\psi$ обозначать пустое множество и считать, что $\delta_0 = 0$.

Пусть множество $S_\varphi^{p,\mu}$ порождается пространством $\mathscr{X}$, системами φ и μ и числом p, $p > 0$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (11).

В качестве приближающих агрегатов для элементов $f \in \psi S_\varphi^{p,\mu}$ будем рассматривать полиномы

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} = S_{g_n^\psi}(f) = \sum_{k\in g_n^\psi} \hat{f}(k)\varphi_k, \ \ n = 1, 2\ldots, \quad S_0(f)_{\varphi,\psi} = \theta, \tag{13}$$

где g_n^ψ — элементы последовательности $g(\psi)$, θ — нулевой вектор пространства $S_\varphi^{p,\mu}$. При этом полагаем

$$\mathscr{E}_n(f)_{\psi,p,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi}\|_{p,\mu},$$

$$\mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} = \sup_{f\in\psi U_\varphi^{q,\mu}} \mathscr{E}_n(f)_{\psi,p,\mu}, \ \ p, q > 0. \tag{14}$$

Величина $\mathscr{E}_n(f)_{\psi,p,\mu}$ называется приближением элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ суммами Фурье, построенными по областям g_{n-1}^ψ, а $\mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu}$ — приближением множества $\psi U_\varphi^{q,\mu}$ такими суммами в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. Пусть, далее,

$$E_n(f)_{\psi,p,\mu} = \inf_{c_k} \|f - \sum_{k\in g_{n-1}^\psi} c_k\varphi_k\|_{p,\mu}$$

— наилучшее приближение элемента $f \in \psi S_\varphi^{p,\mu}$ полиномами, построенными по областям g_{n-1}^ψ, и

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\mu}} E_n(f)_{\psi,p,\mu}, \ \ p, q > 0 \tag{15}$$

— наилучшее приближение множества $\psi U_\varphi^{q,\mu}$ такими полиномами.

Как обычно, полагаем

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n \in \mathscr{F}_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_n} \|x - u\|_Y$$

— поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Y. Здесь $\mathscr{F}_n$ — множество всех подпространств размерности $n \in N$ пространства Y. Согласно неравенству Иенсена, для любой неотрицательной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \geq 0$,

$$(\sum_{k=1}^\infty a_k^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^\infty a_k^q)^{1/q}, \ \ 0 < q \leq p.$$

Поэтому справедливы включения

$$S_\varphi^{q,\mu} \subset S_\varphi^{p,\mu}, \ \ 0 < q \leq p \tag{16}$$

и

$$\psi U_\varphi^{q,\mu} \subset \psi U_\varphi^{p,\mu}, \ \ 0 < q \leq p. \tag{17}$$

Отсюда, в частности, заключаем, что величины (14) и (15) корректно определены по крайней мере для всех систем ψ, удовлетворяющих условию (11), в предположении, что $0 < q \leq p$.

4. Наилучшие приближения и поперечники q-эллипсоидов

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условию (11). Тогда при любых $n \in N$ и $0 < q \leq p < \infty$ выполняются соотношения*

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} \leq \mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} \leq \varepsilon_n. \tag{18}$$

Если при этом

$$\mu_k \neq 0 \ \text{ и } \ \psi_k \neq 0 \ \ \forall k \in N, \tag{19}$$

то в (18) знаки неравенств заменяются знаками равенств. Величина ε_n – n-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.

Построенные по областям g_n^ψ частные суммы вида (13) являются оптимальным аппаратом приближения элементов из множеств $\psi U_\varphi^{q,\mu}$ в смысле колмогоровских поперечников. Точнее, справедлива

Теорема 2. *Пусть системы* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям (11) и (19) и*

$$d_\nu(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = d_\nu(\psi U_\varphi^{p,\mu}; S_\varphi^{p,\mu}) = \inf_{F_m \in \mathscr{F}_n} \sup_{f \in \psi U_\varphi^{p,\mu}} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{p,\mu}$$

$\nu = 0, 1, \ldots$ — *поперечники по Колмогорову множеств* $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ *в пространстве* $S_\varphi^{p,\mu}$. *Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *выполняются равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = d_{\delta_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = \cdots = d_{\delta_n - 1}(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = \varepsilon_n,$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s = 1, 2, \ldots$ — *элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_0 = 0$.

Утверждения теорем 1 и 2 будут следовать из доказанных ниже теорем $1'$ и $2'$. Пусть теперь наряду с числами p, q и последовательностью $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, задана еще последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, среди которых имеется хотя бы одно, отличное от нуля. По данному пространству $\mathscr{X}$ и системе φ построим множества $S_\varphi^{p,\mu}$ и $S_\varphi^{q,\lambda}$. Если $0 < q \leq p$ и последовательности λ и μ совпадают, то справедливы включения (16) и (17). Ясно также, что при любом $p \in (0, \infty)$ будет выполняться включение

$$S_\varphi^{p,\lambda} \subset S_\varphi^{p,\mu}$$

при условии, что

$$\lambda_k \geq C\mu_k \ \ \forall k \in N,$$

где C — любая положительная постоянная. Поэтому справедливо включение

$$S_\varphi^{q,\lambda} \subset S_\varphi^{p,\mu} \ \ \forall p, q, \ \ 0 < q \leq p, \ \ \lambda_k \geq C\mu_k \ \ \forall k \in N. \tag{20}$$

Получим аналоги теорем 1 и 2 в случае, когда приближаемые элементы находятся в пространстве $S_\varphi^{q,\lambda}$, а приближение ищется в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. В этом случае приближающие агрегаты будут строиться опять согласно формул (18), только на этот раз в качестве последовательности ψ, входящей в определение областей g_n^ψ и последовательности $\varepsilon(\psi)$ будет выступать последовательность

$$\psi' = \{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}, \tag{21}$$

в которой числа ψ_k, $k \in N$, те же, что и в определении приближаемых множеств $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$.

Теорема $1'$. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *фиксированные последовательности, подчиняющиеся условию*

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0. \tag{22}$$

Тогда при любых $n \in N$ *и* $0 < q \le p$ *выполняются соотношения*

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le \mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le \varepsilon'_n, \tag{23}$$

где

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} E_n(f)_{\psi',p,\mu},$$

$$E_n(f)_{\psi',p,\mu} = \inf_{c_k} \|f - \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi'}} c_k \varphi_k\|_{p,\mu},$$

и

$$\mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} \mathscr{E}_n(f)_{\psi',p,\mu},$$

$$\mathscr{E}_n(f)_{\psi',p,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi'}\|_{p,\mu}, \tag{24}$$

ε'_n *и* $g_{n-1}^{\psi'}$ *—члены характеристической последовательности системы (21). Если при этом выполнены условия (19), то в (23) знаки неравенств заменяются знаками равенств.*

Доказательство. В силу соотношений (24), (6), (10) и (20) для любого элемента $f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$, полагая $\|\cdot\|_{p,\mu} = \|\cdot\|$, имеем

$$\mathscr{E}_n(f)_{\psi',p,\mu} = \|\sum_{k \bar{\in} g_{n-1}^{\psi'}} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k\| = \|\sum_{k \bar{\in} g_{n-1}^{\psi'}} \psi_k \hat{f}_\varphi^\psi(k)\varphi_k\| =$$

$$= (\sum_{k \bar{\in} g_{n-1}^{\psi'}} |\psi'_k|^p |\hat{f}_\varphi^\psi(k)|^p |\lambda_k|^p)^{1/p} \le \varepsilon'_n \|f^\psi\|_{p,\lambda} \le$$

$$\le \varepsilon'_n \|f^\psi\|_{q,\lambda} = \varepsilon'_n,$$

Таким образом, всегда

$$\mathscr{E}_n(f)_{\psi',p,\mu} \le \varepsilon'_n \quad \forall f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda},$$

откуда и следуют оценки (23).

Пусть теперь выполнены условия (19) и k' — любая точка из множества $\gamma' = g_n^{\psi'} \setminus g_{n-1}^{\psi'}$. Положим $f_* = \frac{\psi_{k'}}{\lambda_{k'}}\varphi_{k'}$, так, что $f_*^\psi = \frac{\varphi_{k'}}{\lambda_{k'}}$. Видим, что $\|f_*^\psi\|_{q,\lambda} = 1$. Следовательно, $f_* \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$. В то же время

$$\|f_*\| = \|f_*\|_{p,\mu,\varphi} = |\frac{\psi_{k'}\mu_{k'}}{\lambda_{k'}}| = \varepsilon'_n.$$

Значит

$$E_n(f_*)_{\psi',p,\mu} = \|f_*\|_{p,\mu,\varphi} = \varepsilon'_n.$$

Поэтому с учетом (23) будем иметь

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \varepsilon'_n, \tag{25}$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 2$'$. *Пусть системы* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ *и* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяют условиям (11) и (19). Тогда для любой последовательности* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, *для которой выполняется условие (22), при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta'_{n-1}}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = d_{\delta'_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \cdots = d_{\delta'_n-1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \varepsilon'_n, \tag{26}$$

в которых δ'_s *и* ε'_s, $s = 1, 2, \ldots$ — *элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi')$ *и* $\varepsilon(\psi')$ *системы (21), а* $\delta'_0 = 0$.

Доказательство. Подпространство $\Phi_{n-1}^{\psi'}$ полиномов

$$\Phi'_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi'}} a_k \varphi_k$$

имеет размерность δ'_{n-1}. Поэтому с учетом (25) имеем

$$\varepsilon'_n = E_n(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{\psi',p,\mu} \ge d_{\delta'_{n-1}}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} \ge d_{\delta'_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} \ge \cdots \ge d_{\delta'_n-1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu}$$

и для доказательства равенств (26) остается показать, что

$$d_{\delta'_n-1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} \ge \varepsilon'_n, \ \ n = 1, 2, \ldots .$$

Для этого с учетом известной теоремы Тихомирова о поперечнике шара достаточно убедиться, что множество

$$\varepsilon'_n U_{n,\Phi'}^{\psi} = \{\Phi'_n \in \Phi_n^{(\psi')} : \ \ \|\Phi'_n\|_{p,\mu} \le \varepsilon'_n\} \tag{27}$$

содержится в множестве $\psi U_\varphi^{p,\lambda}$.

Если $\Phi'_n \in \varepsilon'_n U_{n,\Phi'}^{\psi}$, то для ψ-производной элемента Φ'_n, с учетом (27), имеем

$$\|(\Phi'_n)^\psi\|_{p,\lambda} = \| \sum_{k \in g_n^{\psi'}} \frac{a_k}{\psi_k} \varphi_k \|_{p,\lambda} =$$

$$= (\sum_{k \in g_n^{\psi'}} \frac{|a_k|^p}{|\psi_k|^p} |\lambda_k|^p)^{1/p} = (\sum_{k \bar{\in} g_n^{\psi'}} \frac{|\lambda_k|^p}{|\mu_k|^p |\psi_k|^p} |\mu_k|^p)^{1/p} \le$$

$$\le \sup_{k \bar{\in} g_n^{\psi'}} \frac{|\lambda_k|}{|\mu_k \psi_k|} (\sum_{k=1}^\infty |a_k \mu_k|^p)^{1/p} \le 1.$$

Таким образом, действительно, $\varepsilon'_n U_{n,\Phi'}^{\psi} \subset \psi U_\varphi^{p,\lambda}$, чем и завершается доказательство теоремы при $n > 1$. При $n = 1$ ее доказательство остается без изменений если принять, что Φ_0^ψ состоит из элемента θ и его размерность равна нулю.

5. Величины $\boldsymbol{\sigma_n(\psi U^{q,}_{\varphi}\ )_p}$**,**

Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $\varepsilon(x) = \{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $g(x) = \{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\delta(x) = \{\delta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ее характеристические последовательности. Через $\bar{x} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим перестановку последовательности $\{|x_k|\}_{k=1}^{\infty}$ в убывающем порядке. Ясно, что значения $\bar{x}_k$, $k \in N$, можно определить согласно формул

$$\bar{x}_k = \varepsilon_n(x),\ \ k \in (\delta_{n-1}(x), \delta_n(x)],\ \ n \in N,\ \ \delta_0 = 0.$$

В этих обозначениях равенство (26) принимает вид

$$d_n(\psi U^{p,\lambda}_{\varphi})_{p,\mu} = \bar{\psi}'_n,\ \ n \in N, \tag{26$'$}$$

где $\bar{\psi}'_n$ — n-й член последовательности $\bar{\psi}'$. Пусть, далее, γ_n — любой набор из n натуральных чисел и $\mathscr{F}_n$ — множество всех полиномов вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} c_k \varphi_k, \tag{28}$$

где c_k — некоторые комплексные числа. В силу определения понятия поперечника из $(26')$заключаем, что всегда

$$\inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \psi U^{p,\lambda}_{\varphi}} \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathscr{F}_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu} \geq \bar{\psi}'_{n+1}, \tag{29}$$

а из теоремы $1'$ — что при выполнении условий (19) соотношение (29) на самом деле является равенством.

В принятых здесь обозначениях для любого подмножества $\mathfrak{N} \subset \mathscr{X}$ положим

$$\sigma_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathscr{F}_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu}. \tag{30}$$

Тогда доказанное только что соотношение можно записать в виде

$$\sigma_n(\psi U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,\mu} = \bar{\psi}'_{n+1},\ \ p = q.$$

Оказывается, что это соотношение остается в силе и когда $0 < q < p$. Точнее, справедлива

Теорема 3. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *произвольные системы комплексных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\left|\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right| \leq C,\quad k \in N, \tag{31}$$

где C — *некоторая положительная константа.*

Пусть, далее, γ_n *— любой набор из* n *натуральных чисел,* q *и* p *— любые положительные числа,* $0 < q \leq p$. *Тогда при любом* $n \in N$

$$\sigma_n(\psi U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in U^{q,\lambda}_{\varphi}} \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathscr{F}_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu} = \bar{\psi}'_{n+1},$$

где $\bar{\psi}'_{n+1}$ *—* $(n+1)$*-й член последовательности* $\bar{\psi}' = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$, *являющейся перестановкой в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi'_k| = |\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}|, \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

Доказательство. Согласно соотношению (30) и предложению 1 имеем

$$\sigma^p_n(\psi U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \psi U^{q,\lambda}_{\varphi}} \|f - \sum_{k \in \gamma_n} \hat{f}(k)\varphi_k\|_{p,\mu} =$$

$$= \inf_{\gamma_n} \sup_{\|f^{\psi}\|_{q,\lambda} \leq 1} \sum_{k \bar{\in} \gamma_n} |\psi_k|^p |\hat{f}^{\psi}(k)|^p |\mu_k|^p. \tag{32}$$

Пусть

$$R_{\gamma_n} = \sup_{\|f^{\psi}\|_{q,\lambda} \leq 1} \sum_{k \bar{\in} \gamma_n} |\psi_k|^p |\hat{f}^{\psi}(k)|^p |\mu_k|^p. \tag{33}$$

Если далее положить

$$|\hat{f}^{\psi}(k)|^q |\lambda|^q = m_k, \ \ k = 1, 2, \dots,$$

то (33) перепишется в виде

$$R_{\gamma_n} = \sup_{\sum m_k \leq 1} \sum_{k \bar{\in} \gamma_n} \frac{|\psi_k|^p |\mu_k|^p}{|\lambda_k|^p} |m^r_k, \ \ r = \frac{p}{q}. \tag{34}$$

В силу (31) всегда существует величина

$$\nu(n) = \sup_{k \bar{\in} \gamma_n} |\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}|^p.$$

Поэтому, согласно (34), имеем

$$R_{\gamma_n} \leq \nu(n). \tag{35}$$

Покажем, что последнее соотношение всегда является равенством. Предположим сначала, что существует число $k' \in N \setminus \gamma_n$, для которого

$$|\frac{\psi_{k'} \mu_{k'}}{\lambda_{k'}}|^p = \nu(n). \tag{36}$$

Тогда рассматривая последовательность $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m'_k = \begin{cases} 1, & k = k', \\ 0, & k \in N \setminus (\gamma_n \cup k'), \end{cases}$$

видим, что

$$\sum_{k\bar{\in}\gamma_n} |\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}|^p m'_k = \nu(n),$$

т.е. в этом случае будет выполняться равенство

$$R_{\gamma_n} = \nu(n). \tag{37}$$

Если же не существует такого числа k', для которого выполняется (36), то в силу ограниченности множества $\{\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}\}$ будем иметь

$$\nu(n) = \sup_{k\bar{\in}\gamma_n}\{|\frac{\nu_k\mu_k}{\lambda_k}|^p\} \stackrel{\mathrm{df}}{=} g_n.$$

При этом существует последовательность k_i, $i \in N$, $k_i\bar{\in}\gamma_n$, такая, что числа

$$s_i = |\frac{\psi_{k_i}\mu_{k_i}}{\lambda_{k_i}}|^p, \ \ i = 1, 2, \ldots,$$

не убывая, стремятся к g_n. Положим $m^{(i)} = \{m_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & k = k_i, \\ 0, & k \in N - (\gamma_n \cup k_i). \end{cases}$$

В таком случае

$$\sum_{k\bar{\in}\gamma_n} |\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}|^p m_k^{(i)} = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots \ .$$

Отсюда заключаем, что при любом $i \in N$ справедливо неравенство $R_{\gamma_n} > s_i$, что вместе с (35) и дает равенство (37) и в рассматриваемом случае.

Подставляя полученное значение величины R_{γ_n} в (32), находим

$$\sigma_n^p(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{k\bar{\in}\gamma_n} |\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}|^p = \inf_{\beta_n} \sup_{k\bar{\in}\beta_n}\{(\bar{\psi}'_k)^p\}, \tag{38}$$

где через $\{\bar{\psi}'_k\}$ обозначено множество значений последовательности $\bar{\psi}'$, а β_n — любой набор из n натуральных чисел.

Последовательность $\bar{\psi}'$ убывает, поэтому

$$\sup_{k\bar{\in}\beta_n}\{\bar{\psi}'_k\} = \bar{\psi}'_{k_n},$$

где k_n — наименьшее из натуральных чисел, не принадлежащих к β_n. Ясно, что величина $\inf\limits_{\beta_n}\bar{\psi}'_{k_n}$ достигается, когда $\beta_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и, следовательно, равна $\bar{\psi}'_{n+1}$. Подставляя это значение в (38), получим (33), чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание. Из процесса доказательства теоремы видно, что внутренняя нижняя грань в (30) реализуется полиномами вида (28) при $c_k = \hat{f}(k)$, в внешняя — множеством $\gamma_n^* = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, где значения i_k, $k = \overline{1, n}$, такие, что $|\psi'_{i_k}| = \bar{\psi}'_k$. Поэтому справедлива

Теорема 3$'$. *Пусть выполняются все условия теоремы 3. Тогда при любом* $n \in N$

$$\sigma_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} \|f - \sum_{k \in \gamma_n^*} \hat{f}(k)\varphi_k\|_{p,\mu} = \bar{\psi}'_{n+1}, \tag{39}$$

где $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^n$ *и значения* i_k $k = \overline{1,n}$ *такие, что*

$$|\frac{\psi_{i_k}\mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}}| = \bar{\psi}'_k.$$

Заметим также, что равенства (26) можно записать в виде

$$d_n(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \bar{\psi}'_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{40}$$

Объединяя (39) и (40) видим, что значения поперечников $d_n(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu}$ в случае приближения элементов $f \in \psi U_\varphi^{p,\lambda}$ в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ реализуются суммами Фурье, построенными именно по областям γ_n^*.

6. Случай, когда $\mathscr{X} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}})$

Пусть R^m — m-мерное, $m \geq 1$ евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — его элементы, Z^m — целочисленная решетка в R^m — множество векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_m)$ с целочисленными координатами, $\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + \dots + x_my_m$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{xx})}$ и, в частности, $\boldsymbol{kx} = k_1x_1 + \dots + k_mx_m$, $|k| = \sqrt{k_1 + \dots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ — множество всех 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q_m :

$$Q_m = \{x \in R^m, \ -\pi \leq x_k \leq \pi, \ k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции f по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2} e^{i\boldsymbol{kx}}, \ \ \boldsymbol{k} \in Z^m, \tag{41}$$

т.е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k)e^{ikx}, \ \ \hat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q_m} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Будем отождествлять функции, эквивалентные относительно меры Лебега. В таком случае в качестве $\mathscr{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве φ — тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{x}}, \ \ \boldsymbol{k}_s \in Z^m, \ \ s = 1, 2, \dots,$$

полученную из системы (41) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в этом случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q_m} f(\boldsymbol{t})e^{-i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{t}}dt = \hat{f}(\boldsymbol{k}_s) = \hat{f}_\tau(\boldsymbol{k}_s). \tag{42}$$

Получающиеся при этом множества $S_{\varphi}^{p,\mu}$ будем обозначать через $S_{\tau_s}^{p,\mu}$. В случае, когда выполняются условия (2) объекты $S_{\tau_s}^{p,\mu}$ подробно рассматривались в работах [1–5]. Там, в частности, получены следствия из утверждений, отвечающих теоремам $1'$ и $2'$, для пространств S_{τ}^{p}. Понятно, что аналогичные следствия из теорем $1'$ и $2'$ имеют место и в общем случае для пространств $S_{\tau_s}^{p,\mu}$, формулировки которых без труда воспроизводятся.

Принципиально новым здесь является тот факт, что полиномы, осуществляющие наилучшее приближение функции $f \in \psi U_{\tau_s}^{q,\lambda}$ в пространствах $S_{\tau_s}^{p,\mu}$ на этот раз будут строится по областям $g_{n-1}^{\psi'}$, где последовательность ψ' определяется равенством (21).

В [1–5] отмечалась связь между пространствами S_{τ}^{p} и пространствами $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1, \infty)$ функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = (\int\limits_{Q_m} |f(t)|^p dt)^{1/p}.$$

Такая связь устанавливается при помощи известной теоремы Хаусдорфа–Юнга. Наличие при определении множеств $S_{\tau}^{p,\mu}$ отличных от констант множителей μ_k дает дополнительную возможность установления связей между пространствами $S_{\tau}^{p,\mu}$ и L_p. Эта связь может реализоваться благодаря следующей теореме Харди и Литтлвуда (см. напр. [6, §XII.3].

Теорема Х–Л. (I) *Пусть* $f \in L_p(R^1)$ *и*

$$S[f] = \sum_{k \in Z^1} c_k e^{ikx}$$

—ее ряд Фурье. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p (|k|+1)^{p-2} \le A_p \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt, \;\; 1 < p \le 2.$$

(II) *Пусть* $\cdots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots$ *— такие комплексные числа, что*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^q (|k|+1)^{q-2} < \infty, \;\; q \ge 2. \tag{43}$$

Тогда числа c_k *являются коэффициентами Фурье для некоторой функции* f *из* $L_q(R^1)$ *и*

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^q dt \le A_p \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^q (|k|+1)^{q-2}$$

A_p *— величина, возможно зависящая только от* p.

Возьмем в качестве $\mathscr{X}$ пространство $L_1(R^1)$, а в качестве системы φ — систему

$$1,\ e^{it},\ e^{-it},\ e^{i2t},\ e^{-i2t},\ \ldots,$$

которую обозначим через τ и скалярное произведение зададим формулой (42). При данном $p \in (0,\infty)$ выберем систему μ' в виде

$$1,\ 2^{1-2/p},\ 2^{1-2/p},\ 3^{1-2/p},\ 3^{1-2/p},\ldots$$

и определим пространства $S_\tau^{p,\mu'}$ согласно равенству (1):

$$S_\tau^{p,\mu'} = \{f \in L_1(R^1):\ \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_\tau(k)|^p (k+1)^{p-2} < \infty\}. \tag{44}$$

Объединяя соотношения (43)–(44), заключаем:

если $1 < p \leq 2$, то $L_p(R^1) \subset S_\tau^{p,\mu'}$;

если $2 \leq p < \infty$, то $S_\tau^{p,\mu'} \subset L_p(R^1)$.

Литература

1. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 392–416.

2. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 8. — С. 1121–1146.

3. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p. — Киев, 2001. — 85 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).

4. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 427 с.

5. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 1. — С. 106–124.

6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. М.; Мир, 1965. — Т. 2 — 538 с.