

УДК 517.5

О. М. Піддубний

(Ін-т математики НАН України, Київ; Волинський нац. ун-т, Луцьк)

**ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ
ЗНАЧЕННЯМИ ОПЕРАТОРІВ ОДНОГО КЛАСУ**

We prove the inverse theorem of approximation of functions, defined on the unit circle by operators from classes $\mathfrak{B}_1$. Some application of main theorem with regard to boundary properties of generalized Poisson operator P_l in the unit disc are given.

Одержано обернену теорему наближення функцій, визначених на колі операторами класу $\mathfrak{B}_1$, і наведено одне із її застосувань до дослідження граничних властивостей узагальненого оператора Пуассона P_l в одиничному крузі.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{T} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — одиничне коло в комплексній площині, $L_p(\mathbb{T})$ — простір функцій визначених на $\mathbb{T}$, сумовних в p -му ($1 \leq p < \infty$) степені з нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{1/p}$$

і $C(\mathbb{T})$ — простір функцій, неперервних на $\mathbb{T}$ з нормою $\|f\|_C = \max_{\zeta \in \mathbb{T}} |f(\zeta)|$. Заради зручності записів покладемо $L_\infty(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$.

Нехай, далі, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — круг одиничного радіуса в $\mathbb{C}$. Кожну точку $z = re^{i\theta}$ в $\mathbb{D}$ будемо ототожнювати з точкою (θ, r) в декартову добутку $[-\pi, \pi] \times [0, 1]$.

Означення 1. Оператор F , означений на $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, який кожній функції $f \in L_p(\mathbb{T})$ ставить у відповідність функцію u_f , визначену в крузі $\mathbb{D}$, належить класові $\mathfrak{B}_1$, якщо його образ u_f задовольняє умови:

α) для будь-яких $f, g \in L_p(\mathbb{T})$ має місце рівність:

$$u_{f+g} = u_f + u_g;$$

© О. М. Піддубний, 2010

β) для довільних точок $(\theta, r_1), (\theta, r_2)$ круга $\mathbb{D}$ виконується рівність:

$$u_{uf}(\cdot, r_1)(\theta, r_2) = u_{uf}(\cdot, r_2)(\theta, r_1);$$

γ) для будь-якого цілого числа n і $r \in [0, 1)$ функція $F(f)(r \cdot)$ є n разів диференційовною, і для похідної

$$u_f^{(n)}(\theta, r) := \frac{d^n}{d\zeta^n} F(f)(r\zeta)$$

виконується нерівність типу Бернштейна

$$\left\| u_f^{(n)}(\cdot, r) \right\|_{L_p([- \pi, \pi])} \leq M \frac{\|f\|_p}{(1-r)^\sigma}, \quad (1)$$

де $\sigma = \sigma(n)$ — деяке число, $0 \leq \sigma(n) \leq n$ і M — стала, не залежна від r , до того ж, якщо функція f є k разів ($k \in \mathbb{N}$) диференційовною, то $u_f^{(k)}(\cdot, r) = u_{f^{(k)}}(\cdot, r)$.

Зазначимо, що клас $\mathfrak{B}_1$ означається подібно до того, як визначався клас $\mathfrak{B}$, введений в [1]. Відмінність полягає лише в оцінці L_p -норми похідної в умові γ), а саме, для класу $\mathfrak{B}$ $\sigma = n$.

Метою даної роботи є отримати обернену теорему наближення функцій з $L_p(\mathbb{T})$ за допомогою операторів класу $\mathfrak{B}_1$.

Більш точно, з'ясовується те, якими диференціально — гладкісними властивостями володіє функція f в залежності від збіжності до нуля відхилень $\|f(\cdot) - u_f(\cdot, r)\|_p$ при $r \rightarrow 1 -$.

В такій постановці задача про обернені теореми наближення розв'язана в [1] для операторів класу $\mathfrak{B}$.

2. Основний результат міститься в такій теоремі.

Теорема 1. Нехай $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$. Якщо оператор $F \in \mathfrak{B}_1$ і для деякого $k \in \mathbb{Z}_+$ виконується умова

$$\|u_f(\cdot, r) - f(\cdot)\|_p \leq A(1-r)^k \omega(1-r), \quad r \rightarrow 1-, \quad (2)$$

де A — додатна константа, $\omega(\cdot)$ — функція типу модуля неперервності порядку $n \in \mathbb{N}$, яка у випадку, коли $k \geq 1$, задовольняє умову Діні

$$\int_0^1 \frac{\omega(x)}{x} dx < \infty, \quad (3)$$

то функція f має на $\mathbb{T}$ абсолютно неперервні похідні до порядку $k-1$ включно і похідну $f^{(k)} \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, інтегральний (при $p = \infty$ — звичайний) модуль неперервності якої $\omega_n(f^{(k)}, t)$ порядку n задовольняє співвідношення

$$\omega_n(f^{(k)}, t) \leq \begin{cases} A_1 t^{\sigma(n)} \int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^{\sigma(n)+1}} dx, & k = 0, \\ A_2 \left[\int_0^t \frac{\omega(x)}{x} dx + t^{\sigma(n)} \int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^{\sigma(n)+1}} dx \right], & k \geq 1, \end{cases} \quad (4)$$

де A_1, A_2 — додатні константи, які не залежать від t , $0 < t \leq 1/2$.

Зазначимо, що, якщо в (1) $\sigma = n$, то $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$, і дана теорема цілком співпадає з теоремою 1.1 роботи [1].

Слід також відмітити, що теорема 1 є аналогом обернених теорем наближення тригонометричними та алгебраїчними многочленами [2, с.233, 263].

Оператори, які забезпечують вказану в теоремі 1 швидкість наближення, існують. Зокрема, такими операторами можуть бути оператори, описані в роботі [3].

3. Доведення теореми 1. Заради спрощення записів перепозначимо $f(\theta) := f(e^{i\theta})$ і будемо розглядати $f(\theta)$ як функцію означену на $[-\pi, \pi]$.

Випадок, коли $k = 0$, доводиться тим самим методом що й в періодичному випадку [2, с. 234, 235]. Тому конкретизуємо лише технічні моменти, які дають можливість застосувати такий метод.

Нехай $0 < h \leq 1/2$ і $r_n = 1 - 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Виберемо таке натуральне N , щоб

$$\frac{1}{2^{N+1}} < h \leq \frac{1}{2^N}, \quad (5)$$

і розглянемо тотожність

$$\begin{aligned} f(\theta) &= u_f(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^N [u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})] + \\ &+ [f(\theta) - u_f(\theta, r_N)], \quad N \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (6)$$

на основі якої побудуємо для функції f різницю порядку n з кроком h :

$$\Delta_h^n f(\theta) = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m f(\theta + mh) = S_1(\theta, h) + S_2(\theta, h), \quad (7)$$

де

$$S_1(\theta, h) := \sum_{j=1}^N \Delta_h^n [u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})], \quad (8)$$

$$S_2(\theta, h) := \Delta_h^n [f(\theta) - u_f(\theta, r_N)]. \quad (9)$$

Оцінимо кожен з доданків в (7).

Пристаюючи до оцінки S_1 , покладемо

$$f_j(\theta) := f(\theta) - u_f(\theta, r_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Тоді згідно з умовами α) та β)

$$u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1}) = u_{f_{j-1}}(\theta, r_j) - u_{f_j}(\theta, r_{j-1}). \quad (10)$$

Отже, тепер є можливість виконати звичні кроки, саме: зображаємо різницю n -го порядку, яка міститься в S_1 в інтегральній формі (див., наприклад, [2, с. 159]), а потім, застосовуючи інтегральну нерівність Мінковського, на основі властивості γ), умови (2) при $k = 0$ тотожності (10) і нерівності $\omega(2t) \leq 2^n \omega(t)$, отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} \|S_1(\cdot, h)\|_p &\leq Mh^n \sum_{j=1}^N \left[\frac{\|f_{j-1}\|_p}{(\frac{1}{2^j})^\sigma} + \frac{\|f_j\|_p}{(\frac{1}{2^{j-1}})^\sigma} \right] \leq \\ &\leq MAh^n \sum_{j=1}^N \left[\frac{\omega(\frac{1}{2^{j-1}})}{(\frac{1}{2^j})^\sigma} + \frac{\omega(\frac{1}{2^j})}{(\frac{1}{2^{j-1}})^\sigma} \right] \leq K_1 h^n \sum_{j=1}^N 2^{\sigma j} \omega\left(\frac{1}{2^j}\right), \end{aligned}$$

де $K_1 = MA(2^n + 1)$.

Далі, для S_2 згідно з умовою (2) при $k = 0$, монотонності функції ω та умови (5) маємо оцінку

$$\|S_2(\cdot, h)\|_p = \left\| \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m (f(\cdot + mh) - u_f(\cdot + mh, r_N)) \right\|_p \leq$$

$$\leq A \sum_{m=0}^n C_n^m \omega\left(\frac{1}{2^N}\right) = A 2^n \omega\left(\frac{1}{2^N}\right) \leq K_2 \omega(h), \quad (11)$$

де $K_2 = 2^{2n} A$.

Отже,

$$\|\Delta_h^n f\|_p \leq K_1 h^n \sum_{j=1}^N 2^{\sigma j} \omega\left(\frac{1}{2^j}\right) + K_2 \omega(h).$$

Після цього стає можливим застосувати метод, згаданий вище, який дає оцінку

$$\omega_n(f, h) \leq 2^{n+1} K_1 h^n \int_h^1 \frac{\omega(x) dx}{x^{\sigma+1}} + K_3 \omega(h) \leq A_1 h^\sigma \int_h^1 \frac{\omega(x) dx}{x^{\sigma+1}},$$

де A_1 — константа, яка залежить тільки від M, A, n і не залежить від h .

Випадок, коли $k \geq 1$. Покажемо спочатку, що існує така послідовність натуральних чисел $\{N_\nu\}_{\nu \geq 1}$, застосовуючи яку в рівності (6) можна перейти до границі при $\nu \rightarrow \infty$, внаслідок чого отримуємо співвідношення

$$f(\theta) = u_f(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})], \quad (12)$$

де при $1 \leq p < \infty$ ряд збігається в p -середньому, а при $p = \infty$ ряд збігається рівномірно.

Справді, для частинної суми цього ряду

$$S_N(\theta) = u_f(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^N [u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})]$$

використовуючи (6), (10) та умову (2), одержуємо

$$\|f(\cdot) - S_N(\cdot)\|_p = \|f(\cdot) - u_f(\cdot, r_N)\|_p \leq A \left(\frac{1}{2^N}\right)^k \omega\left(\frac{1}{2^N}\right).$$

Звідси випливає, що ряд (12) збігається в p -середньому до функції f , а при $p = +\infty$ — до неперервної функції f . У випадку $1 \leq p < \infty$ за

відомою теоремою (теоремою Ф. Рісса) (див., наприклад, [4, с. 388]) одержуємо, що існує підпоследовність $\{S_{N_\nu}\}_{\nu \geq 1}$ частинних сум ряду (12), яка збігається майже скрізь на $[-\pi, \pi]$ до функції f .

При довільному натуральному $q \leq k$ розглянемо ряд

$$u_f^{(q)}(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f^{(q)}(\theta, r_j) - u_f^{(q)}(\theta, r_{j-1})], \quad (13)$$

де

$$u^{(q)}(\theta, r_j) = \frac{d^q}{d(e^{i\theta})^q} (F(f)(r_j e^{i\theta})).$$

Продиференціювавши у вказаному сенсі рівність (10), використавши властивість γ) та умову (2), одержимо оцінку норм членів цього ряду:

$$\begin{aligned} \left\| u_f^{(q)}(\cdot, r_j) - u_f^{(q)}(\cdot, r_{j-1}) \right\|_p &= \left\| u_{f_{j-1}}^{(q)}(\cdot, r_j) - u_{f_j}^{(q)}(\cdot, r_{j-1}) \right\|_p \leq \\ &\leq \left\| u_{f_{j-1}}^{(q)}(\cdot, r_j) \right\|_p + \left\| u_{f_j}^{(q)}(\cdot, r_{j-1}) \right\|_p \leq \\ &\leq M \left(\left(\frac{1}{2^j} \right)^{-\sigma_1} \|f(\cdot) - u_f(\cdot, r_{j-1})\|_p + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2^{j-1}} \right)^{-\sigma_1} \|f(\cdot) - u_f(\cdot, r_j)\|_p \right) \leq \\ &\leq MA \left[\left(\frac{1}{2^{j-1}} \right)^k \omega \left(\frac{1}{2^{j-1}} \right) \left(\frac{1}{2^j} \right)^{-\sigma_1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2^j} \right)^k \omega \left(\frac{1}{2^j} \right) \left(\frac{1}{2^{j-1}} \right)^{-\sigma_1} \right] \leq K \omega \left(\frac{1}{2^j} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

де $\sigma_1 = \sigma_1(q) \leq q \leq k$, K — додатна константа, яка залежить від k, d, σ_1 . Оскільки $\omega \uparrow$, то при всіх $j = 1, 2, \dots$

$$\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{\omega(x)}{x} dx \geq \ln 2 \omega \left(\frac{1}{2^j} \right).$$

Тому із (14) випливає

$$\left\| u_f^{(q)}(\cdot, r_{j+1}) - u_f^{(q)}(\cdot, r_j) \right\|_p \leq \frac{K}{\ln 2} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{\omega(x)}{x} dx. \quad (15)$$

Внаслідок умови (3) маємо, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{\omega(x)}{x} dx \leq \int_0^1 \frac{\omega(x)}{x} dx < \infty.$$

Із врахуванням останніх фактів приходимо до висновку, що при $1 \leq p < \infty$ ряд (13) збігається в метриці простору $L_p(\mathbb{T})$, а при $p = +\infty$ — рівномірно. Тому за теоремою Ф. Рісса для кожного $q = 1, 2, \dots, k$ існує підпослідовність $\{S_{n_m}^{(q)}\}_{m \geq 1}$ частинних сум ряду (13), яка збігається майже скрізь на $\mathbb{T}$ до деякої функції $f_q \in L_p[-\pi, \pi]$.

Покажемо, що майже скрізь $f_q = f^{(q)}$. Для цього розглянемо функції

$$\varphi_q(\theta) := f_{q-1}(\theta) - f_{q-1}(\theta_0) - \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} f_q(\zeta) d\zeta,$$

де θ_0 — точка, в якій ряд (13) збігається при всіх $q = 1, 2, \dots, k$ і $\mathbb{T}(\theta_0, \theta)$ — дуга кола $\mathbb{T}$, задана рівнянням $\zeta = e^{it}$, $t \in [\theta_0, \theta]$.

З міркувань, які будуть наведені нижче, випливає, що для функції $S_{n_m}^{(q)}$ має місце формула Ньютона–Лейбніца

$$\int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} S_{n_m}^{(q)}(\zeta) d\zeta = S_{n_m}^{(q-1)}(e^{i\theta}) - S_{n_m}^{(q-1)}(e^{i\theta_0}).$$

Враховуючи це, легко показати, що

$$\begin{aligned} \|\varphi_q\|_p &\leq \left\| f_{q-1} - S_{n_m}^{(q-1)} \right\|_p + \left| f_{q-1}(\theta_0) - S_{n_m}^{(q-1)}(e^{i\theta_0}) \right| + \\ &\quad + \left\| \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} [f_q(\zeta) - S_{n_m}^{(q)}(\zeta)] d\zeta \right\|_p. \end{aligned}$$

З останнього співвідношення при $m \rightarrow \infty$ одержуємо, що майже для всіх $\theta \in [-\pi, \pi]$ $\varphi_q(\theta) = 0$, тобто

$$f_{q-1}(\theta) - f_{q-1}(\theta_0) = \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} f_q(\zeta) d\zeta.$$

Згідно з (12) майже скрізь на $\mathbb{T}$ $f_0 = f$. Тому

$$f(\zeta) - f(\zeta_0) = \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} f_1(\zeta) d\zeta, \quad (16)$$

де $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$ і $\zeta = e^{i\theta}$.

Отже, функція $f(e^{i\cdot})$ є абсолютно неперервною і за теоремою Лебега

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = f_1(e^{i\theta}) \frac{d}{d\theta} e^{i\theta}.$$

Звідси випливає

$$\frac{df(e^{i\theta})}{de^{i\theta}} = f_1(e^{i\theta}) \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi],$$

тобто $f_1(\zeta) = f'(\zeta)$ для всіх $\zeta \in \mathbb{T}$. Аналогічно доводимо, що при $1 \leq p < \infty$ остання рівність виконується майже скрізь на $\mathbb{T}$.

За допомогою таких міркувань послідовно отримуємо, що скрізь на $\mathbb{T}$ $f_1 = f', \dots, f_{q-1} = f^{(q-1)}$ і майже скрізь $f_q = f^{(q)}$.

Отже, функція f співпадає з функцією, яка має абсолютно неперервну похідну $(k-1)$ -го порядку, і похідну $f^{(k)} \in L_p(\mathbb{T})$, яка є границею в середньому послідовності $\{S_n^{(k)}\}_{n \geq 1}$.

Цим доведено, що майже для всіх $\theta \in [-\pi, \pi]$ виконується рівність

$$g(\theta) := f^{(k)}(e^{i\theta}) = u_f^{(k)}(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[u_f^{(k)}(\theta, r_j) - u_f^{(k)}(\theta, r_{j-1}) \right].$$

Оцінимо інтегральний модуль гладкості порядку N функції g . Для цього використаємо те, що так само, як у випадку попередньої рівності, для майже всіх $\theta \in [-\pi, \pi]$ доводиться справедливості рівності

$$g(\theta) = u_f^{(k)}(\theta, r_j) + \sum_{m=j+1}^{\infty} \left[u_f^{(k)}(\theta, r_m) - u_f^{(k)}(\theta, r_{m-1}) \right].$$

З цієї рівності, використовуючи (15), одержуємо

$$\begin{aligned} \|g(\theta) - u_f^{(k)}(\theta, r_j)\|_p &\leq \sum_{m=j+1}^{\infty} \|u_f^{(k)}(\theta, r_m) - u_f^{(k)}(\theta, r_{m-1})\|_p \leq \\ &\leq 2K \sum_{m=j+1}^{\infty} \int_{2^{-m}}^{2^{-(m-1)}} \frac{\omega(x)}{x} dx = 2K \int_0^{2^{-j}} \frac{\omega(x)}{x} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Далі, нехай

$$\Omega(t) := \int_0^t \frac{\omega(x)}{x} dx, \quad t > 0$$

і

$$u_g(\theta, r) := u_f^{(k)}(\theta, r).$$

Функція Ω має властивості модуля неперервності порядку n [2, с. 162, 236], а $u_g(\theta, r) = u_{f^{(k)}}(\theta, r)$ за умовою γ). Тому нерівність

$$\|g(\cdot) - u_g(\cdot, r_j)\|_p \leq M_1 \Omega(1 - r_j),$$

яка випливає з (17), означає, що ми маємо L_p -оцінку відхилення функції g від $u_g(\cdot, r_j)$ типу оцінки (2) при $k = 0$. Отже, на основі вже доведеного твердження теореми при $k = 0$ щодо функції g можемо записати таку нерівність:

$$\omega_n(g; t) = \omega_n(f^{(k)}; t) \leq C t^\sigma \int_t^1 \frac{\Omega(x)}{x^{\sigma+1}} dx.$$

Інтегрування частинами останнього інтегралу дає оцінку (4) при $k \geq 1$.

Теорему доведено.

4. Застосування. У ролі оператора F розглянемо узагальнений оператор Пуассона P_l :

$$P_l(f)(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) K_l(z e^{-it}) dt, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (18)$$

де

$$K_l(r e^{it}) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{k^l} \cos kt, \quad 0 < r < 1, \quad l > 0.$$

Зазначимо, що K_l при $l = 1$ збігається з ядром Пуассона, а оператор P_1 є звичайним оператором Пуассона.

В [5] показано, що функції $u(\theta, r) = P_l(f)(re^{i\theta})$ при натуральних значеннях l є розв'язками крайової задачі для рівняння (в полярних координатах), саме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(-1)^{l+1}}{r^2} \frac{\partial^{2l} u}{\partial \theta^{2l}} = 0 \quad (19)$$

з умовою

$$u(\theta, r) \Big|_{r=1} = f(e^{i\theta}). \quad (20)$$

Рівність (20) розуміємо так, щоб

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \int_0^{2\pi} |u(\theta, r) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0.$$

У даному пункті теорема 1 застосовується до вивчення граничної поведінки розв'язків крайової задачі (19), (20) в контексті оберненої теореми.

Теорема 2. Нехай $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$. Якщо для функції $u(\theta, r) = P_l(f)(re^{i\theta})$ виконується нерівність

$$\|u(\cdot, r) - f(\cdot)\|_p \leq A\omega(1-r), \quad 0 < r < 1, \quad A = \text{const} > 0,$$

коли ω — функція типу модуля неперервності, то

$$\omega(f, t) \leq At^{1/l} \int_t^1 \frac{\omega(x) dx}{x^{1/l+1}}, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}, \quad (21)$$

при додатній константі A , яка не залежить від r .

Теорема 2 виводиться з теореми 1 при $n = 1$ і $\sigma = 1/l$ шляхом перевірки умов $\alpha)$, $\beta)$ і $\gamma)$ із означення 1, тобто перевірки включення $P_l \in \mathfrak{B}_1$.

Виконання умови $\alpha)$ є очевидним.

Для перевірки умови $\beta)$ досить зауважити, що

$$u_{u_f(\cdot, r_1)}(\theta, r_2) - u_{u_f(\cdot, r_2)}(\theta, r_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \int_0^{2\pi} \left[K_l(r_1 e^{-i(t-\tau)}) K_l(r_2 e^{-i(\tau-\theta)}) - \right. \\ \left. - K_l(r_2 e^{-i(t-\tau)}) K_l(r_1 e^{-i(\tau-\theta)}) \right] d\tau dt,$$

і те, що внутрішній інтеграл дорівнює нулеві згідно з рівністю Парсеваля.

Для перевірки умови γ) продиференціюємо рівність (18):

$$\frac{\partial u(\theta, r)}{\partial \theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{\partial}{\partial \theta} K_l(re^{-i(t-\theta)}) dt = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i(t+\theta)}) \frac{\partial}{\partial t} K_l(re^{-it}) dt.$$

Звідси за інтегральною нерівністю Мінковського випливає оцінка

$$\left\| \frac{\partial u(\cdot, r)}{\partial \theta} \right\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial t} K_l(re^{-it}) \right| dt. \quad (22)$$

Для обчислення похідної $\partial(K_l(re^{-it}))/\partial t$ запишемо ядро K_l у вигляді:

$$K_l(re^{it}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{k^l} \cos kt = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{|k|^l \ln r} e^{ikt}.$$

Отже,

$$\frac{\partial K_l(re^{it})}{\partial t} = \frac{i}{2} \sum_{k \neq 0} k e^{|k|^l \ln r} e^{ikt}. \quad (23)$$

Застосувавши до ряду в (23) формулу підсумовування Пуассона (див., наприклад, [6, с. 119]), одержуємо

$$\frac{\partial K_l(re^{it})}{\partial t} = \frac{i}{2} \sum_{k \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{|x|^l \ln r} e^{ix(t-2\pi k)} dx. \quad (24)$$

Підставляємо (24) в нерівність (22), і отримуємо

$$\left\| \frac{\partial u(\cdot, r)}{\partial \theta} \right\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{|x|^l \ln r} e^{ix(t-2\pi k)} dx \right| dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|f\|_p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x e^{|x|^l \ln r} e^{ix(t-2\pi k)} dx \right| dt = \\
&= \frac{\|f\|_p}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x e^{|x|^l \ln r} e^{ixt} dx \right| dt = \\
&= \frac{\|f\|_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x e^{|x|^l \ln r} e^{ixt} dx \right| dt.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\left\| \frac{\partial u(\cdot, r)}{\partial \theta} \right\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} x e^{-yx^l} \sin(xt) dx \right| dt, \quad (25)$$

де $y = -\ln r$.

Для останнього інтегралу оцінку в [7, лема 4.7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} x e^{-yx^l} \sin(xt) dx \right| dt \leq C y^{-1/l}.$$

Отже, застосовуючи це співвідношення до (25), приходимо до висновку, що умова $\gamma)$ для оператора P_l виконується.

1. Горбайчук В. Й. Обратные теоремы приближения специальными операторами продолжения и их приложения к некоторым задачам математической физики. — Киев, 1991. — 38 с. — (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 91.28).
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 602 С.
3. Савчук В. В. Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора–Абея–Пуассона // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, №9. — С. 1253 — 1260.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
5. Бугров С. Я. Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка // Mathematica (Cluj). — 1968. — **5** (28). — С. 5—25.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т.1. — 615 с.
7. Бугров С. Я. Дифференциальные свойства решений некоторого класса дифференциальных уравнений высшего порядка // Мат. сборник. — 1964. — **63**, № 1. — С. 59 — 121.