

УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін-т математики НАН України, Київ)**ЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B_{p,\theta}^\Omega$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

We obtain exact order estimates of linear widths of the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of one and several variables in the space L_q , when parameters p, q and θ satisfy certain relations.

Отримано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p, q і θ .

Вступ. В роботі отримано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі L_q при деяких співвідношеннях між параметрами p, q і θ . Відмітимо, що основна увага зосереджена на встановленні оцінок лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\omega$ періодичних функцій в одновимірному випадку для тих значень параметра θ , при яких оцінки цих величин були невідомі. В заключній частині роботи встановлено точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $p = 1, \infty$ та $1 < q < \infty$. Більш детально про це мова йтиме у відповідних частинах роботи, а зараз наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d -вимірний евклідовий простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi]$, — простір 2π -періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$, для яких

$$\|f\|_p := \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується

© А. Ф. Конограй, 2010

додааткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо через $\Omega_l(f, t)_p$ мішаний модуль неперервності порядку l :

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=\overline{1, d}}} \|\Delta_h^l f(x)\|_p,$$

де $t = (t_1, \dots, t_d)$, $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана l -та різниця з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє такі умови:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;
- 3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;
- 4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l) , які називають умовами Барі–Стечка [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S) , якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l) , якщо при деякому $0 < \gamma < l$ відношення $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає, тобто існує така неза-

лежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l) , якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i , $i \neq j$.

Отже, нехай $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови 1) — 4). Тоді згідно з означенням [2]

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\},$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B_{p,\infty}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \leq 1 \right\},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, \dots, t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1, d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з класами H_p^Ω , які були розглянуті М.М. Пустовойтовим в [3].

Для подальших міркувань нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням класів $B_{p,\theta}^\Omega$.

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1, d}\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f .

Отже, якщо $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови 1) — 4), (S) і (S_l) , то з точністю до абсолютних сталих класи $B_{p,\theta}^\Omega$ можна означити наступним чином (див. [2]):

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \leq \theta < \infty$, та

$$B_{p,\infty}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|\delta_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}, \quad (2)$$

тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Відмітимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, класи $B_{p,\theta}^\Omega$ є аналогами відомих класів Бесова $B_{p,\theta}^r$ (див., наприклад, [4]).

Наведене означення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ можна розповсюдити і на крайні випадки $p = 1$ та $p = \infty$, замінивши в (1) і (2) "блоки" $\delta_s(f, x)$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j}-1}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку

$$A_s(f, x) = f * A_s.$$

В прийнятих позначеннях (з точністю до абсолютних сталих) класи $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p \leq \infty$, можна означити наступним чином (див.,

відповідно [5] та [3])

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad (3)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B_{p,\infty}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|A_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}. \quad (4)$$

Відмітимо, що при $1 < p < \infty$ означення норм функцій з класів $B_{p,\theta}^\Omega$ (1) та (2) еквівалентні до означень норм (3) та (4) відповідно.

Нижче будемо розглядати класи $B_{p,\theta}^\Omega$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ вигляду

$$\Omega(t) = \omega \left(\prod_{j=1}^d t_j \right), \quad (5)$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови (S) і (S_l) . Зрозуміло, що для $\Omega(t)$, заданої формулою (5), як для функції d змінних, виконуються умови 1) — 4), (S) і (S_l) .

Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p , q і θ . Наведемо означення величини, що нами буде досліджуватися.

Нехай Φ — множина в банаховому просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$. Тоді лінійний поперечник множини Φ в просторі X (позначається $\lambda_M(\Phi, X)$) визначається за формулою

$$\lambda_M(\Phi, X) := \inf_{\mathcal{L}_M} \inf_{\Lambda f \in \mathcal{L}_M} \sup_{f \in \Phi} \|f - \Lambda f\|_X, \quad (6)$$

де точні нижні межі беруться відповідно по всіх підпросторах $\mathcal{L}_M$ простору X , вимірність яких не перевищує M , і всіх лінійних операторів, які діють з X в $\mathcal{L}_M$.

Лінійний поперечник був введений в роботі В.М. Тихомирова [6], в якій були встановлені точні значення лінійних поперечників деяких класів функцій однієї змінної. На сьогоднішній день є велика кількість робіт, в яких досліджувались лінійні поперечники тих

чи інших класів функцій, або скінченновимірних множин [7, 8]. Тут згадаємо лише роботи [9 — 13], в яких вивчались величини (6) для класів функцій багатьох змінних $W_{p,\alpha}^r$, H_p^r і $B_{p,\theta}^r$. В цих роботах можна ознайомитись з детальною бібліографією, що стосується дослідження лінійних поперечників.

Крім величини (6), наведемо означення ще однієї апроксимативної характеристики, яку далі будемо систематично використовувати в роботі.

Колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини Φ банахового простору X (позначається $d_M(\Phi, X)$) називається величина

$$d_M(\Phi, X) := \inf_{\mathcal{L}_M} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in \mathcal{L}_M} \|f - u\|_X,$$

де зовнішня точна нижня межа береться по всіх підпросторах $\mathcal{L}_M$ в X , вимірність яких не перевищує M .

Легко бачити, що згідно з означеннями лінійний поперечник $\lambda_M(\Phi, X)$ пов'язаний із колмогоровським поперечником $d_M(\Phi, X)$ (для центрально-симетричної множини Φ) нерівністю

$$d_M(\Phi, X) \leq \lambda_M(\Phi, X). \quad (7)$$

У зв'язку з цим цікаво з'ясувати, в яких випадках (для конкретних множин Φ і просторів X) оцінки поперечників $d_M(\Phi, X)$ і $\lambda_M(\Phi, X)$ рівні за порядком, а в яких випадках має місце порядкова нерівність

$$d_M(\Phi, X) \ll \lambda_M(\Phi, X).$$

Тут і надалі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N} \mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та вимірності d простору $\mathbb{R}^d$.

1. Допоміжні твердження. Нехай l_p^m означає простір $\mathbb{R}^m$, в

якому введена норма

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

і B_p^m — одинична куля в l_p^m .

Має місце така теорема.

Теорема 1.1 [7]. *Нехай $M < m$, $1 \leq p < 2 \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Тоді справедливе співвідношення*

$$\lambda_M(B_p^m, l_q^m) \asymp \max \left\{ m^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \min \left\{ 1, m^{\frac{1}{q}} M^{-\frac{1}{2}} \right\} \sqrt{1 - \frac{M}{m}} \right\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 1, q > 2$ відповідний результат впливає з твердження, встановленого Б.С. Кашиним [8].

Теорема 1.2 [7]. *Нехай $M < n$. Тоді при $1 \leq p < 2 \leq q < \infty$ виконується співвідношення*

$$d_M(B_p^n, l_q^n) \asymp \max \left\{ n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \min \left\{ 1, n^{\frac{1}{q}} M^{-\frac{1}{2}} \right\} \sqrt{1 - \frac{M}{n}} \right\}.$$

Наступні допоміжні твердження сформулюємо для одновимірного випадку.

Позначимо через $\mathcal{T}(\rho(s))$, $s \in \mathbb{N}$, множину функцій вигляду

$$f(x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{ikx}.$$

Далі будемо також використовувати один важливий результат, відомий в літературі під назвою "нерівності Марценкевича" (див. [14, т.2, с.46]), багатовимірний аналог якого, в наших позначеннях, сформульовано в роботі [15].

Теорема 1.3. *Між простором тригонометричних поліномів $\mathcal{T}(\rho(s))$ і простором $\mathbb{R}^{2^s}$ існує ізоморфізм, який ставить у відповідність функції f вектор $\delta_s f^j = \{f_n(\tau_j)\} \in \mathbb{R}^{2^s}$,*

$$f_n(t) = \sum_{sgnk=sgnn} c_k e^{ikt}, \quad n = \pm 1,$$

$$\tau_j = \pi 2^{2-s} j_1, \quad j_1 = 1, 2, \dots, 2^{s-1},$$

і при цьому має місце співвідношення

$$\|\delta_s(f, x)\|_p \asymp \left(2^{-s} \sum_{j=1}^{2^s} |\delta_s f^j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (1, \infty).$$

Теорема 1.4 [16]. Нехай $T_n(x)$ — тригонометричний поліном порядку $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx},$$

де c_k — довільні коефіцієнти. Тоді при $1 \leq q < p \leq \infty$ має місце співвідношення

$$\|T_n(x)\|_p \leq 2n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|T_n(x)\|_q. \quad (8)$$

Нерівність (8) було встановлено С.М. Нікольським і вона отримала назву "нерівності різних метрик". При $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [17].

Лема 1.1 [10]. Нехай $s \in \mathbb{N}$ і $f \in \mathcal{T}(\rho(s))$, $M_s \in \mathbb{Z}_+$, $M_s \leq 2^s$. Якщо $1 < p, q < \infty$, то існує лінійний оператор $\Lambda_{M_s} : \mathcal{T}(\rho(s)) \rightarrow \mathcal{T}(\rho(s))$, вимірність області значень якого не перевищує M_s , такий, що

$$\|f(x) - \Lambda_{M_s} f(x)\|_q \asymp \lambda_{M_s}(B_p^{2^s}, l_q^{2^s}) 2^{s(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f(x)\|_p. \quad (9)$$

Лема 1.2 [9, с. 25]. Нехай $1 \leq p < q < \infty$ і $f \in L_p(\pi_1)$. Тоді має місце співвідношення

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_p 2^{s(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q. \quad (10)$$

2. Лінійні поперечники класів $B_{p,\theta}^\omega$ періодичних функцій однієї змінної у просторі $L_q(\pi_1)$. В даному пункті встановимо точні за порядком оцінки величин $\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q)$ в одновимірному випадку ($d = 1$). Зауважимо, що у випадку $d \geq 1$ (але лише для $\theta, 2 \leq \theta \leq q$) результати наступних теорем 2.1 та 2.2 було раніше встановлено в роботі [18].

Має місце теорема.

Теорема 2.1. *Нехай $1 < p \leq 2, p' < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1 \leq \theta \leq \infty$ і $\omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, а також умову (S_l) . Тоді при $d = 1$ має місце оцінка*

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q) \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху у випадку $\theta = \infty$.

Нехай f — довільна функція із класу H_p^ω і задано достатньо велике число M . Підберемо $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $M \asymp 2^n$ і для $s \in \mathbb{N}$, поставимо у відповідність числа

$$M_s = \begin{cases} 2^s, & 1 \leq s \leq n, \\ [2^{n+\nu(n-s)}], & s > n, \end{cases} \quad (11)$$

де $\nu > 0$ — число, що задовольняє нерівність $1 - \frac{1}{q} + \frac{\nu}{2} - \alpha < 0$, $[a]$ — ціла частина числа a .

Легко бачити, що $\sum_s M_s$ не перевищує за порядком M . Дійсно, при $\nu > 0$, матимемо

$$\sum_s M_s \leq \sum_{s \leq n} 2^s + \sum_{s > n} 2^{n+\nu(n-s)} \ll 2^n \asymp M.$$

Розглянемо лінійний оператор, який діє на функцію $f \in H_p^\omega$ за формулою

$$\Lambda_M f(x) = \sum_s \Lambda_{M_s} \delta_s(f, x),$$

де оператори $\Lambda_{M_s}, s > n$, побудовано відповідно до леми 1.1, тобто вони задовольняють співвідношення (9), і $\Lambda_{M_s} \equiv I_s$, $1 \leq s \leq n$, де $I_s : \mathcal{T}(\rho(s)) \rightarrow \mathcal{T}(\rho(s))$ — тотожний оператор. Оцінимо $\|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q$, використовуючи для цього лему 1.2.

Оскільки за умовою теореми $2 \leq p' < q < \infty$, то, виконавши у співвідношенні (10) заміну індекса p на p' , знаходимо

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_{p'} 2^{s(\frac{1}{p'} - \frac{1}{q})} \right)^q.$$

Взявши до уваги все сказане вище, можемо записати

$$\begin{aligned} \|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q &\ll \left\| \sum_{s>n} \left(\delta_s(f, x) - \Lambda_{M_s} \delta_s(f, x) \right) \right\|_q \ll \\ &\ll \left(\sum_{s>n} \left(2^{s(\frac{1}{p'} - \frac{1}{q})} \|\delta_s(f, x) - \Lambda_{M_s} \delta_s(f, x)\|_{p'} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =: I_1. \end{aligned}$$

Далі, використовуючи співвідношення (9), продовжимо оцінку I_1

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \left(\sum_{s>n} \left(2^{s(\frac{1}{p'} - \frac{1}{q})} \lambda_{M_s}(B_p^{2^s}, l_{p'}^{2^s}) 2^{s(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})} \|\delta_s(f, x)\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{s>n} \left(2^{s(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \lambda_{M_s}(B_p^{2^s}, l_{p'}^{2^s}) \|\delta_s(f, x)\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =: I_2. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що внаслідок теореми 1.1 (при $s > n$)

$$\lambda_{M_s}(B_p^{2^s}, l_{p'}^{2^s}) \ll 2^{\frac{s}{p'}} M_s^{-\frac{1}{2}},$$

для I_2 матимемо

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \left(\sum_{s>n} \left(2^{s(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} 2^{\frac{s}{p'}} M_s^{-\frac{1}{2}} \|\delta_s(f, x)\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{s>n} \left(2^{s(1 - \frac{1}{q})} M_s^{-\frac{1}{2}} \|\delta_s(f, x)\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =: I_3. \end{aligned}$$

Підставляючи тепер у вираз для I_3 замість M_s відповідні значення із (11) та враховуючи (2), одержимо

$$\begin{aligned} I_3 &\ll \left(\sum_{s>n} \left(2^{s(1 - \frac{1}{q})} 2^{-\frac{n}{2} - \frac{\nu}{2}(n-s)} \omega(2^{-s}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= 2^{-\frac{n}{2} - \frac{\nu n}{2}} \left(\sum_{s>n} \left(2^{s(1 - \frac{1}{q} + \frac{\nu}{2} - \alpha)} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =: I_4. \end{aligned}$$

Оскільки $\omega(t)$ задовольняє умову (S) із $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, то

$$\frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \quad (12)$$

при $s > n$.

Тепер враховуємо вибір чисел ν та співвідношення (12), проводимо оцінку I_4 , і в результаті будемо мати

$$\begin{aligned} I_4 &\ll 2^{-\frac{n}{2} - \frac{\nu n}{2}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{s>n} 2^{s(1 - \frac{1}{q} + \frac{\nu}{2} - \alpha)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ &\ll \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{2} - \frac{\nu n}{2} + \alpha n} 2^{n(1 - \frac{1}{q} + \frac{\nu}{2} - \alpha)} = \\ &= \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \asymp \omega(M^{-1}) M^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Таким чином, беручи до уваги, що вимірність області значень оператора Λ_M не перевищує $C \cdot M$, з деякою сталою $C > 0$, за властивістю монотонності лінійного поперечника за параметром M , отримуємо таку оцінку зверху:

$$\lambda_M(H_p^\omega, L_q) \ll \omega(M^{-1}) M^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

Оскільки $B_{p,\theta}^\omega \subset H_p^\omega$, $1 \leq \theta < \infty$, то звідси будемо мати

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q) \ll \omega(M^{-1}) M^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

Перейдемо до встановлення відповідної оцінки знизу. Її достатньо отримати для класу $B_{2,1}^\omega$, бо $B_{2,\theta}^\omega \subset B_{p,\theta}^\omega$ при $1 < p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

За заданим M виберемо число μ із умови $2M \leq 2^\mu < 4M$ і позначимо через $\mathcal{T}_\mu$ множину тригонометричних поліномів $\delta_\mu(f, x)$.

Тоді, згідно з означенням лінійного поперечника,

$$\lambda_M(B_{2,1}^\omega, L_q) \geq \lambda_M(B_{2,1}^\omega \cap \mathcal{T}_\mu, L_q). \quad (13)$$

Якщо P_μ — оператор ортогонального проектування на $\mathcal{T}_\mu$, то для $f \in L_q(\pi_1)$ і $t \in \mathcal{T}_\mu$ виконується співвідношення

$$\|t - f\|_q \geq \|P_\mu(t - f)\|_q = \|P_\mu t - f\|_q. \quad (14)$$

Тому з (13) і (14) отримуємо

$$\lambda_M(B_{2,1}^\omega, L_q) \geq \lambda_M(B_{2,1}^\omega \cap \mathcal{T}_\mu, L_q \cap \mathcal{T}_\mu). \quad (15)$$

Нехай $f \in \mathcal{T}_\mu$. Внаслідок теореми 1.3, будемо мати

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{2,1}^\omega} &= \omega^{-1}(2^{-\mu}) \|\delta_\mu(f, x)\|_2 \asymp \\ &\asymp \omega^{-1}(2^{-\mu}) \left(2^{-\mu} \sum_{j=1}^{2^\mu} |\delta_\mu f^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \omega^{-1}(2^{-\mu}) 2^{-\frac{\mu}{2}} \left(\sum_{j=1}^{2^\mu} |\delta_\mu f^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Отже, при деякому $C > 0$:

$$B_{2,1}^\omega \cap \mathcal{T}_\mu \supset C \omega(2^{-\mu}) 2^{\frac{\mu}{2}} B_2^{2^\mu}. \quad (16)$$

Крім того, якщо $g \in L_q \cap \mathcal{T}_\mu$, $q \geq 2$, то внаслідок теореми 1.3, одержуємо

$$\|g\|_q \asymp \|\delta_\mu(g, \cdot)\|_q \asymp \left(2^{-\mu} \sum_{j=1}^{2^\mu} |\delta_\mu f^j|^q \right)^{\frac{1}{q}} = 2^{-\frac{\mu}{q}} \left(\sum_{j=1}^{2^\mu} |\delta_\mu f^j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (17)$$

Таким чином, згідно з (15) – (17) і властивостями лінійного поперечника, будемо мати

$$\lambda_M(B_{2,1}^\omega, L_q) \gg \omega(2^{-\mu}) 2^{\mu(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \lambda_M(B_2^{2^\mu}, l_q^{2^\mu}),$$

і внаслідок співвідношення (див., наприклад, [19, с. 209])

$$\lambda_M(B_2^{2^\mu}, l_q^{2^\mu}) = d_M(B_{q'}^{2^\mu}, l_2^{2^\mu}) \quad , \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

приходимо до оцінки

$$\lambda_M(B_{2,1}^\omega, L_q) \gg \omega(2^{-\mu}) 2^{\mu(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} d_M(B_{q'}^{2^\mu}, l_2^{2^\mu}). \quad (18)$$

Для продовження оцінки, використаємо теорему 1.2, відповідно до якої

$$d_M(B_{q'}^{2^\mu}, l_2^{2^\mu}) \gg \min \left\{ 1, 2^{\frac{\mu}{2}} (C_3 2^\mu)^{-\frac{1}{2}} \right\} \sqrt{1 - \frac{M}{2^\mu}} \geq C_4 > 0. \quad (19)$$

Із (18) та (19) отримуємо шукану оцінку знизу

$$\lambda_M(B_{2,1}^\omega, L_q) \gg \omega(2^{-\mu})2^{\mu(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином, оцінку знизу, а разом з нею і теорему, доведено.

Наслідок 2.1. *Покладаючи в теоремі 2.1 $\theta = \infty$, отримаємо наступну оцінку*

$$\lambda_M(H_p^\omega, L_q) \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема 2.2. *Нехай $2 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ та умову (S_l). Тоді при $d = 1$ має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q) \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \quad (20)$$

Доведення. Оцінка зверху в (20) випливає з відповідної оцінки наближення у просторі $L_q(\pi_d)$ класів $B_{p,\theta}^\Omega$ функцій d змінних ($d \in \mathbb{N}$) за допомогою східчасто-гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f, x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f, x)$, де $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s)$ [2]:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_q \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Достатньо зауважити, що вимірність M області значень оператора S_{Q_n} має порядок $2^n n^{d-1}$.

Відповідна оцінка знизу в (20) випливає з теореми 2.1. Дійсно, внаслідок нерівності різних метрик (8) для $f \in B_{p,\theta}^\omega$, будемо мати

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,\theta}^\omega} &= \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-s}) 2^{s(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\theta} \|\delta_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} = \\ &= \left(\sum_s \omega_1^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} = \|f\|_{B_{2,\theta}^{\omega_1}}, \end{aligned} \quad (21)$$

де $\omega_1(t) = \omega(t)t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. Для $\omega_1(t)$ виконуються всі умови теореми 2.1 і тому, враховуючи (21), отримуємо

$$\begin{aligned}\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q) &\gg \lambda_M(B_{2,\theta}^{\omega_1}, L_q) \asymp \\ &\asymp \omega(M^{-1})M^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}M^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} = \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Наслідок 2.2. *Покладаючи в теоремі 2.2 $\theta = \infty$, отримуємо наступну оцінку*

$$\lambda_M(H_p^\omega, L_q) \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження 2.1. При $\omega(\tau) = \tau^r$ з відповідними обмеженнями на параметр r результати теорем 2.1 та 2.2 (для класів $B_{p,\theta}^r$) встановлені А.С. Романюком в [13].

Зауваження 2.2. Порівнюючи оцінки лінійних поперечників, які встановлено в теоремах 2.1 та 2.2, із відповідними оцінками колмогоровських поперечників [2], приходимо до висновку, що у випадку, коли $1 \leq \theta \leq \infty$, порядкові оцінки величин $\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q)$ відрізняються від відповідних порядкових оцінок величин $d_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q)$. А саме, якщо $1 < p \leq 2, p' < q < \infty$, а $\omega(t)$ задовольняє умови (S) із деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ і (S_l) , то має місце таке порядкове співвідношення

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q) \asymp M^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}} d_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q).$$

У випадку, коли $2 \leq p < q < \infty$, а $\omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \frac{1}{2}$ та умову (S_l) , має місце оцінка

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q) \asymp M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} d_M(B_{p,\theta}^\omega, L_q).$$

3. Оцінки величин $\lambda_M(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ при $p = 1, \infty$ і $1 < q < \infty$.

В даному пункті, встановимо точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$, $p = 1, \infty$, у просторі $L_q(\pi_d)$, $1 < q < \infty$. Попередньо зауважимо наступне: неважко переконатися, проводячи міркування, аналогічні до тих, які були використані у роботі [2],

що якщо $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ і (S_l) , то $B_{1,\theta}^\Omega \subset L_q(\pi_d)$, $1 < q < \infty$. Вкладення $B_{\infty,\theta}^\Omega \subset L_q(\pi_d)$ є очевидним, оскільки $B_{\infty,\theta}^\Omega \subset L_\infty(\pi_d) \subset L_q(\pi_d)$.

Має місце теорема.

Теорема 3.1. *Нехай $2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \dots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1$ та умову (S_l) , $l \geq 2$. Тоді для будь-яких натуральних M та n , які задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B_{1,\theta}^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}. \quad (22)$$

Доведення. Оцінка зверху в (22) встановлюється так само, як і оцінка зверху в теоремі 2.1 [20]. Оцінку знизу в (22) отримуємо з теорем 1.2 [20] на основі нерівності (7). Теорему доведено.

Наслідок 3.1. *Покладаючи в теоремі 3.1 $\theta = \infty$, отримаємо наступну оцінку*

$$\lambda_M(H_1^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Теорема 3.2. *Нехай $1 < q \leq 2$, $\theta \in [1, q]$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \dots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ та умову (S_l) . Тоді для будь-яких натуральних M та n , які задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B_{1,\theta}^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1 - \frac{1}{q})}. \quad (23)$$

Доведення. Оцінка зверху в (23) випливає з оцінки наближення класів $B_{1,\theta}^\Omega$ за допомогою східчасто-гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f, x)$, яка отримана в [21]:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B_{1,\theta}^\Omega)_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1 - \frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Тому при умові, що число n задовольняє співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, маємо

$$\lambda_M(B_{1,\theta}^\Omega, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B_{1,\theta}^\Omega)_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1 - \frac{1}{q})}.$$

Оцінка знизу в (23) впливає з результату теореми 1.1 [20] на основі нерівності (7). Теорему доведено.

Теорема 3.3. *Нехай $2 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \dots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$, а також умову (S_l) . Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце оцінка*

$$\lambda_M(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \quad (24)$$

Доведення. При встановленні оцінки зверху в (24) будемо використовувати співвідношення:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B_{q,\theta}^\Omega)_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \quad (25)$$

Відмітимо, що при $1 \leq \theta < \infty$ оцінка (25) була встановлена в роботі [2], а при $\theta = \infty$ — в роботі [3].

Оскільки $B_{\infty,\theta}^\Omega \subset B_{q,\theta}^\Omega$, $2 \leq q < \infty$, та враховуючи, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_M(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_q) &\leq \lambda_M(B_{q,\theta}^\Omega, L_q) \ll \\ &\ll \mathcal{E}_{Q_n}(B_{q,\theta}^\Omega)_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу в (24) одержуємо з теореми 1.3 [20] на основі нерівності (7). Теорему доведено.

Наслідок 3.2. *Покладаючи в теоремі 3.3 $\theta = \infty$, отримаємо наступну оцінку:*

$$\lambda_M(H_\infty^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

На завершення наведемо ще один результат, який стосується лінійного поперечника класу $B_{\infty,1}^\Omega$ в просторі L_∞ .

Теорема 3.4. *Нехай $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$, а також умову (S_l) . Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце оцінка*

$$\lambda_M(B_{\infty,1}^\Omega, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n}). \quad (26)$$

Доведення. Встановимо оцінку зверху в (26). За заданим M виберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, і для $f \in B_{\infty,1}^\Omega$ розглянемо наближаючий поліном

$$t(x) = \sum_{\|s\|_1 < n} A_s(f, x).$$

Тоді для $\|f - t\|_\infty$ отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} \|f - t\|_\infty &= \left\| \sum_{\|s\|_1 \geq n} A_s(f, x) \right\|_\infty \leq \sum_{\|s\|_1 \geq n} \|A_s(f, x)\|_\infty = \\ &= \sum_{\|s\|_1 \geq n} \omega^{-1}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(f, x)\|_\infty \omega(2^{-\|s\|_1}) \ll \\ &\ll \omega(2^{-n}) \sum_{\|s\|_1 \geq n} \omega^{-1}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(f, x)\|_\infty \ll \\ &\ll \omega(2^{-n}) \|f\|_{B_{\infty,1}^\Omega} \leq \omega(2^{-n}). \end{aligned}$$

Оцінка знизу випливає з відповідної оцінки колмогоровського поперечника $d_M(B_{\infty,1}^\Omega, L_\infty)$ [22]. Теорему доведено.

Зауваження 3.1. При $\omega(\tau) = \tau^r$ і відповідних обмеженнях на параметр r результати теорем 3.1 та 3.2, 3.4 (для класів $B_{p,\theta}^r$) встановлені в [11] та [12] відповідно.

Висловлюю щиро вдячність Романюку А.С. за надану можливість ознайомитися з роботою [13] до виходу її з друку та Романюку В.С. за цінні поради та зауваження, зроблені ним під час обговорення результатів.

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 — 522.
2. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. — 1997. — **219**. — С. 356 — 377.
3. Пустовойтов Н.Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**, №1. — Р. 35 — 48.

4. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1989.— **187**.— С. 143–161.
5. Стасюк С.А., Федунік О.В. Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692 – 704.
6. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук.— 1960. — **15**, № 3. — С. 81–120.
7. Глускин Е.Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. — 1983. — **120**, № 2. — С. 180–189.
8. Кашин Б.С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АрмССР. Матем. — 1980. — **15**, № 5. — С. 379–394.
9. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.— 1986.— **178**.— С. 1–112.
10. Галеев Э.М. Линейные поперечники классов Гельдера–Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 1996.— **59**, № 2. — С. 189–199.
11. Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 5. — С. 647 – 661.
12. Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн.— 2001. — **53**, № 6. — С. 820 – 829.
13. Романюк А.С. Поперечники и наилучшее приближение классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // В печати.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М.: Мир, 1965.— Т.1.— 615 с; Т.2.— 537 с.
15. Галеев Э.М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}_p^r$ и $\tilde{H}_p^r$ в пространстве $\tilde{L}_p$ // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— **49**, № 5. — С. 916–934.
16. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
17. Jakson D. Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**. — P. 889–906.
18. Федунік О.В. Лінійні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2006. — **58**, № 1. — С. 93–104.

19. Тихомиров В.М. Теория приближений // Итоги науки и техники. Современ. пробл. математики. Фунд. направления / ВИНТИ. — 1987.— **14**. — С. 103 – 260.
20. Конограй А.Ф. Поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних// Мат. студії. — 2008.— **29**, №2.— С. 192–206.
21. Федунік О.В. Оцінки апроксимативних характеристик класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 2. — С. 268 – 294.
22. Конограй А.Ф. Колмогоровські поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ в просторі L_∞ // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 4. — С. 181 – 197.