Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 79-91

УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима (Кам'янець-Поділ. нац. ун-т)

УМОВИ ХАРАКТЕРИЗАЦІЇ ТА ЄДИНОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ОПУКЛОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНАМИ ІНШИХ НЕПЕРЕРВНИХ КОМПАКТНОЗНАЧНИХ ОПУКЛОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Встановлено необхідні, достатні умови, умови єдиності та критерії екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного опуклозначного відображення множинами інших неперервних компактнозначних опуклозначних відображень.

Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C\left(S,X\right)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max \|g\left(s\right)\|$, $K\left(X\right)$ — сукупність непорожніх компактів простору X, $C\left(S,K\left(X\right)\right)$ — множина неперервних на S відносно метрики Хаусдорфа на $K\left(X\right)$ багатозначних відображень S в $K\left(X\right)$, $K_0\left(X\right)$ — сукупність всіх непорожніх опуклих компактів простору X , $C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$ — множина тих багатозначних відображень g із $C\left(S,K\left(X\right)\right)$, для яких $g\left(s\right) \in K_0\left(X\right)$, $s \in S$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$ множиною $V \subset C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(V\right) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} H\left(g\left(s\right),a\left(s\right)\right), \tag{1}$$

де $H\left(g(s),a(s)\right) = \max\left\{\max_{x\in g(s)} \min_{y\in a(s)} \|x-y\|, \max_{y\in a(s} \min_{x\in g(s)} \|x-y\|\right\}$ — хаусдорфова відстань між компактами $g\left(s\right)$ та $a\left(s\right)$, $s \in S$.

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha_a^*(V) = \max_{s \in S} H(g^*(s), a(s)),$$

то його будемо називати елементом найкращого наближення для відображення a у множині V або екстремальним елементом для величини (1).

Слід зазначити, що питання апроксимації багатозначних відображень у різних аспектах розглядались в багатьох працях. Більшість з цих праць присвячена питанням існування так званих неперервних селекцій, однозначних та простіших багатозначних ε-апроксимацій багатозначних відображень. Лише в небагатьох з них розглядаються окремі питання найкращої апроксимації багатозначних відображень.

Зокрема, у праці [1] досліджувалась задача найкращого наближення сегментних функцій відносно хаусдорфової метрики. В [2] розглянуто питання про існування у множині багатозначних поліномів фіксованого порядку найкращого рівномірного наближення неперервного багатозначного відображення сегмента $[0,1]$ у множину $K\vartheta\left(R^l\right)$ неперервних опуклих компактів простору R^l. В [3] встановлено теореми існування та характеризації найкращого рівномірного наближення багатозначного неперервного відображення компакта U простору R^m в $K\vartheta\left(R^l\right)$ сталими відображеннями компакту U в $K\vartheta\left(R^l\right)$. В [4] встановлено теореми існування, єдиності та характеризації екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного на сегменті $[0,1]$ сегментнозначного відображення множиною алгебраїчних поліномів n-го степеня. У працях [5–11] розглянуто питання існування, єдиності та характеризації екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення $a \in C(S, K(X))$ множиною $V \subset C(S, X)$ неперервних однозначних відображень, для цієї задачі отримано також співвідношення двоїстості та теорему "про очистку а для випадку, коли V є скінченновимірним чебишовським підпростором простору $C(S, X)$, побудовано збіжні чисельні методи її розв'язування.

В даній статті встановлено необхідні, достатні умови, умови єдиності та критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (1), які ідейно беруть свій початок у працях М.Г. Чеботарьова [12], А.М. Колмогорова [13], Г.С. Смірнова [14] та П.Л. Папіні [15]. Зокрема, у праці [12] М.Г. Чеботарьов у відповідній формі охарактеризивав елемент найменшого рівномірного відхилення в просторі алгебраїчних поліномів степеня, не вищого ніж n, від функції, неперервної на відрізку $[-1, 1]$.

У праці [13] А.М. Колмогоров встановив свій відомий критерій елемента найкращого поліноміального наближення комплекснозначної функції.

В [14, 15] було встановлено близькі за формою до критеріїв праць [12, 13] умови елемента найменшого відхилення абстрактної неперервної функції зі значеннями в комплексному банаховому просторі в опуклій множині, які дозволили також розглянути питання єдиності цього елемента.

Зазначимо, що результати праць [12–15] використовувались та узагальнювались у працях багатьма авторами на випадок найкращих у розумінні норми або деякого невід'ємного сублінійного функціоналу рівномірних апроксимацій дійснозначних, комплекснозначних та абстрактних функцій, заданих і неперервних на деякому компакті, підпросторами або опуклими множинами (див., наприклад, [16–22]). У працях [5–11] вони узагальнені на випадок задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Основна складність дослідження задачі відшукання величини (1) у порівнянні із дослідженнями згаданих вище задач полягає в тому, що у цій задачі не лише об'єкт апроксимації є багатозначним відображенням із $C(S, K_0(X))$, а й у якості апроксимуючої множини V виступає так звана Γ-множина неперервних компактнозначних опуклозначних відображень метричного простору $C(S, K_0(X))$, який не є лінійним, а отже, не є і лінійним нормованим простором.

Оскільки $C(S, X) \subset C(S, K_0(X))$, а опуклі множини є частковим випадком Γ-множин, то зрозуміло, що отримані у цій статті результати узагальнюють відповідні результати значної кількості згаданих вище праць.

Для будь-яких $g, h \in C(S, K_0(X))$ покладемо

$$\rho(g, h) = \max_{s \in S} H(g(s), h(s)).$$

Легко переконатися, що величина $\rho(g,h)$, $g,h \in C(S,K_0(X))$, задає метрику на множині $C(S,K_0(X))$.

Відповідний метричний простір будемо позначати через $(C(S,K_0(X)),\rho)$.

У подальшому будемо припускати, що у задачі відшукання величини (1) $a \notin \bar{V}$, де $\bar{V}$ — замикання множини V у просторі $(C(S,K_0(X)),\rho)$.

Позначимо через X^* — простір , спряжений з X, а через B^* — одиничну кулю з цього простору:

$$B^* = \{f:\ f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\}.$$

Оскільки для будь-яких $A,B \in K_0(X)$ $H(A,B) = \max\limits_{f\in B^*}\left|\max\limits_{x\in A}\mathrm{Re}f(x) - \max\limits_{x\in B}\mathrm{Re}f(x)\right|$ (див., наприклад, [23, с.9]), то для будь-яких $g,h \in C(S,K_0(X))$ має місце рівність

$$\rho(g,h) = \max_{s\in S}\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)}\mathrm{Re}f(x) - \max_{y\in h(s)}\mathrm{Re}f(y)\right|.$$

Далі будемо також використовувати деякі властивості алгебраїчних операцій над багатозначними відображеннями.

Нехай $g,h \in C(S,K(X))$, $\lambda \in R$.

Як відомо, сумою багатозначних відображень g і h називається відображення $g+h$ таке, що $(g+h)(s) = g(s)+h(s)$ для всіх $s \in S$, а добутком числа $\lambda \in R$ на відображення g називається відображення λg таке, що $(\lambda g)(s) = \lambda g(s)$ для всіх $s \in S$.

При $\lambda = -1$ замість $(-1)g$ пишуть $-g$.

Зрозуміло, що операції додавання відображень з множин $C(S,K(X))$ та $C(S,K_0(X))$ і множення їх на дійсні числа не виводять з цих множин.

З урахуванням зазначеного вище та властивостей алгебраїчних операцій над множинами (див., наприклад, [2]) легко переконатися, що для довільних $\lambda,\beta \in R$, $g,h,p \in C(S,K(X))$ мають місце такі співвідношення:

1) $g+h = h+g$;

2) $g+(h+p) = (h+g)+p$;

3) $g+0=g$, де 0 означає відображення , яке кожному $s \in S$ ставить у відповідність нульовий елемент простору X;

4) $\lambda(\beta g)=(\lambda\beta)g$;

5) $1 \cdot g = g$;

6) $0 \cdot g = 0$;

7) $\alpha(g+h)=\alpha g+\alpha h$;

8) $(\alpha+\beta)g(s) \subset \alpha g(s)+\beta g(s)$ для всіх $s \in S$;

9) $(\alpha+\beta)g=\alpha g+\beta g$, якщо $g \in C(S, K_0(X))$ і $\lambda \cdot \beta \geqslant 0$.

Означення 1. *Множину $V \subset C(S, K_0(X))$ будемо називати* Г-*множиною відносно $g^* \in V$, якщо для всіх $g \in V$ та $\varepsilon > 0$ існує $\alpha \in (0,\varepsilon)$ та елементи $g_a \in V$ такі, що $g^*+\alpha g = g_\alpha + \alpha g^*$.*

Зрозуміло, що коли множина V є Г-множиною відносно g^*, то вона є й Г*-множиною відносно g^* у розумінні означення 11.2 [23, с.46].

Твердження 1. *Будь-яка множина $V \subset C(S, K_0(X))$, зіркова відносно $g^* \in V$, є* Г-*множиною відносно g^*.*

Доведення. Оскільки V є зірковою відносно $g^* \in V$ множиною, то для будь-якого $g \in V$ та $\alpha \in [0,1]$

$$g_\alpha = (1-\alpha)g^* + \alpha g \in V.$$

Згідно з властивістю 9) алгебраїчних операцій над багатозначними відображеннями

$$(1-\alpha)g^* + \alpha g^* = g^*, \quad \alpha \in [0,1].$$

Звідси

$$g^* + \alpha g = (1-\alpha)g^* + \alpha g^* + \alpha g = g_\alpha + \alpha g^*, \alpha \in [0,1].$$

Відповідно до означення 1 V є Г-множиною відносно g^*. Твердження доведено.

Наслідок 1. *Опукла множина $V \subset C(S, K_0(X))$ є* Г-*множиною відносно будь-якого її елемента.*

Справедливість наслідку випливає з того, що опукла множина є зірковою відносно кожного свого елемента.

Наслідок 2. *Множина сталих багатозначних відображень $V \subset C(S, K_0(X))$ є* Г-*множиною відносно будь-якого її елемента.*

Справедливість наслідку 2 випливає з наслідку 1, оскільки множина $V \subset C(S, K_0(X))$ сталих багатозначних відображень є опуклою множиною $C(S, K_0(X))$.

Теорема 1. *Нехай V — довільна множина $C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$. Для того щоб елемент g^* був екстремальним для величини (1), необхідно, щоб для кожного $g \in V$ та $s_g \in S, f_g \in B^*$ таких, що*

$$\left| \max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) \right| = H(g(s_g), a(s_g)) = \rho(g, a), \quad (2)$$

мало місце співвідношення

$$\mathrm{sign} \left(\max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) \right) \times$$
$$\times \left(\max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{x \in g^*(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) \right) \geqslant 0. \quad (3)$$

Доведення. Нехай g^* є екстремальним елементом для величини (1), g — довільний елемент множини V, елементи $s_g \in S, f_g \in B^*$ такі, що має місце (2).

Тоді

$$\mathrm{sign}\big(\max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) \big) \big(\max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{x \in g^*(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) \big) =$$
$$= \mathrm{sign} \left(\max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) \right) \times$$
$$\times \left(\max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) + \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) - \max_{x \in g^*(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) \right) \geqslant$$
$$\geq \left| \max_{x \in g(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) \right| - \left| \max_{x \in g^*(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y \in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y) \right| \geqslant$$
$$> \rho(g, a) - \max_{s \in S} \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g^*(s)} \mathrm{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \mathrm{Re} f(y) \right| =$$
$$= \rho(g, a) - \rho(g^*, a) \geqslant 0,$$

оскільки $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $V \subset C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$, V є Γ-множиною відносно g^* і для кожного $g \in V$ існують $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, для яких виконуються умови (2), (3). Тоді g^* є екстремальним елементом для величини (1).*

Доведення. Нехай $V \subset C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$, V є Γ-множиною відносно g^* і для кожного $g \in V$ існують $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що для них виконуються умови (2), (3). Переконаємося, що g^* є екстремальним елементом для величини (1). Припустимо супротивне. Тоді існує $\bar{g} \in V$ таке, що

$$\rho(\bar{g}, a) = \max_{s \in S} H(\bar{g}(s), a(s)) < \max_{s \in S} H(g^*(s), a(s)) = \rho(g^*, a). \quad (4)$$

Оскільки V є Γ-множиною відносно g^*, то для довільної послідовність $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, ..., \lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$, існує послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in (0, \varepsilon_k)$, та елемент $g_k \in V$, $k = 1, 2, ...$, такі, що

$$g^* + \alpha_k \bar{g} = g_k + \alpha_k g^*, \quad k = 1, 2, ... \quad (5)$$

І оскільки (див., наприклад, твердження 4.2 [23, с.12])

$$\rho(g^* + \alpha_k \bar{g}, g^*) = \rho(g^* + \alpha_k \bar{g}, g^* + \alpha_k \cdot 0) \leq$$

$$\leqslant \rho(g^*, g^*) + \alpha_k \rho(\bar{g}, 0) = \alpha_k \rho(\bar{g}, 0),$$

де 0: $s \in S \to 0 \in X$,та $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k = 0$, то має місце рівність

$$\lim_{k \to \infty} (g^* + \alpha_k \bar{g}) = g^*.$$

З урахуванням (5) звідси випливає, що

$$\lim_{k \to \infty} (g_k + \alpha_k g^*) = g^*.$$

Маємо далі (див., наприклад, твердження 7.1[23, с.24]), що

$$|\rho(g_k, g^*) - \rho(\alpha_k g^*, 0)| =$$

$$= \left| \max_{s \in S} H(g_k(s), g^*(s)) - \max_{s \in S} H(\alpha_k g^*(s), 0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s\in S} \left| H\left(g_k\left(s\right), g^*\left(s\right)\right) - H\left(\alpha_k g^*\left(s\right), 0\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s\in S} H\left(g_k\left(s\right) + \alpha_k g^*\left(s\right), g^*\left(s\right)\right) = \rho\left(g_k + \alpha_k g^*, g^*\right).$$

Тому

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(g_k, g^*\right) = \lim_{k\to\infty} \rho\left(\alpha_k g^*, 0\right) = \rho\left(g^*, 0\right) \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0.$$

Звідси та з нерівності (4) можна зробити висновок, що існує номер k, для якого $0 < \alpha_k < 1$ і

$$\rho\left(\bar{g}, a\right) < \rho\left(g_k, a\right). \tag{6}$$

З урахуванням нерівності (6) одержимо, що для довільних $s_k \in S$, $f_k \in B^*$ таких, що

$$\rho\left(g_k, a\right) = H\left(g_k\left(s_k\right), a\left(s_k\right)\right) = \left| \max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right) - \max_{y\in a(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(y\right)\right|$$

мають місце співвідношення

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right) - \max_{y\in a(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(y\right)\right) \times$$

$$\times \left(\max_{x\in \bar{g}(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right) - \max_{y\in a(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(y\right)\right) <$$

$$< \operatorname{sign}\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right) - \max_{y\in a(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(y\right)\right) \times$$

$$\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right) - \max_{y\in a(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(y\right)\right).$$

Звідси

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right) - \max_{y\in a(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(y\right)\right) \times$$

$$\times \left(\max_{x\in \bar{g}(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right) - \max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k\left(x\right)\right) < 0. \tag{7}$$

Відповідно до (5)

$$\max_{x\in g^*(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) + \alpha_k \max_{x\in \bar{g}(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) = \max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) + \alpha_k \max_{x\in g^*(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x).$$

Тому

$$\max_{x\in \bar{g}(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) - \max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) = \frac{1}{\alpha_k}\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) - \max_{x\in g^*(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x)\right) -$$

$$-\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) - \max_{x\in g^*(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1\right)\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) - \max_{x\in g^*(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x)\right).$$

З урахуванням (7) звідси одержимо, що

$$\mathrm{sign}\left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) - \max_{y\in a(s_k)} \mathrm{Re} f_k(y)\right) \times$$

$$\times \left(\max_{x\in g_k(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x) - \max_{x\in g^*(s_k)} \mathrm{Re} f_k(x)\right) < 0,$$

що суперечить умові теореми. Тому g^* є екстремальним елементом для величини (1). Теорему доведено.

Теорема 3. *Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно, а у випадку, коли множина V є Γ-множиною відносно g^*, і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$,$f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення (2), (3).*

Справедливість необхідності умов теореми для екстремальності елемента $g^* \in V$ випливає з теореми 1, а справедливість їх достатності встановлено у теоремі 2.

Теорема 4. *Нехай $V \subset C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$, множина V є Γ-множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною.*

Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що

$$\left|\max_{x\in g^*(s_g)} \mathrm{Re} f_g(x) - \max_{y\in a(s_g)} \mathrm{Re} f_g(y)\right| = H(g^*(s_g), a(s_g)) = \rho(g^*, a),$$

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$
$$\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)\right)\geqslant 0.$$

Справедливість цієї теореми випливає з теореми 11.1 [23, с.48], якщо врахувати, що Γ-множина відносно точки g^* є також Γ^*-множиною відносно точки g^*.

Теорема 5. *Нехай $V\subset C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, $g^*\in V$. Для того щоб елемент $g^*\in V$ був єдиним екстремальним елементом для величини (1), необхідно, а у випадку, коли V є Γ-множиною відносно кожного свого елемента, в тому числі опуклою множиною, і достатньо, щоб для кожного $g\in V$, $g\neq g^*$, та будь-яких $s_g\in S$,$f_g\in B^*$ таких, що*

$$\left|\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right|=H\left(g\left(s_g\right),a\left(s_g\right)\right)=\rho\left(g,a\right),\quad(8)$$

виконувались строга нерівність

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$
$$\times\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)\right)>0.\quad(9)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай g^* є єдиним екстремальним елементом для величини (1). Припустимо, що для деякого $g\in V$, $g\neq g^*$, існують такі елементи $s_g\in S$, $f_g\in B^*$, що має місце рівність (8), але

$$\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$
$$\times\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)\right)\leq 0.$$

З урахуванням цієї нерівності одержимо, що

$$\rho\left(g,a\right)=\operatorname{sign}\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$

$$\times\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)=$$

$$=\mathrm{sign}\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$

$$\times\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)\right)+$$

$$+\mathrm{sign}\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$

$$\times\left(\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{sign}\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$

$$\times\left(\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\leqslant\rho\left(g^*,a\right).$$

Звідси випливає, що g, $g\neq g^*$, також є екстремальним елементом для величини (1), що суперечить умові теореми про єдиність екстремального елемента.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $g^*\in V$, V є Г-множиною відносно кожного свого елемента і для $g\in V$, $g\neq g^*$, та для будь-яких $s_g\in S$,$f_g\in B^*$, що задовольняють рівність (8), має місце нерівність (9).

З теореми 2 випливає, що $g^*\in V$ є екстремальним елементом для величини (1). Переконаємося, що він є єдиним екстремальним елементом для цієї величини.

Нехай g, де $g\in V$, $g\neq g^*$, також є екстремальним елементом для величини (1).

Згідно з теоремою 4 існують елементи $s_g\in S$,$f_g\in B^*$ такі, для яких виконуються умова (8), і

$$\mathrm{sign}\left(\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{y\in a(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(y\right)\right)\times$$

$$\times\left(\max_{x\in g^*(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)-\max_{x\in g(s_g)}\mathrm{Re}f_g\left(x\right)\right)\geqslant 0,$$

що суперечить (9).

Тому g^* є єдиним екстремальним елементом для величини (1).

Єдиність екстремального елемента у випадку, коли V є опуклою множиною, випливає з того, що згідно з наслідком 1 опукла множина є Г-множиною відносно кожного свого елемента.

Теорему доведено.

1. *Сендов Б.* Хаусдорфовы приближения. — София: БАН, 1979. — 372 с.
2. *Никольский М.С.* Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений // Докл.АН СССР. — 1989. — 308, № 5.—С. 1047–1050.
3. *Никольский М.С.* Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 1990. — № 1. — С. 76–80.
4. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. — №2. — С. 13–15.
5. *Гудима У.В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, №12. — С.1601–1619.
6. *Гнатюк Ю.В., Гудима У.В.* Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень // Доп. НАН України. — 2005. — №6. — С.19–23.
7. *Гнатюк В.О., Гнатюк Ю.В., Гудима У.В.* Модифікація методу Ремеза на випадок апроксимації компактнозначного відображення // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2005. — №3. — С.239–244.
8. *Гнатюк Ю.В., Гудима У.В.* Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2005. — №3. — С.245–250.
9. *Гудима У.В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором// Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2005. — №3. — С.262–267.
10. *Гудима У.В., Гнатюк Ю.В., Гнатюк В.О.* Про єдиність екстремального елемента та чебишовський альтернанс для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т.2, №2. — С. 106–116.
11. *Гудима У.В., Гнатюк Ю.В.* Умови екстремальності елемента для величини найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т.2, №2. — С. 93–105.

12. *Чеботарев Н.Г.* Об одном общем критерии минимакса // Доклады АН СССР. — 1943. — 39, вып. 1. — С.373–376.

13. *Колмогоров А.Н.* Замечание по поводу многочленов П.Л.Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции //Успехи мат. наук. — 1948. — 3, вып. 1(23) — С.216–221.

14. *Смирнов Г.С.* О критерии элемента наилучшего приближения абстрактной функции со значениями в банаховом пространстве. — Киев, 1973. — 20с. — (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 73-8).

15. *Papini P.L.* Approximation and norm derivatives in real normed spaces// Resultate Math. — 1982. — №5 — P.81–94.

16. *Зуховицкий С.И., Крейн М.Г.* Замечание об одном возможном обобщении теоремы А.Хаара и А.Н. Колмогорова //Успехи мат. наук. — 1950. — 5, вып. 1(35). — С.217–229.

17. *Зуховицкий С.И.. Стечкин С.Б.* О приближении абстрактных функций // Успехи мат. наук. — 1957. — 12,вып. 1(73). — С.187–191.

18. *Singer I.* Asupra unicitatii elementului de cea mei buna aproximatie in spatii Banach oarecare// Studii si cercetari mat. Acad. RPR. — 1957. — 8, №1-2 — P.235–244.

19. *Никольский В.Н.* Наилучшее приближение элементами выпуклых множеств в линейных нормированных пространствах// Ученые зап. Калининск. гос. пед. ин-та. — 1963. — 29. — С.85–119.

20. *Гаркави А.Л.* О критерии элемента наилучшего приближения// Сибирск. мат. журн. — 1965. — 5, №2. — С.472–476.

21. *Смирнов Г.С.* Про одну характеристику елемента найкращого наближення абстрактної функції із значеннями в банаховому просторі// Вісник Київ. ун-ту. Серія: Математика. Механіка. — 1975. — № 17. — С. 134–138.

22. *Покровский А.В.*О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций. — Киев, 2005. — 48 с. — (Препр./ НАН Украины. Ин-т математики; 2005.5).

23. *Гнатюк Ю.В., Гнатюк В.О., Гудима У.В.*Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного опуклозначного відображення множинами інших неперервних компактнозначних опуклозначних відображень. — Кам'янець-Подільський, 2008. — 54с. — (Препр./ Кам'янець-Подільський національний університет; 2008.1).