Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 71-78

УДК 517.5

С. Б. Гембарська, К. М. Жигалло (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА НА КЛАСАХ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВУ ЛІПШИЦЯ*

Встановлено оцінки для точних верхніх меж відхилень бігармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класу Ліпшиця порядку α для всіх $0 < \alpha \leq 1$.

Нехай $f(x)$ — 2π-періодична сумовна функція ($f \in L$),

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— її ряд Фур'є, a_0, a_k і b_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — її коефіцієнти Фур'є.

Позначимо через $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ множину функцій натурального аргументу, що залежить від дійсного параметра $\delta \in R$, який змінюється на деякій множині $E_\Lambda \subseteq R$, $\lambda_\delta(0) = 1$, $\forall \delta \in E_\Lambda$. За допомогою множини Λ кожній функції $f(x)$ поставимо у відповідність ряд

$$\frac{a_0}{2}\lambda_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\delta(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \;\; \delta \in E_\Lambda.$$

Якщо цей ряд при кожному $\delta \in E_\Lambda$ є рядом Фур'є деякої неперервної функції, то цю функцію будемо позначати через $U_\delta(f; x; \Lambda)$. Кажуть, що множина Λ визначає конкретний метод (Λ-метод) підсумовування рядів Фур'є.

У випадку, коли $\lambda_\delta(k) = e^{-\frac{k}{\delta}}$, $k = 0, 1, 2, ...$, $\delta > 0$, функцію $U_\delta(f; x; \Lambda)$ називають інтегралом Пуассона (див., наприклад, [1, с. 161]). Нескладно показати, що його можна записати у вигляді

$$P_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t + x)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\Big\}dt, \quad \delta > 0.$$

*Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект 25.1/043).

Якщо ж $\lambda_\delta(k)=\left[1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right]e^{-\frac{k}{\delta}}$, $k=0,1,2,...,\delta>0$, функцію $U_\delta(f;x;\Lambda)$ називають бігармонійним інтегралом Пуассона (див., наприклад, [2] або [3]) і позначають $B_\delta(f;x)$:

$$B_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)K_\delta(t)dt,$$

де $K_\delta(t)$ — бігармонійне ядро Пуассона вигляду

$$K_\delta(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt.$$

Нехай, далі, C — простір 2π-періодичних неперервних функцій з нормою $\|f\|_C=\max\limits_t|f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій з нормою $\|f\|_L=\|f\|_1=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$.

Метою роботи є дослідження поведінки величини

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha;B_\delta\right)_C=\sup_{f\in\mathrm{Lip}\,\alpha}\|B_\delta(f;\cdot)-f(\cdot)\|_C\,,\ \delta>0, \tag{1}$$

де $\mathrm{Lip}\,\alpha$ — клас Ліпшиця (Гельдера) порядку α (див., напр., [4, с.15]), $0<\alpha\le1$, 2π–періодичних функцій $f(x)$, які задовольняють умову

$$|f(x+t)-f(x)|\le|t|^\alpha,\ x,t\in[0,2\pi]\,. \tag{2}$$

Зазначимо, що апроксимативні властивості методу наближення бігармонійними інтегралами Пуассона на класах Ліпшиця порядку 1 досліджувались у роботах С. Канієва [5], P. Pych [3]. Ними встановлені асимптотичні рівності при $\delta\to\infty$ для величини $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1;B_\delta\right)_C$. В роботі Л. П. Фалалєєва [6] отримано повний асимптотичний розклад для точних верхніх меж відхилень функцій із класу Lip 1 від їх бігармонійних інтегралів Пуассона за степенями $1-\rho$, $\rho\to1-0$, $\rho=e^{-\frac{1}{\delta}}$. Пізніше К. М. Жигалло та Ю. І. Харкевичем (див. [12]) отримано повний асимптотичний розклад за степенями $1-\rho$, $\rho\to1-0$, для величини $\mathcal{E}\left(W^r_\infty;B_\rho\right)_C$, $r>1$.

Перші результати, пов'язані з дослідженням величини $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1;P_\delta\right)_C$ для інтеграла Пуассона, отримав І. П. Натансон. Зокрема, в роботі [8] він встановив таку асимптотичну рівність:

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1;P_\delta\right)_C=\frac{2}{\pi}\frac{\ln\delta}{\delta}+O\left(\frac{1}{\delta}\right),\ \delta\to\infty. \tag{3}$$

О. П. Тіман ([9]) одержав точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; P_\delta\right)_C$. В роботі В. О. Баскакова [10] отримано повний асимптотичний розклад величини $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha; P_\delta\right)_C$ за степенями $\frac{1}{\delta}$. Апроксимативні властивості інтеграла Пуассона досліджувалися також Л. І. Баусовим (див.[11]), К. М. Жигалло та Ю. І. Харкевичем (див. [12,13]).

Точні значення для величини $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; B_\delta\right)_C$ знайдено у роботі [14] авторів. Метою даної роботи є отримання оцінок для точних верхніх меж відхилення бігармонійних інтегралів Пуассона на класах Ліпшиця порядку α при всіх $0 < \alpha \le 1$.

Справедливими є наступні твердження.

Теорема. *При $\delta > 0$, $0 < \alpha \le 1$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}(\mathrm{Lip}\,\alpha; B_\delta)_C = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}\int\limits_0^{\pi\delta}\frac{u^\alpha}{1+u^2}du + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha-1}\int\limits_0^{\pi\delta}\frac{u^\alpha\left(1-u^2\right)}{\left(1+u^2\right)^2}du +$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_\pi^\infty\frac{[t^\alpha]_{2\pi}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}dt + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_\pi^\infty[t^\alpha]_{2\pi}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}dt. \qquad (4)$$

де $[t^\alpha]_{2\pi}$ — парне 2π-періодичне продовження функції $f(t) = t^\alpha$, $0 \le t \le \pi$, на всю числову вісь.

Доведення. Оскільки $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_\delta(t)dt = 1$, то

$$B_\delta(f;x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(t+x) - f(x)\right)K_\delta(t)dt.$$

Звідси отримуємо таку оцінку:

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha; B_\delta\right)_C \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|^\alpha K_\delta(t)dt.$$

Ця нерівність перетвориться в рівність, якщо врахувати, що в класі $\mathrm{Lip}\,\alpha$ існує функція періоду 2π, яка дорівнює $|t|^\alpha$ на відрізку $[-\pi, \pi]$, а також, що має місце таке співвідношення

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha; B_\delta\right)_C = \sup_{f\in\mathrm{Lip}\,\alpha}\left\|B_\delta(f;0) - f(0)\right\|_C.$$

Отже,

$$\mathcal{E}\left(\operatorname{Lip}\alpha;B_\delta\right)_C=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|^\alpha K_\delta(t)dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}t^\alpha K_\delta(t)dt. \qquad (5)$$

Нехай $\Phi_\delta(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\varphi_\delta(z)\cos zudz-$ косинус-перетворення Фур'є функції

$$\varphi_\delta(z)=\left(1+\tfrac{z}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{z}{\delta}}\cos zt=e^{-\frac{z}{\delta}}\cos zt+\tfrac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos zt=$$
$$=\varphi_{\delta_1}(z)+\varphi_{\delta_2}(z).$$

Відомо [10], що косинус-перетворення Фур'є функції $\varphi_{\delta_1}(z)$ має вигляд

$$\Phi_{\delta_1}(u)=\frac{\frac{1}{\delta}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t-u)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t+u)^2}\right]. \qquad (6)$$

Знайдемо косинус-перетворення функції $\varphi_{\delta_2}(z)$. Маємо

$$\Phi_{\delta_2}(u)=\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u-t)dz\right)=\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(P_1+P_2\right). \qquad (7)$$

Двічі інтегруючи частинами, неважко переконатися в тому, що

$$P_1=\int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz=$$
$$=\frac{1}{u+t}\left(-\frac{1}{u+t}+\frac{2}{\delta}\frac{1}{u+t}\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2+\left(\frac{1}{\delta}\right)^2}-\left(\frac{1}{\delta}\right)^2\frac{1}{u+t}P_1\right).$$

Звідси отримуємо, що

$$P_1=\frac{\frac{1}{\delta^2}-(u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u+t)^2\right)^2}. \qquad (8)$$

Тоді інтеграл $P_2 = \int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u-t)dz$ можна записати у вигляді:

$$P_2 = \int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u-t)dz = \frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - (u-t)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (u-t)^2\right)^2}. \tag{9}$$

Поєднання співвідношень (7—9) із (6) дозволяє записати, що

$$\Phi_\delta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t-u)^2} + \frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t+u)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - (t+u)^2}{\left((\frac{1}{\delta})^2 + (t+u)^2\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - (t-u)^2}{\left((\frac{1}{\delta})^2 + (t-u)^2\right)^2}\right)\right].$$

Застосовуючи формулу підсумовування Пуассона (див., напр., [15, с. 82]), отримуємо, що

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi}\Big(\frac{1}{2}\Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^\infty \Phi_\delta(2\pi k)\Big). \tag{10}$$

Враховуючи співвідношення (10), бігармонійний інтеграл Пуассона подамо у вигляді

$$B_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2} + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t-2\pi k)^2} + \frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t+2\pi k)^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - (t+2\pi k)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t+2\pi k)^2\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - (t-2\pi k)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t-2\pi k)^2\right)^2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(t+x)]_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2} + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2}\right)dt, \tag{11}$$

де $[f(t+x)]_{2\pi}$—парне 2π-періодичне продовження функції $f(t+x)$ із $[-\pi,\pi]$ на всю числову вісь.

Беручи до уваги (11) та рівність (5), одержимо

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha; B_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty [t^\alpha]_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi\delta}\int\limits_0^\pi \frac{t^\alpha}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}dt + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_0^\pi t^\alpha \frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_\pi^\infty \frac{[t^\alpha]_{2\pi}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}dt + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_\pi^\infty [t^\alpha]_{2\pi} \frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}dt. \qquad (12)$$

Виконавши деякі перетворення у першому та другому інтегралах із співвідношення (12), отримаємо (4). Теорему доведено.

Наслідок 1. *При* $\delta > 0$ *має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; B_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi\delta}\left(\ln\delta + \ln\pi + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{(\pi\delta)^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\left(1-\frac{1}{1+(\pi\delta)^2}-\frac{1}{\pi\delta}\left(\ln\delta+\ln\pi+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{(\pi\delta)^2}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_\pi^\infty \frac{[t]_{2\pi}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}dt + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_\pi^\infty [t]_{2\pi} \frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}dt. \qquad (13)$$

Із співвідношення $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; B_\delta\right)_C = \mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; B_\delta\right)_1$ (див. [16, с. 452]), де $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha; B_\delta\right)_1 = \sup\limits_{f\in \mathrm{Lip}\,\alpha}\|B_\delta(f;x)-f(x)\|_1$, випливає, що оцінка верхньої межі відхилення функцій з класу Lip 1 від їх бігармонійних інтегралів Пуассона в інтегральній метриці рівна правій частині рівності (13).

Із співвідношень (4) та (13) випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *При $\delta \to \infty$, $0 < \alpha < 1$, мають місце асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha; B_\delta\right)_C = \frac{\pi - \alpha}{\pi \cos\frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + O\left(\frac{1}{\delta^{1+\alpha}}\right),$$

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,\alpha; B_\delta\right)_C = \frac{\pi - \alpha}{\pi \cos\frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{\alpha}{\pi \cos\frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$$

і т.д., а при $\delta \to \infty$, $\alpha = 1$, — такі:

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; B_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi\delta} + O\left(\frac{\ln\delta}{\delta^2}\right), \tag{14}$$

$$\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; B_\delta\right)_C = \tfrac{2}{\pi\delta} - \tfrac{4\ln\delta}{\pi\delta^2} + O\left(\tfrac{1}{\delta^2}\right)$$

і т. д.

Зауважимо, що співвідношення (14) раніше було отримано у роботі P. Pych (див. [3]). Порівнюючи оцінку (3) з оцінкою (14), робимо висновок про поведінку величин $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; B_\delta\right)_C$ та $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; P_\delta\right)_C$, а саме, при $\delta \to \infty$ оцінка головного доданку величини $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; P_\delta\right)_C$ є на порядок вищою, ніж відповідна оцінка величини $\mathcal{E}\left(\mathrm{Lip}\,1; P_\delta\right)_C$.

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
2. *Петров В.А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. — 1967. — **7**, № 1. — С. 137–142.
3. *Pych P.* 5. On biharmonic function in unit disc // Ann. pol. math. — 1968. — **20**, № 3. — P. 203–213.
4. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.
5. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. — 1963. — **153**, № 5. — С. 995–998.
6. *Фалалеєв Л.П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Материалы Всесоюзного симпозиума. — Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. — С. 163–167.
7. *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 9. — С. 1213–1219.

8. *Натансон И.П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, № 1. — С. 11–14.

9. *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **74**, № 1. — С. 17–20.

10. *Баскаков В.А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона. — Мат. заметки. — 1975. —**17**, №2. — С. 169–180.

11. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I // Изв. вузов. Математика. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15–31.

12. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 1. — С. 43–52.

13. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх інтегралами Пуассона // Доп. НАН України. — 2002. — № 5. — С. 18–23.

14. *Гембарська С.Б., Жигалло К.М.* Про наближення функцій класу Гельдера їх бігармонійними інтегралами Пуассона в рівномірній та інтегральній метриках // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **4**, №1. — С. 37—48.

15. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 460 с.

16. *Каніев С.* Точна оцінка відхилення в середньому бігармонічних в крузі функцій від їх граничних значень // Доповіді АН УРСР. — 1964. — № 5. — С. 451–454.