Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 66-70

УДК 517.5

Ю. И. Волков
(Кировоград. гос. пед. ун-т им. В.Винниченка, Кировоград)

ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА B С ЗАДАННОЙ КОВАРИАЦИЕЙ

Найдено семейство функций, которые могут быть ковариациями линейных положительных операторов типа **B**, *приводятся способы построения таких операторов и примеры.*

Определение и свойства линейных положительных операторов (л.п.о.) $L_n(f;x)$ типа **B** изложены в работах 1 и 2. Определяющее свойство этих операторов (в одномерном случае) заключается в том, что они удовлетворяют соотношению:

$$\frac{v(x)}{n}\frac{d}{dx}L_n(f(\cdot);x) = L_n((\cdot - x)f(\cdot);x), x \in X,$$

где $v(x) := L_n(f(\cdot - x)^2; x)$ — главная характеристика операторов $L_n(f;x)$, которая называется ковариационной характеристикой или просто ковариацией.

Например, для многочленов Бернштейна $v(x) = x(1-x)$, для операторов Баскакова $v(x) = x(1+x)$, для операторов Миракьяна–Саса $v(x) = x$. Для этих операторов ковариация является многочленом степени не выше чем 2; все такие операторы были изучены в работе [3] (в этой статье операторы типа **B** называются операторами экспоненциального типа), а в статье [4] описаны все виды операторов, для которых ковариация является многочленом третьей степени, и все виды операторов, для которых ковариация является степенной функцией.

Естественно возникает задача о нахождении операторов с заранее заданной ковариацией. В настоящей работе найдено более общее семейство функций, которые могут быть ковариациями л.п.о. типа **B**, приводятся способы построения таких операторов и примеры.

Для эффективного построения л.п.о. типа **B** применяются степенные ряды с неотрицательными коэффициентами (см. [4]). Далее пользуемся обозначениями из статьи [4].

Теорема. *Пусть* $v(x) = x(1 + xu(x))$, *где*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, a_k \geq 0, 0 < x < R,$$

R *— радиус сходимости ряда* $u(x)$. *Тогда существуют л.п.о. типа* **B**, *для которых ковариация равна* $v(x)$.

Доказательство. Определим функции:

$$s(x) := x \exp\Big(-\int\limits_0^x \frac{u(t)dt}{1 + tu(t)}\Big), b(x) := \exp\Big(\int\limits_0^x \frac{dt}{1 + tu(t)}\Big), \quad 0 \leq x < R.$$

Эти функции аналитические, кроме того, функция $s(x)$ на промежутке $[0, R)$ имеет обратную, которую обозначим через s^{-1}. Далее разложим функцию $b(s^{-1}(y))$ в ряд по степеям y, используя ряд Лагранжа. Получим

$$b(s^{-1}(y)) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{1,m} y^m, c_{1,m} = \frac{1}{m!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big(b'(z) \Big(\frac{z}{s(z)}\Big)^m\Big)_{z=0},$$

$$m = 1, 2, \ldots .$$

Докажем, что коэффициенты $c_{1,m}$ являются неотрицательными. Для этого введем вспомогательную функцию

$$g(z) := b'(z) \Big(\frac{z}{s(z)}\Big)^r = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,r} z^k, r > 0, b_{0,r} = 1.$$

Найдем рекуррентное соотношение для коэффициентов $b_{k,r}$. Из определения функции $g(z)$ следует

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1 + ru(z)}{1 + zu(z)} - \frac{u(z) + zu(z)}{1 + zu(z)};$$

из чего вытекает

$$g'(z)(1 + zu(z)) = (1 + (r - 1)u(z) - zu'(z))g(z),$$

и далее,

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} k b_{k,r} z^{k-1}\Big)\Big(1+\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}\Big)=\Big(1+\sum_{k=0}^{\infty}(r-k-1)a_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_{k,r} z^k\Big).$$

Приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях z слева и справа в последнем соотношении, получим

$$kb_{k,r} = (1+(r-k)a_0)b_{k-1,r} + (r-k)a_1 b_{k-2,r} + \cdots + (r-k)a_{k-1}b_{0,r}.$$

Полагая $r = m$, последовательно находим $b_{1,m}, b_{2,m}, \ldots, b_{m-1,m}$. Тогда $c_{1,m} = b_{m-1,m}/m$, и значит, эти коэффициенты будут неотрицательными. А отсюда следует, что коэффициенты

$$c_{n,0} = 1,\ c_{n,m} = \frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big(nb'(z)(b(z)^{n-1}\Big(\frac{z}{s(z)}\Big)^m\Big)\Big|_{z=0},\ m = 1, 2, \ldots,$$

разложения в ряд функции $(b(s^{-1}(y)))^n, n \in \mathbf{N}$, тоже будут неотрицательными, в частности,

$$c_{n,1} = n, c_{n,2} = \frac{1}{2}n(n+a_0), c_{n,3} = \frac{1}{6}n((n+a_0)(n+2a_0)+a_1),$$

$$c_{n,4} = \frac{1}{24}n((n+a_0)(n+2a_0)(n+3a_0)+4na_1+8a_0a_1+2a_2),$$

$$c_{n,5} = \frac{1}{120}n((n+a_0)(n+2a_0)(n+3a_0)(n+4a_0)+10n^2a_1+$$

$$10n(5a_0a_1+2a_2)+6a_3+28a_2a_0+58a_1a_0^2+9a_1^2).$$

Далее применим теорему 3 из работы 4. Получим л.п.о.

$$L_n(f,x) = (b(x))^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)c_{n,k}(s(x))^k.$$

Они будут операторами типа **B** с ковариацией

$$v(x) = x(1+xu(x)).$$

Замечание. В предложенную схему построения л.п.о. типа **B** укладывается и случай $u(x) = -1$. Действительно, в этом случае $s(x) = x/(1-x), b(x) = 1/(1-x)$,

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

а это не что иное как многочлены Бернштейна.

Пример **1.** Пусть $v(x) = x(1+x)^3$. Тогда

$$b(x) = \exp\Big(\frac{x(x+2)}{2(x+1)^2}\Big), s(x) = \frac{x}{1+x}\exp\Big(-\frac{x(3x+4)}{2(x+1)^2}\Big),$$

$$c_{n,1} = n, c_{n,2} = \frac{1}{2}n(n+3), c_{n,3} = \frac{1}{6}n(n^2+9n+21), \ldots.$$

Пример **2.** Пусть $v(x) = x(1+x^3)$. Тогда

$$b(x) = \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2x+2)}\exp\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\Big), s(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}},$$

$$c_{n,1} = n, c_{n,2} = \frac{1}{2}n^2, c_{n,3} = \frac{1}{6}n^3, \ldots.$$

Пример **3.** Пусть $v(x) = x(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+6x)$. Тогда

$$b(x) = \frac{(3x+1)^3(6x+1)^{3/2}}{(4x+1)^4(2x+1)^{1/2}}, s(x) = \frac{x(2x+1)(4x+1)^{16}}{(3x+1)^9(6x+1)^9},$$

$$c_{n,1} = n, c_{n,2} = \frac{1}{2}n(n+15), c_{n,3} = \frac{1}{6}n(n^2+45n+530), \ldots.$$

Пример **4.** Пусть $v(x) = x/(1-x)$. Тогда

$$b(x) = \exp(x - x^2/2), s(x) = x\exp(-x),$$

$$c_{n,1} = n, c_{n,2} = \frac{1}{2}n(n+1), c_{n,3} = \frac{1}{6}n(n^2+3n+3), \ldots.$$

Пример **5.** Пусть $v(x) = x(1+x^2)/(1-x)$. Тогда

$$b(x) = \frac{\exp(\arctan(x))}{2(1+x^2)}, s(x) = x\exp(-\arctan(x)),$$

$$c_{n,1} = n, c_{n,2} = \frac{1}{2}n(n+1), c_{n,3} = \frac{1}{6}n(n^2+3n+4), \dots .$$

1. *Волков Ю.И.* О некоторых линейных положительных операторах // Мат. заметки. — 1978. — Т. 23, №5. — С. 659-669.

2. *Волков Ю.И.* Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега–Стилтьеса // Изв.АН СССР. Сер.мат. — 1983. — **47**, №3. — С. 435–454.

3. *Mourad E.H. Ismail and C. Ping May.* On a Family of Approximation Operators // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1978. — **63**, №2.—P. 446–462.

4. *Волков Ю.И.* Деформации линейных положительных операторов типа B //Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, №7.— С. 888–900.