Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 49-65

УДК 517.5

С. П. Войтенко, І. В. Соколенко
(Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\bar{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ, ОПЕРАТОРАМИ РОГОЗИНСЬКОГО

Знайдено асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень операторів Рогозинського на класах $\widehat{C}^{\bar{\psi}}_{\infty}$ в рівномірній метриці.

1. Постановка задачі та основні результати. Нехай, $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара функцій $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ таких, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, де $\mathfrak{A}$ [1, 2] — множина всіх неперервних при $t \geq 0$ функцій h, які задовольняють умови:

1) $h(t) \geq 0,\ h(0) = 0,\ h$ — зростає на $[0, 1]$;

2) h опукла вниз на $[1, \infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 0$;

3) похідна $h'(t) := h'(t + 0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0, \infty)$: $\bigvee\limits_0^\infty h'(t) \leq K < \infty$, а $\mathfrak{A}'$ — підмножина всіх функцій $h \in \mathfrak{A}$, таких, що $\int\limits_1^\infty \frac{h(t)}{t} dt < \infty$.

Нехай, далі, S_∞ — одинична куля у просторі суттєво обмежених функцій, $S_\infty = \{\varphi : \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| \leq 1\}$. Тоді, згідно з О.І. Степанцем [1, 2], через $\widehat{C}^{\bar{\psi}} S_\infty = \widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty$ позначимо множину всіх неперервних функцій f, які для всіх x можна представити у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - t)\widehat{\psi}(t)dt = A_0 + \varphi * \widehat{\psi}(x), \tag{1}$$

де $\widehat{\psi}(t)$ — перетворення Фур'є функції $\psi(u) = \psi_{1+}(u) + i\psi_{2-}(u)$, ψ_{1+} і ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій відповідно ψ_1 і ψ_2,

$$\widehat{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(\psi_{1+}(u) + i\psi_{2-}(u)\big)e^{-iut}du, \tag{2}$$

A_0 — деяка константа, $\varphi \in S_\infty$, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. За умов, коли $\psi_1 \in \mathfrak{A}$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, як випливає з твердження 9.5.1 монографії [2], $\widehat{\psi}(t)$ є сумовною на $\mathbb{R}$ функцією. Функцію $f(\cdot)$ в рівності (1) називають $\bar{\psi}$-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і записують $f(\cdot) = \mathcal{J}^{\bar{\psi}}(\varphi, \cdot)$ або функцію $\varphi(\cdot)$ називають $\bar{\psi}$–похідною $f(\cdot)$ і записують $\varphi(\cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Функції $f \in \widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty$ при кожному $\sigma > 0$, поставимо у відповідність функцію $R_\sigma(f;\cdot)$, поклавши

$$R_\sigma(f,\cdot) = A_0 + f^{\bar{\psi}} * \widehat{\psi\lambda}_\sigma(\cdot), \tag{3}$$

де $\widehat{\psi\lambda}_\sigma(t)$ — перетворення вигляду (2) добутку $\psi(u)\lambda_\sigma(u)$,

$$\lambda_\sigma(u) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi u}{2\sigma}, & 0 \le |u| \le \sigma, \\ 0, & \sigma \le |u|. \end{cases} \tag{4}$$

За умов, накладених на функції ψ_1 і ψ_2, з [3, п. 97] при $f \in \widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty$ випливає, що $R_\sigma(f;\cdot)$ — цілі функції експоненціального типу $\le \sigma$. У випадку, коли f є 2π-періодичною функцією з класу $\widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty$ і $\sigma \in \mathbb{N}$, то $R_\sigma(f,\cdot)$ — частинна сума Рогозинського функції $f(x)$ порядку $\sigma - 1$. Тому величини $R_\sigma(\cdot;\cdot)$ називають операторами Рогозинського, апроксимативні властивості яких на класах $\widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty$ у випадку, коли $\psi_1(t) = \psi(t)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$ і $\psi_2(t) = \psi(t)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$, де $\psi(t)$ — деяка функція з множини $\mathfrak{A}$ і $\beta \in \mathbb{R}$, а також в періодичному випадку, вивчались у низці робіт, і основні результати, отримані в цьому напрямку, містяться в [4, 5].

Зазначимо також, що на класах $\widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty$ і $\widehat{C}^{\bar{\psi}}H_\omega$ дослідженням апроксимативних властивостей операторів Фур'є присвячено роботи [1, 6, 7], а операторів Валле-Пуссена — [8—10].

Мета даної роботи полягає у знаходженні асимптотичних рівностей при $\sigma \to \infty$ для величин

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty; R_\sigma) = \sup_{f \in \widehat{C}^{\bar{\psi}}_\infty} \|\rho_\sigma(f;\cdot)\|_C, \tag{5}$$

де $\rho_\sigma(f;x) = f(x) - R_\sigma(f;x)$, $\|\varphi\|_C = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

Значення величини (5) залежить від поведінки функцій $g_i(u) = u^2\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, які можуть бути опуклими догори або донизу. Для функцій $g_i(u)$, $i = 1, 2$, можливі такі випадки:

а) $g_i(u)$ опукла донизу, $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = \infty$,

б) $g_i(u)$ опукла донизу, $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = c_i > 0$,

в) $g_i(u)$ опукла догори, $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = \infty$,

г) $g_i(u)$ опукла догори, $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = c_i > 0$,

д) $g_i(u)$ опукла донизу, $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) = 0$.

Для величин, означених рівністю (5), виконуються такі твердження.

Теорема 1. *Нехай*

$$\psi_1 \in \mathfrak{A}_0 = \left\{ h \in \mathfrak{A} :\ 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \le K < \infty \ \forall t \ge 1 \right\},$$

де $\eta(t) = \eta(h, t) = h^{-1}\left(\dfrac{1}{2}h(t)\right)$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}'$ *і функції* $g_i(u) = u^2\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, *опуклі при* $u \ge 1$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\bar\psi}_{\infty}; R_\sigma) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(u)}{u} du + \frac{\pi}{4\sigma^2}\int\limits_{1}^{\sigma} u\psi_2(u) du + O(1)\Big(|\psi(\sigma)| + \frac{1}{\sigma^2}\Big), \quad (6)$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ.

Зауваження 1. Дану теорему у випадку $\psi_1(t) = \psi(t)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$ і $\psi_2(t) = \psi(t)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$ доведено в [4], а у періодичному випадку — в [5].

Зазначимо, що в (6) головним членом правої частини може бути як перший так і другий доданок. Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A'}_0$ і

$$\alpha_0^{(1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_2(t)}{t|\psi'_1(t)|}, \quad \alpha_0^{(2)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_2(t)}{t|\psi'_2(t)|}.$$

Тоді, з теореми 1 отримуємо такі наслідки.

Наслідок 1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, *функції* $g_i(u) = u^2\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, *опуклі при* $u \ge 1$ *і* $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)} = \infty$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

виконується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\bar\psi}_{\infty}; R_\sigma) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi_2(u)}{u}du + O(1)|\psi(\sigma)|,$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ.

Зауваження 2. Умови наслідку задовольняють, наприклад, функції $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, які при $t \geq 1$ визначаються таким чином: $\psi_1(t) = \ln^{-\varepsilon_1}(t+1)$ і $\psi_2(t) = \ln^{-1-\varepsilon_2}(t+1)$, де $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ (випадок а)).

Наслідок 2. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, *функції* $g_i(u) = u^2\psi_i(u)$ *опуклі при* $u \geq 1$ *і* $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)} = \dfrac{1}{2}$ *або* $\alpha_0^{(2)} = \dfrac{1}{2}$ *та* $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\psi_1(u)}{\psi_2(u)} = 0$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\bar\psi}_{\infty}; R_\sigma) = \frac{\pi}{4\sigma^2}\int\limits_{1}^{\sigma} u\psi_2(u)du + O(1)|\psi(\sigma)|,$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ.

Зауваження 3. Умови наслідку 2 задовольняють, наприклад, функції $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, які при $t \geq 1$ визначаються так: $\psi_i(t) = \dfrac{t^{\varepsilon_i} + c_i}{t^{\varepsilon_i+2}}$, $i = 1, 2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, $c_i \geq 0$ (випадок б)), або $\psi_1(t) = \dfrac{\sqrt{\ln t}}{t^2}$, $\psi_2(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$ (випадок в)), або $\psi_i(t) = \dfrac{t^{\varepsilon_i} - c_i}{t^{\varepsilon_i+2}}$, $i = 1, 2$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, $c_i \in [0, 1)$ (випадок г)).

Теорема 2. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}$, *функції* $g_i(u) = u^2\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, *опуклі вниз при* $u \geq 1$, *а функції* $u\psi_i(u)$ *сумовні на* $[1, \infty)$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\bar\psi}_{\infty}; R_\sigma) = \frac{\pi}{8\sigma^2}\sup_{f\in\widehat{C}^{\bar\psi}_{\infty}}\|f''\|_C + O(1)\Big(\sigma|\psi'(\sigma)| +$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{\sigma}^{\infty} u(\psi_1(u) + \psi_2(u))du + \frac{1}{\sigma^3}\int\limits_{1}^{\sigma} u^2(\psi_1(u) + \psi_2(u))du\Big), \qquad (7)$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ.

Зауваження 4. Теорему 2 у випадку, коли $\psi_1(t) = \psi(t)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$ і $\psi_2(t) = \psi(t)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$, доведено в [4], у періодичному випадку — в [5]. Умови теореми 2 задовольняють, наприклад, функції $\psi_i \in \mathfrak{A}$, які при $t \geq 1$ дорівнюють $\psi_i(t) = e^{-\alpha_i t}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$ (випадок д)).

2. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай

$$\tau_\sigma(u) = \begin{cases} (1 - \cos\dfrac{\pi}{2\sigma}u)\psi(u), & 0 \leq |u| \leq \sigma, \\ \psi(u), & \sigma \leq |u|. \end{cases} \tag{8}$$

Тоді, враховуючи співвідношення (1) і (3), для довільної функції $f \in \widehat{C}^{\bar\psi}_\infty$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$

$$\rho_\sigma(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\bar\psi}(x - t)\, \widehat{\tau}_\sigma(t)\, dt, \tag{9}$$

де $\widehat{\tau}_\sigma(t)$ — перетворення Фур'є вигляду (2) функції $\tau_\sigma(u)$, яка означена рівністю (8).

Доведемо, що

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\bar\psi}_\infty; R_\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\widehat{\tau}_\sigma(t)\big| dt. \tag{10}$$

Класи $\widehat{C}^{\bar\psi}_\infty$ інваріантні відносно зсуву аргументу: якщо $f \in \widehat{C}^{\bar\psi}_\infty$, то для довільного дійсного μ функція $f_1(x) = f(x + \mu)$ також належить до $\widehat{C}^{\bar\psi}_\infty$. Отже, якщо функція f належить до $\widehat{C}^{\bar\psi}_\infty$, то знайдеться функція $f_1 \in \widehat{C}^{\bar\psi}_\infty$ така, що $\rho_\sigma(f; x) = \rho_\sigma(f_1; 0)$. Тому

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}^{\bar\psi}_\infty; R_\sigma) = \sup_{f \in \widehat{C}^{\bar\psi}_\infty} |\rho_\sigma(f; 0)|.$$

Тоді згідно з рівністю (9) отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\bar\psi}_\infty; R_\sigma) = \sup_{f \in \widehat{C}^{\bar\psi}_\infty} \big|\rho_\sigma(f; 0)\big| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sup_{\varphi \in S_\infty} \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(-t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_\sigma(u) e^{-iut} du dt\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_\sigma(u) e^{-iut} du \Big| dt. \tag{11}$$

В той же час, покладаючи $\varphi^*(-t) = \operatorname{sign} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_\sigma(u) e^{-iut} du$, маємо

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}_{\infty}^{\bar\psi}; R_\sigma\right) \geqslant |\rho_\sigma(\mathcal{J}^{\bar\psi}\varphi^*; 0)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_\sigma(u) e^{-iut} du \Big| dt. \tag{12}$$

Співставляючи співвідношення (11) та (12), одержуємо (10).

Спростимо вигляд правої частини рівності (10). Зі співвідношення (8) отримуємо

$$\widehat{\tau}_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_\sigma(u) e^{-iut} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\sigma} (1 - \cos\frac{\pi}{2\sigma} u) \left(\psi(u) e^{-iut} + \psi(-u) e^{iut}\right) du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma}^{\infty} \left(\psi(u) e^{-iut} + \psi(-u) e^{iut}\right) du. \tag{13}$$

Але $\psi(u) = \psi_{1+}(u) + i\psi_{2-}(u)$, тому

$$\psi(u) e^{-iut} + \psi(-u) e^{iut} = 2(\psi_1(u) \cos ut + \psi_2(u) \sin ut). \tag{14}$$

Отже, об'єднуючи рівності (13) і (14) та зробивши заміну змінних: $u = \sigma v$ і $t = z/\sigma$, можемо записати

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\tau}_\sigma(t)\right| dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \tau_\sigma^{(1)}(u) \cos ut \, du +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \tau_\sigma^{(2)}(u) \sin ut \, du \Big| dt \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\tau}_\sigma^{(1+)}(t) + \widehat{\tau}_\sigma^{(2-)}(t)\right| dt, \tag{15}$$

де

$$\tau_\sigma^{(i)}(u) = \begin{cases} (1 - \cos\frac{\pi}{2} u)\psi_i(\sigma u), & 0 \leq u \leq 1, \\ \psi_i(\sigma u), & u \geq 1, \end{cases} \qquad i = 1, 2. \tag{16}$$

Покладемо

$$\nu_\sigma^{(i)}(u)=\begin{cases}\psi_i(\sigma)u, & 0\le u\le 1,\\ \psi_i(\sigma u), & u\geqslant 1,\end{cases}\qquad i=1,2 \tag{17}$$

$$\delta_\sigma^{(i)}(u)=\tau_\sigma^{(i)}(u)-\nu_\sigma^{(i)}(u),\quad i=1,2. \tag{18}$$

Тоді, враховуючи рівності (10) і (15) та позначення (16)—(18), одержуємо

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\bar\psi}_\infty;R_\sigma\right)=\int\limits_{|t|\geqslant1}\left|\widehat{\delta}_\sigma(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\le1}\left|\widehat{\tau}_\sigma^{(2-)}(t)\right|dt+$$

$$+O(1)\Bigg(\int\limits_{|t|\geqslant1}\left|\widehat{\nu}_\sigma(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\le1}\left|\widehat{\tau}_\sigma^{(1+)}(t)\right|dt\Bigg)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\delta}_\sigma(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\le1}\left|\widehat{\tau}_\sigma^{(2-)}(t)\right|dt+O(1)\Bigg(\int\limits_{|t|\geqslant1}\left|\widehat{\nu}_\sigma(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\le1}\left|\widehat{\tau}_\sigma^{(1+)}(t)\right|dt+$$

$$+\int\limits_{|t|\le1}\left|\widehat{\delta}_\sigma(t)\right|dt\Bigg)\stackrel{\mathrm{df}}{=}K_\sigma(\psi)+M_\sigma(\psi_2)+O(1)(P_\sigma(\psi)+Q_\sigma(\psi)+F_\sigma(\psi)). \tag{19}$$

Виходячи із співвідношення (19), знайдемо необхідні оцінки для $P_\sigma(\psi)$, $Q_\sigma(\psi)$, $F_\sigma(\psi)$, а також значення $K_\sigma(\psi)$ і $M_\sigma(\psi_2)$.

З теореми 3.12.1 монографії [11, с. 161] випливає, що якщо $\psi_i\in\mathfrak{A}_0$, то

$$\frac{\psi_i(t)}{t|\psi_i'(t)|}\geqslant K_i>0\quad\forall t\geqslant1. \tag{20}$$

Таким чином, двічі інтегруючи частинами та враховуючи, що $\nu_\sigma^{(i)}(0)=\nu_\sigma^{(i)}(\infty)=0$, $i=1,2$, маємо

$$\int\limits_0^\infty\nu_\sigma^{(i)}(u)\cos\left(ut+\frac{i-1}{2}\pi\right)du=\frac1t\nu_\sigma^{(i)}(u)\sin\left(ut+\frac{i-1}{2}\pi\right)\Big|_0^\infty-$$

$$-\frac{\psi_i(\sigma)}{t}\int\limits_0^1\sin\left(ut+\frac{i-1}{2}\pi\right)du-\frac{\sigma}{t}\int\limits_1^\infty\psi_i'(\sigma u)\sin\left(ut+\frac{i-1}{2}\pi\right)du\le$$

$$\leq \frac{\psi_i(\sigma)}{t^2}\cos\Big(ut+\frac{i-1}{2}\pi\Big)\Big|_0^1 - \frac{\sigma}{t}\int\limits_1^{1+\pi/t}\psi_i'(\sigma u)du \leq$$

$$\leq \frac{2}{t^2}\bigg(\psi_i(\sigma)+\pi\sigma|\psi_i'(\sigma)|\bigg) = O(1)\frac{\psi_i(\sigma)}{t^2}, \quad i=1,2.$$

Тому виконується оцінка

$$P_\sigma(\psi) = \int\limits_{|t|\geqslant 1}|\widehat{\nu}_\sigma(t)|dt = O(1)|\psi(\sigma)|. \tag{21}$$

Інтегруючи частинами та враховуючи, що $\tau_\sigma^{(1)}(0)=\tau_\sigma^{(1)}(\infty)=0$, знаходимо

$$Q_\sigma(\psi)=\int\limits_{|t|\leq 1}\Big|\int\limits_0^\infty \tau_\sigma^{(1)}(u)\cos ut\,du\Big|dt \leq 2\int\limits_0^1\Big|\int\limits_0^\infty (\tau_\sigma^{(1)}(u))'\,\frac{\sin ut}{t}\,du\Big|dt \leq$$

$$\leq 2\int\limits_0^1\Big|\int\limits_0^\infty {\zeta'}_\sigma(u)\frac{\sin ut}{t}du\Big|dt + 2\int\limits_0^1\Big|\int\limits_0^1 ((\tau_\sigma^{(1)}(u))' - {\zeta'}_\sigma(u))\frac{\sin ut}{t}du\Big|dt, \tag{22}$$

де

$$\zeta_\sigma(u) = \begin{cases}\sigma\psi_1'(\sigma)(u-1)+\psi_1(\sigma), & 0\leq u\leq 1,\\ \psi_1(\sigma u), & u\geqslant 1.\end{cases}$$

Оскільки функція $\zeta_\sigma'(u)$ неперервна і зростає, то $-\zeta_\sigma'(u)$ не зростає і $\lim\limits_{u\to\infty}\zeta_\sigma'(u)=0$, тому користуючись теоремою Лейбніца про знакозмінні ряди, маємо

$$-\int\limits_0^\infty \zeta_\sigma'(u)\sin ut\,du \geqslant 0 \quad \forall t\in[0,1].$$

Змінюючи порядок інтегрування та враховуючи співвідношення (20), отримуємо

$$\int\limits_0^1\Big|\int\limits_0^\infty {\zeta'}_\sigma(u)\frac{\sin ut}{t}\,du\Big|dt = \int\limits_0^\infty(-{\zeta'}_\sigma(u))\int\limits_0^1\frac{\sin ut}{t}\,dtdu \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2}(\psi_1(\sigma) + \sigma|\psi_1'(\sigma)|) = O(1)\psi_1(\sigma). \tag{23}$$

Далі, враховуючи, що для $\forall u \in [0,1]$ і $\forall t \in [0,1]$ $\quad \frac{\sin ut}{ut} \leq 1$, одержуємо

$$\int_0^1 \Big| \int_0^1 ((\tau_\sigma^{(1)}(u))' - {\zeta'}_\sigma(u)) \frac{\sin ut}{t}\, du \Big| dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 u|(\tau_\sigma^{(1)}(u))' - {\zeta'}_\sigma(u)|\, du \leq \max_{u\in[0,1]} u\big|\big(\tau_\sigma^{(1)}(u)\big)'\big| + \sigma|\psi_1'(\sigma)| \leq$$

$$\leq O(1)\big(\psi_1(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2} + \sigma|\psi_1'(\sigma)|\big) = O(1)\big(\psi_1(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\big). \tag{24}$$

Таким чином, об'єднуючи співвідношення (22)—(24), отримуємо

$$Q_\sigma(\psi) = \int_{|t|\leq 1} \big|\widehat{\tau}_\sigma^{(1+)}(t)\big| dt = O(1)\big(\psi_1(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\big). \tag{25}$$

Для оцінки $F_\sigma(\psi)$ розглянемо спочатку випадок, коли функція $g_2(u) = v^2\psi_2(u)$ не спадає при $u \geq 1$. Приймаючи до уваги (18), маємо

$$F_\sigma(\psi) = \int_{|t|\leq 1} |\widehat{\delta}_\sigma(t)| dt < \sum_{i=1}^{2} \int_{|t|\leq 1} \Big| \int_0^1 \delta_\sigma^{(i)}(u) \cos\Big(ut + \frac{1-i}{2}\pi\Big) du \Big| dt \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \max_{u\in[0,1]} |\delta_\sigma^{(i)}(u)| \leq \sum_{i=1}^{2} \max_{u\in[0,1]} (|\tau_\sigma^{(i)}(u)| + |\nu_\sigma^{(i)}(u)|) \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{8} \sum_{i=1}^{2} \max_{u\in[0,1]} u^2\psi_i(\sigma u) + 2|\psi(\sigma)| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{8} \sum_{i=1}^{2} \big(\max_{u\in[0,\frac{1}{\sigma}]} u^2\psi_i(\sigma u) + \max_{u\in[\frac{1}{\sigma},1]} u^2\psi_i(\sigma u)\big) + 2|\psi(\sigma)| =$$

$$= O(1)\Big(|\psi(\sigma)| + \frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{26}$$

У випадку, коли функція $g_2(u) = v^2\psi_2(u)$ спадає при $u \geqslant 1$, міркуючи аналогічно до (26), можна показати, що

$$F_\sigma(\psi) = O(1)\Big(|\psi(\sigma)| + \frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{27}$$

Обчислимо інтеграл $M_\sigma(\psi_2)$ з правої частини рівності (19). У монографії [11, с. 236] (співвідношення (5.4)) встановлено, що при $\sigma \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_0^1 \Big|\int\limits_1^\infty \psi_2(\sigma u)\sin ut du\Big| dt = \int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi_2(u)}{u} du + O(1)\psi_2(\sigma). \tag{28}$$

Хоча співвідношення (28) доведено для $\sigma \in \mathbb{N}$, але воно залишається правильним і в нашому випадку, оскільки при його доведенні не використовувався той факт, що σ — натуральне число.

Враховуючи, далі, нерівність

$$\int\limits_0^1 \Big|\int\limits_0^1 \tau_\sigma^{(2)}(u)\sin ut\, du\Big| dt \leq \max_{u\in[0,1]} |\tau_\sigma^{(2)}(u)| = O(1)\Big(\psi_2(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\Big), \tag{29}$$

і рівність (28), отримуємо

$$M_\sigma(\psi_2) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \Big|\int\limits_1^\infty \psi_2(\sigma u)\sin ut du\Big| dt + O(1)\int\limits_0^1 \Big|\int\limits_0^1 \tau_\sigma^{(2)}(u)\sin ut\, du\Big| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi_2(u)}{u} du + O(1)\Big(\psi_2(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{30}$$

Згідно з лемою 1 роботи [12], величину $K_\sigma(\psi)$ з рівності (19) можемо записати у такому вигляді:

$$K_\sigma(\psi) = \int\limits_{-\infty}^\infty |\widehat{\delta}_\sigma(t)| dt = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^1 \xi\Big(\delta_\sigma^{(2)}(u), \sqrt{(\delta_\sigma^{(1)}(1-u))^2 + (\delta_\sigma^{(2)}(1-u))^2}\Big)\frac{du}{u} +$$

$$+O(1)\Big(\int\limits_0^1 u(1-u)|d(\delta_n^{(1)}(u))'| + \int\limits_0^1 u(1-u)|d(\delta_n^{(2)}(u))'|\Big). \qquad (31)$$

де

$$\xi(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}|x|, & |y| \le |x|, \\ |x|\arcsin\left|\frac{x}{y}\right| + \sqrt{y^2-x^2}, & |y| > |x|, \end{cases} \qquad (32)$$

Показажемо, що

$$\int\limits_0^1 u(1-u)|d(\delta_\sigma^{(i)}(u))'| = O(1)\Big(\psi_i(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\Big), \quad i = 1,2. \qquad (33)$$

Для цього запишемо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів

$$\int\limits_0^1 u(1-u)|d(\delta_\sigma^{(i)}(u))'| = \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} u(1-u)|d(\delta_\sigma^{(i)}(u))'| +$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^1 u(1-u)|d(\delta_\sigma^{(i)}(u))'| \overset{\mathrm{df}}{=} I_{\sigma,1}^{(i)} + I_{\sigma,2}^{(i)}. \qquad (34)$$

Двічі інтегруючи частинами, маємо

$$I_{\sigma,1}^{(i)} = u(1-u)(\delta_\sigma^{(i)}(u))'\Big|_0^{\frac{1}{\sigma}} - \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} (1-2u)|(\delta_\sigma^{(i)}(u))'|du =$$

$$= \frac{O(1)}{\sigma^2} - (1-2u)\delta_\sigma^{(i)}(u)\Big|_0^{\frac{1}{\sigma}} - 2\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} \delta_\sigma^{(i)}(u)\,du = \frac{O(1)}{\sigma^2}\,. \qquad (35)$$

Міркуючи аналогічно, можна показати, що

$$I_{\sigma,2}^{(i)} = O(1)\Big(\psi_i(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\Big). \qquad (36)$$

Враховуючи (34)—(36), отримуємо (33).

Згідно леми 1.7.3 монографії [11, с. 63] має місце рівність

$$\xi(A,\sqrt{B^2+D^2})=\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|A+B\sin x+D\cos x\big|dx,$$

де A, B і D — довільні дійсні числа.

Звідси випливають наступні нерівності

$$|\xi(A,\sqrt{B_1^2+D_1^2})-\xi(A,\sqrt{B_2^2+D_2^2})|\leq|B_1-B_2|+|D_1-D_2|, \qquad (37)$$

$$|\xi(A_1,\sqrt{B^2+D^2})-\xi(A_2,\sqrt{B^2+D^2})|\leq\frac{\pi}{2}|A_1-A_2|. \qquad (38)$$

Нехай

$$\mu_\sigma^{(i)}(u)=1-\frac{\tau_\sigma^{(i)}(u)}{\psi_i(\sigma u)}=\cos\frac{\pi u}{2}, \quad u\in[0,1],\ i=1,2, \qquad (39)$$

і

$$\varphi_\sigma(u)=\sqrt{\big(\psi_1(\sigma)\mu_\sigma^{(1)}(u)\big)^2+\big(\psi_2(\sigma)\mu_\sigma^{(2)}(u)\big)^2}=\cos\frac{\pi u}{2}|\psi(\sigma)|. \qquad (40)$$

Користуючись оцінкою (37), отримуємо

$$\big|\xi\big(\delta_\sigma^{(2)}(u),\sqrt{(\delta_\sigma^{(1)}(1-u))^2+(\delta_\sigma^{(2)}(1-u))^2}\big)-$$
$$-\xi\big(\delta_\sigma^{(2)}(u),\sqrt{(\psi_1(\sigma)\mu_\sigma^{(1)}(1-u))^2+(\psi_2(\sigma)\mu_\sigma^{(2)}(1-u))^2}\big)\big|\leq$$
$$\leq|\delta_\sigma^{(1)}(1-u)+\psi_1(\sigma)\mu_\sigma^{(1)}(1-u)|+|\delta_\sigma^{(2)}(1-u)+\psi_2(\sigma)\mu_\sigma^{(2)}(1-u)|=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}|\tau_\sigma^{(i)}(1-u)-\psi_i(\sigma)(1-u)+\psi_i(\sigma)\mu_\sigma^{(i)}(1-u)|\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{i=1}^{2}|s_\sigma^{(i)}(1-u)|.$$

Таким чином, враховуючи (31), (33) та (40), маємо

$$K_\sigma(\psi)=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^1\xi\big(\delta_\sigma^{(2)}(u),\varphi_\sigma(1-u)\big)\frac{du}{u}+$$

$$+O(1)\Big(\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{|s_{\sigma}^{(i)}(u)|}{1-u}du+|\psi(\sigma)|+\frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{41}$$

Знайдемо оцінку інтеграла

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{|s_{\sigma}^{(i)}(u)|}{1-u}du=\int\limits_{0}^{1}\frac{|\tau_{\sigma}^{(i)}(u)-\psi_i(\sigma)u+\psi_i(\sigma)\big(1-\frac{\tau_{\sigma}^{(i)}(u)}{\psi_i(\sigma u)}\big)|}{1-u}du\leq$$

$$\leq\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}}\frac{|\tau_{\sigma}^{(i)}(u)\big(1-\frac{\psi_i(\sigma)}{\psi_i(\sigma u)}\big)|}{1-u}du+\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{|\tau_{\sigma}^{(i)}(u)\big(1-\frac{\psi_i(\sigma)}{\psi_i(\sigma u)}\big)|}{1-u}du+\psi_i(\sigma)\stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=}J_{\sigma,1}^{(i)}+J_{\sigma,2}^{(i)}+\psi_i(\sigma). \tag{42}$$

Оцінимо перший і другий доданки з правої частини співвідношення (42):

$$J_{\sigma,1}^{(i)}=\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}}\frac{\sin^2\frac{\pi u}{4}\big|\psi_i(\sigma u)-\psi_i(\sigma)\big|}{1-u}du\leq O(1)\left(\psi_i(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

$$J_{\sigma,2}^{(i)}\leq\max_{u\in[\frac{1}{\sigma},1]}|\tau_{\sigma}^{(i)}(u)|\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{1-\frac{\psi_i(\sigma)}{\psi_i(\sigma u)}}{1-u}du.$$

При $\sigma>2$, отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{1-\frac{\psi_i(\sigma)}{\psi_i(\sigma u)}}{1-u}du=\Big(\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{2}}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\Big)\frac{1-\frac{\psi_i(\sigma)}{\psi_i(\sigma u)}}{1-u}du\leq\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{2}}du+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\psi_i(\sigma u)-\psi_i(\sigma)}{\psi_i(\sigma u)(1-u)}du\leq 1+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{|\psi_i'(\sigma u)|\sigma}{\psi_i(\sigma u)}du=O(1),$$

і

$$J_{\sigma,2}^{(i)} \le O(1) \max_{u\in[\frac{1}{\sigma},1]} |\tau_\sigma^{(i)}(u)| \le O(1)\Big(\psi_i(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2}\Big).$$

Отже

$$\int\limits_0^1 \frac{|s_\sigma^{(i)}(u)|}{1-u}du = O(1)\Big(\psi_i(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2}\Big) \quad i=1,2. \tag{43}$$

На підставі нерівності (38), маємо

$$\left|\xi\big(\delta_\sigma^{(2)}(u),\varphi_\sigma(1-u)\big)-\xi\big(\tau_\sigma^{(2)}(u),\varphi_\sigma(1-u)\big)\right| \le \frac{\pi}{2}|\nu_\sigma^{(2)}(u)|.$$

Звідси, співставляючи (41)–(43), отримуємо

$$K_\sigma(\psi)=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^1 \xi\big(\tau_\sigma^{(2)}(u),\varphi_\sigma(1-u)\big)\frac{du}{u}+O(1)\Big(|\psi(\sigma)|+\frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{44}$$

З леми 1.7.4 [11, с. 63] випливає, що для функції $\xi(x;y)$, яка означена рівністю (32), при будь-яких значеннях x і y, має місце нерівність

$$\xi(x;y)-\frac{\pi}{2}|x| \le |y|,$$

з якої слідує, що

$$\int\limits_0^1 \xi\big(\tau_\sigma^{(2)}(u),\varphi_\sigma(1-u)\big)\frac{du}{u}-\frac{\pi}{2}\int\limits_a^1 \frac{|\tau_\sigma^{(2)}(u)|}{u}du \le \int\limits_0^1 \frac{\varphi_\sigma(u)}{1-u}du =$$

$$=|\psi(\sigma)|\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{\pi}{2}u}{1-u}du = |\psi(\sigma)|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}\,du = O(1)|\psi(\sigma)|. \tag{45}$$

Об'єднуючи співвідношення (44) і (45), одержуємо

$$K_\sigma(\psi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{|\tau_\sigma^{(2)}(u)|}{u}du+O(1)\Big(|\psi(\sigma)|+\frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{46}$$

Покажемо, що

$$\int_0^1 \frac{|\tau_\sigma^{(2)}(u)|}{u} du = \frac{\pi^2}{8\sigma^2} \int_1^\sigma u\psi_2(u)du + O(1)\Big(\psi_2(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{47}$$

Функції $\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, зростають на $[0, 1]$, тому

$$\int_0^{1/\sigma} \frac{|\tau_\sigma^{(2)}(u)|}{u} du = \int_0^1 (1 - \cos\frac{\pi}{2\sigma}u)\frac{\psi_2(u)}{u} du \le \frac{\pi^2}{8\sigma^2} \int_0^1 \frac{u^2\psi_2(u)}{u} du = \frac{O(1)}{\sigma^2}. \tag{48}$$

Якщо функція $g_2(u) = u^2\psi_2(u)$ не спадає при $u \ge 1$, то

$$\int_1^\sigma (\frac{\pi^2}{8\sigma^2}u^2 - (1 - \cos\frac{\pi}{2\sigma}u))\frac{\psi_2(u)}{u} du \le$$

$$\le \frac{4}{3!}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^4 \int_1^\sigma \frac{u^3}{\sigma^4}\psi_2(u)\, du \le \frac{\pi^4\psi_2(\sigma)}{4^3 3!\sigma^2} \int_1^\sigma u\, du = O(1)\psi_2(\sigma). \tag{49}$$

Якщо ж функція $g_2(u) = u^2\psi_2(u)$ не зростає при $u \ge 1$, то

$$\int_1^\sigma (\frac{\pi^2}{8\sigma^2}u^2 - (1 - \cos\frac{\pi}{2\sigma}u))\frac{\psi_2(u)}{u} du \le \frac{4}{3!}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^4 \int_1^\sigma \frac{u^3}{\sigma^4}\psi_2(u)\, du \le$$

$$\le \frac{\pi^4\psi_2(1)}{4^3 3!\sigma^4} \int_1^\sigma u\, du = \frac{O(1)}{\sigma^2}. \tag{50}$$

Таким чином, об'єднуючи співвідношення (46)–(50), маємо

$$K_\sigma(\psi) = \frac{\pi}{4\sigma^2} \int_1^\sigma u\psi_2(u)du + O(1)\Big(|\psi(\sigma)| + \frac{1}{\sigma^2}\Big). \tag{51}$$

Підставляючи, далі, в (19) оцінки (21), (25), (27) та рівності (30), (51), переконуємося в справедливості співвідношення (6). Теорему доведено.

Доведення наслідків 1 і 2. Використовуючи правило Лопіталя, одержуємо такі співвідношення:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}\int_1^t u\psi_2(u)du}{\int_t^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}du} = -1 + \lim_{t\to\infty}\frac{2\int_1^t u\psi_2(u)du}{t^2\psi_2(t)} =$$

$$= -1 + \lim_{t\to\infty}\frac{2t\psi_2(t)}{2t\psi_2(t) - t^2|\psi_2'(t)|} = -1 + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1 - \frac{t|\psi_2'(t)|}{2\psi_2(t)}}, \tag{52}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_2(t)}{\frac{1}{t^2}\int_1^t u\psi_2(u)du} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2\psi_2(t)}{\int_1^t u\psi_2(u)du} = 2 - \lim_{t\to\infty}\frac{t|\psi_2'(t)|}{\psi_2(t)}, \tag{53}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(t)}{\frac{1}{t^2}\int_1^t u\psi_2(u)du} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2\psi_1(t)}{\int_1^t u\psi_2(u)du} = \lim_{t\to\infty}\left(2\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} - \frac{t|\psi_1'(t)|}{\psi_2(t)}\right), \tag{54}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}du}{\psi_2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{\psi_2(t)}{t}}{\psi_2'(x)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_2(t)}{t|\psi_2'(t)|} \tag{55}$$

і

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}dv}{\psi_1(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{\psi_2(t)}{t}}{\psi_1'(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_2(t)}{t|\psi_1'(t)|}. \tag{56}$$

Якщо $\lim\limits_{u\to\infty} g_i(u) > 0$, $i = 1, 2$, то

$$\frac{1}{\sigma^2} = O(1)|\psi(\sigma)|. \tag{57}$$

Таким чином, доведення наслідків 1 і 2 одержується, поєднанням (6) і (52)—(57).

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно доведенню теореми 2.2.5 роботи [4], покладаючи $\psi_1(t) = \psi(t)\cos\frac{\beta\pi}{2}$ і $\psi_2(t) = \psi(t)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, де $\psi(t) \in \mathfrak{A}$, а $\beta = 0, 1$.

1. *Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable function on the rial line // Укр. мат. журн. — 1999. — 51, №11. — P. 1549–1561.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2-х т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 2. — 468 с.
3. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 537 с.
4. *Дзимистаришвили М.Г.* Приближение (ψ,β)–дифференцируемых функций, определенных на всей действительной оси, операторами Зигмунда, Стеклова и Рогозинского: Дис. .. канд. физ.–мат. наук. — Киев, 1990. — 114 с.
5. *Ковальчук И.Р.* Приближение классов (ψ,β)–дифференцируемых функций полиномами Рогозинского // Приближение классов (ψ,β)–дифференцируемых функций полиномами Рогозинского и некоторые обратные теоремы. — Киев, 1988. — С. 3-46. — (Препр. / АН УССР. Ин–т математики; 88.4).
6. *Соколенко І.В.* Наближення операторами Фур'є $\bar{\psi}$-інтегралів неперервних функцій, заданих на дійсній осі // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №5. — С. 663-676.
7. *Степанець О.І., Соколенко І.В.* Наближення операторами Фур'є $\bar{\psi}$-інтегралів функцій, заданих на дійсній осі // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №7. — С. 960-965.
8. *Рукасов В.И.,Силин Е.С.* Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін–ту математики НАН України. — 2003. — Т. 46. — С. 192-208.
9. *Рукасов В.И., Силин Е.С.* Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, №2. - С. 230 - 239.
10. *Рукасов В.И., Силин Е.С.* Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, №3. — С. 394 -400.
11. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2-х т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 427 с.
12. *Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближение $\bar{\psi}$—интегралов периодических функций суммами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 12. — С. 1641—1653.