УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)
В. И. Забутная (Днепропетр. нац. ун-т, Днепропетровск)

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА И ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

Для характеристики гладкостi $\Phi_2(f)$ 2π-перiодичних функцiй $f \in L_2$ отримано точнi нерiвностi типу Джексона та обчислено точнi значення n-поперечникiв класiв $L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2,\Omega)$, де Ω — мажоруюча функцiя, яка задовольняє певне обмеження .

1. Через $L_2 = L_2([0,2\pi])$ обозначим пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Символом $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Для произвольной функции $f \in L_2$ в смысле сходимости в метрике L_2 справедливо следующее представление

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx,$$

где $a_0(f), a_k(f), b_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$, — коэффициенты Фурье функции f. Величина наилучшего приближения элемента $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\} =$$
$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, а $\rho_k^2(f) \overset{\mathrm{df}}{=} a_k^2(f) + b_k^2(f)$. Под L_2^r ($r \in \mathbb{Z}_+; L_2^0 = L_2$) понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству L_2.

Задачи нахождения точных констант в неравенствах типа Джексона в L_2, содержащих модуль непрерывности l-го порядка, $l \in \mathbb{N}$, связаны с вычислением различных экстремальных характеристик, приводящих к уточнению оценок сверху указанных постоянных. Содержательные результаты в этом направлении в разное время были получены Н.И.Черных [1], Л.В.Тайковым [2–3], А.А.Лигуном [4], А.Г.Бабенко [5], М.Г.Есмаганбетовым [6], В.И.Ивановым и О.И.Смирновым [7] и другими (см., напр., [8–10]). Задачи аналогичного содержания в пространствах S^p, $1 \le p \le \infty$, рассматривались А.И.Степанцом и его учениками (см., напр., [11–14]). В случае $p = 2$ пространство S^2 является обычным пространством L_2. Полученные в S^p результаты указанного содержания оказались новыми и для случая $p = 2$. В последующем эта тематики нашла продолжение в работах [15, 16]. Неравенства типа Джексона с несколько иными характеристиками гладкости функций рассматривались, например, в работах К.В.Руновского [17], Н.Н.Пустовойтова [18] и других (см., напр., [19–23]).

Модуль непрерывности l-го порядка функции $f \in L_2$ обозначим через $\omega_l(f,t) = \sup\left\{\|\Delta_h^l f(\cdot)\| : |h| \le t\right\}$, где

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(x + jh).$$

Для двух положительных функций $g(t)$ и $\varphi(t)$, где $t \in D$, полагают $g(t) \asymp \varphi(t)$, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что $c_1 \leqslant g(t)/\varphi(t) \leqslant c_2$ для всех $t \in D$.

В работе [18] оценки сверху величин наилучших полиномиальных приближений функций получены через усредненные разности порядка l. В принятых нами обозначениях указанные характеристики гладкости имеют вид

$$\Phi_l(f,t) = \frac{1}{t}\int_0^t \|\Delta_h^l f(\cdot)\| dh.$$

При этом $\Phi_l(f,t) \le \omega_l(f,t)$ для всех $l \ge 1$ и $\omega_l(f,t) \asymp \Phi_l(f,t)$, где $0 < t \leqslant 2\pi$.

2. Пусть f — суммируемая 2π-периодическая функция; $\psi(k)(\psi(k) \neq 0, k \in \mathbb{N})$ — сужение на множество $\mathbb{N}$ произвольной вещественной функции ψ, определенной на полусегменте $[1, \infty)$; β — конечное действительное число. Следуя А.И.Степанцу [24], предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции (обозначим ее через f_β^ψ), называемой (ψ, β)-производной функции f. Множество 2π-периодических суммируемых функций f, имеющих (ψ, β)-производные, обозначим символом L_β^ψ. При этом коэффициенты Фурье функций f и f_β^ψ связаны соотношениями

$$\begin{cases} a_k(f) = \psi(k) \left(a_k(f_\beta^\psi) \cos \dfrac{\beta\pi}{2} - b_k(f_\beta^\psi) \sin \dfrac{\beta\pi}{2} \right), \\ b_k(f) = \psi(k) \left(a_k(f_\beta^\psi) \sin \dfrac{\beta\pi}{2} + b_k(f_\beta^\psi) \cos \dfrac{\beta\pi}{2} \right). \end{cases} \tag{1}$$

Отметим, что в случае $\psi(k) = k^{-r}$, где $r > 0, \beta \in \mathbb{R}$, получаем (r, β)-производную в смысле Вейля–Надя $f_\beta^\psi = f_\beta^{(r)}$. Если, кроме этого, $\beta = r$, где $r \in \mathbb{N}$, то f_β^ψ является обычной производной r-го порядка функции f.

Если $f \in L_\beta^\psi$ и при этом $f_\beta^\psi \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — некоторое подмножество суммируемых 2π-периодических функций, то говорят, что f принадлежит классу $L_\beta^\psi \mathcal{M}$. В дальнейшем под $\mathcal{M}$ будем понимать пространство L_2 и вместо $L_\beta^\psi L_2$ писать $L_{\beta,2}^\psi$.

Сформулируем для одномерного случая один результат А.С.Романюка [26], записывая его в удобном для нас виде:
если функция ψ натурального аргумента k такова, что величины

$$\sup\{|\psi(k)| : k \in \mathbb{N}\} \tag{2}$$

и

$$\sup\left\{ \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} |\psi(k+1) - \psi(k)| : \nu \in \mathbb{Z}_+ \right\} \tag{3}$$

конечны, то для любого числа $\beta \in \mathbb{R}$ справедливо включение $L^{\psi}_{\beta,2} \subset L_2$.

Всюду далее полагаем, что функция ψ, заданная на множестве $1 \leqslant x < \infty$, является положительной и монотонно убывающей к нулю при возрастании x. Легко проверить, что условия (2)–(3) в данном случае выполняются автоматически.

Отношение $0/0$ полагаем равным нулю. Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $0 < t \leq \pi/(2n)$ справедливы равенства*

$$\sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\Phi_2(f^{\psi}_{\beta}, t)} : f \in L^{\psi}_{\beta,2}, f \not\equiv \mathrm{const}\right\} = \frac{1}{2(1 - \frac{\sin nt}{nt})}. \quad (4)$$

3. Прежде, чем сформулировать следующий результат, напомним необходимые понятия и определения.

Пусть $\mathbb{B}$ — единичный шар в L_2; Q — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathcal{T} : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathcal{T}^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(Q; L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon\mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\},$$

$$d_n(Q; L_2) = \inf\{\sup\{\inf \|f - g\| : g \in \Lambda_n\} : f \in Q\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$\delta_n(Q; L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{T}f\| : f \in Q\} : \mathcal{T}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$d^n(Q; L_2) = \inf\{\sup\{\|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\},$$

$$\Pi_n(Q; L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{T}^{\perp}f\| : f \in Q\} : \mathcal{T}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками.

Используя определение осредненной характеристики гладкости $\Phi_2(f)$, введем в L_2 следующие классы функций. Пусть $\Omega(t)$, где $t \geq 0$, есть произвольная возрастающая функция такая, что $\Omega(t) > 0$ при $t > 0$ и $\lim\{\Omega(t) : t \to 0\} = \Omega(0) = 0$. Через $L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2, \Omega)$ обозначим класс функций $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$, у которых (ψ,β)-производные f^{ψ}_{β} удовлетворяют условию $\Phi_2(f^{\psi}_{\beta},t) \le \Omega(t)$ для любых $t > 0$.

Теорема 2. *Пусть при любом $n \in \mathbb{N}$ мажорирующая функция Ω удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Omega(t)}{\Omega(\pi/(2n))} \ge \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases} 1-\dfrac{\sin nt}{nt}, & \text{если } 0<t\le \pi/n, \\ 2-\dfrac{\pi}{nt}, & \text{если } t\ge \pi/n. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда имеют место равенства

$$p_{2n}(L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2,\Omega);L_2) = p_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2,\Omega);L_2) =$$

$$= E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2,\Omega)) = \frac{\psi(n)}{2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}\Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{6}$$

где p_m — любой из m-поперечников: бернштейновский b_m, колмогоровский d_m, гельфандовский d^m, линейный δ_m, проекционный Π_m; $E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2,\Omega)) \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{E_{n-1}(f) : f\in L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2,\Omega)\right\}$. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (5), не пусто.

4. Доказательство теоремы 1. Из (1) имеем

$$\begin{cases} a_k(f^{\psi}_{\beta}) = \dfrac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\dfrac{\beta\pi}{2} + b_k(f)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right), \\ b_k(f^{\psi}_{\beta}) = \dfrac{1}{\psi(k)}\left(-a_k(f)\sin\dfrac{\beta\pi}{2} + b_k(f)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Следовательно, $\rho_k(f) = \psi(k)\rho_k(f^{\psi}_{\beta}),\ k\in\mathbb{N}$). Используя свойства тригонометрической системы и определение гильбертова пространства, для произвольной функции $f\in L^{\psi}_{\beta,2}$ получаем

$$\|\Delta^2_h f^{\psi}_{\beta}(\cdot)\|^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f^{\psi}_{\beta})(1-\cos kh)^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi^2(k)}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^2. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$E^2_{n-1}(f) - \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\cos kh = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k(f)\rho_k(f)(1-\cos kh).$$

Применяя к правой части данного равенства рассуждения из работы [26], а именно, используя неравенство Коши–Буняковского для числовых рядов, а также учитывая (7), можем записать

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kh \leq$$

$$\leq E_{n-1}(f) \left\{ \psi^2(n) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\psi^2(k)} \rho_k^2(f)(1-\cos kh)^2 \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq E_{n-1}(f) \frac{\|\Delta_h^2 f_\beta^\psi(\cdot)\|}{2} \psi(n). \qquad (8)$$

Проинтегрировав соотношение (8) по h в пределах от 0 до t и умножив обе части полученного неравенства на $1/t$, имеем

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{\sin kt}{kt} + \frac{E_{n-1}(f)}{2} \psi(n) \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^2 f_\beta^\psi(\cdot)\| dh. \qquad (9)$$

В силу определения характеристики гладкости $\Phi_2(f,t)$ и соотношения

$$\max_{nt \leq u} \frac{|\sin u|}{u} = \frac{\sin nt}{nt},$$

где $0 < nt \leq \pi/2$, из (9) получаем

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{\sin nt}{nt} E_{n-1}^2(f) + \frac{E_{n-1}(f)}{2} \psi(n) \Phi_2(f_\beta^\psi, t).$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\Phi_2(f_\beta^\psi, t)} : f \in L_{\beta,2}^\psi, f \not\equiv \mathrm{const} \right\} \leq \frac{1}{2(1-\frac{\sin nt}{nt})}. \qquad (10)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $\widetilde{f}(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sin nx$. Поскольку при $0 < h \leq t \leq \pi/(2n)$

$$\widetilde{f}_\beta^\psi(x) = \frac{\sin(nx + \beta\pi/2)}{\psi(n)},$$

$$E_{n-1}(\widetilde{f}) = 1, \quad \|\Delta_h^2 \widetilde{f}_\beta^\psi(\cdot)\| = \frac{2}{\psi(n)}(1-\cos nh),$$

$$\Phi_2(\widetilde{f}_\beta^\psi, t) = \frac{2}{\psi(n)}\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right),$$

то

$$\sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\Phi_2(f_\beta^\psi, t)} : f \in L_{\beta,2}^\psi, f \not\equiv \mathrm{const}\right\} \geq$$

$$\geq \frac{E_{n-1}(\widetilde{f})}{\psi(n)\Phi_2(\widetilde{f}_\beta^\psi, t)} \geq \frac{1}{2\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)}. \tag{11}$$

Сравнив неравенства (10) и (11), получаем равенства (4). Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Полагая в (10) $t = \pi/(2n)$, для произвольной функции $f \in L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega)$ имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\psi(n)}{2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}\,\Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{12}$$

Пусть Q — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2. В гильбертовом пространстве L_2 справедливы следующие соотношения между n-поперечниками:

$$b_n(Q, L_2) \leq d^n(Q, L_2) \leq d_n(Q, L_2) = \delta_n(Q, L_2) = \Pi_n(Q, L_2). \tag{13}$$

Учитывая (12) и (13), можем записать

$$p_{2n}(L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega); L_2) \leq p_{2n-1}(L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega); L_2) \leq$$

$$\leq d_{2n-1}(L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega); L_2) \leq E_{n-1}(L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega)) \leq \frac{\psi(n)}{2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}\,\Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{14}$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых здесь n-поперечников определим в $\mathcal{T}_n \cap L_2$ шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq \frac{\psi(n)}{2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}\,\Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Полагаем $(1-\cos nt)_* \stackrel{\text{df}}{=} \{1-\cos nt$, если $0 \le t \le \pi/n$; 2, если $t \ge \pi/n\}$. Для произвольного полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ в силу (7) имеем

$$\|\Delta_h^2 (T_n)_\beta^\psi(\cdot)\| = \Big\{4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^2(k)} \rho_k^2(T_n)(1-\cos kh)^2\Big\}^{1/2} \le$$

$$\le \frac{2}{\psi(n)}(1-\cos nh)_* \|T_n\|. \qquad (15)$$

Покажем справедливость включения $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega)$. Для этого рассмотрим два случая: $0 < t \leqslant \pi/n$ и $\pi/n \leqslant t$. Пусть вначале $0 < t \le \pi/n$. В силу определения класса $L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega)$, неравенства (15) и первого неравенства в ограничении (5), для произвольного полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ получаем

$$\Phi_2((T_n)_\beta^\psi, t) = \frac{1}{t}\int_0^t \|\Delta_h^2 (T_n)_\beta^\psi(\cdot)\| dh \le \frac{2}{\psi(n)}\|T_n\| \frac{1}{t}\int_0^t (1-\cos nh) dh \le$$

$$\le \Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{1-\dfrac{\sin nt}{nt}}{1-\dfrac{2}{\pi}} \le \Omega(t). \qquad (16)$$

Пусть теперь $\pi/n \le t$. Используя второе неравенство из ограничения (5) и соображения, аналогичные выше приведенным, для произвольного полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ имеем

$$\Phi_2((T_n)_\beta^\psi, t) \le \frac{2}{\psi(n)}\|T_n\| \Big\{ \frac{1}{t} \int_0^{\pi/n} (1-\cos nh) dh + 2\left(1-\frac{\pi}{tn}\right) \Big\} =$$

$$= \frac{2}{\psi(n)} \left(2-\frac{\pi}{tn}\right) \|T_n\| \le \Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{2-\dfrac{\pi}{nt}}{1-\dfrac{2}{\pi}} \le \Omega(t).$$

Следовательно, $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega)$.

Используя (13) и определение бернштейновского n-поперечника, получаем

$$p_{2n}(L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega); L_2) \ge b_{2n}(L_{\beta,2}^\psi(\Phi_2, \Omega); L_2) \ge$$

$$\geq b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}; L_2) \geq \frac{\psi(n)}{2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}\,\Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{17}$$

Сопоставив неравенства (14) и (17), получаем равенства (6).

Покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (5), не пусто. Для этого рассмотрим степенную функцию $\Omega_*(t) \overset{\mathrm{df}}{=} t^\nu$, где $\nu \overset{\mathrm{df}}{=} 2/(\pi-2)$, и покажем, что для нее при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место (5). Подставив в (5) вместо Ω функцию Ω_* и полагая $0 < u \overset{\mathrm{df}}{=} nt < \infty$, получаем соотношение

$$u^{\nu+1} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^\nu \begin{cases} u-\sin u, & \text{если } 0 < u \leq \pi, \\ 2u-\pi, & \text{если } u \geq \pi, \end{cases} \tag{18}$$

которое и нужно доказать. Обозначим

$$\mu(u) \overset{\mathrm{df}}{=} u^{\nu+1} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^\nu (u-\sin u), \qquad (19),$$

где полагаем $0 \leq u \leq \pi$.

Пусть $0 \leq u \leq \pi/2$. В бесконечно малой окрестности нуля

$$\mu(u) = u^{\nu+1}\left[1 - \frac{\pi}{\pi-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^\nu O(u^{2-\nu})\right].$$

Следовательно, в ней существуют положительные значения u, для которых $\mu(u) > 0$. Покажем, что на интервале $(0, \pi/2)$ функция μ является знакопостоянной. Для этого применяем метод рассуждений от противного, полагая, что существует точка $\lambda \in (0, \pi/2)$, в которой $\mu(\lambda) = 0$. Поскольку $\mu(0) = \mu(\pi/2) = 0$, то в силу теоремы Ролля и (19) производная первого порядка

$$\mu^{(1)}(u) = (\nu+1)\left[u^\nu - \left(\frac{\pi}{2}\right)^\nu (1-\cos u)\right] \tag{20}$$

должна иметь на $(0, \pi/2)$ не менее двух различных нулей. Учитывая равенства $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(1)}(\pi/2) = 0$, заключаем, что в силу аналогичных соображений производная второго порядка

$$\mu^{(2)}(u) = (\nu+1)\left[\nu u^{\nu-1} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^\nu \sin u\right] \tag{21}$$

должна иметь на интервале $(0, \pi/2)$ не менее трех различных нулей. Так как $\mu^{(2)}(0) = 0$, то очевидно, что производная третьего порядка

$$\mu^{(3)}(u) = (\nu + 1)\left[\nu(\nu - 1)u^{\nu-2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\nu}\cos u\right]$$

должна обращаться в нуль на $(0, \pi/2)$ не менее чем в трех различных точках. Однако это невозможно, поскольку $\mu^{(3)}$ как разность выпуклой вниз и выпуклой вверх монотонно убывающих на $(0, \pi/2)$ функций может иметь на указанном интервале не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $\mu(u) > 0$ при $0 < u < \pi/2$.

Пусть $\pi/2 \le u \le \pi$. Из (21) имеем $\mu^{(2)}(\pi/2) > 0$. Поскольку на отрезке $[\pi/2, \pi]$ $\mu^{(2)}$ является разностью монотонно возрастающей и монотонно убывающей функций, то, очевидно, что на указанном точечном множестве $\mu^{(2)}(u) > 0$. Так как в силу (20) $\mu^{(1)}(\pi/2) = 0$, то на отрезке $[\pi/2, \pi]$ функция $\mu^{(1)}(u) \ge 0$. Поскольку $\mu(\pi/2) = 0$, то отсюда следует, что $\mu(u) \ge 0$ при $\pi/2 \le u \le \pi$.

Пусть $u \ge \pi$. Используя (18), обозначим

$$\mu_1(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} u^{\nu+1} - \frac{\pi}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\nu}(2u - \pi). \tag{22}$$

Отсюда, учитывая значение ν, получаем

$$\mu_1^{(1)}(u) = (\nu + 1)\left[u^{\nu} - 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\nu}\right].$$

Так как $\mu_1^{(1)}(\pi) > 0$, то на основании (22) имеем $\mu_1^{(1)}(u) > 0$ для любого $u \in [\pi, \infty)$. В силу последнего неравенства и соотношения $\mu_1(\pi) > 0$ заключаем, что μ_1 является положительной монотонно возрастающей на множестве $\pi \le u < \infty$ функцией. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 2, то*

$$\sup\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f \in L^{\psi}_{\beta,2}(\Phi_2, \Omega)\} = \frac{\psi(n)}{2(1 - \frac{2}{\pi})}\Omega\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ есть косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f соответственно.

1. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. — 1967. — Т.2, №5. — С. 513–522.
2. *Тайков Л.В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывнсоти функций из L_2 // Мат. заметки. — 1976. — Т.20, №3. — С. 433–438.
3. *Тайков Л.В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. — 1979.— Т.25, № 2. — С. 217–223.
4. *Лигун А.А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. — 1978. — Т.24, №6. — С. 785–792.
5. *Бабенко А.Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Мат. заметки. — 1986. — Т.39, №5. — С. 651 - 664.
6. *Есмаганбетов М.Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. — 1999. — Т.65, №6. — С. 816–820.
7. *Иванов В.И., Смирнов О.И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула : Тульский университет, 1995. — 192 с.
8. *Pinkus A.* n–Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer, 1985. — 290 p.
9. *Вакарчук С.Б., Щитов А.Н.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. мат. журн. — 2004. — Т.56, №11 — С. 1458—1466.
10. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. — 2006. — Т.80, №1. — С. 11—19.
11. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2001. — Т.53, №3. — С.392—416.
12. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, №1. — С. 106—124.
13. *Войцехiвський В.Р.* Поперечники деяких класiв з простору S^p // Екстремальнi задачi теорiї функцiй та сумiжнi питання. Працi IМ НАН України, Київ: Iн-т математики НАН України. — 2003. — С. 17-26.
14. *Сердюк А.С.* Поперечники в просторi S^p класiв функцiй, що означаються модулями неперервностi їх ψ-похiдних // Екстремальнi задачi теорiї функцiй та сумiжнi питання. Працi IМ НАН України, Київ: Iн-т математики НАН України. — 2003. — С. 229-248.
15. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах $S^p, 1 \le p < \infty$ // Укр. мат. журн. —2004. — Т.56, №5. — С. 595—605.

16. *Вакарчук С.Б., Щитов А.Н.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций в пространвтах $S^p, 1 \leq p < \infty$ // Укр. мат. журн. — 2006. — Т.58, №3. — С. 303—316.

17. *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сборник. — 1994. — Т.186, №8. — С. 81—102.

18. *Пустовойтов Н.Н.* Оценки наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Мат. сборник. — 1997. — Т.188, №10. — С. 95—108.

19. *Вакарчук С.Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Мат. заметки. — 2001. — Т.70, №3. — С. 334–345.

20. *Вакарчук С.Б.* О наилучших полиномиальных приближениях 2π-периодических функций и точных значениях n-поперечников функциональных классов в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, №12. — С. 1603—1615.

21. *Vakarchuk S.B.* Some extremal problems of approximation theory of functios of real and complex variable // Труды Украинского математического конгресса - 2001. Секция 10: Теория приближений и гармонический анализ. — Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2002. — С. 45—55.

22. *Абилов В.А., Абилова Ф.В.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве L_2 (2π) // Мат. заметки. — 2004. — Т.76, №6. — С.803—811.

23. *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Некоторые вопросы теории аппроксимации классов 2π-периодических функций в пространствах L_p, $1 < p < \infty$ // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць ІМ НАН України, Київ : Ін-т математики НАН України. — 2004. — Т.1, №1. — С. 25—41.

24. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функцийю — Киев : Наук. думка, 1987. — 268 с.

25. *Романюк А.С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных: Дисс. ... канд. физ.-мат.н. / АН УССР. Ин-т математики АН УССР. — Киев, 1988.

26. *Шалаев В.В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. — 1991. — Т.43, №1. — С. 125–129.